TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. M. Bodirsky, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Sommersemester 2016

23. Übungsblatt für die Übungen vom 6.6.-10.6.2016

Ausgleichsrechnung, Normalformen

V156. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**
Der Zusammenhang zwischen zwei Größen x und y wurde experimentell untersucht. Dabei wurden für (x, y) die Messwertpaare $(2, 4)$, $(5, 8)$, $(6, 1)$ und $(9, 5)$ ermittelt.

(a) Stellen Sie die vier Messwertpaare in einem Koordinatensystem dar.

(b) Bestimmen Sie zwei Zahlen $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion $f(x) := a_0 + a_1 x$ den Zusammenhang zwischen x und y möglichst gut beschreibt. Zeichnen Sie f in das Koordinatensystem von (a) ein.

(c) Welche Schlussfolgerungen kann man aus den Werten von a_0 bzw. a_1 ziehen?

Ü157. (a) Zeigen Sie: Ist $\mathbb{K}$ ein Körper und $Aa = y$ (mit $A \in \mathbb{K}^{m\times n}, a \in \mathbb{K}^n, y \in \mathbb{K}^m$) ein (überbestimmtes) lineares Gleichungssystem, dann besitzt, falls $A^\top A$ regulär ist, das Gleichungssystem $A^\top Aa = A^\top y$ die selbe Lösung wie $Aa = p_{\mathrm{Bild}\,A}(y)$, d.h. liefert eine beste Approximation.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe von (a) nochmals die Lösung von der Vorbereitungsaufgabe V156.

Ü158. (a) Es sei $f : V \to V$ die Nullabbildung in einem Vektorraum V. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von f.

(b) Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $V = \mathbb{K}^2$. Bestimmen Sie alle Endomorphismen $f : V \to V$ (durch Angabe einer Darstellungsmatrix), für die Minimalpolynom und charakteristisches Polynom übereinstimmen.

Ü159. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Weiter seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte eines diagonalisierbaren Endomorphismus $f : V \to V$. Zeigen Sie, dass $\prod_{i=1}^r (X - \lambda_i) \in \mathbb{K}[X]$ das Minimalpolynom von f ist.

A160. **Hausaufgabe, bitte zu Beginn der 24. Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**
Ein Physiker will durch ein Experiment den Zusammenhang dreier Größen x, y und z untersuchen. Er erhält die angegebenen Messwerte. Bestimmen Sie drei Zahlen $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion $f(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y$ den Zusammenhang $z = f(x, y)$ zwischen x, y und z möglichst gut beschreibt.

x	1	3	4
y	4	8	10
z	1	2	3

H161*. Es seien $A, A' \in \mathbb{K}^{n\times n}$ für einen Körper $\mathbb{K}$. Finden Sie heraus, welche Implikationen zwischen den folgenden 8 Aussagen gelten:

(a) A, A' besitzen den gleichen Rang,

(b) A, A' sind ähnlich,

(c) A, A' besitzen die gleiche Spur,

(d) A, A' besitzen die gleiche Determinante,

(e) A, A' besitzen die gleichen Eigenwerte,

(f) A, A' besitzen die gleichen Eigenwerte und die jeweiligen algebraischen Vielfachheiten sind gleich,

(g) A, A' besitzen die gleichen Eigenwerte und die jeweiligen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten sind gleich,

(h) A, A' besitzen die gleichen Eigenwerte und Eigenräume.

H162*. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper mit $|\mathbb{K}| > 2$, V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Wir betrachten die folgenden drei Aussagen:

(a) Die Abbildung f hat einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$, so dass $\mathrm{Eig}_\lambda(f) = V$.

(b) Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{K}$, so dass für *jede* Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ von V gilt

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}.$$

(c) Die Darstellungsmatrizen $M_B^B(f)$ sind für alle Basen B von V gleich.

Zeigen Sie (a) $\implies$ (b) $\implies$ (c) $\implies$ (a).