TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. M. Bodirsky, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Wintersemester 2015/16

9. Übungsblatt für die Übungen vom 14.12.-18.12.2015

Darstellungsmatrizen

V53. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**
Zeigen Sie, dass durch

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \text{ mit } f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y-z \end{pmatrix}$$

eine lineare Abbildung gegeben ist. Untersuchen Sie f auf Injektivität und Surjektivität. Geben Sie die Darstellungsmatrix (bzgl. der Standardbasen von $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$), den Kern und das Bild von f an. Liegt der Vektor $(0,-3,3)^T$ im Kern von f?

Ü54. Die Mengen $E := E_3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ und $H = \{(1,1,1),(1,2,1),(1,1,2)\}$ sind Basen des $\mathbb{R}^3$, $F := E_2 = \{(1,0),(0,1)\}$ und $G = \{(1,1),(1,3)\}$ sind Basen des $\mathbb{R}^2$.

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen $M_H^E(\mathrm{id})$ und $M_E^H(\mathrm{id})$ und überprüfen Sie, dass diese Matrizen zueinander invers sind.

(b) Berechnen Sie für die durch $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \mapsto (x+y, y+z)$ gegebene lineare Abbildung f die Darstellungsmatrizen $M_F^E(f)$, $M_G^E(f)$, $M_F^H(f)$ und $M_G^H(f)$. Verifizieren Sie, dass durch jede der Matrizen der Vektor $(10,9,8)$ auf den Vektor $(19,17)$ abgebildet wird.

Hinweis: Mit $M_D^B(g)$ bezeichnen wir die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung $g : V \to W$ bezüglich der Basen B in V und D in W. Die Abbildung id ist die identische Abbildung, eine Darstellungsmatrix $M_D^B(\mathrm{id})$ ist also eine Basiswechselmatrix (von der Basis B in die Basis D).

Ü55. (a) Die Drehung $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ der euklidischen Ebene (d.h. $\mathbb{R}^2$) um den Koordinatenursprung um einen Winkel α ist eine lineare Abbildung. Man kann sich die Abbildung f_α so vorstellen, dass zu jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ der Punkt $f_\alpha(x)$ entsteht, indem man x gegen den Uhrzeigersinn um den Koordinatenursprung mit dem Winkel α dreht.

(i) Geben Sie die Darstellungsmatrix $A = M_B^B(f)$ von f bezüglich der Standardbasis $B := E_2$ von $\mathbb{R}^2$ an. Bestimmen Sie die Inverse A^{-1}.

(ii) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix einer Abbildung, die eine Drehung um 45° bewirkt. Berechnen Sie die Bilder der Punkte $(1,0),(3,0),(1,2),(3,2),(2,3)$ und überzeugen Sie sich mit einer Skizze von der Richtigkeit Ihrer Rechnung.

(b) Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U_1, U_2 \leq V$ Untervektorräume von V mit $U_1 \oplus U_2 = V$. Weiter seien π_i $(i \in \{1,2\})$ die *Projektionen* von V auf U_i, d.h. $\pi_i(u_1+u_2) = u_i$. Zeigen Sie, dass π_1 und π_2 lineare surjektive Abbildungen sind.

Ü56. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \leq V$.

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$v \sim w \;:\Longleftrightarrow\; v + U = w + U$$

eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf V definiert wird.

(b) Es sei $[v]$ die Äquivalenzklasse von v bezüglich $\sim$. Zeigen Sie, dass $[v] = v + U$ gilt.

(c) Wir definieren auf V/U eine Addition und eine Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K}$ durch $[v] + [w] := [v + w]$ und $k[v] := [kv]$ für beliebige $v, w \in V$, $k \in \mathbb{K}$.
Zeigen Sie, dass V/U mit diesen Operationen ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist. (vgl. VL 7.4)

A57. **Hausaufgabe, bitte zu Beginn der 10. Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**
Es sei $V = \mathbb{R}^2$ und $B_1 = (b_{11}, b_{12}) = ((1,1)^T, (-1,1)^T)$ eine Basis von V. Weiter sei $B_2 = (b_{21}, b_{22})$ gegeben durch

$$b_{21} = 4b_{11} - 3b_{12}, \qquad b_{22} = 1b_{11} + 2b_{12}.$$

(a) Zeigen Sie, dass B_2 eine Basis von V ist.

(b) Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen W_{B_1,B_2} und W_{B_2,B_1}

(c) Berechnen Sie die Koordinaten von $v = 5b_{11} - b_{12}$ bezüglich der Basis B_2.

(d) Zeichnen Sie die Vektoren $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}, v$ in ein Koordinatensystem bezüglich der Basis B_1 ein. Verifizieren Sie alle erzielten Ergebnisse, in dem Sie alle Vektoren bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ darstellen und mit der graphischen Lösung vergleichen.

H58. Es sei $V = \mathbb{R}[X]_3$ und $B = (b_1, b_2, b_3) = (1, 1 - x, 1 - x^2)$ eine Basis von V. Weiter sei $C = \{v_1, v_2, v_3\}$ gegeben durch

$$v_1 = b_1 + 3b_2 + 2b_3, \qquad v_2 = 2b_1 + 4b_2 + b_3, \qquad v_3 = -b_1 + b_2 + 4b_3.$$

(a) Zeigen Sie, dass C keine Basis von V ist.

(b) Erweitern Sie eine größte linear unabhängige Menge $D \subseteq C$ zu einer Basis $\tilde{B}$ von V (d.h. ersetzen Sie Vektoren aus C, bis Sie eine Basis erhalten).

(c) Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen $W_{B,\tilde{B}}$ und $W_{\tilde{B},B}$.

H59. Verbinden Sie die Punkte der Ebene, deren Koordinaten durch die Spaltenvektoren der nachstehenden Matrix gegeben sind, in der Reihenfolge dieser Spalten.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -4 & -1 & -11 & -11 & -8 & -9 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 8 & 11 & 11 & 1 & 4 & -5 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie ändert sich die Figur, wenn auf alle Spaltenvektoren die lineare Abbildung

$$f_A : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ mit der Matrix } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

angewendet wird?