TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. M. Bodirsky, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Wintersemester 2015/16

12. Übungsblatt für die Übungen vom 18.1.-22.1.2016

Ringe und Polynomringe

V74. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**
Prüfen Sie, ob die folgenden Mengen mit den angegebenen zwei Operationen Ringe oder sogar Körper sind:

(a) $\mathbb{Z}_6$ mit der üblichen Addition und Multiplikation mod 6,

(b) $\mathbb{Z}_7$ mit der üblichen Addition und Multiplikation mod 7,

Ü75. (a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{R}^{2\times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ aller 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$ zusammen mit der üblichen Matrizenaddition und -multiplikation einen Ring bildet. Warum ist $\mathbb{R}^{2\times 2}$ kein Körper?

(b) Bestimmen Sie in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ alle Einheiten und alle Nullteiler.

(c) Beweisen Sie, dass die Menge

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$$

ebenfalls einen Ring bildet. Finden Sie Nullteiler und Einheiten von U.

(d) Finden Sie einen weiteren Ring $S \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$, der ein Körper ist.

Hinweis: Ist R ein Ring, dann: $r \in R \setminus \{0_R\}$ heißt *Nullteiler* $:\Longleftrightarrow \exists s \in R \setminus \{0_R\} : r \cdot s = 0_R$ und $r \in R$ heißt *Einheit* $:\Longleftrightarrow \exists s \in R : r \cdot s = 1_R$.

Ü76. Es sei R ein Ring mit 1. Es sei

$$\varphi \;=\; -6 + X + X^2 \;=\; (-2 + X)(3 + X) \;\in\; R[X],$$

wobei $3 = 1 + 1 + 1$ und $-2 = -(1 + 1)$. Bestimmen Sie alle Nullstellen von φ wobei R der Körper $\mathsf{GF}(3)$, der Körper $\mathsf{GF}(5)$, ein beliebiger Körper, der Ring $\mathbb{Z}_4$ bzw. der Ring $\mathbb{Z}_6$ oder der Ring $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist.

Ü77. (a) Verifizieren Sie, dass die Cramersche Regel zur Matrixinvertierung (siehe Vorlesung 8.9, Satz 61) für 2×2-Matrizen mit der in Ü27 gefundenen Formel übereinstimmt.

(b) Berechnen Sie nochmals die Inversen der in Ü40 gegebenen Matrizen mittels der Cramerschen Regel.

A78. **Hausaufgabe, bitte zu Beginn der 13. Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**

(a) Prüfen Sie, ob die folgende Menge mit den angegebenen zwei Operationen ein Ring oder sogar ein Körper ist:

$$(\mathbb{Z}, \oplus, \odot) \text{ mit } a \oplus b := a + b - 1, \quad a \odot b := a + b - ab.$$

(b) Es sei $\varphi(X) = (X-1)(X-4)(X-6) \in \mathbb{R}[X]$. Bestimmen Sie $\varphi(A)$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

auf zwei Arten (analog zum Beispiel in Vorlesung 9.6):
(1) erst A einsetzen, dann $\varphi(A)$ berechnen bzw.
(2) erst $\varphi(X)$ in Normalform bestimmen (d.h. $\varphi(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ für geeignete Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$) und dann A einsetzen.

H79. Zeigen Sie folgende Behauptung:

Korollar: Sei $A \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ invertierbar. Dann gilt $\mathrm{Groe}(A^{-1}) \leq 4n^2\mathrm{Groe}(A)$.

Hinweis: Verwenden Sie Satz 61 und Lemma 62 aus Vorlesung 8.9 zum Beweis.

H80. Sei $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie:

(a) Bezüglich der üblichen Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$ bildet $\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ einen Ring.

(b) Ist $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ein Körper? Was geschieht, wenn $\mathbb{Z}$ durch $\mathbb{Q}$ ersetzt wird?