Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra
Prof. M. Bodirsky, Dr. C. Zschalig
Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Sommersemester 2016

28. Übungsblatt für die Übungen vom 11.7.-15.7.2016

Hauptachsentransformation, normale Abbildungen, Spektralsatz

V191. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**
(Fortsetzung der Aufgabe Ü186)
Was für ein Kegelschnitt ist die Kennlinie $K = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\top Ax = 1\}$ (VL 13.7.3, 15.4.7)? Führen Sie die Hauptachsentransformation durch und bestimmen Sie die Länge der Hauptachsen.

Ü192. Führen Sie die Hauptachsentransformation zu den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

durch, d.h. bestimmen Sie orthogonale Matrizen S, T so dass $S^\top AS$ bzw. $T^\top BT$ Diagonalmatrizen sind.

Ü193. Bestimmen Sie zu der Kurve zweiter Ordnung $x_1^2 + ax_1x_2 + x_2^2 = 1$ durch Hauptachsentransformation die zugehörigen Kegelschnitte (in Abhängigkeit von dem Parameter $a \in \mathbb{R}$) und skizzieren Sie sie.

Ü194. Zeigen Sie: Jede normale Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist selbstadjungiert oder das Vielfache einer orthogonalen Abbildung (d.h. es existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass λf orthogonal ist).

H195. Durch

(i) $2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 1 = 0$
(ii) $4x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 - 2 = 0$
(iii) $4x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + 3x_3^2 - 2 = 0$
(iv) $-2x_1^2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 1 = 0$
(v) $2x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 + 3x_2x_3 + \frac{3}{2}x_3^2 - 1 = 0$

sind Kurven ((i)-(ii)) bzw. Flächen ((iii)-(v)) zweiter Ordnung definiert. Führen Sie die folgenden Aufgaben durch :

(a) Geben Sie jeweils (bzgl. Standardbasis) die Matrix derjenigen Bilinearform (sofern diese existiert) an, deren Kennlinie die angegebene Kurve bzw. Fläche ist.
(b) Ist die Bilinearform (gemäß (a)) ein Skalarprodukt?
(c) Geben Sie für die Kurven bzw. Flächen aus (a) die Gleichung in Normalform (d.h. nach der Hauptachsentransformation, ohne die Hauptachsentransformation schon durchzuführen) an. Bestimmen Sie die Länge der Hauptachsen (d.h. finden Sie a, b, c), und führen Sie die Hauptachsentransformation durch (d.h. Angabe eines Hauptachsensystems = ON-Basis aus Eigenvektoren). Ermitteln Sie, von welcher Art Kegelschnitt die Kurven (i) und (ii) sind.

(d) Ermitteln Sie, von welcher Art Flächen (iii)-(v) sind.

H196*. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Zeigen Sie, dass ein Endomorphismus $f : V \to V$ genau dann diagonalisierbar ist, wenn ein Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$ auf V existiert, für welches f selbstadjungiert ist.