TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. M. Bodirsky, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Sommersemester 2016

24. Übungsblatt für die Übungen vom 13.6.-17.6.2016

Minimalpolynome, zyklische Unterräume

V163. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**
Es sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A. Nutzen Sie den Satz aus VL 15.3.2, um nachzuweisen, dass A diagonalisierbar ist.

Ü164. (a) Sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & m \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Für welche $m \in \mathbb{R}$ ist A diagonalisierbar? Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe des Satzes aus VL 15.3.2.

(b) Bestimmen Sie das Minimalpolynom der Matrix $M_k = (m_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $\exists k \in \mathbb{K} \forall i,j \in \{1,\dots,n\} : m_{ij} = k$. Ist M_k diagonalisierbar?

Ü165. Geben Sie für die folgenden, durch die Matrizen A_i gegebenen Endomorphismen $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Zerlegung in eine direkte Summe von zyklischen Unterräumen an und zwar jeweils mit einem, mit zwei und mit drei Summanden (siehe Satz und Beispiel aus VL 15.3.3).

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ü166. Eine *Permutationsmatrix* ist eine Matrix $A_\pi = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $\pi \in S_n$ und $a_{ij} = 1 \iff \pi(i) = j$. In jeder Zeile und in jeder Spalte ist also genau ein Eintrag 1 und alle anderen Einträge sind 0.

(a) Zeigen Sie: $\forall \pi \in S_n : \det(A_\pi) \in \{-1, 1\}$

(b) Zeigen Sie: $\forall \pi, \sigma \in S_n : A_\pi \cdot A_\sigma = A_{\sigma\circ\pi}$ und folgern Sie, dass die Menge der Permutationsmatrizen aus $\mathbb{K}^{n\times n}$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ bildet.

(c) Zeigen Sie: Ist $\pi \in S_n$ eine Permutation, die aus den (elementfremden) Zyklen $z_1, \dots, z_r$ mit den Zyklenlängen $k_1, \dots, k_r$ besteht, dann existiert eine Zerlegung $\mathbb{K}^n = Z_{v_1} \oplus \dots \oplus Z_{v_r}$ und eine zu A ähnliche Matrix $B = \begin{pmatrix} Z_{\varphi_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Z_{\varphi_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & Z_{\varphi_r} \end{pmatrix}$ mit $\varphi_i = X^{k_i} - 1$.

A167. **Hausaufgabe, bitte zu Beginn der 25. Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**
Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus mit der Darstellungsmatrix (bzgl. der Standardbasis E_n) $A := M_{E_n}^{E_n}(f) = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = \begin{cases} 1, & i \leq j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$.
Bestimmen Sie das Minimalpolynom von A und finden Sie eine Darstellung von V als direkte Summe zyklischer Unterräume.

Zusatzaufgabe: Finden Sie eine zweite Zerlegung von V in zyklische Unterräume.

H168. Sei $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass die Beziehung $\mu_A = \mathrm{kgV}(\mu_B, \mu_C)$ für die Minimalpolynome von A, B und C gilt.