TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. M. Bodirsky, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Sommersemester 2016

17. Übungsblatt für die Übungen vom 18.4.-22.4.2016

Analytische Geometrie

V114. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**
Es seien $\vec{u}_1 = (1, 2, 2)^\top$, $\vec{u}_2 = (4, -2, 0)^\top$ und $\vec{u}_3 = (0, 6, 3)^\top$ Elemente von $\mathbb{R}^3$. Damit sind drei Punkte P_1, P_2, P_3 im Raum $\mathbb{R}^3$ gegeben.

(a) Überlegen Sie sich zunächst, wie man beweisen kann, dass drei Punkte auf einer Geraden liegen. Beweisen Sie, dass die obigen drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen.

(b) Wegen (a) ist durch die Punkte P_1, P_2, P_3 eindeutig eine Ebene E gegeben, auf der diese Punkte liegen. Berechnen Sie die Ebenengleichung von E in Parameter- und in Koordinatendarstellung (d.h. in der Form $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$).

(c) Geben Sie die Hessesche Normalform von E und den Abstand von E zum Nullpunkt an.

(d) Berechnen Sie den Schnittpunkt P von E mit der Geraden g, die senkrecht auf E steht und durch den Nullpunkt $o \in \mathbb{R}^3$ geht.
Hinweis: P ist Projektion des Nullpunkts $(0, 0, 0)^\top$ auf E.

Ü115. Es sei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ die durch die Gleichung $2x + 3y - 4z = 5$ bestimmte Ebene, d.h.

$$E = \{(x, y, z)^\top \mid 2x + 3y - 4z = 5\}.$$

(a) Bestimmen Sie einen Normalenvektor $\vec{n}$ und einen Punkt $\vec{u}$ von E und geben Sie die Hessesche Normalform von E an.

(b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes P der Ebene E mit der Geraden $g = \vec{u} + \mathbb{R}\vec{v}$ für $\vec{u} = (1, 1, 1)^\top$, $\vec{v} = (2, 0, 0)^\top$.

(c) Bestimmen Sie die Gerade g', die man aus g bei Projektion auf die Ebene E erhält.
Hinweis: Die Projektion einer Geraden ist wieder eine Gerade (oder ein Punkt als Sonderfall), man braucht also z.B. nur zwei Punkte von g' zu bestimmen.

Ü116. (a) Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Beweisen Sie die Jacobi-Identität $a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = o$.

(b) Bekanntlich ist das Kreuzprodukt nicht assoziativ. Finden Sie eine möglichst einfache Charakterisierung aller Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, die $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ erfüllen.

Ü117. Beweisen Sie: Schneiden sich 3 der 4 Höhen in einem (nicht notwendig regelmäßigen) Tetraeder in einem Punkt H, dann enthält auch die vierte Höhe diesen Punkt.

A118. **Hausaufgabe, bitte zu Beginn der 18. Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**
Es seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ ($n \in \{2, 3\}$). Zeigen Sie, dass die *Symmetrale* von a und b eine $(n-1)$-dimensionale Hyperebene ist und finden Sie deren Hessesche Normalform.

Hinweise: • Die Symmetrale von a und b ist die Menge aller Punkte des $\mathbb{R}^n$, die den gleichen Abstand zu a und zu b haben.

• Obige Aussage und die gefundene Gleichung gelten für beliebiges $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Wenn Sie möchten, können Sie das gern noch begründen.

H119. Im Euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ seien die beiden parallelen Ebenen $ax + by + cz + d_1 = 0$ und $ax + by + cz + d_2 = 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass der Abstand zwischen diesen Ebenen gegeben ist durch

$$e = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

H120. Berechnen Sie in dem rechts stehenden Würfel mit der Seitenlänge a den Abstand des Punktes G von der Ebene BED. Bestimmen Sie das Volumen des Tetraeders $BEDG$.