TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. M. Bodirsky, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Sommersemester 2016

19. Übungsblatt für die Übungen vom 2.5.-6.5.2016

affine Abbildungen, Linearformen

V128. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**
Es seien Φ und Ψ die Matrixdarstellungen (siehe Vorlesung 12.5) zweier affiner Abbildungen $\varphi : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ und $\psi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^r$.

(a) Verifizieren Sie, dass das Produkt $\Phi \cdot \Psi$ die Matrixdarstellung einer affinen Abbildung $\varrho : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^r$ ist. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem aus Ü124(a).

(b) Zusätzlich sei φ nun bijektiv (dann folgt $m = n$).
Verifizieren Sie, dass die Inverse Φ^{-1} die Matrixdarstellung einer affinen Abbildung $\sigma : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ ist. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem aus Ü124(b).

(c) Zeigen Sie, dass die Menge der Matrixdarstellungen bijektiver affiner Abbildungen über dem Körper $\mathbb{K}^n$ eine Gruppe (eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K})$) bildet.

Ü129. Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen von der Anschauungsebene $\mathbb{R}^2$ in sich affine Abbildungen sind. Bestimmen Sie ggf. die zugehörige Darstellungsmatrix.

(a) Die Drehung $d_{w,\alpha}$ mit dem Mittelpunkt w um den Winkel α.

(b) Die Spiegelung s_g an der Geraden $g = w + \mathbb{R}v$

(c) Die Gleitspiegelung $t(g, v)$ an der Geraden $g = w+\mathbb{R}v$ und der anschließenden Translation um v.

Visualisieren Sie Ihre Ergebnisse für die konkreten Parameter $\alpha = \pi/2$, $v = \binom{-1}{1}$, $w = \binom{1}{1}$.
Zeigen Sie, dass die Hintereinanderausführung einer Drehung $d_{w,\alpha}$ ($\alpha \neq 0$) und einer Translation τ_v wieder eine Drehung $d_{\tilde{w},\tilde{\alpha}}$ ergibt.

Hinweis: Sogenannte *Isometrien* sind Abbildungen des $\mathbb{R}^n$ in sich, die Abstände invariant lassen. In $\mathbb{R}^2$ ist jede Isometrie eine der oben genannten Drehungen, Spiegelungen oder Gleitspiegelungen oder eine Translation.

Ü130. Es sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Welche der folgenden Abbildungen sind Linearformen? (Begründung!)

(a) $+ : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} : (v_1, v_2, \ldots, v_n) \mapsto v_1 + v_2 + \ldots + v_n$

(b) $\cdot : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} : (v_1, v_2, \ldots, v_n) \mapsto v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_n$

(c) $\det : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K} : A \mapsto \det(A)$

(d) $\mathrm{Spur} : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K} : A \mapsto \mathrm{Spur}(A)$

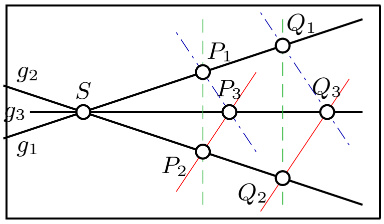
(e) Rang: $\mathrm{rg} : A \mapsto \mathrm{rg}(A)$ für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

Ü131. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f : V \to \mathbb{K}$ und $g : V \to \mathbb{K}$ Linearformen von V, so dass für alle $x \in V$ die Implikation $f(x) = 0 \implies g(x) = 0$ gilt. Folgt dann, dass es ein $k \in \mathbb{K}$ gibt mit $g(x) = k \cdot f(x)$?

A132. **Hausaufgabe, bitte zu Beginn der 20. Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**
Es sei $\mathbb{K} = \mathrm{GF}(2)$ und $V_i := \mathbb{K}^i$. Geben Sie die Elemente von V_i^* für $i \in \{1, 2, 3\}$ an.

Ü133* Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim(V) \geq 2$ und $\mathrm{Geom}(V) = (\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, I, \|)$ die zugehörige affine Geometrie (Vorlesg. 12.4). Beweisen Sie: In $\mathrm{Geom}(V)$ gilt der Satz von Desargues:

Gegeben seien Punkte $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathfrak{P}$, so dass die Geraden $g_1 := P_1Q_1$, $g_2 := P_2Q_2$ und $g_3 := P_3Q_3$ paarweise verschieden sind und sich entweder alle in einem Punkt $S \notin \{P_1, \ldots, Q_3\}$ schneiden oder paarweise parallel sind. Aus $P_1P_2 \parallel Q_1Q_2$ und $P_1P_3 \parallel Q_1Q_3$ folgt dann $P_2P_3 \parallel Q_2Q_3$.



H134. Warum ist das (Standard-)skalarprodukt kein Element des dualen Raumes $(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^*$?

Hinweis: Das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ ist definiert als $* : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : \big((x_1, x_2, x_3)^\top, (y_1, y_2, y_3)^\top\big) \mapsto x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.