

# **Ein Beitrag zur Behandlung nichtmaterieller Randbedingungen in der Kontinuumsmechanik**

(An Investigation of the Behaviour of Continua with  
Non-material Boundary Conditions)

Von der Fakultät Bauingenieurwesen  
der Technischen Universität Dresden  
zur Erlangung des akademischen Grades  
eines Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.) genehmigte  
Dissertation

von

ANDREAS FRANZE

aus Sebnitz

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. habil. Bernd W. Zastrau  
Mitberichter: Prof. Dr. rer. nat. habil. Ernst-Peter Beisel  
Tag der mündlichen Prüfung: 28. Juni 2013



# Ein Beitrag zur Behandlung nichtmaterieller Randbedingungen in der Kontinuumsmechanik

ANDREAS FRANZE

## Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit werden kontinuumsmechanische Probleme mit nichtmateriellen Randbedingungen untersucht. Randbedingungen gelten dabei als nichtmateriell, wenn sie im Zeitverlauf nicht ein und demselben materiellen Punkt zugeordnet werden können. Die Erweiterung der klassischen kontinuumsmechanischen Feldgleichungen um solche Randbedingungen erfolgt unter Anwendung einer Arbitrary-LAGRANGE-EULER-Kinematik. Hierbei wird eine Notation entwickelt, bei der Feldgrößen und Operatoren ihre jeweilige Platzierung eindeutig zugeordnet wird. Insbesondere in Hinblick auf eine konsistente Darstellung von Ableitungsoperatoren werden die Vorteile dieser Schreibweise dargelegt.

Zur Ermittlung und Untersuchung (semi-)analytischer Lösungen dienen Beispiele eindimensionaler Kontinua, die sich zwei unterschiedlichen Problemklassen zuordnen lassen. In der ersten Problemklasse gelingen analytische Lösungen mit Hilfe eines Integrations- und eines Separationsansatzes für das Modell einer axial unbewegten, schwingenden Saite. Als nichtmaterielle Randbedingungen werden dabei die transversalen Verschiebungen an zwei zeitabhängigen Positionen zu null vorgeschrieben. In der zweiten Problemklasse sind eine Saite sowie ein Seil, die einer vorgegebenen axialen Führungsbewegung unterliegen, Gegenstand der Untersuchung. In diesem Fall sind die zwei vorgegebenen, räumlich festen Verschiebungsrandbedingungen nichtmateriell. Es finden (semi-)analytische Verfahren Anwendung. Die Relativgeschwindigkeit zwischen den Randbedingungen und dem jeweils betrachteten Kontinuum wird dabei als beliebig zeitabhängig angenommen. Eine experimentelle Studie zum Schwingungsverhalten eines Monochords mit nichtmateriellen Randbedingungen vervollständigt die Analyse eindimensionaler Kontinua.

Aus den ermittelten (semi-)analytischen Lösungen werden Rückschlüsse auf das Transformationsverhalten der Bewegungsgleichungen dreidimensionaler Kontinua gezogen. Damit sind die entwickelten Methoden in vielen technischen Anwendungen einsetzbar. Als ein wirtschaftlich bedeutendes Beispiel ist die Schwingungsanalyse axial bewegter Papierbahnen in Papierproduktionsmaschinen zu nennen.

**Schlüsselworte:** nichtmaterielle Randbedingungen, Kontinuumsmechanik, Operatornotation, Arbitrary-LAGRANGE-EULER-Kinematik, (semi-)analytische Methoden



# **An Investigation of the Behaviour of Continua with Non-material Boundary Conditions**

ANDREAS FRANZE

## **Abstract**

Within this work, problems of continuum mechanics with non-material boundary conditions are investigated. Boundary conditions are classified as non-material if they can not be assigned to one and only one material particle over time. The extension of the classical field-equations of continuum mechanics by such boundary conditions is realized by application of Arbitrary-LAGRANGE-EULER-Kinematics. Therefore a notation, which assigns the particular placement to field quantities and operators, is developed. The advantages of this notation can be identified particularly with regard to a consistent representation of derivative operators.

Examples of one-dimensional continua, which can be assigned to different problem categories, are used to determine and investigate (semi-)analytical solutions. In the first category, analytical solutions can be found using an integral and a separation formulation for the model of an axially non-moving, vibrating string. As non-material boundary conditions the transverse displacements at two time-dependent positions are prescribed to zero. A string and a wire, which are moved axially, are investigated within the second problem category. In this case, the prescribed, spatially fixed displacement conditions are non-material. The applied methods are (semi-)analytical. The relative velocity between the boundary conditions and the considered continuum is assumed to be arbitrary time-dependent. An experimental study on the vibration behaviour of a monochord with non-material boundary conditions completes the analysis of one-dimensional continua.

Conclusions on the transformation of the equations of motion of three-dimensional continua are derived from the determined (semi-)analytical solutions. For this reason the developed methods are usable in many technical applications. The vibration analysis of axially moving paper sheets in papermaking machines can be stated as an economical important example.

**Keywords:** non-material boundary conditions, continuum mechanics, operator notation, Arbitrary-LAGRANGE-EULER-Kinematics, (semi-)analytic methods

