Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. M. Bodirsky, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Sommersemester 2016

15. Übungsblatt für die Übungen vom 4.4.-8.4.2016

Wiederholung

Ü101. Zeigen Sie: Drei Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) liegen genau dann auf einer Gerade, wenn es Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ (die nicht alle gleich Null sind) gibt, so dass $au + bv + cw = o$ und $a + b + c = 0$ gelten.

Ü102. (a) Bestimmen Sie die Schnittgerade g der beiden Ebenen $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ mit

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) Beweisen Sie: Zwei 3-dimensionale Hyperebenen $F_1 \neq F_2$ des $\mathbb{R}^4$, die jeweils den Nullvektor enthalten, schneiden sich in einer zweidimensionalen Ebene.

Ü103. (a) In der Anschauungsebene $\mathbb{R}^2$ seien die beiden Basen $B = ((1,1),(-1,1))$ und $C = ((2,1),(-1,2))$ gegeben. Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen $M_C^B(\mathrm{id})$ und $M_B^C(\mathrm{id})$.

(b) Die drei Elemente $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ mit

$$[x]_B := \Phi_B^{-1}(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [y]_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [z]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sind die Eckpunkte eines Dreiecks D in $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die Koordinatenvektoren von x, y, z bzgl. der Basis C.

(c) Visualisieren Sie die Ergebnisse aus (b), in dem Sie sie in ein Koordinatensystem bzgl. der Standardbasis E_2 des $\mathbb{R}^2$ eintragen.

A104. **Hausaufgabe, bitte zu Beginn der 16. Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**

(a) Finden Sie in Abhängigkeit der Parameter $r, s \in \mathbb{R}$ die Schnittmenge der beiden Geraden $g_1, g_2 \in \mathbb{R}^2$ mit $g_1 : x + y = r$ und $g_2 : -x + sy = 5$. Untersuchen Sie insbesondere, wann der Schnitt leer bzw. ein Punkt bzw. eine Gerade ist.

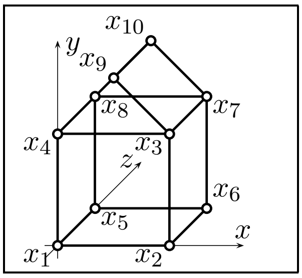
(b) Beweisen Sie: Zwei Geraden $g_1, g_2 \in \mathbb{R}^2$ mit $g_1 : a_1x + b_1y = c_1$ und $g_2 : a_2x + b_2y = c_2$ besitzen als Schnittmenge eine Gerade, einen Punkt oder die leere Menge.

H105. Zeigen Sie: Eine durch die Vektoren $v_1 = (x_1, y_1)$ und $v_2 = (x_2, y_2)$ festgelegte Gerade $g \subseteq \mathbb{R}^2$ ist durch die Gleichung $\det \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{pmatrix} = 0$ festgelegt. Welche Bedingung müssen v_1 und v_2 erfüllen?

H106. Hinweis: Zur Lösung dieser rechenintensiven Aufgabe können Sie ausnahmsweise elektronische Hilfsmittel verwenden.

Gegeben sei die rechts im Diagramm skizzierte Figur F mit den Punkten

$x_1 = (0,0,0)^T, x_2 = (1,0,0)^T, x_3 = (1,1,0)^T, x_4 = (0,1,0)^T,$
$x_5 = (0,0,1)^T, x_6 = (1,0,1)^T, x_7 = (1,1,1)^T, x_8 = (0,1,1)^T,$
$x_9 = (0.5, 1.5, 0)^T, x_{10} = (0.5, 1.5, 1)^T.$



(a) Skizzieren Sie den Aufriss der Figur, d.h. die Projektion in die x-y-Ebene.

(b) Die Basis $B_G = \{(1,0,0)^T, (0,0,1)^T, (0,-1,0)^T\}$ überführt die Figur in den Grundriss. Berechnen Sie den Grundriss, in dem Sie die zugehörige Basiswechselmatrix G bestimmen und die Produkte $G \cdot x_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, 10\}$ berechnen. Skizzieren Sie die Projektion der Figur in die x-y-Ebene und überlegen Sie, ob ihr Ergebnis stimmt.

(c) Die Basen

$$B_L = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\} \text{ und } B_S = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\}$$

liefern eine Darstellung von vorn links bzw. eine isometrische Perspektive. Berechnen Sie analog zu (b) die Bilder der Punkte $x_1, \ldots, x_{10}$ unter den induzierten Basiswechselmatrizen L bzw. S, projizieren Sie die Ergebnisse in die x-y-Ebene und vergleichen Sie mit Ihrer Anschauung.

(d) Berechnen Sie die Basiswechselmatrix Q, die die Koordinaten bezüglich B_S in die Koordinaten bezüglich B_L überführt. Verifizieren Sie ihr Ergebnis durch folgende beide Möglichkeiten der Probe:

(1) Berechnung der Bilder $Q \cdot y_i$, dabei seien die y_i die Koordinaten der Punkte aus F bezüglich B_L (d.h. $y_i = L \cdot x_i$).

(2) Durch Berechnung von $L \cdot S^{-1}$. (Warum ist das gleich Q?)