TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Bodirsky, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und analytische Geometrie (Modul LAAG), Teil 2, Sommersemester 2016

21. Übungsblatt für die Übungen vom 23.05.-27.05.2016

Dualräume und Bilinearformen

Ü121. Welche der folgenden Abbildungen sind Bilinearformen und welche sind Skalarprodukte auf den angegebenen $\mathbb{R}$-Vektorräumen?

(a) $f_1 \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f_1(x, y) := x + y$

(b) $f_2 \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f_2(x, y) := x \cdot y$

(c) $f_3 \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : f_3(x, y) := x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2$

(d) $f_4 \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : f_4(x, y) := x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3$

(e) $f_5 \colon \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R} : f_5(A, B) := \mathrm{Spur}(A \cdot B)$

Ü122. Sei V ein 3-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $B = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis von V. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Gramsche Matrix (bezüglich der Basis B) einer Bilinearform B.

- Ist B ausgeartet? Ist B ein Skalarprodukt?
- Zeigen Sie, dass $C = (v_1 + v_2, v_2 + v_3, v + 2)$ eine Basis von V ist und berechnen Sie die Gramsche Matrix von B bezüglich der Basis C.

A123. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der nächsten Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr., Übungstermin und -leiter abgeben.**
Zusammenhang zwischen Bilinearformen $B \colon V \times V \to \mathbb{K}$
und linearen Abbildungen $L \colon V \to V^*$.

- Sei $\varphi \colon V \to V^*$ lineare Abbildung. Zeigen Sie: durch $B_\varphi(u, v) := \varphi(u)(v)$ ist eine Bilinearform definiert, die genau dann nicht ausgeartet ist, wenn φ bijektiv ist.
- Zeigen Sie: jede Bilinearform entsteht auf diese Weise. Für die Bilinearform $B \colon V \times V \to \mathbb{K}$ ist durch
$$\varphi_B \colon V \to V^* : u \mapsto f_u$$
mit $f_u(v) := B(u, v)$ eine lineare Abbildung definiert.
- Zeigen Sie: durch diesen Zusammenhang ist eine Bijektion gegeben, denn es gilt
$$B_{\varphi_B} = B \text{ und } \varphi_{B_\varphi} = \varphi$$

H124. Es seien $u := \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, und $M := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid B(x, x) = 25\}$ wobei B eine bilineare Abbildung.

(a) Finden Sie eine bilineare Abbildung B so dass $u, v \in M$.

(b) Finden Sie alle solche Abbildungen.

(c) Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge für (b) ein affiner Unterraum des Vektorraumes aller bilinearen Funktionen von $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ ist.

(d) Berechnen Sie die Dimension des affinen Unterraumes aus Aufgabenteil (c).

H125. Beweisen Sie die folgenden Aussagen. Für eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ gilt

(a) $\mathrm{Kern}(f^*) = (\mathrm{Bild}\, f)^0$.
f^* ist genau dann injektiv wenn f surjektiv ist.

(b) $\mathrm{Bild}(f^*) = (\mathrm{Kern}\, f)^0$.
f^* ist genau dann surjektiv wenn f injektiv ist.

(c) $\mathrm{rg}(f^*) = \mathrm{rg}(f)$.
f^* ist genau dann bijektiv, wenn f bijektiv ist.