Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra
Prof. M. Bodirsky, Dr. C. Zschalig
Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Sommersemester 2016

16. Übungsblatt für die Übungen vom 11.4.-15.4.2016

Analytische Geometrie

V107. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**
Durch $g := \{\binom{x}{y} \mid y = 3x + 1\}$ ist eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt mit der Geraden $h := \{\binom{x}{y} \mid y = -x - 3\}$.

(b) Geben Sie g in Parameterform $\vec{u} + \mathbb{R}\vec{v}$ an.

(c) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $\vec{q} = \binom{3}{0}$ zum Schnittpunkt zwischen den Geraden g und h.

(d) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $\vec{q}$ zu der Geraden g.

Hinweis: Es ist hilfreich, eine Skizze anzufertigen.

Ü108. Im Euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ sei g_1 die Schnittgerade der Ebenen $x+y-z = 1$ und $2x+y-z = 2$, g_2 sei die Schnittgerade der Ebenen $x + 2y - z = 2$ und $x + 2y + 2z + 4 = 0$. Ermitteln Sie:

(a) eine Parameterdarstellung des Gemeinlotes l von g_1 und g_2.

(b) die Schnittpunkte F_1 und F_2 von l mit g_1 bzw. g_2

(c) den (kürzesten) Abstand d von g_1 und g_2.

Hinweis: Das Gemeinlot von zwei Geraden $g_1 \not\parallel g_2$ in $\mathbb{R}^3$ ist eine Gerade l, die beide Geraden g_1 und g_2 schneidet und auf beiden Geraden senkrecht steht.

Ü109. Zeigen Sie, dass die Seitenmittelpunkte eines beliebigen Vierecks im $\mathbb{R}^n$ ein Parallelogramm bilden. Wir setzen voraus, dass die Eckpunkte des Vierecks vier voneinander verschiedene Punkte sind, aber wir setzen nicht voraus, dass die Eckpunkte in einer Ebene liegen.

Hinweis: Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn gegenüberliegende Seiten parallel sind. Zwei Seiten bzw. Geraden sind genau dann parallel, wenn ihre Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind.

Ü110. (a) Beweisen Sie den Satz des Pythagoras mit Hilfe des (Standard-)skalarprodukts in der Ebene.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\vec{x} * \vec{y} = 0 \iff \measuredangle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\pi}{2}$.

(b) Beweisen Sie unter Zuhilfenahme des Skalarprodukts, dass in einem Rhombus die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen.

Hinweis: Ein *Rhombus* ist ein Parallelogramm, in dem alle Seiten gleichlang sind.

A111. **Hausaufgabe, bitte zu Beginn der 17. Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**

(a) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform einer Geraden g, die den Punkt $P = (-1, 3)^\top$ enthält und vom Punkt $Q = (2, -1)^\top$ den Abstand 4 hat.

(b) Bestimmen Sie die Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass der Punkt $P = (5,3,1)^\top$ auf der Geraden $r = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ a \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ b \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$ liegt.

H112. Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $||\vec{AC}|| = ||\vec{BC}||$. Zeigen Sie, dass dann $s_C = h_C = w_\gamma$ gilt.

Hinweis: Die Seitenhalbierende s_C in ABC ist eine durch den Seitenmittelpunkt von $\vec{AB}$ und durch C definierte Gerade. Die Höhe h_C ist die eindeutig definierte Gerade durch C, die senkrecht auf $\vec{AB}$ steht. Die Winkelhalbierende w_γ ist die durch C verlaufende Gerade, die den Winkel $\angle ACB$ halbiert.

H113. Bestimmen Sie von der durch die Punkte $P_1 = (2,1,1)^\top$ und $P_2 = (5,2,3)^\top$ aufgespannten Gerade:

(a) eine Parameterdarstellung und die Hessesche Normalform,

(b) die Koordinaten des Schnittpunkts mit der x-y-Ebene,

(c) die Koordinaten des des Fußpunktes Q des Lotes von $P_0 = (-1,3,-1)^\top$ auf g,

(d) den Abstand von P_0 zu g.