Prof. M. Bodirsky, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Sommersemester 2016

26. Übungsblatt für die Übungen vom 27.6.-1.7.2016

Jordan- und Frobenius-Normalformen, Vandermonde-Matrizen

V177. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**
Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen aus $\mathbb{R}^{2\times 2}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- falls möglich - jeweils eine ähnliche Diagonalmatrix D, die Jordan-Normalform J und die Frobenius-Normalform F.

Ü178. Bestimmen Sie von der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

die Jordansche Normalform $J(A)$ und geben Sie eine Matrix S_A an, so dass $J(A) = S_A^{-1} A S_A$ gilt.

Ü179. (a) Finden Sie alle Polynome $f(x)$ vom Grad 2, die die folgenden Stützstellen haben:

$$f(-1) = -3, \qquad f(0) = -2, \qquad f(1) = 5.$$

(b) Zeigen Sie: n Wertepaare $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ (mit paarweise verschiedenen x_i) bestimmen eindeutig ein Polynom $f(x)$ vom Grad $n-1$, für welches $f(x_i) = y_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt. Nutzen Sie die Vandermonde-Matrix zum Beweis.

Ü180. (a) Zeigen Sie: Die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{4\times 4} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{4\times 4}$$

sind nicht ähnlich. Bestimmen Sie dazu die jeweiligen Frobenius-Normalformen.

(b) Ist die folgende Aussage richtig: „Zwei Matrizen sind genau dann ähnlich, wenn Sie die selben Eigenwerte mit den gleichen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten besitzen.“

A181. **Hausaufgabe, bitte zu Beginn der 27. Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**
Bestimmen Sie die Jordan-Normalform der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

und geben Sie eine Matrix S_B an, so dass $J(B) = S_B^{-1} B S_B$ gilt. Machen Sie die Probe! Geben Sie eine zu B nicht-ähnliche Matrix C an, die die selben Eigenwerte mit den selben algebraischen und geometrischen Vielfahcheiten besitzt oder begründen Sie, warum eine solche Matrix C nicht existiert.

H182. Sei

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

eine Vandermonde-Matrix (mit paarweise verschiedenen $x_i \in \mathbb{K}$). Weiter sei $p(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - x_i) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j X^j$ für geeignete $b_j \in \mathbb{K}$.

(a) Zeigen Sie, dass für $n = 3$ folgende Matrixgleichung gilt:

$$V \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & 1 \\ b_2 & b_3 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & & \vdots \\ b_{n-1} & 1 & & & 0 \\ 1 & 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix} \cdot V^\top = \begin{pmatrix} p'(x_1) & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & p'(x_2) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \dots & p'(x_n) \end{pmatrix}.$$

(b)* Zeigen Sie, dass obige Gleichung für beliebige $n \in \mathbb{N}$ gilt.

H183. Klassifizieren Sie die Menge $\mathbb{R}^{2\times 2}$ bezüglich Ähnlichkeit, d.h. geben Sie Bedingungen für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ an, so dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

- keine Eigenwerte
- einen Eigenwert λ mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1
- einen Eigenwert λ mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 2
- zwei Eigenwerte $\lambda_1 \neq \lambda_2$

hat. Finden Sie jeweils - falls möglich - die Frobenius-Normalform, die Jordan-Normalform und eine ähnliche Diagonalmatrix.

Hinweis: Die Aufgaben H175 und H162 helfen ein wenig bei der Lösung dieser Aufgabe.