Vektoroperationen

Es seien $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig.

Summe: $\vec{v} + \vec{w} := \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$, **Skalierung:** $\lambda\vec{v} := \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix}$,

Transponierung: $\vec{v}^T = (v_1, \ldots, v_n)$,

Skalarprodukt: $\vec{v} \bullet \vec{w} = \vec{v}^T \vec{w} = v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n = \sum_{j=1}^{k} v_j w_j$.

(Euklidische) **Länge** eines Vektors: $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \bullet \vec{v}} = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}$.

Eigenschaften von Vektoroperationen

Es seien $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ Vektoren der Dimension n und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ beliebig.

Dann gelten die **Rechenregeln:**

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ Kommutativgesetz
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ Assoziativgesetz

3. $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$
4. $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$
5. $\lambda \cdot (\vec{v} \bullet \vec{w}) = (\lambda\vec{v}) \bullet \vec{w} = \vec{v} \bullet (\lambda\vec{w})$

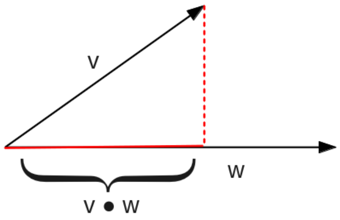
6. $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$
7. $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet \vec{w} = \vec{u} \bullet \vec{w} + \vec{v} \bullet \vec{w}$

Geometrische Interpretation: Skalarprodukt

Es seien $\vec{v}$ und $\vec{w}$ Vektoren in $\mathbb{R}^2$ (oder in $\mathbb{R}^3$).

Für das Skalarprodukt gilt: $\boxed{\vec{v} \bullet \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{v}, \vec{w}).}$

Ist der Vektor $\vec{w}$ **normiert**, d.h. $|\vec{w}| = 1$, dann gibt das Skalarprodukt die **Länge der senkrechten Projektion** des Vektors $\vec{v}$ auf den Vektor $\vec{w}$ an.



Ebenengleichung

Es seien der Vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)^T \in \mathbb{R}^3$, $\vec{a} \neq 0$, und $b \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben.

Durch die Menge

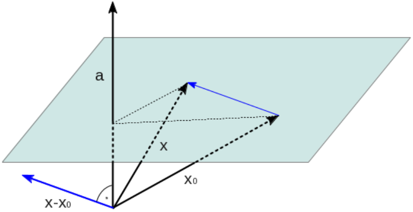
$$\mathcal{E} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b \right\}$$

wird eine **Ebene** in $\mathbb{R}^3$ beschrieben.

$$\forall \vec{x} \in \mathcal{E} : \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = \vec{a} \bullet \vec{x} = b.$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\forall \vec{x}, \vec{x}_0 \in \mathcal{E} : \qquad \vec{a} \bullet (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0}$$

d.h. der Vektor $\vec{a}$ steht auf dem Vektor $\vec{x} - \vec{x}_0$ senkrecht.



$\Rightarrow \quad \vec{a}$ ist **Normalenvektor** an die Ebene $\mathcal{E}$.

Matrix-Vektor-Produkt

System linearer Gleichungen:

$$
\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

mit Koeffizientenmatrix $A = (a_{ij})$ und rechter Seite $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m)^T$.
Zeilenvektoren von A: $\vec{z}_i := (a_{i1}, \ldots, a_{in}),\ i = 1, \ldots, m.$

Matrix-Vektor-Produkt:

$$
A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \vec{z}_1\vec{x} \\ \vdots \\ \vec{z}_m\vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}
$$

Matrix-Vektor-Produkt

Ein lineares Gleichungssystem mit $(m \times n)$-Koeffizientenmatrix $A = (a_{ij})$ und rechter Seite $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m)^T$ läßt sich damit kurz in **Matrix-Vektor-Form**

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

schreiben.

Vektorform des Matrix-Vektor-Produktes:

$$A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n.$$

mittels der Spaltenvektoren $\vec{a}_j$ von $A \quad (j = 1, \ldots, n)$.

$\Rightarrow$ **Vektorform** des linearen Gleichungssystems:

$$x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}.$$

Schlussfolgerung: $A\vec{x} = \vec{b}$ hat eine Lösung $\vec{x} \;\Leftrightarrow\;$ der Vektor $\vec{b}$ ist als lineare Kombination der Spaltenvektoren von A darstellbar.

Matrix-Vektor-Produkt

Theorem 1 Es sei A eine $(m \times n)$-Matrix. Dann gilt:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n : \quad A(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha A\vec{v} + \beta A\vec{w}.$$

Beweis: Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)^T$, $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_n)^T \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Die Spalten von A werden mit $\vec{a}_j$, $j = 1, \ldots, n$ bezeichnet. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
A(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) &\overset{\text{Vektorop.}}{=} A\begin{pmatrix} \alpha v_1 + \beta w_1 \\ \vdots \\ \alpha v_n + \beta w_n \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{Vektorform}}{=} (\alpha v_1 + \beta w_1)\vec{a}_1 + \ldots + (\alpha v_n + \beta w_n)\vec{a}_n \\
&\overset{\text{Rechenregeln}}{=} \alpha(v_1\vec{a}_1 + \ldots + v_n\vec{a}_n) + \beta(w_1\vec{a}_1 + \ldots + w_n\vec{a}_n) \\
&\overset{\text{Vektorform}}{=} \alpha A\vec{v} + \beta A\vec{w}.
\end{aligned}$$

Matrixoperationen

Seien $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$ $(m \times n)$- Matrizen.

Summe: $\quad A + B := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$

Multiplikation mit Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$: $\quad \lambda A := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$

Seien $A = (a_{ij})$ eine $(s \times m)$-Matrix, $B = (b_{ij}) = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ eine $(m \times n)$- Matrix.

Produkt: $\quad A \cdot B := (A\vec{b}_1, \dots, A\vec{b}_n)$.

Sei $C = A \cdot B = (c_{ij})$. Dann gilt für beliebige $i \in \{1, \dots, s\}, j \in \{1, \dots, n\}$:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}.$$

Matrixoperationen

Es sei $A = (a_{ij}) = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ eine $(m \times n)$- Matrix.

Die **transponierte Matrix** zu A: $\quad A^T := \begin{pmatrix} \vec{a}_1^T \\ \vdots \\ \vec{a}_n^T \end{pmatrix}.$

Ist $B := A^T$ mit $B = (b_{ij})$, so gilt folglich $b_{ij} = a_{ji}$, d.h. Spiegelung der Komponenten an der Hauptdiagonalen.

Beispiele:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 4 & \mathbf{5} & 6 \\ 7 & 8 & \mathbf{9} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 4 & 7 \\ 2 & \mathbf{5} & 8 \\ 3 & 6 & \mathbf{9} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{5} & 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C^T = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 0 \\ 2 & \mathbf{5} \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$