TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. M. Bodirsky, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Sommersemester 2016

22. Übungsblatt für die Übungen vom 30.5.-3.6.2016

Euklidische und Unitäre Vektorräume

V149. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**

(a) Beweisen Sie den ersten Teil des Satzes in VL Kap. 14 In einem euklidischen bzw. unitären $\mathbb{K}$-Vektorraum V definiert die Normfunktion $||\cdot|| : V \to \mathbb{K}$ mit $||v|| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$ tatsächlich eine *Norm* bzw. der Vorlesung ANA I, Kap. 2.2.

(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis (VL 14.2) mit dem GRAM-SCHMIDTschen Orthonormalisierungsverfahren (VL 14.3) für den von den Vektoren

$$v_1 = (3, 1, -1, 3)^\top,\ v_2 = (-5, 1, 5, -7)^\top \text{ und } v_3 = (4, 4, 2, 2)^\top$$

aufgespannten Untervektorraum des Euklidischen Vektorraums $\mathbb{R}^4$.

Ü150. Es sei V der Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ (auf dem Intervall $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 1\}$) mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(t)g(t)\,dt.$$

(a) Berechnen Sie $\langle f, g\rangle$ für die durch $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ gegebenen Funktionen.

(b) Welche zwei der Polynomfunktionen $v_1(x) = 1$ (Konstante), $v_2(x) = x$ und $v_3(x) = x^2$ haben den kleinsten Abstand bzgl. der Norm?

Hinweis: Der *Abstand* der Vektoren u und v bzgl. der Norm ist $\|v - u\| = \|u - v\|$.

(c) Wenden Sie das GRAM-SCHMIDTsche Orthonormalisierungsverfahren (VL 14.3) auf v_1, v_2 und v_3 an, d.h. geben sie ein Orthonormalsystem $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3)$ an, so dass $\langle\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3\}\rangle = \langle\{v_1, v_2, v_3\}\rangle$ gilt.

Ü151. Es seien $\mathbb{K} = \mathsf{GF}(3)$, $V = \mathbb{K}^2$ und $\langle\cdot\,,\cdot\rangle : V^2 \to \mathbb{K} : (x, y) \mapsto x^\top y$. Es sei $U := \mathbb{K}u$ mit $u = (1, 2)^\top$ (d.h. U ist die „Gerade durch o und u“). Wir definieren (wie in VL 14.1) ein „orthogonales Komplement“ $U^\perp := \{y \in V \mid \forall x \in U : \langle x, y\rangle = 0\}$.

- Welche Dimension haben U und $U^\perp$?
- Bestimmen Sie alle Elemente des orthogonalen Komplements $U^\perp$.
- Geben Sie alle Basen von U und $U^\perp$ an.

Hinweis: Die Abbildung $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ ist kein Skalarprodukt, weil die Eigenschaft (S4) “positiv definit” im $\mathsf{GF}(3)$ keinen Sinn hat. Es gilt aber zumindestens $\langle v, v\rangle \neq 0$ für alle $v \in V$. Als Zusatzaufgabe können Sie überlegen, welche Probleme auftreten, wenn man die gleiche Aufgabenstellung mit $\mathbb{K} = \mathsf{GF}(3)$, $V = \mathbb{K}^3$ und $u = (1, 1, 1)^\top$ bearbeitet.

Ü152. (a) Berechnen Sie mittels VL 14.4 die Orthogonalprojektion $p_g(\vec{q})$ des Punktes $\vec{q} = \binom{1}{7} \in \mathbb{R}^2$ auf die Gerade $g = \mathbb{R}\vec{v}$, die durch den Ursprung und den Punkt $\vec{v} = \binom{-4}{2}$ geht.

(b) Geben Sie eine Formel an, mit der man die Orthogonalprojektion für beliebige $\vec{q}$ und $\vec{v}$ aus $\mathbb{R}^2$ berechnen kann. Vergleichen Sie das Ergebnis mit 10.6 aus der VL 11.3.4.

A153. **Hausaufgabe, bitte zu Beginn der 23. Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**
Es sei V ein euklidischer Vektorraum und $x, y \in V$ mit $\|x\| = \|y\|$. Zeigen Sie, dass dann $\|x - \lambda y\| = \|\lambda x - y\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt. Veranschaulichen Sie sich geometrisch die Bedeutung dieser Gleichung im Fall $V = \mathbb{R}^2$.

Unter welchen Bedingungen gilt die Aussage auch in unitären Vektorräumen ($\lambda \in \mathbb{C}$)?

H154. (a) Es sei V ein euklidischer Vektorraum. Beweisen Sie für $x, y \in V$:

$$(x - y) \perp (x + y) \iff \|x\| = \|y\|\,.$$

Veranschaulichen Sie sich diesen Sachverhalt im Falle $V = \mathbb{R}^2$ geometrisch.

(b) Beweisen Sie eine der beiden Implikationen „ $\Longrightarrow$ “ oder „$\Longleftarrow$“ in (a) für unitäre Vektorräume.

(c) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass die andere Implikation in unitären Vektorräumen nicht gilt. Betrachten Sie dazu den $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$ mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} : (x, y) \mapsto x^\top \overline{y}$.

Hinweis: Dabei ist $\overline{y}$ der zu y konjugiert komplexe Vektor, d.h. für $y = (y_1, y_2)^\top$ ist $\overline{y} = (\overline{y_1}, \overline{y_2})^\top$.

H155*. Es seien V ein euklidischer Vektorraum und $M \subseteq V$ eine Teilmenge von V. Zeigen Sie

$$M^\perp = \langle M^\perp \rangle = \langle M \rangle^\perp.$$