TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. M. Bodirsky, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Wintersemester 2015/16

14. Übungsblatt für die Übungen vom 1.2.-5.2.2016

Eigenwerte und Eigenräume

V91. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ der durch $f(1,0) = (3,2)$ und $f(0,1) = (2,3)$ eindeutig bestimmte Endomorphismus.

(a) Zeigen Sie, dass $v_1 = (1,1)$ ein Eigenvektor von f ist und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert λ_1.

(b) Zeigen Sie, dass $\lambda_2 = 1$ ein Eigenwert von f ist und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenraum $\mathrm{Eig}_{\lambda_2}(f)$.

Ü92. Bestimmen Sie für die gegebenen Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $C \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ jeweils das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und eine Basis für jeden Eigenraum. Geben Sie auch die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte an.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ü93. Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$.

(a) Beweisen Sie, dass $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_r^{-1}$ die Eigenwerte von A^{-1} sind.
Hinweis: Dazu müssen Sie auch zeigen, dass A^{-1} keine weiteren Eigenwerte hat.
Was lässt sich über die Eigenräume $\mathrm{Eig}_{\lambda_i}(A)$ und $\mathrm{Eig}_{\lambda_i^{-1}}(A^{-1})$ aussagen?

(b) Beweisen Sie, dass $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die Eigenwerte von $A^\top$ sind.
Sind auch die zugehörigen Eigenräume von A und $A^\top$ gleich?

Ü94. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der Geraden $g = \mathbb{R}v$ mit $v = \binom{2}{1} \in \mathbb{R}^2$.

(a) Veranschaulichen Sie sich diese Abbildung geometrisch und überlegen Sie damit, welche Eigenwerte f hat und was die dazugehörigen Eigenräume sind. Geben Sie eine Basis $B' = (u_1, u_2)$ von $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von f an.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $A := M_B^B(f)$ bzgl. der Standardbasis $B = (e_1, e_2)$.

(c) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $D := M_{B'}^{B'}(f)$ bzgl. der Basis $B' = (u_1, u_2)$.

(d) Berechnen Sie eine reguläre Matrix S, so dass $D = S^{-1}AS$ gilt. Ist S eindeutig bestimmt?

H95. Gesucht sind alle Eigenwerte der Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit den Einträgen

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{falls } i = j \\ 1, & \text{falls } i \neq j \end{cases} .$$

H96. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $f : V \to V$ ein Endomorphismus und $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von f. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, ist λ^n ein Eigenwert des Endomorphismus $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ mal}}$.

Was kann man über die Eigenräume $\mathrm{Eig}_\lambda(f)$ und $\mathrm{Eig}_{\lambda^n}(f^n)$ aussagen?

(b) Für jedes $k \in \mathbb{K}$ ist $k\lambda$ ein Eigenwert des Endomorphismus kf.

(c) Für jedes $k \in \mathbb{K}$ ist $\lambda^2 + \lambda + k$ ein Eigenwert des Endomorphismus $f^2 + f + k\,\mathrm{id}$.

(d) Für jedes Polynom $\varphi = \sum c_i X^i$ ist $\varphi(\lambda)$ Eigenwert des Endomorphismus $\varphi(f)$.

Hinweis: Wie in VL 9.4 müsste präziser „$\varphi^{\mathbb{K}}(\lambda)$ ist Eigenwert von $\varphi^{\mathrm{End}(V)}(f)$“ geschrieben werden.

H97. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \geq 1$. Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißen *simultan diagonalisierbar*, wenn es eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gibt, so dass $S^{-1}AS$ und $S^{-1}BS$ Diagonalmatrizen sind. Zeigen Sie:

(a) Wenn A und B simultan diagonalisierbar sind, dann gilt $AB = BA$.

(b) Wenn A eine Matrix mit n paarweise verschiedenen Eigenwerten ist und es gilt $AB = BA$, dann sind A und B simultan diagonalisierbar.

Kann man analog zu (b) auch zeigen: Wenn A diagonalisierbar ist und es gilt $AB = BA$, dann sind A und B simultan diagonalisierbar?

Die folgenden Wiederholungsaufgaben sind zur Klausurvorbereitung vorgesehen. Versuchen Sie, die Aufgaben allein und nur mit Hilfe eines „Spickzettels“ (also ohne Skripte und ohne elektronische Hilfsmittel) zu lösen. Pro Aufgabe sollten Sie etwa 15-30 Minuten veranschlagen.

W98. In dieser Aufgabe betrachten wir den $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum $\mathbb{Z}_2[X]$ aller Polynome (in der Variablen X) mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}_2$ [1].

(a) Bestimmen Sie die Mächtigkeit der Menge

$$\mathbb{Z}_2[X]_3 := \{a_0 + a_1X + a_2X^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \{0, 1\}\}$$

aller Polynome aus $\mathbb{Z}_2[X]$ vom Grad höchstens 2. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_2[X]_3$ einen Untervektorraum von $\mathbb{Z}_2[X]$ bildet.

(b) Sind die Polynome $p(X) = X^2 + X$, $q(X) = X^3 + X^2$, $r(X) = X^3$ linear unabhängig? Stellen Sie das Polynom $s(X) = X$ als Linearkombination von $p(X)$, $q(X)$ und $r(X)$ dar.

(c) Beweisen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{Z}_2[X] \to \mathbb{Z}_2[X]$ mit $f(p(X)) = (p(X))^2$ eine lineare Abbildung ist.

W99. (a) Beweisen Sie: Ist V ein Vektorraum der Dimension 2, dann gilt für alle $v, w \in V$:

$$\{v, w\} \text{ ist linear unabhängig } \implies \{v + w, -w\} \text{ ist eine Basis von } V$$

[1] Unter $\mathbb{Z}_2$ (oder auch GF(2)) verstehen wir hier die Menge $\{0, 1\}$ zusammen mit der Addition modulo 2 und der Multiplikation modulo 2.

(b) Beweisen Sie: Ist V ein Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$ und $f : V \to V$ ein Endomorphismus, dann gilt:

$$f \text{ injektiv} \iff f \text{ surjektiv}$$

W100. (a) Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von $m \in \mathbb{R}$) alle Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & m & 2 \end{pmatrix}.$$

Für welche $m \in \mathbb{R}$ zerfällt das charakteristische Polynom von A über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren?

(b) Wählen Sie $m = -6$. Berechnen Sie den Eigenraum zum (einzigen) Eigenwert der algebraischen Vielfachheit 2.

(c) Wählen Sie $m = -6$. Ist A diagonalisierbar? Geben Sie eine zu A ähnliche Diagonalmatrix D an.