

**Die erweiterte Phasenfeldmethode:
Eine Methode zur effizienten Simulation der Rissausbreitung**

**The extended phase-field method:
A method to efficiently simulate crack propagation**

Von der Fakultät Bauingenieurwesen
der Technische Universität Dresden
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.) genehmigte

DISSERTATION

von Dipl.-Ing. Verena Curoşu
geboren am 9. Januar 1995 in Havixbeck

Gutachter	Prof. Dr.-Ing. Stefan Löhnert
	Prof. Dr.-Ing. habil. Sven Klinkel
	Prof. Dr.-Ing. Ralf Müller
Verteidigung	31. März 2026

Abstract

Keywords: Linear Elastic Fracture Mechanics, Phase-Field Method, Extended Finite Element Method, Extended Phase-Field Method

The phase-field method is established in academia as a widely used tool for simulating fracture processes. This is partly due to the direct embedding of the cracking behaviour in the variational (energetic) formulation, whereby crack initiation and crack growth directly result from the underlying energy principles. Additionally, complex crack geometries, such as those resulting from crack coalescence and crack branching, can be reproduced using the phase-field method without increased effort.

However, the sufficiently accurate approximation of the smeared crack and the corresponding displacement field requires a high-resolution discretization, which is usually achieved by very fine meshes in the area around the crack. An adaptation of the phase-field and the displacement field ansatz, similar to the extended/generalized finite element method, using information known about the expected solution, can remedy this. High accuracy solutions are obtained even with much coarser meshes. Based on the extended finite element method, this method is called the extended phase-field method (XPFM).

Here, the sought-after information about the expected solution is derived from the analytical solution of a one-dimensional problem with a given crack position. This results in an exponential-type transformation function for the approximation of the phase-field, into which the standard LAGRANGEan shape functions are inserted, allowing the phase-field profile perpendicular to the crack to be reproduced almost perfectly.

For the approximation of the displacement field, a computationally efficient sub-problem is solved for each enriched element, the solution of which can be interpreted as distorted reference coordinates of the element. In addition to the displacement field ansatz used standardly in the finite element method, another ansatz term is added, whose LAGRANGEan functions are formulated as a function of these distorted coordinates. This allows the quasi-jump of the displacement field across the crack to be reproduced without having to determine the crack geometry from the phase-field.

The effectiveness and efficiency of the extended phase-field method is demonstrated using classical linear-elastic fracture simulations. The focus here is on the comparison with the standard phase-field method for crack simulation in terms of computational effort and accuracy of the solution.

Zusammenfassung

Schlagwörter: Lineare-elastische Bruchmechanik, Phasenfeldmethode, Erweiterte Finite-Elemente-Methode, Erweiterte Phasenfeldmethode

Die Phasenfeldmethode hat sich als weit verbreitetes Werkzeug zur Simulation von Bruchvorgängen im akademischen Bereich etabliert. Dies liegt zum einen an der direkten Einbettung des Rissverhaltens in der variationalen (energetischen) Formulierung, wodurch Rissentstehung und Risswachstum konsistent aus den zugrunde liegenden Energieprinzipien resultieren. Zum anderen können auch komplexe Rissgeometrien, die beispielsweise durch Rissvereinigung und Rissverzweigung entstehen, durch die Phasenfeldmethode ohne gesteigerten Aufwand abgebildet werden.

Allerdings erfordert die ausreichend genaue Abbildung des verschmierten Risses sowie das zugehörige Verschiebungsfeld eine hochauflösende Diskretisierung, was zumeist durch sehr feine Netze im Bereich des Risses erzielt wird. Eine Anpassung des Phasenfeld- und Verschiebungsfeldansatzes, ähnlich wie in der erweiterten/generalisierten Finite-Elemente-Methode, mithilfe von Informationen, die über die erwartete Lösung bekannt sind, kann hierbei Abhilfe schaffen und dazu führen, dass mit vielfach gröberen Netzen eine sehr gute Genauigkeit der Lösung erzielt wird. In Anlehnung an die erweiterte Finite-Elemente-Methode, wird diese Methode die erweiterte Phasenfeldmethode (XPFM) genannt.

Hierbei werden die gesuchten Informationen über die erwartete Lösung aus der analytischen Lösung eines eindimensionalen Problems mit vorgegebener Rissposition abgeleitet. Es ergibt sich für die Annäherung des Phasenfelds eine Transformationsfunktion vom Exponentialtyp, in die die standardmäßig verwendete LAGRANGE-Formfunktionen eingesetzt werden, wodurch das Phasenfeldprofil quer zum Riss nahezu perfekt abgebildet werden kann.

Für die Approximation des Verschiebungsfeldes wird für jedes angereicherte Element ein rechen-effizientes Subproblem gelöst, dessen Lösung als verzerrte Referenzkoordinaten des Elementes interpretiert werden kann. Zu dem in der Finiten-Elemente-Methode standardmäßig verwendeten Verschiebungsfeldansatz wird ein weiterer Ansatzterm addiert, dessen LAGRANGE-Formfunktionen in Abhängigkeit dieser verzerrten Koordinaten formuliert werden. Dadurch kann der nahezu-Sprung des Verschiebungsfeldes über den Riss hinweg abgebildet werden, ohne dass die Rissgeometrie aus dem Phasenfeld heraus ermittelt werden muss.

Anhand von klassischen Sprödrissimulationen wird die Effektivität und Effizienz der erweiterten Phasenfeldmethode gezeigt. Hierbei liegt der Fokus auf dem Vergleich mit der klassischen Phasenfeldmethode für Rissimulation anhand von Rechenaufwand und Genauigkeit der Lösung.