Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. M. Bodirsky, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Sommersemester 2016

Wiederholung

Die folgenden Wiederholungsaufgaben sind zur Klausurvorbereitung vorgesehen. Versuchen Sie, die Aufgaben allein und nur mit Hilfe eines „Spickzettels" (also ohne Skripte und ohne elektronische Hilfsmittel) zu lösen. Pro Aufgabe sollten Sie etwa 15-30 Minuten veranschlagen.

W198. Es seien (für $k, l \in \mathbb{R}$)

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ l \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Vektoren aus dem Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Außerdem sei $U := \{u + r \cdot v + s \cdot w \mid r, s, \in \mathbb{R}\}$.

(a) Für welche $k, l \in \mathbb{R}$ ist U ein affiner Unterraum von $\mathbb{R}^3$?

(b) Für welche $k, l \in \mathbb{R}$ ist U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$?

Für eine Abbildung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelte $g(u) = v$, $g(v) = w$ und $g(u + v) = 3u - 4w$.

(c) Für welche $k, l \in \mathbb{R}$ kann g zu einer linearen Abbildung fortgesetzt werden?

(d) g kann (für beliebige $k, l \in \mathbb{R}$) zu einer affinen Abbildung $g = \tau \circ f$ fortgesetzt werden (das müssen Sie nicht zeigen). Bestimmen Sie die Translationsabbildung τ.

(Zusatz) Bestimmen Sie für $k = 7, l = -4$ (dann ist f linear) den von u erzeugten zyklischen Unterraum Z_u (bezüglich f) durch Angabe einer Basis. Geben Sie das Minimalpolynom von f, eingeschränkt auf Z_u, an und bestimmen Sie die zugehörige Begleitmatrix.

W199. In einem 2-dimensionalen Euklidischen Vektorraum V seien für eine Basis $B = (v_1, v_2)$ und eine symmetrische Bilinearform $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ folgende Werte gegeben:

$$\langle v_1, v_1 \rangle = 2a, \qquad \langle v_2, v_2 \rangle = 2, \qquad \langle v_2, v_1 \rangle = a.$$

(a) Geben Sie die Gramsche Matrix von $\langle \cdot , \cdot \rangle$ bezüglich der Basis B an.

(b) Bestimmen Sie die Menge aller Werte $a \in \mathbb{R}$, für die $\langle \cdot , \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt ist.

(c) Im weiteren sei $a = 2$ (dann ist $\langle \cdot , \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt). Berechnen Sie mit dem Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren aus der Basis B eine Orthonormalbasis $\tilde{B} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$ für V.

Hinweis: Die Vektoren aus $\tilde{B}$ sollen als Linearkombinationen der Form $\alpha v_1 + \beta v_2$ angegeben werden, wobei α, β konkrete Zahlen ($\in \mathbb{R}$) sind.

(d) Es seien nun V der Euklidische Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt und $v_1 = (-2, 0)^\top$, $v_1 = (-1, 1)^\top$ (diese Vektoren haben die oben genannten Eigenschaften, also auch die Gramsche Matrix aus (a) für $a = 2$).

- Geben Sie die Orthonormalbasis $\tilde{B}$ (siehe (c)) konkret an.
- Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die durch $v_1 \to \tilde{v}_2$, $v_2 \to \tilde{v}_2$, festgelegte lineare Abbildung. Was ist $f(u)$ für $u = (1, 1)^\top$?

W200. Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$ und $\langle \cdot\,, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ das Standardskalarprodukt in V. Weiter seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Elemente von V.

(a) Berechnen Sie $\langle 2v_1, \frac{1}{2}v_2 \rangle$.

(b) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von $U := \langle \{v_1, v_2\} \rangle$.

(c) Bestimmen Sie die Dimension des orthogonalen Komplements $U_\perp$ von U.

(d) Berechnen Sie eine (nicht notwendigerweise orthogonale) Basis des orthogonalen Komplements $U_\perp$ von U.

(e) Beweisen Sie: In V gilt: $\forall v, w \in V : ||v|| = ||w|| \implies (v + w) \perp (v - w)$.

W201. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante $\det(A)$ und den Rang $\operatorname{rg}(A)$.

(b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und alle Eigenwerte von A und geben Sie die algebraische Vielfachheit jedes Eigenwerts an.

(c) Berechnen Sie die geometrische Vielfachheit jedes Eigenwerts λ von A und geben Sie eine Basis des jeweiligen Eigenraums $\operatorname{Eig}_A(\lambda)$ an.

(d) Berechnen Sie die Jordansche Normalform J von A und bestimmen Sie eine reguläre Matrix S, so dass $J = S^{-1}AS$ gilt.

(Zusatz) Machen Sie eine Probe, d.h. verifizieren Sie, dass tatsächlich $J = S^{-1}AS$ für Ihr Ergebnis gilt. (Dazu müssen Sie nicht unbedingt S^{-1} berechnen.)

W202. Gegeben sei die Kurve 2. Ordnung $x^2 + \sqrt{3}xy + 2y^2 = b$.

(a) Bestimmen Sie durch Hauptachsentransformation den zugehörigen Kegelschnitt für $b = 1$.

(b) Skizzieren Sie den Kegelschnitt, d.h. skizzieren Sie die Teilmenge der $\mathbb{R}^2$, die sich als Schnittmenge ergibt.

(c) Erläutern Sie qualitativ, wie sich der Kegelschnitt ändert, wenn $b = 2$ gewählt wird. Skizzieren Sie den Kegelschnitt für $b = 2$ in das in (b) erstellte Koordinatensystem.

(d) Erläutern Sie qualitativ, wie sich der Kegelschnitt ändert, wenn $b = 0$ gewählt wird. Skizzieren Sie den Kegelschnitt für $b = 0$ in das in (b) erstellte Koordinatensystem.

W203. (a) Verifizieren Sie anhand der Definition, dass orthogonale Abbildungen längen- und winkeltreu sind.

(b) Beweisen Sie: Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine normale Matrix und ist A invertierbar, dann ist A^{-1} ebenfalls normal.

Gibt es normale Matrizen, die nicht invertierbar sind?