Prof. M. Bodirsky, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Wintersemester 2015/16

7. Übungsblatt für die Übungen vom 30.11.-4.12.2015

inverse und transponierte Matrizen, Kern und Bild einer Matrix

V39. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**

Bestimmen Sie die Inversen der Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathsf{GF}(7)^{2\times 2}$ jeweils mit Hilfe des in Vorlesung 5.7 vorgestellten Algorithmus zur Matrixinvertierung. Vergleichen Sie Ihre Lösungen mit dem Ergebnis aus Aufgabe Ü27. Machen Sie zusätzlich die Probe, in dem Sie die Matrizen mit ihren jeweils Inversen multiplizieren.

Hinweis: Beachten Sie, dass die Einträge von B^{-1} wieder Elemente aus $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ sind.

Ü40. (a) Sind die folgenden Matrizen über $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}$ invertierbar? Geben Sie die inverse Matrix an, falls möglich.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & i-1 \\ i+1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Untersuchen Sie für die Fälle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathsf{GF}(3)$ sowie $\mathbb{K} = \mathsf{GF}(5)$, ob die Matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 3}$ invertierbar ist. Geben Sie ggf. die Inverse an.

(c) Für welche Werte $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $C = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ invertierbar? Geben Sie die inverse Matrix an.

Hinweis: Sie können die Ergebnisse in der Form λX angeben, wobei X jeweils eine Matrix mit ganzzahligen Einträgen sein soll.

Ü41. (a) Bestimmen Sie für die folgenden reellen Matrizen den Rang und den Kern:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie jeweils eine Basis des Kerns an, und stellen Sie sämtliche Elemente des Kerns als Linearkombination der Basisvektoren dar. Bestimmen Sie die Dimension des Spaltenraums. Liegt der Vektor $a = (0, 2, -5, -8)^T$ in Bild(A)? Liegt der Vektor $b = (2, -2, 2, -2)^T$ in Bild(B)?

(b) Zählen Sie alle Vektoren aus $(\mathbb{Z}_2)^7$ auf, die im Kern der Matrix C liegen bzw. alle Vektoren aus $(\mathbb{Z}_3)^3$ im Kern der Matrix D. Welche Dimension haben die Bilder von C und D?

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad D := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ü42. (a) Es seien $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Beweisen Sie die Gleichung $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$.

(b) Für alle Matrizen $A \in \mathbb{K}^{r\times m}$ und $B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ gilt $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

(c) Zeigen Sie, dass für jede invertierbare Matrix A die Beziehung $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ gilt.

(d) Eine Matrix $M \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt *symmetrisch*, falls $M^\top = M$ gilt und *schiefsymmetrisch*, falls $M^\top = -M$ gilt.

Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ eine beliebige Matrix. Zeigen Sie, dass $AA^\top$ eine symmetrische Matrix ist. Zeigen Sie für den Fall $m = n$, dass $A + A^\top$ eine symmetrische und $A - A^\top$ eine schiefsymmetrische Matrix ist.

A43. **Hausaufgabe, bitte zu Beginn der 8. Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**

(a) Berechnen Sie die zu A bzw. B inversen Matrizen. Machen Sie jeweils die Probe!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1+i & 2+i & 3+i \\ 1-i & 2-i & 3-i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

(b) Seien $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ beliebig. Zeigen Sie $AB^{-1} = B^{-1}A \iff AB = BA$.

H44. (a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die folgende Matrix A invertierbar? Geben Sie die Inverse an.

(b)* Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ in Abhängigkeit von dem Parameter $r \in \mathbb{R}$ (und von $a \in \mathbb{R}$). Führen Sie die Probe durch!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad , \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

Hinweis: Es ist hilfreich, bei der Inversen A^{-1} den Faktor $\frac{1}{a(a-1)}$ auszuklammern.

H45. Die *Spur* einer Matrix $A := (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist definiert als

$$\mathrm{Spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

(a) Beweisen Sie, dass für zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ stets gilt: $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$.

(b) Gibt es Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, die die Gleichung $AB - BA = E_n$ (E_n sei dabei die n-reihige Einheitsmatrix) erfüllen?