TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. M. Bodirsky, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Wintersemester 2015/16

10. Übungsblatt für die Übungen vom 4.1.-8.1.2016

Determinanten

V60. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 2}$. Verifizieren Sie, dass die Determinantenfunktion $\det(A) = ad - bc$ tatsächlich die Eigenschaften (D1), (D2) und (D3) (siehe Vorlesung 8.2) besitzt.

Ü61. Gegeben sind die Permutationen $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ und $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die Permutationen $\alpha \circ \beta$, $\beta \circ \alpha$, α^2, β^2, $\alpha^2 \circ \beta^2$, $(\alpha \circ \beta)^2$ sowie α^{-1}, β^{-1}, $\alpha^{-1} \circ \beta^{-1}$, $\beta^{-1} \circ \alpha^{-1}$, $(\alpha \circ \beta)^{-1}$ und $(\beta \circ \alpha)^{-1}$ in Zyklenschreibweise. Bestimmen Sie das Signum aller Permutationen

Ü62.
(a) Beweisen Sie: Ist $(a_{ij}) = A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix, dann gilt $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.
(b) Bestimmen Sie die Determinanten aller Elementarmatrizen (siehe Vorlesung 5.7).
(c) Bestimmen Sie die Determinanten der Matrizen $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $C \in \mathbb{R}^{4\times 4}$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Zeigen Sie, dass für die Vandermonde-Matrix $V_3 = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ die Gleichung $\det(V_3) = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)$ für alle $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ gilt.

Ü63. Beweisen Sie: Es seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume und $n := \dim V = \dim W$. Weiterhin seien $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und $A := M_C^B(f)$ deren Darstellungsmatrix bzgl. zweier Basen B, C. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) f ist ein Isomorphismus,
(b) A ist regulär,
(c) $\mathrm{rg}(A) = n$,
(d) $\mathrm{rg}(f) = n$.
(e) $\det(A) \neq 0$.

A64. **Hausaufgabe, bitte zu Beginn der 11. Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**

(a) (i) Für welche reellen Zahlen λ ist die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & \lambda \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4} \text{ von Null verschieden?}$$

(ii) Für welche reellen Zahlen λ sind die Vektoren $(0,-1,1,2), (\lambda,2,3,-1), (-1,0,2,1), (2,1,\lambda,-1) \in \mathbb{R}^4$ linear unabhängig?

(iii) Für welche reellen Zahlen λ sind die reellen Polynome $-x^3+x^2+2x, 2x^3+3x^2-x+\lambda, 2x^2+x-1, x^3+\lambda x^2-x+2$ linear unabhängig?

(b) Zeigen Sie, dass für alle Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{K}^{n\times n}$ gilt:

$$A \cdot B = B \cdot A \iff \det \begin{pmatrix} b & e \\ a-c & d-f \end{pmatrix} = 0.$$

H65. (a) Bestimmen Sie alle geraden Permutationen auf der Menge $\{1,2,3,4\}$.

(b) Die Menge dieser Permutationen bildet mit der Hintereinanderausführung eine Gruppe, die *alternierende Gruppe* A_4. Geben Sie die Gruppentafel an.

(c) Wie viele Elemente hat die alternierende Gruppe A_n über einer n-elementigen Menge? Begründen Sie!

H66. Es seien V ein 5-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $B = (v_1, \ldots, v_5)$ eine Basis von V. Weiterhin seien $U := \langle\{v_1, v_2, v_3\}\rangle$ und $\mathrm{nat}_U : V \to V/U$ der natürliche Homomorphismus.

(a) Begründen Sie, warum $B' := \big(\mathrm{nat}_U(v_4), \mathrm{nat}_U(v_5)\big)$ eine Basis von V/U ist und warum $\big(\mathrm{nat}_U(v_3), \mathrm{nat}_U(v_4)\big)$ keine Basis von V/U ist.

(b) Bestimmen Sie die Matrix $M_{B'}^{B}(\mathrm{nat}_U)$.