



20. Übungsblatt für die Übungen vom 09.05.-15.05.2016

Inverse mit ganzzahligen Einträgen, und ein Kartenspiel

A115. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der nächsten Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr., Übungstermin und -leiter abgeben.**

Zeigen Sie: für eine Matrix $A \in GL(n, \mathbb{Q})$ mit Einträgen aus \mathbb{Z} sind äquivalent:

- A^{-1} has ganzzahlige Einträge.
- $\det A \in \{+1, -1\}$.

Zeigen Sie weiterhin:

$$\{A \in GL(n, \mathbb{Q}) : \det(A) \in \{+1, -1\}\}$$

ist eine Untergruppe von $GL(n, \mathbb{Q})$.

H116. Wir wollen ein Kartenspiel entwerfen mit den folgenden Eigenschaften:

- A Jede Karte trägt acht verschiedene Symbole;
- B Zwei verschiedene Karten haben genau ein gemeinsames Symbol;
- C Kein Symbol taucht auf allen Karten auf.

Ansatz: Wir betrachten $(\mathbb{F}_7)^3$. Die Symbole seien die eindimensionalen Untervektorräume, die Karten die zweidimensionalen. Ein Symbol S ist genau dann auf einer Karte K abgebildet, falls S ein Untervektorraum ist von K .

- (a) Beweisen Sie, dass unser Kartenspiel A, B, und C erfüllt.
- (b) Wie viele Symbole gibt es?
 - (i) Der Schnitt zweier verschiedener Symbole ist $\{0\}$.
 - (ii) Wie viele von 0 verschiedene Punkte gibt es in $(\mathbb{F}_7)^3$?
 - (iii) Wie viele von 0 verschiedene Punkte gibt es in jedem Symbol?
- (c) Wie viele Symbole trägt jede Karte?
- (d) Wie viele Karten gibt es?
 - (i) Wie viele Karten enthalten ein Paar verschiedener Symbole?
 - (ii) Wie viele Paare von verschiedenen Symbolen gibt es?
 - (iii) Wie viele Paare von verschiedenen Symbolen gibt es auf jeder Karte?
- (e) Bonus: Zeigen Sie, dass unser Kartenspiel maximal viele Karten hat.
 - (i) Wie viele Karten maximal können sich ein Symbol teilen, wenn man die Regeln A, B, C einhalten will?
 - (ii) Betrachten Sie eine feste Karte, und bestimmen Sie, wie viele anderen Karten maximal dazugenommen werden können.