TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. M. Bodirsky, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Wintersemester 2015/16

13. Übungsblatt für die Übungen vom 25.1.-29.1.2016

Polynomringe, Eigenwerte

V81. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**

(a) Bestimmen Sie Polynome $\psi, \varrho \in \mathbb{R}[X]$, so dass

$$-12X^5 + 8X^4 + 5X^3 + 2X^2 - 3X + 1 = (4X^2 + 1) \cdot \psi + \varrho$$

mit $\mathrm{Grad}(\varrho) < 2$ gilt.

(b) Bestimmen Sie Polynome $\psi, \varrho \in \mathsf{GF}(3)[X]$, so dass

$$X^6 + X^4 + X^2 + 2X = (2X^2 + X + 1) \cdot \psi + \varrho$$

mit $\mathrm{Grad}(\varrho) < 2$ gilt.

Ü82. Es sei R ein Ring mit 1 und

$$\varphi \;=\; -6 + X + X^2 \;=\; (-2 + X)(3 + X) \;\in\; R[X],$$

mit $3 = 1 + 1 + 1$ und $-2 = -(1 + 1)$ wie in Aufgabe Ü76 gewählt.

(a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von φ im Ring $R := \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(b) Geben Sie eine Liste aller Nullstellen des Polynoms φ im Ring $R := \mathsf{GF}(2)^{2\times 2}$ an. Wie viele Nullstellen hat φ im Fall $R = \mathsf{GF}(3)^{2\times 2}$?

Ü83. Bestimmen Sie alle Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, die zur Einheitsmatrix $E \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ähnlich sind (vgl. Vorlesung 7.8).

Nach Vorlesung 10.2 haben ähnliche Matrizen die selben Eigenwerte. Zeigen Sie, dass die Umkehrung nicht gilt, d.h. finden Sie eine zu E nicht-ähnliche Matrix B mit $\det(B-\lambda E) = \det(E - \lambda E)$.

Ü84. (a) Beweisen Sie folgende Aussagen:

(i) Beweisen Sie: Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist genau dann regulär, wenn 0 kein Eigenwert von A ist.

(ii) Besitzt die Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, dann gilt $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

(b) (i) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}.$$

(ii) Benutzen Sie dieses Ergebnis, um eine 3×3-Matrix über $\mathbb{K} = \mathsf{GF}(3)$ zu finden, die keine Eigenwerte hat.

H85. (a) Es seien $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha$ und $\lambda_2 = \cos\alpha - i\sin\alpha$.
Lösen Sie das homogene lineare Gleichungssystem

$$(A - \lambda_j E)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

über dem Körper $\mathbb{C}$ für $j \in \{1, 2\}$. (E ist die 2×2-Einheitsmatrix.)

(b) Geben Sie für jeden Lösungsraum $\text{Lös}(A - \lambda_j E, \binom{0}{0})$ ($j \in \{1, 2\}$) eine Basis an.

(c) Es sei $S \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ eine Matrix, deren j-te Spalte ein Basisvektor des Lösungsraumes $\text{Lös}(A - \lambda_j E, \binom{0}{0})$ ($j \in \{1, 2\}$) ist. Berechnen Sie S^{-1} und $S^{-1}AS$.

Hinweis: Alle Rechnungen sind im Körper der komplexen Zahlen durchzuführen. λ_1 und λ_2 sind gerade die Eigenwerte von A. Sie können sich davon überzeugen, indem Sie $Au_i = \lambda_i u_i$ nachrechnen.

H86. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Beweisen Sie, dass in $\mathbb{K}[X]$ gilt: $x^m - 1 | x^n - 1 \iff m|n$. Schlussfolgern Sie, dass für jede natürliche Zahl $a > 1$ gilt: $a^m - 1 | a^n - 1 \iff m|n$

H87*. Seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ heißt *idempotent*, wenn $f \circ f = f$ gilt und er heißt *nilpotent*, falls es ein $n \in \mathbb{N}_+$ mit $f^n = c_0$ gibt (dabei bezeichne $c_0\colon V \to V$ die Abbildung, die jedes $x \in V$ auf 0 abbildet)

(a) Zeigen Sie, dass ein idempotenter Endomorphismus nur die Eigenwerte 0 und 1 haben kann und ein nilpotenter Endomorphismus nur den Eigenwert 0 haben kann.

(b) Es sei f ein Endomorphismus, der die Eigenwerte 0 und 1 und keine weiteren Eigenwerte hat. Ist f idempotent?

(c) Es sei f ein Endomorphismus, der nur den Eigenwert 0 hat. Ist f nilpotent?

Die folgenden Wiederholungsaufgaben sind zur Klausurvorbereitung vorgesehen. Versuchen Sie, die Aufgaben allein und nur mit Hilfe eines „Spickzettels“ (also ohne Skripte und ohne elektronische Hilfsmittel) zu lösen. Pro Aufgabe sollten Sie etwa 15-30 Minuten veranschlagen.

W88. (a) Beweisen Sie: Sind U_1 und U_2 Untervektorräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V, dann ist $U_1 \cap U_2$ ebenfalls ein Untervektorraum von V.

(b) Bestimmen Sie die Determinante $\det(AB)$ des Produkts der $\mathbb{R}^{4\times 4}$-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

W89. (a) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & a \end{pmatrix}$$

invertierbar ist. Berechnen Sie die Inverse A^{-1} von A für $a = 4$.

(b) Es sei $B = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^3$. Verifizieren Sie, dass auch $C = (w_1, w_2, w_3)$ mit

$$w_1 = v_1 + 2v_2 + v_3, \qquad w_2 = 3v_1 + 7v_2 + 4v_3, \qquad w_3 = -v_1 + 4v_2 + 4v_3$$

eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

(c) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen (Transformationsmatrizen) $M_C^B(\mathrm{id})$ (von B nach C) und $M_B^C(\mathrm{id})$ (von C nach B).

(d) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung, für die $f(v_1) = w_1, f(v_2) = w_2, f(v_3) = v_1$[1] gilt. Begründen Sie, dass f durch diese Festlegung eindeutig bestimmt ist. Geben Sie die Darstellungsmatrix $M_C^B(f)$ und die Darstellungsmatrix $M_B^B(f)$ an.

Zusatzaufgabe: Bestimmen Sie den Kern und das Bild von f.

W90. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

(a) Berechnen Sie die Determinante und den Rang von A.

(b) Begründen Sie, ob die Matrix A invertierbar ist; wenn ja, dann berechnen Sie die inverse Matrix von A.

Hinweis: Um Rechenfehler auszuschließen, können Sie zur Probe AA^{-1} berechnen; sie müssen das aber nicht.

(c) Berechnen Sie die Lösungsmenge $\text{Lös}(A, b)$ des Gleichungssystems $Ax = b$ für $b := (2, 1, 6, 3)^\top$.

(d) Es sei $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ eine Basis eines 4-dimensionalen R-Vektorraums V, und $f : V \to V$ sei diejenige lineare Abbildung, für die $M_B^B(f) = A$ gilt. Bestimmen Sie einen Vektor $u \in V$ (als Linearkombination $\sum_{i=1}^4 \lambda_i v_i$ der Basisvektoren), für den $f(u) = 2v1 + v2 + 6v3 + 3v4$ gilt. Begründen Sie, ob es einen oder mehrere solcher Vektoren u geben kann.

Zusatzaufgabe: Berechnen Sie die inverse Matrix von A, wenn $A \in \mathsf{GF}(7)^{4\times 4}$ als Matrix über dem 7-elementigen Körper $\mathsf{GF}(7) = (\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ aufgefasst wird.

[1] kein Druckfehler