TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. M. Bodirsky, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Wintersemester 2015/16

8. Übungsblatt für die Übungen vom 7.12.-11.12.2015

Lineare Gleichungssysteme, lineare Abbildungen

V46. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**

Hinweis: Auch wenn ein Ergebnis anders gefunden werden kann: Lösen Sie beide Aufgaben, in dem Sie ein lineares Gleichungssystem in Matrixform aufstellen und mit dem Gauß-Algorithmus lösen!

(a) Es seien Metall-Legierungen M_1, M_2 und M_3 gegeben, die Kupfer, Silber und Gold in in der Tabelle angegebenen Prozentsätzen enthalten. Kann man diese Legierungen so mischen, dass eine Legierung entsteht, die 40% Kupfer, 50% Silber und 10% Gold enthält? Wenn ja, so geben Sie eine solche Mischung an.

	Kupfer	Silber	Gold
M_1	20	60	20
M_2	70	10	20
M_3	50	50	0

(b) Peter ist doppelt so alt wie Max. Max ist 10 Jahre jünger als Bert. Zusammen zählen alle drei 86 Jahre. Wie alt sind Peter, Max und Bert?

Ü47. (a) Bestimmen Sie zur Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $Ax = o$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$ für den Vektor $b = (5, 1, 1, 1)^T$.

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$ für den Vektor $b = (5, -1, 3, r)^T$ in Abhängigkeit von dem Parameter $r \in \mathbb{R}$.

(d) Wie hängen die Lösungsmengen von homogenem und inhomogenem Gleichungssystem zusammen?

Ü48. (a) Für welche reellen Werte von r sind die folgenden Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$ lösbar? Ermitteln Sie die Lösungsmenge. Machen Sie jeweils eine Probe!

(i)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= -2 \\ -x_1 - 2x_2 \phantom{{}-2x_3} &= 0 \\ -4x_1 - 9x_2 + 2x_3 &= r \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= r \end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= 3 \\ -4x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -10 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + rx_3 &= 8 \end{aligned}$$

(b) Für welchen Wert für r besitzen die drei Geraden $x - 4y = -1$, $2x - y = 5$ und $-x - 3y = r$ einen gemeinsamen Schnittpunkt? Veranschaulichen Sie sich den Sachverhalt auch geometrisch.

Ü49. (a) Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Zeigen Sie, dass durch $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m,\ x \mapsto Ax$ eine lineare Abbildung definiert wird.

(b) Eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist durch $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x_1+x_2 \\ 2x_1+x_2+x_3 \\ x_1+x_3 \end{smallmatrix}\right)$ gegeben.

(i) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.

(ii) Bestimmen Sie $\mathrm{rg}(f)$, $\dim \mathrm{Kern}(f)$ und $\dim \mathrm{Bild}(f)$ und entscheiden Sie, ob f injektiv oder surjektiv ist.

(iii) Geben Sie eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathrm{Bild}(f)$ an.

A50. **Hausaufgabe, bitte zu Beginn der 9. Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**
Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 6}$ und die Vektoren $b, c \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch:

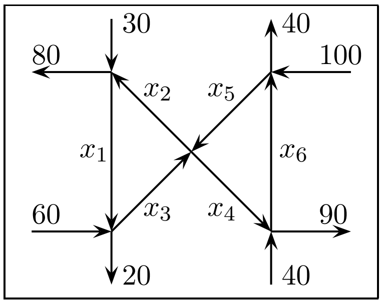
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang von A.

(b) Lösen Sie das homogene Gleichungssystem $Ax = o$ und geben Sie die Dimension des Kerns von A an.

(c) Geben Sie für die inhomogenen Gleichungssysteme $Ax = b$ bzw. $Ax = c$ jeweils die Menge der Lösungen an.

H51. Ermitteln Sie die Verkehrsströme in den einzelnen Teilstücken des angegebenen Streckennetzes. Stellen Sie dazu ein lineares Gleichungssystem auf und berechnen Sie die Lösungsmenge. Geben Sie für die Teilstücke x_2, x_3, x_4 jeweils die minimale nichtnegative Lösung an.



H52. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann linear ist, wenn es ein $r \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(v) = r \cdot v$.