TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. M. Bodirsky, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Sommersemester 2016

25. Übungsblatt für die Übungen vom 20.6.-24.6.2016

Frobenius-Normalform, Jordan-Normalform

V170. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**
Geben Sie die Eigenwerte der folgenden Matrix $A \in \mathbb{R}^{14\times 14}$ an. „Bestimmen“ Sie die algebraische und geometrische Vielfachheit jedes Eigenwertes.

$$A = \begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&5&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&5&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&5&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&2&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&6 \end{pmatrix}$$

Ü171. Bestimmen Sie zu den Matrizen A_1 und A_2 aus Aufgabe Ü165 und zu der Matrix M_k aus Aufgabe Ü164b die Frobenius-Normalformen. Bestimmen Sie auch die jeweiligen Basen, bezüglich derer diese Frobenius-Normalformen Darstellungsmatrizen zu den zu A_1, A_2, M_k gehörigen Endomorphismen sind.

Ü172. (a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A \in \mathbb{R}[\lambda]$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 0&0&1\\ -1&1&1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

und zerlegen Sie χ_A in ein Produkt von Linearfaktoren. Was sind die Eigenwerte von A und ihre algebraische Vielfachheit?

(b) Berechnen Sie $\mathrm{rg}(A-\lambda E)$ für jeden Eigenwert λ und leiten Sie daraus die geometrische Vielfachheit von λ ab. Ist A diagonalisierbar?

(c) Geben Sie die *Jordan*sche Normalform J von A an (ohne Rechnung, nur aus den Ergebnissen von (a) und (b)).

(d) Finden Sie eine reguläre Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ die *Jordan*sche Normalform von A ist.

Ü173. Bestimmen Sie alle $\mathbb{K}^{n\times n}$-Matrizen A, bei denen die Frobenius-Normalform aus n-Kästchen besteht.

Zeigen Sie: Ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine diagonalisierbare Matrix, dann besteht die Frobenius-Normalform von A genau dann aus einem Kästchen, wenn die n Eigenwerte von A paarweise verschieden sind (d.h. wenn die algebraische Vielfachheit jedes Eigenwerts 1 beträgt)..

A174. **Hausaufgabe, bitte zu Beginn der 26. Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**
Bestimmen Sie die Frobenius-Normalform und die Jordan-Normalform folgender drei Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

H175. Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Zeigen Sie: Besitzt A keinen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist A ähnlich zu einer Matrix $A' = \begin{pmatrix} 0 & -d \\ 1 & s \end{pmatrix}$ mit $s = \mathrm{Spur}(A)$ und $d = \det(A)$.

H176. (a) Begründen Sie, jeweils für die Fälle $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ob die Matrizen $A, B, C \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ diagonalisierbar sind.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Geben Sie zu jeder Matrix über jedem der gegebenen Körper aus Aufgabe 176a eine Jordansche Normalform an, falls möglich.