TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. M. Bodirsky, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Wintersemester 2015/16

11. Übungsblatt für die Übungen vom 11.1.-15.1.2016

Determinanten

V67. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**
Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

(a) durch Überführung in eine Zeilenstufenform

(b) mit der Regel von Sarrus

(c) mit Hilfe des Entwicklungssatzes

Ü68. Gegeben sind die reellen Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 8 & 7 & 11 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinanten von A_1, A_2, A_3.

(b) Berechnen Sie die Determinanten von $A_1^\top$, $(A_1)^2$, A_2^{-1}, $2A_2$, $(A_1A_2)^{-1}$.

(c) Überführen Sie die Matrix B mittels elementarer Zeilenumformungen in eine obere Dreiecksmatrix und ermitteln Sie deren Determinante.

(d) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix C mit dem Entwicklungssatz.

Ü69. Gibt es Matrizen $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit:

$$AA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad BB^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad CC^\top = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad DD^\top = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie Beispiele an bzw. begründen Sie, warum derartige Matrizen nicht existieren. Nutzen Sie dazu die Determinantenfunktion und deren Eigenschaften.

Ü70. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Determinantenfunktion:

(a) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

(b) Verifizieren Sie, dass i.A. $\det(A) + \det(B) \neq \det(A + B)$ gilt.

(c) Mit $SL(n, \mathbb{K})$ wird die Menge aller $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{K}$ bezeichnet, deren Determinante gleich 1 ist. Zeigen Sie, dass $(SL(n, \mathbb{K}), \cdot)$ eine Untergruppe von $(GL(n, \mathbb{K}), \cdot)$ ist.

A71. **Hausaufgabe, bitte zu Beginn der 12. Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ eine Matrix, in der in jeder Zeile und jeder Spalte genau ein Eintrag gleich 0 und jeder andere Eintrag gleich 1 ist. Bestimmen Sie den Betrag der Determinante von A.

(b) Sei $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ eine Matrix mit $\det(B) \neq 0$, in der jeder Eintrag gleich 0 oder gleich 1 ist. Bestimmen Sie die maximale Anzahl an Nullen und die maximale Anzahl an Einsen, die in B vorkommen können.

H72. Bestimmen Sie mit der *Cramerschen Regel* (Vorlesung 8.8) die Lösungen der folgenden, durch erweiterte Koeffizientenmatrizen gegebenen Gleichungssysteme:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & 14 \\ 3 & 3 & 3 & 18 \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 11 & 4 & 4 \end{array}\right) \qquad C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 11 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Hinweis: Argumentieren Sie bei der Koeffizientenmatrix C sorgfältig: Hat das lineare Gleichungssystem eine Lösung?

H73. Es seien $n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{R}$ und $A(n, \lambda) = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix mit $a_{ij} = \begin{cases} \lambda, & i = j \\ 1, & |i-j| = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$.

(a) Bestimmen Sie $\det(A(2, \lambda))$ und $\det(A(3, \lambda))$

(b) Bestimmen Sie $\det(A(2k + 1, 0))$.

(c) Bestimmen Sie $\det(A(n, 1))$.

(d)* Bestimmen Sie $\det(A(n, \lambda))$.