TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. M. Bodirsky, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Wintersemester 2015/16

6. Übungsblatt für die Übungen vom 23.-27.11.2015

Rang einer Matrix, Koordinatenvektoren

V32. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.** Berechnen Sie in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & t & t+1 & 2t & 5 \\ 2 & t^2 & 6 & 8 & 10 \\ 0 & 4-t & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 5}$$

Ü33. (a) Es sei

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},\ v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},\ v_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix},\ v_4 := \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix},\ v_5 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $E := \{v_1, v_2, \ldots, v_5\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ ist. Geben Sie eine Basis B von $\mathbb{R}^3$ mit $B \subseteq E$ an.

(b) Es seien

$$u_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix},\ u_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \\ -11 \end{pmatrix},\ u_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $E := \{u_1, u_2, u_3\} \subseteq \mathbb{R}^4$ linear unabhängig ist. Geben Sie eine Basis B von $\mathbb{R}^4$ mit $E \subseteq B$ an.

Ü34. Eine quadratische Matrix $A = (a_{ij})$ heißt *obere Dreiecksmatrix*, wenn $a_{ij} = 0$ für alle i, j mit $i > j$ gilt.

(a) Formulieren Sie ein Kriterium für die Regularität (Invertierbarkeit) einer oberen Dreiecksmatrix.

(b) Zeigen Sie, dass die Inverse einer oberen Dreiecksmatrix wieder eine obere Dreiecksmatrix ist.

Ü35. Wir verdeutlichen uns die Zusammenhänge aus Vorlesung 5.5: Es sei $\mathbb{K} = \mathsf{GF}(2)$. Weiterhin sei V_3 der 3-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathfrak{P}(D_3)$ mit $D_3 = \{d_1, d_2, d_3\}$ und $B = (v_1, v_2, v_3)$ sei die Basis, die aus den Vektoren $v_1 = D_3$, $v_2 = \{d_1, d_2\}$ und $v_3 = \{d_2, d_3\}$ besteht (vgl. Aufgabe Ü20 und Vorlesung 3.2.4.).

(a) Bestimmen Sie $\Phi_B((1,1,1))$ und $\Phi_B((1,0,1))$.

(b) Es seien $w_1 = \{d_1, d_2, d_3\}$, $w_2 = \{d_2\}$ und $w_3 = \{d_1, d_3\}$. Bestimmen Sie die Vektoren $u_i = \Phi_B^{-1}(w_i)$ und die (die u_i als Zeilenvektoren enthaltende) Matrix A.
Geben Sie alle Elemente der Unterräume $\langle\{w_1, w_2, w_3\}\rangle_V$ bzw. $\langle\{u_1, u_2, u_3\}\rangle_{\mathbb{K}^3}$ an. Ist die Dimension dieser Räume gleich dem Rang von A?

(c) Bearbeiten Sie Teil (b) für $w_i = \{d_i\}$ für $i \in \{1,2,3\}$.

(d) Wir betrachten nun analog den n-dimensionalen Vektorraum V_n mit der Grundmenge $\mathfrak{P}(D_n) := \{d_1, \ldots, d_n\}$. Zeigen Sie, dass die Menge $B_1 = \{\{d_1\}, \{d_1, d_2\}, \ldots, D_n\}\}$ linear unabhängig ist. Zeigen Sie, dass die Menge

$$B_2 = \{\{d_1, d_2\}, \{d_2, d_3\}, \ldots, \{d_{n-1}, d_n\}, \{d_n, d_1\}\}$$

linear abhängig ist.

A36. **Hausaufgabe, bitte zu Beginn der 7. Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**
Beweisen Sie: Ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix, für deren Einträge a_{ij} gilt: $i \leq j \implies a_{ij} = 0$, dann ist A^n die Nullmatrix.

Hinweise: Die Nullmatrix (der Größe $n \times n$) ist diejenige Matrix aus $\mathbb{K}^{n\times n}$, deren Einträge alle Null sind.

H37. (a) Zeigen Sie, dass die Menge $P_n := \{p \in \mathbb{R}[X]_n \mid p(1) = 0\} \leq \mathbb{R}[X]$ aller Polynomfunktionen vom Grad kleiner als n, die eine Nullstelle bei $x_0 = 1$ besitzen, einen Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}[X]$ aller Polynomfunktionen über $\mathbb{R}$ bildet.

(b) Geben Sie eine Basis B von P_n an (Sie müssen natürlich auch beweisen, dass die von Ihnen gefundene Menge tatsächlich eine Basis ist) und bestimmen Sie die Dimension von P_n.

Hinweise: Die Addition und die Multiplikation zweier Polynomfunktionen soll wie in der Schule eingeführt definiert sein. Sie können folgende aus der Schule bekannte Äquivalenz verwenden: $p(a) = 0 \iff \exists q(x) \in \mathbb{R}[X] : p(x) = (x-a)q(x)$.

Nutzen Sie zur Lösung dieser Aufgabe aus, dass die Menge $\mathbb{R}[X]_n$ der Polynomfunktionen vom Grad kleiner als n die (Standard)-Basis $\{f_i : x \mapsto x^i \mid i \in \{0, \ldots, n-1\}\}$ besitzt.

H38. Es seien A und B zwei $(m\times n)$-Matrizen über $\mathbb{K}$ und $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{K}^n$ bzw. $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{K}^n$ seien die Zeilen von A bzw. B. Beweisen Sie (vgl. Lemma 27): Entsteht B aus A durch eine elementare Zeilenumformung, dann ist $\langle\{u_1, \ldots, u_m\}\rangle = \langle\{z_1, \ldots, z_m\}\rangle$.