TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. M. Bodirsky, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Sommersemester 2016

27. Übungsblatt für die Übungen vom 4.7.-8.7.2016

orthogonale und selbstadjungierte Abbildungen

V184. **Wiederholungs- und Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**

(a) Zeigen Sie: Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix, dann gilt $\det A = 1$ oder $\det A = -1$. Finden Sie auch eine Einschränkung für die Determinante einer symmetrischen Matrix?

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Das Produkt und die Inversen orthogonaler Matrizen sind wieder orthogonal.

(c) Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist genau dann orthogonal, wenn $||f(e_1)|| = ||f(e_2)|| = 1$ und $f(e_1) \perp f(e_2)$ gelten.

(d) Beweisen oder widerlegen Sie: Das Produkt und die Inversen symmetrischer Matrizen sind wieder symmetrisch.

(e) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ der symmetrischen $n \times n$-Matrizen einen Untervektorraum im Vektorraum aller $n \times n$-Matrizen bildet und bestimmen Sie dessen Dimension.

Ü185. (a) Zeigen Sie: Jede Spiegelung $s_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich einer Spiegelgerade mit Winkel $\frac{\alpha}{2}$ ist eine orthogonale Abbildung.

(b) Zeigen Sie: Jede Drehung $d_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um den Winkel α ist eine orthogonale Abbildung.

(c) Zeigen Sie: Jede orthogonale Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist eine Drehung oder eine Spiegelung.

(d) Zeigen Sie: Die Menge der Drehungen und Spiegelungen bildet (mit der Hintereinanderausführung als Operation) eine Gruppe.

(e)* (Selbststudium) Führen Sie für s_α und d_α die Hauptachsentransformation durch.

Ü186. Es seien $v_1 = (1, 1)^\top$, $v_2 = (0, 2)^\top$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit $f(v_1) = v_1 + v_2$ und $f(v_2) = 2v_1 - v_2$.

(a) Ist f durch diese Angaben eindeutig festgelegt? (Warum?) Geben Sie die Darstellungsmatrix $M_B^B(f)$ von f bezüglich der Basis $B := (v_1, v_2)$ an (vgl.VL 7.8).

(b) Geben Sie die zu f gehörige Darstellungsmatrix M bezüglich der Standardbasis (e_1, e_2) an.

(c) Ist f ein selbstadjungierter Endomorphismus von $\mathbb{R}^2$? Ist f eine orthogonale Abbildung von $\mathbb{R}^2$ (bezüglich Standardskalarprodukt)? Begründen Sie!

(d) Finden Sie ein Skalarprodukt $\langle \cdot , \cdot \rangle$ auf $\mathbb{R}^2$ (d.h. eine positiv definite symmetrische Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ mit $\langle u_1, u_2 \rangle = u_1^\top A u_2$), so dass sowohl v_1 und v_2, als auch $f(v_1)$ und $f(v_2)$ orthogonal zueinander sind und $\|v_2\| = \sqrt{2}$ gilt.

Geben Sie eine ON-Basis von $\mathbb{R}^2$ als euklidischem Vektorraum mit diesem Skalarprodukt an.

Wie lauten die Antworten auf die Fragen in (c), wenn $\mathbb{R}^2$ mit dem neuen Skalarprodukt $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ betrachtet wird?

Ü187. Es seien V ein euklidischer (bzw. unitärer) Vektorraum, $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_{①}$ ein Skalarprodukt auf V und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Wir definieren die Abbildung (vgl. VL 15.4.4)

$$\langle\cdot\,,\cdot\rangle_{②} : V \times V \to \mathbb{R} : (u, v) \mapsto \langle f(u), v\rangle_{①}.$$

Zeigen Sie, dass f genau dann selbstadjungiert ist, wenn $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_{②}$ eine symmetrische (bzw. hermitesche) Bilinearform ist.

A188. **Hausaufgabe, bitte zu Beginn der 28. Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**

(a) Es sei f bzw. A eine orthogonale oder unitäre Abbildung bzw. Matrix und λ sei ein Eigenwert von f bzw. A. Beweisen Sie $|\lambda| = 1$.

(b) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix. Zeigen Sie:

(i) Gilt $\det(A) = 1$ und n ungerade, dann ist 1 ein Eigenwert von A.

(ii) Gilt $\det(A) = -1$, dann ist -1 ein Eigenwert von A.

(iii) Gilt $\det(A) = -1$ und n gerade, dann ist 1 ein Eigenwert von A.

Hinweis: Sie können die Identitäten $A(A^\top - E) = E - A$ und $A(A^\top + E) = E + A$ ausnutzen.

H189. (a) Bestimmen Sie eine positive reelle Zahl r, so dass die Matrix

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+r & -1 & r \\ 1 & r & -1-r \\ r & 1+r & 1 \end{pmatrix}.$$

orthogonal ist. Zeigen Sie, dass A dann eine Drehung beschreibt (Dann gilt $\det(A) = 1$.).

(b) Berechnen Sie für diese Drehmatrix einen Eigenvektor zum Eigenwert 1.

(c) Berechnen Sie Drehachse und Drehwinkel (es reicht, $\cos\alpha$ anzugeben).

Bemerkung: Wen es interessiert, wie sich die Abbildung $x \mapsto Ax$ geometrisch als Abbildung des Dodekaeders interpretieren lässt, der suche in dem Buch „Lineare Algebra“ von B. Artmann.

H190. Es sei $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ der Vektorraum aller Polynome über $\mathbb{R}$ vom Grad höchstens n. Weiter sei $d : \mathbb{R}[X]_{\leq n} \to \mathbb{R}[X]_{\leq n}$ der Differentiationsoperator, d.h. die Abbildung, die jedem Polynom $p \in \mathbb{R}[X]_{\leq n}$ ihre Ableitung p' zuordnet.

(a) Geben Sie die Dimension von $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ und eine Basis an.

(b) Zeigen Sie, dass d ein Endomorphismus ist.

(c) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von d.

(d) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von d.

(e) Geben Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von d an.