TU Dresden
Institut für Planetare Geodäsie

Vorlesungsmanuskript "Sphärische Trigonometrie"

für die Studiengänge Geodäsie und Kartographie

(Umfang: 1 Semesterwochenstunde)

zusammengestellt von S. Wächter auf der Grundlage von: K.-G. Steinert: "Sphärische Trigonometrie". Kleine naturwissenschaftliche Bibliothek. Reihe Mathematik, Band 8, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1977.

Dresden, im Oktober 1998

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen und Literaturempfehlung

Die sphärische Trigonometrie beschäftigt sich mit Berechnungen auf der Kugel und gehört zu den Disziplinen der elementaren Mathematik. Bedeutung kommt ihr bei der Ausbildung von Geodäten und Kartographen zu, da diese Studierenden eine besondere Beziehung zu unserer Erde (hier als Kugel betrachtet) und auch zu den Vorgängen am Himmel haben sollten. Es wird gezeigt, wie sich mit relativ einfachen Rechnungen viele interessante Probleme auf der Erdoberfläche oder an der Himmelskugel klären lassen. Um das ohnehin schon sehr gestraffte Manuskript nicht zusätzlich zu belasten, wird an vielen Stellen auf eine ebenfalls vom Institut zusammengestellte Formelsammlung verwiesen. Durch praktische Rechnung und Lösung angewandter Aufgaben in den Übungen wird der gebotene Stoff vertieft und gefestigt. Nachdem die Probleme erkannt und Lösungswege gefunden wurden, sollte man sich auch bemühen, Sicherheit in der Zahlenrechnung zu erlangen.

Für Interessierte kann folgende Vertiefungsliteratur angegeben werden:

K.-G. Steinert: Sphärische Trigonometrie. Kleine naturwissenschaftliche Bibliothek. Reihe Mathematik, Band 8, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1977

R. Sigl: Ebene und sphärische Trigonometrie. Akademische Verlagsgesellschaft Frankfurt am Main,1969 und Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1977

H. Dörrie: Ebene und sphärische Trigonometrie. Verlag von R. Oldenburg, München, 1950

In vielen Lehrbüchern der Mathematik gibt es kurze Darstellungen der sphärischen Trigonometrie, ebenso in vielfältigen Formelsammlungen.

1 Wiederholungen und Ergänzungen aus der Goniometrie und der ebenen Trigonometrie

1.1 Winkelmaße

1.1.1 Das Gradmaß

Wird ein Kreis durch Radien in 360 gleiche Teile geteilt, so ist der Richtungsunterschied zweier benachbarter Radien die Maßeinheit $1\,\text{Grad} = 1^\circ$. Für die Unterteilung dieser Einheit gilt $1^\circ = 60' = 3600''$.

Ein rechter Winkel (1/4 Vollkreis) $= 90^\circ$. Auch die dezimale Schreibweise ist möglich, z.B. $10^\circ 15' 27'' = 10,2575^\circ$.

Auf der Erdoberfläche wird definiert: $1' = 1\,\text{sm}$ (Seemeile). Bei Annahme eines mittleren Erdradius von $6371\,\text{km}$ ergibt sich eine Seemeile zu $1,853\,\text{km}$.

Bei Einteilung des Kreises in 400 gleiche Teile erhält der Richtungsunterschied zweier benachbarter Radien die Bezeichnung 1 Neugrad oder 1 Gon (Zeichen gon oder $^{\mathrm{g}}$). 1 Gon wird in 100 Neuminuten (Zeichen $^{\mathrm{c}}$), eine Neuminute in 100 Neusekunden (Zeichen $^{\mathrm{cc}}$) unterteilt:

$$1^{\mathrm{g}} = 100^{\mathrm{c}} = 10000^{\mathrm{cc}}.$$

Ein rechter Winkel (1/4 Vollkreis) = 100 gon. Üblich ist auch die Bezeichnung

$$1\,\mathrm{gon} = 1000\,\mathrm{mgon}\,(\mathrm{Milligon})$$

oder auch

$$10^{\mathrm{g}}11^{\mathrm{c}}12^{\mathrm{cc}} = 10,1112^{\mathrm{g}}.$$

Auf der Erdoberfläche entspricht 0.01 gon= 1^{c} einer Entfernung von 1 km. Umrechnungen:

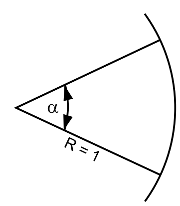
$$1^{\circ} = 1,11111\,\mathrm{gon},$$

$$1^{\mathrm{g}} = 0,9^{\circ} = 54' = 3240''.$$

1.1.2 Das Bogenmaß

Die Länge eines Kreisbogenstückes b ist eine Funktion des dazugehörigen Zentriwinkels α und des Radius R des Kreises.

Als Bogenmaß eines Winkels α wird die Länge des Kreisbogens b bezeichnet, der zum Winkel α gehört, wenn der Radius des Kreises gleich 1 ist:



$$\mathrm{b} = \mathrm{arc}\,\alpha.$$

Aus der Verhältnisgleichung

$$\frac{\alpha^{\circ}}{\mathrm{arc}\,\alpha} = \frac{360^{\circ}}{2\pi}$$

ergeben sich folgende Umrechnungen

$$\alpha^{\circ} = \mathrm{arc}\,\alpha\frac{180^{\circ}}{\pi},$$

bzw.

$$\mathrm{arc}\,\alpha = \alpha^{\circ}\frac{\pi}{180^{\circ}}$$

oder

$$\alpha^{\mathrm{g}} = \operatorname{arc}\alpha \frac{200^{\mathrm{g}}}{\pi},$$

bzw.

$$\operatorname{arc}\alpha = \alpha^{\mathrm{g}} \frac{\pi}{200^{\mathrm{g}}}.$$

Der Quotient $180°/\pi$ entspricht der Maßeinheit 1 Radiant (1 rad):

$$1\,\mathrm{rad} = 57°17'45'' = 63,6620\,\mathrm{gon},$$

$$1\,\mathrm{rad} = 206265''.$$

Für diesen Winkel ist die Bogenlänge gleich dem Radius des Kreises.

1.1.3 Das Zeitmaß

In der Geodäsie, besonders aber in der Astronomie, kommt es oft vor, daß Winkel im Zeitmaß angegeben werden. Der Zusammenhang wird durch die Rotation der Erde um ihre Achse hergestellt. In 24 Stunden dreht sich die Erde einmal um ihre Achse

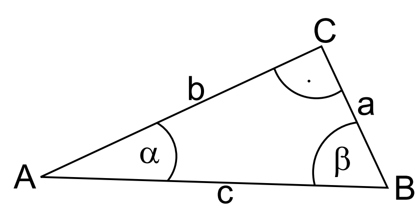
$$24\mathrm{h} \mathrel{\hat{=}} 360°,$$

$$1\mathrm{h} \mathrel{\hat{=}} 15°,\ \ 1\,\mathrm{min} \mathrel{\hat{=}} 15',\ \ 1\,\mathrm{s} \mathrel{\hat{=}} 15'',$$

$$1° \mathrel{\hat{=}} 4\,\mathrm{min},\ \ 1' \mathrel{\hat{=}} 4\,\mathrm{s},\ \ 1'' \mathrel{\hat{=}} 0,067\,\mathrm{s}.$$

1.2 Die Winkelfunktionen und ihre Periodizität

In einem rechtwinkligen Dreieck sind die beiden Winkel eindeutig durch die Seitenverhältnisse definiert. Diese Seitenverhältnisse bezeichnet man als trigonometrische Funktion



$$\textbf{Sinus}: \quad \sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{c}},$$

$$\textbf{Kosinus}: \quad \cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}},$$

entsprechend $\sin\beta = \mathrm{b}/\mathrm{c}$ und $\cos\beta = \mathrm{a}/\mathrm{c}$.

Praktische Erfordernisse ergeben weitere von diesen zwei Grunddefinitionen abgeleitete Formeln:

$$\textbf{Tangens}: \quad \tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad \tan\beta = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$

und im folgenden nur für den Winkel α aufgeschriebene Formen:

$$\textbf{Kotangens}: \quad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha};$$

$$\textbf{Kosecans}: \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha};$$

$$\textbf{Sekans}: \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Aus

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = 1 \text{ mit } a^2+b^2 = c^2 \text{ (Satz des Pythagoras)}$$

ergibt sich:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Mit Hilfe dieser Zusammenhänge läßt sich jede trigonometrische Funktion durch die anderen ausdrücken:

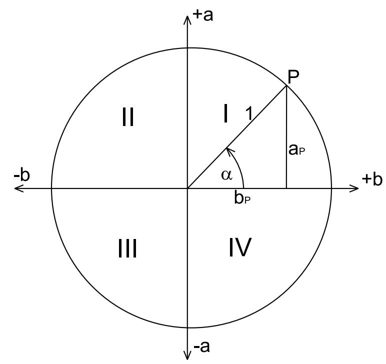
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$\sin\alpha =$	–	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{\tan\alpha}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\cos\alpha =$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	–	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{\cot\alpha}{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\tan\alpha =$	$\frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	–	$\frac{1}{\cot\alpha}$
$\cot\alpha =$	$\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\tan\alpha}$	–

Die Vorzeichen der Wurzeln werden durch die folgenden Betrachtungen festgelegt.

Am Einheitskreis lassen sich die Werte und Vorzeichen der einzelnen Funktionen ablesen

$$\sin \alpha = \mathrm{a_P},$$

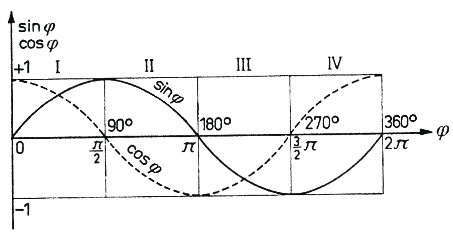
$$\cos \alpha = \mathrm{b_P},$$

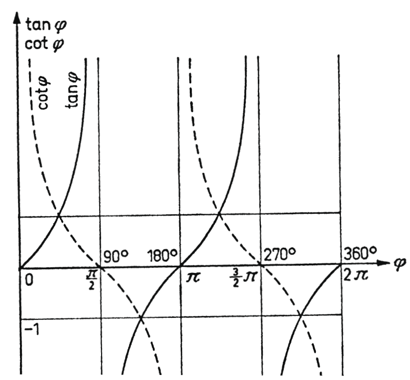


und es werden folgende Vorzeichen erhalten:

	Quadrant			
Winkelfunktion	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	−	−
$\cos \alpha$	+	−	−	+
$\tan \alpha$	+	−	+	−
$\cot \alpha$	+	−	+	−

Die Darstellung der Funktionswerte in Abhängigkeit vom Winkel ergibt folgende Kurven:





An diesen Kurven ist zu sehen, daß sich die Funktionen von beliebigen Winkeln leicht auf den ersten Quadranten zurückführen lassen.

z.B. II Quadrant:

$$\sin(90^\circ + \alpha) = +\cos\alpha,$$
$$\sin(180^\circ - \alpha) = +\sin\alpha;$$

III Quadrant:

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos\alpha;$$

IV Quadrant:

$$\sin(270^\circ + \alpha) = -\cos\alpha,$$
$$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin\alpha.$$

Im ersten Quadrant gilt außerdem:

$$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha) \text{ und } \cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha).$$

Ein Winkel $(90^\circ - \alpha)$ wird als Komplementwinkel, ein Winkel $(180^\circ - \alpha)$ als Supplementwinkel und ein Winkel $(360^\circ - \alpha)$ als Implementwinkel zu α bezeichnet.

In einem gleichseitigen Dreieck (Seitenlänge = 1) oder rechtwinklig gleichschenkligen Dreieck (Schenkellänge = 1) lassen sich leicht Werte der trigonometrischen Funktionen für die speziellen Werte $30^\circ, 45^\circ$ und 60° ermitteln.

	Winkel				
Funktion	$0^\circ = 0$	$30^\circ = \pi/6$	$45^\circ = \pi/4$	$60^\circ = \pi/3$	$90^\circ = \pi/2$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cot\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Die Berechnung der trigonometrischen Funktionswerte für beliebige Winkel erfolgt über Potenzreihen, z.B

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \quad \text{(x im Bogenmaß).}$$

Für den Praktiker stehen die Werte schon im einfachsten Taschenrechner meist mit genügender Genauigkeit zur Verfügung, in EDV-Programmen mit beliebiger Genauigkeit.

1.3 Additionstheoreme, Winkelverdopplung und Verwandlungsformeln

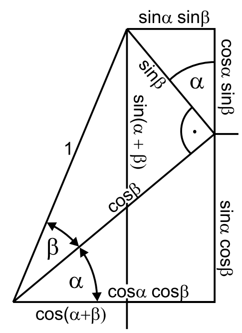
Mit Hilfe der Additionstheoreme lassen sich trigonometrische Funktionen von Winkelsummen oder -differenzen in Ausdrücke verwandeln, die nur die Einzelwinkel enthalten.

Aus nebenstehender Figur läßt sich ablesen:

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$

Weitere Formen s. Formelsammlung Teil A.1.



Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen des einfachen und des doppelten Winkels erhält man, indem in den Additionstheoremen $\beta = \alpha$ gesetzt wird:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

Mit den Verwandlungsformeln werden die Summen oder Differenzen der trigonometrischen Funktionen zweier Winkel in Produkte von Funktionen der halben Summe bzw. Differenz dieser Winkel verwandelt.

Durch Addition bzw. Subtraktion der beiden Additionstheoreme

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$

ergibt sich:

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$

und

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta.$$

Nachdem gesetzt wird:

$$\alpha+\beta=\mathrm{x},$$
$$\alpha-\beta=\mathrm{y},$$

folgt:

$$\alpha=\frac{\mathrm{x}+\mathrm{y}}{2}$$

und

$$\beta=\frac{\mathrm{x}-\mathrm{y}}{2}.$$

Und es werden die Verwandlungsformeln erhalten:

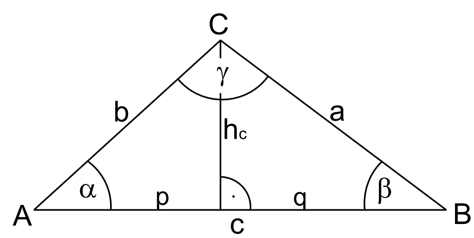
$$\begin{aligned}\sin\mathrm{x}+\sin\mathrm{y} &= 2\sin\frac{\mathrm{x}+\mathrm{y}}{2}\cos\frac{\mathrm{x}-\mathrm{y}}{2},\\ \sin\mathrm{x}-\sin\mathrm{y} &= 2\cos\frac{\mathrm{x}+\mathrm{y}}{2}\sin\frac{\mathrm{x}-\mathrm{y}}{2}\end{aligned}$$

(Formelsammlung A.2.)

1.4 Grundformeln zur Berechnung ebener Dreiecke

Man zeichnet ein beliebiges Dreieck mit der Höhe $\mathrm{h_c}$ (Lot von C auf c), die c in p und q unterteilt. Leicht läßt sich ablesen

$$\begin{aligned}\mathrm{h_c} &= \mathrm{b}\sin\alpha\\ \mathrm{h_c} &= \mathrm{a}\sin\beta\end{aligned}$$



Nach dem Gleichsetzen erhält man den ebenen Sinussatz

$$\mathrm{b}\sin\alpha=\mathrm{a}\sin\beta$$

oder

$$\frac{\mathrm{a}}{\sin\alpha}=\frac{\mathrm{b}}{\sin\beta}=\frac{\mathrm{c}}{\sin\gamma}\quad\text{(Formelsammlung B.1.)}$$

Setzt man $\mathrm{a}^2=\mathrm{h}_c^2+\mathrm{q}^2$ (Satz des Pythagoras),

$$\mathrm{a}^2=\mathrm{h}_c^2+(\mathrm{c}-\mathrm{p})^2=\mathrm{h}_c^2+\mathrm{c}^2-2\mathrm{cp}+\mathrm{p}^2,$$

so erhält man mit $\mathrm{h}_c^2+\mathrm{p}^2=\mathrm{b}^2$ und $\mathrm{p}=\mathrm{b}\cos\alpha$ den ebenen Kosinussatz:

$$\mathrm{a}^2=\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2-2\,\mathrm{b}\,\mathrm{c}\cos\alpha\quad\text{(Formelsammlung B.2.)}.$$

Mit Sinussatz und Kosinussatz lassen sich alle Stücke im ebenen Dreieck berechnen, wenn 3 Stücke gegeben sind. Mindestens eines von den 3 Stücken muß eine Seite sein.

Auf die Tangentenformeln (Formelsammlung B.3.) sei an dieser Stelle hingewiesen.

2 Sphärische Trigonometrie

Die sphärische Trigonometrie beschäftigt sich mit der Berechnung von Dreiecken auf der Kugeloberfläche. Die Seiten der Dreiecke können dabei keine geraden Linien sein, da die Kugeloberfläche eine gekrümmte Fläche ist. Die Seiten werden durch den Winkel zwischen den Kugelradien nach den Eckpunkten der Dreiecke ausgedrückt. Die Winkel der Dreiecke werden durch die Tangenten an die Seiten in den Eckpunkten der Dreiecke gebildet.

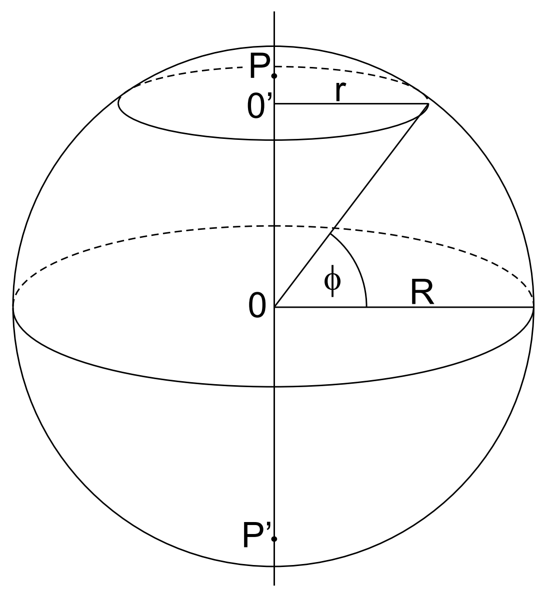
2.1 Kreise und Winkel auf der Kugel

Wird eine Kugel von einer Ebene geschnitten, so ist die Schnittlinie an der Kugeloberfläche stets ein Kreis.

a) Ist der Abstand der Schnittebene vom Kugelmittelpunkt gleich 0, d.h. der Kugelmittelpunkt liegt in der Schnittebene, so ist die Schnittlinie ein Großkreis. Der Radius des Großkreises ist gleich dem Kugelradius R.

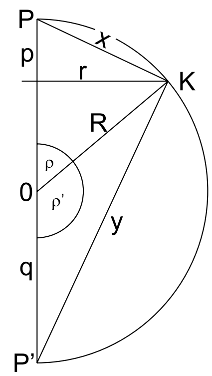
b) Ist der Abstand der Schnittebene vom Kugelmittelpunkt größer als 0 aber kleiner als R, so ist die Schnittlinie ein Kleinkreis mit dem Radius r (r < R).

c) Ist der Abstand der Schnittebene vom Kugelmittelpunkt gleich dem Kugelradius R, so wird die Schnittebene zur Tangentialebene, die Schnittlinie wird zum Tangentialpunkt.



Die im Mittelpunkt auf einer Kreisebene K mit dem Radius r senkrecht stehende Gerade trifft die Kugeloberfläche in den Polen P (Nahpol) und P′ (Fernpol).

Die Abstände des Kreises K von P bzw. P$'$ können auf zwei Arten definiert werden:
a) direkte Abstände x und y von den Polen,
b) sphärische Abstände ρ und ρ' von den Polen. Aus den Abbildungen kann abgelesen werden:



$$\sin\frac{\rho}{2} = \frac{\mathrm{x}}{2\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{x}}; \quad \text{daraus } \mathrm{x}^2 = 2\mathrm{Rp}, \ \mathrm{x} = \sqrt{2\mathrm{Rp}} \ \text{ bzw. } \ \mathrm{y} = \sqrt{2\mathrm{Rq}}.$$

Für die auf der Kugeloberfläche gemessenen kürzesten Abstände des Kreises K von den Polen sind die Zentriwinkel ρ und ρ' Maßzahlen:

$$\sin\frac{\rho}{2} = \frac{\mathrm{x}}{2\mathrm{R}} = \frac{\sqrt{2\mathrm{R\,p}}}{2\mathrm{R}} = \sqrt{\frac{\mathrm{p}}{2\mathrm{R}}},$$

bzw.

$$\sin\frac{\rho'}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{q}}{2\mathrm{R}}}.$$

Aus den letzten beiden Bildern ist der Radius des Kleinkreises direkt ablesbar:

$$\begin{aligned} \mathrm{r} &= \mathrm{R}\cos\varphi, \\ \mathrm{r} &= \mathrm{R}\sin\rho. \end{aligned}$$

Der Großkreis (geodätische Linie) ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf der Kugeloberfläche.

Für die Länge eines Großkreisbogens AB ergibt sich:

$$\widehat{AB} = \mathrm{R}\,\mathrm{arc}\,\alpha = (\pi/180^\circ)\,\mathrm{R}\,\alpha^\circ,$$

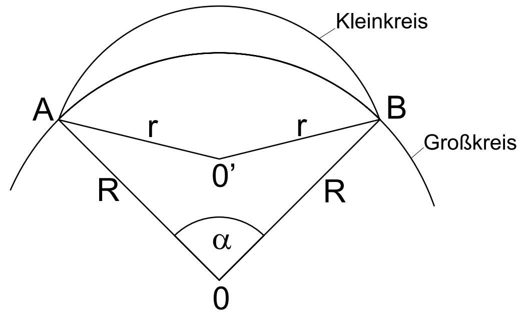
wobei α der Winkel zwischen den Radien nach A und B im Zentrum der Kugel sein soll.

Für die Länge des Kleinkreisbogens AB gilt:

$$\widehat{AB} = \mathrm{r}\ \mathrm{arc}\,\alpha,$$

wobei α jetzt der Winkel ist, den die Kleinkreisradien nach A und B in der Schnittebene des Kleinkreises einschließen.

Der Nachweis dafür, daß der Großkreisbogen zwischen A und B kürzer ist als alle denkbaren Kleinkreisbogen, ist leicht zu führen, indem man die Kleinkreisebene ABO' und die Großkreisebene ABO in der gleichen Ebene zeichnet.



Auf der Erdkugel sind die Meridiane und der Äquator Großkreise, die zum Äquator parallelen Breitenkreise sind Kleinkreise.

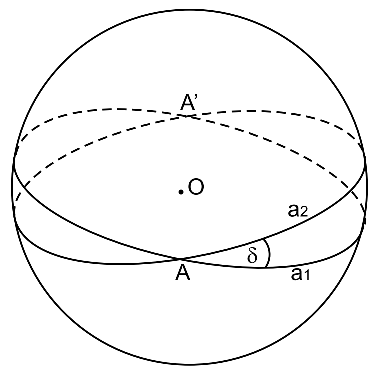
Zwei beliebige Kugelgroßkreise, deren Ebenen nicht zusammenfallen, teilen die ganze Kugel in vier Kugelzweiecke.

$$\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2 = \text{Großkreise},$$

A, A' =Schnittpunkte der Großkreise, diese liegen auf einem Kugeldurchmesser,

$$\delta = \text{Schnittwinkel}.$$

Je zwei der vier Kugelzweiecke sind gleich groß.



Für die Fläche eines Kugelzweiecks mit den Winkeln δ läßt sich folgende Verhältnisgleichung aufstellen:

$$\frac{\text{Fläche Kugelzweieck}}{\text{Fläche Kugel}} = \frac{\mathrm{F_Z}}{\mathrm{F_K}} = \frac{\delta}{2\pi}.$$

Mit

$$\mathrm{F_K} = 4\pi \mathrm{R}^2$$

folgt:

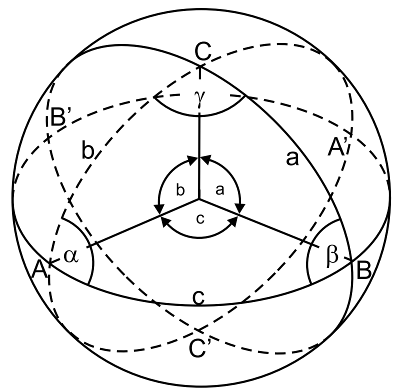
$$\mathrm{F_Z} = 2\delta \quad \text{wenn} \quad R = 1,$$

bzw. $\mathrm{F_Z} = (2\delta \cdot \pi)/180°$, wenn δ in Grad gegeben ist.

2.2 Das sphärische Dreieck und sein Polardreieck

Drei nicht zusammenfallende Ebenen, die alle den Kugelmittelpunkt enthalten, schneiden die Oberfläche der Kugel in 3 Großkreisen. Diese 3 Großkreise teilen die Kugeloberfläche in 8 Dreiecke.

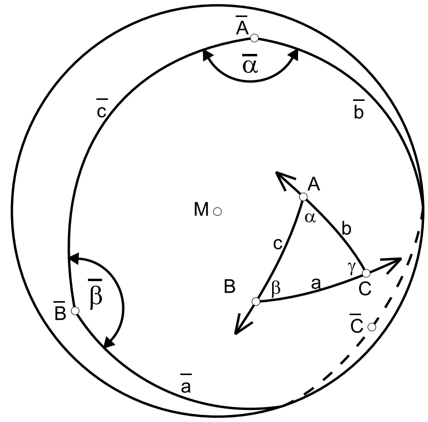
Als Grunddreieck wollen wir das Dreieck ABC mit den Winkeln α, β, γ bezeichnen.
Die Seiten des Dreiecks - die Bögen AB, BC, CA werden im Winkelmaß angegeben und entsprechen den Winkeln zwischen zwei Radien nach den Eckpunkten (a, b, c).
Das Gegendreieck A', B', C' stimmt in den Seiten und Winkeln mit dem Grunddreieck überein.



Desweiteren sind im Bild 3 Scheiteldreiecke $AB'C'$, $BA'C'$ und $CA'B'$ zu erkennen. Diese haben mit dem Grunddreieck einen Winkel und mit dem Gegendreieck eine Seite gemeinsam.
Die 3 Nebendreiecke ABC', ACB' und BCA' haben mit dem Grunddreieck eine Seite und mit dem Gegendreieck einen Winkel gemeinsam.

Wir betrachten das sphärische Dreieck ABC, dessen Seiten a, b, c sich aus den drei Grundkreisebenen ergeben. Die zugehörigen Pole werden mit $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ bezeichnet.

Die Großkreisverbindungen zwischen den Polen $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ lassen das sogenannte Polardreieck entstehen. Es sind jeweils die Pole zu benutzen, die dem Grunddreieck am nächsten stehen (links von der Pfeilrichtung).
Zwischen den Seiten und Winkeln des Grunddreiecks und denen des Polardreiecks bestehen folgende Beziehungen:



- Wird z.B. c in A um $(\pi - \alpha)$ gedreht, so wandert $\bar{C}$ nach $\bar{B}$ um den Winkel $\bar{a}$. Es gilt: $\bar{a} = \pi - \alpha$ und entsprechend $\bar{b} = \pi - \beta$, $\bar{c} = \pi - \gamma$.
- Wird andererseits c in $\bar{A}$ um $\pi - \bar{\alpha}$ gedreht, wandert C nach B um den Winkel a. Es gilt $a = \pi - \bar{\alpha}$ und entsprechend $b = \pi - \bar{\beta}, c = \pi - \bar{\gamma}$.

Die Seiten eines Polardreiecks sind gleich den Supplementen der Winkel des

Grunddreiecks. Die Winkel des Polardreiecks sind gleich den Supplementen der Seiten des Grunddreieckes.

Da jedes sphärische Dreieck das Polardreieck seines Polardreiecks ist, gilt der Satz auch umgekehrt.

Ähnlich wie beim ebenen Dreieck gibt es auch beim sphärischen Dreieck eine Reihe von Sonderfällen, die in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind:

Bezeichnung des sphärischen Dreiecks	Seiten	Winkel
1. gleichschenkliges Dreieck	a = b, c	$\alpha = \beta, \gamma$
2. gleichseitiges Dreieck	a = b = c	$\alpha = \beta = \gamma$
3. rechtwinkliges Dreieck	a, b, c	$\alpha, \beta, \gamma = \pi/2$
4. rechtseitiges Dreieck	a, b, c = $\pi/2$	α, β, γ
5. rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck	a = b, c	$\alpha = \beta, \gamma = \pi/2$
6. rechtseitig-gleichschenkliges Dreieck	a = b, c = $\pi/2$	$\alpha = \beta, \gamma$
7. doppelrechtwinklig-gleichschenkliges oder doppelrechtseitig-gleichschenkliges Dreieck	a, b = c = $\pi/2$	$\alpha, \beta = \gamma = \pi/2$
8. rechtwinklig-gleichseitiges oder rechtseitig-gleichseitiges Dreieck (Kugeloktant)	a = b = c = $\pi/2$	$\alpha = \beta = \gamma = \pi/2$

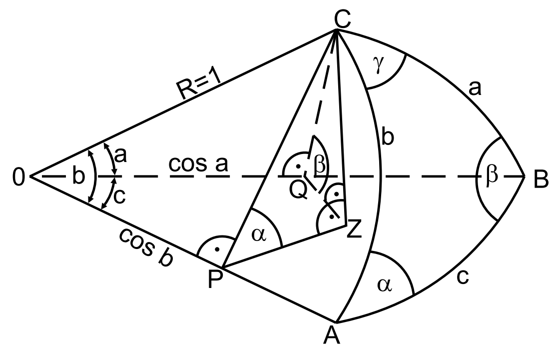
Bemerkenswert in dieser Tabelle sind die Fälle 7 und 8. Hier ist zu sehen, daß die Winkelsumme im sphärischen Dreieck größer als π werden kann.

Bisher sind nur sphärische Dreiecke betrachtet worden, deren Seiten und Winkel $\leq 180°$ waren. Das soll auch im folgenden so sein. Solche Dreiecke werden als Eulersche Dreiecke bezeichnet.

2.3 Grundformeln zur Berechnung sphärischer Dreiecke

Von O aus werden 3 Strahlen gezogen, die die Winkel a, b, c einschließen.

Legt man ebenfalls um O eine Kugel mit dem Radius 1, so entsteht ein Dreikant, welches an der Kugeloberfläche das sphärische Dreieck ABC aufspannt. Nach Ergänzung des Dreikantes durch einige Hilfslinien kann leicht der spärische Sinussatz gefunden werden.



Vom Punkt C wird das Lot auf die Ebene OAB bis Z gefällt. Ebenfalls von C werden die Lote auf die Kanten OA bis P und OB bis Q gefällt. Schließlich wird Z mit P und Q verbunden.

Es gilt:

$$\mathrm{OQ} = \cos \mathrm{a}, \quad \mathrm{CQ} = \sin \mathrm{a}, \quad \mathrm{OP} = \cos \mathrm{b}, \quad \mathrm{CP} = \sin \mathrm{b};$$

im Dreieck CPZ gilt

$$\sin \alpha = \frac{\mathrm{CZ}}{\mathrm{CP}} = \frac{\mathrm{CZ}}{\sin \mathrm{b}}, \quad \text{daraus} \quad \mathrm{CZ} = \sin \alpha \, \sin \mathrm{b};$$

im Dreieck CQZ gilt:

$$\sin \beta = \frac{\mathrm{CZ}}{\mathrm{CQ}} = \frac{\mathrm{CZ}}{\sin \mathrm{a}}, \quad \text{daraus} \quad \mathrm{CZ} = \sin \beta \sin \mathrm{a}.$$

Nach Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für CZ wird der Sinussatz der sphärischen Trigonometrie erhalten:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \mathrm{a}} = \frac{\sin \beta}{\sin \mathrm{b}} \quad \text{(FormelsammlungC.1.).}$$

Die weiteren Formen werden durch zyklische Vertauschung erhalten.

Für nachfolgende Betrachtungen kann außerdem am Dreikant abgelesen werden:

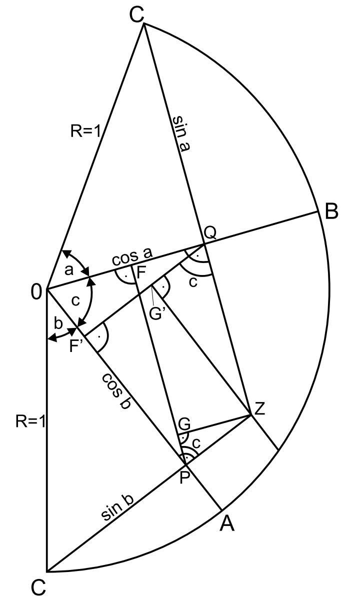
im Dreieck PCZ gilt:

$$\cos \alpha = \frac{\mathrm{PZ}}{\mathrm{PC}} = \frac{\mathrm{PZ}}{\sin \mathrm{b}},$$
$$\mathrm{PZ} = \cos \alpha \sin \mathrm{b};$$

im Dreieck QCZ gilt:

$$\cos \beta = \frac{\mathrm{QZ}}{\mathrm{QC}} = \frac{\mathrm{QZ}}{\sin \mathrm{a}},$$
$$\mathrm{QZ} = \cos \beta \sin \mathrm{a}.$$

Nach Abwicklung des Dreikantes in die Ebene und Ergänzung durch weitere Hilfslinien PF, QF′, ZG und ZG′ lassen sich weitere Beziehungen herstellen:



$\mathrm{OQ} = \mathrm{OF} + \mathrm{FQ} = \mathrm{OF} + \mathrm{GZ}$,

$\mathrm{OQ} = \cos \mathrm{a}$,

$\mathrm{OF} = \cos \mathrm{b} \cos \mathrm{c}$ (Dreieck OFP),

$\mathrm{GZ} = \mathrm{PZ} \cdot \sin \mathrm{c} = \cos \alpha \sin \mathrm{b} \sin \mathrm{c}$

(Dreieck GZP);

Also:

$\cos \mathrm{a} = \cos \mathrm{b} \cos \mathrm{c} + \sin \mathrm{b} \sin \mathrm{c} \cos \alpha$,

ebenso

$$\mathrm{OP} = \mathrm{OF}' + \mathrm{PF}' = \mathrm{OF}' + \mathrm{G}'\mathrm{Z},$$
$$\cos \mathrm{b} = \cos \mathrm{a} \cos \mathrm{c} + \sin \mathrm{a} \sin \mathrm{c} \cos \beta.$$

Diese Ergebnisse sind 2 Formen des sphärischen Seitenkosinussatzes (Formelsammlung C.2.). Die 3. Gleichung wird durch zyklische Vertauschung erhalten.

Desweiteren kann aus der Figur abgelesen werden

$$\mathrm{GF} = Z\mathrm{Q} = \mathrm{PF} - \mathrm{PG},$$

$$\sin \mathrm{a} \cos \beta = \cos \mathrm{b} \sin \mathrm{c} - \sin \mathrm{b} \cos \mathrm{c} \cos \alpha.$$

Diese Gleichung ist eine Form der Fünfstückebeziehungen oder des Sinus - Kosinussatzes. Weitere fünf Formen werden durch zyklische Vertauschung erhalten (Formelsammlung C.4., erster Teil).

Löst man eine Fünfstückebeziehung nach dem cos-Produkt auf, so erhält man eine Form des Kotangentensatzes:

$$\cos \mathrm{c} \cos \alpha = \frac{\cos \mathrm{b} \sin \mathrm{c}}{\sin \mathrm{b}} - \frac{\sin \mathrm{a} \cos \beta}{\sin \mathrm{b}}.$$

Mit

$$\frac{\sin \mathrm{a}}{\sin \mathrm{b}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

folgt:

$$\cos \mathrm{c} \cos \alpha = \cot \mathrm{b} \sin \mathrm{c} - \sin \alpha \cot \beta \quad \text{(Formelsammlung C.5.).}$$

Der Kotangentensatz stellt eine Beziehung zwischen vier aufeinanderfolgenden Stücken im sphärischen Dreieck her.

Weitere Grundformeln zur Berechnung sphärischer Dreiecke werden durch Anwendung bisher bekannter Formeln auf das Polardreieck erhalten.

Die Anwendung des Seitenkosinussatzes auf das Polardreieck liefert den Winkelkosinussatz:

$$\begin{aligned}
\cos \bar{\mathrm{a}} &= \cos \bar{\mathrm{b}} \cos \bar{\mathrm{c}} + \sin \bar{\mathrm{b}} \sin \bar{\mathrm{c}} \cos \bar{\alpha}, \\
\cos(\pi - \alpha) &= \cos(\pi - \beta) \cos(\pi - \gamma) + \sin(\pi - \beta) \sin(\pi - \gamma) \cos(\pi - \mathrm{a}), \\
-\cos \alpha &= \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos \mathrm{a}, \\
\cos \alpha &= -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \mathrm{a}
\end{aligned}$$

(Formelsammlung C.3.).

Der Winkelkosinussatz ist der polare Seitenkosinussatz. Die Anwendung der Fünfstückebeziehungen auf das Polardreieck liefert 6 weitere Formen (Formelsammlung C.4., zweiter Teil).

Sinussatz und Kotangentensatz sind zu sich selbst polar, sie liefern keine neuen Formeln bei Anwendung auf das Polardreieck.

2.4 Abgeleitete Formeln zur Berechnung sphärischer Dreiecke

Die abgeleiteten Formeln waren früher sehr zweckmäßig bei logarithmischen Rechnungen, da hier statt Summen und Differenzen von Winkelfunktionen nur Produkte auftreten. Aber auch gegenwärtig werden die abgeleiteten Formeln noch vorteilhaft benutzt.

Ausgehend vom Seitenkosinussatz

$$\cos \mathrm{a} = \cos \mathrm{b} \cos \mathrm{c} + \sin \mathrm{b} \sin \mathrm{c} \cos \alpha,$$

$$\cos \alpha = \frac{\cos \mathrm{a} - \cos \mathrm{b} \cos \mathrm{c}}{\sin \mathrm{b} \sin \mathrm{c}},$$

wird auf beiden Seiten +1 addiert

$$\begin{aligned}
1 + \cos \alpha &= \frac{\cos \mathrm{a} - \cos \mathrm{b} \cos \mathrm{c}}{\sin \mathrm{b} \sin \mathrm{c}} + \frac{\sin \mathrm{b} \sin \mathrm{c}}{\sin \mathrm{b} \sin \mathrm{c}}, \\
1 + \cos \alpha &= \frac{\cos \mathrm{a} - (\cos \mathrm{b} \cos \mathrm{c} - \sin \mathrm{b} \sin \mathrm{c})}{\sin \mathrm{b} \sin \mathrm{c}} = \frac{\cos \mathrm{a} - \cos(\mathrm{b} + \mathrm{c})}{\sin \mathrm{b} \sin \mathrm{c}}.
\end{aligned}$$

Unter Anwendung der Verwandlungsformel (Formelsammlung A.2.)

$$\cos \mathrm{x} - \cos \mathrm{y} = -2 \sin \frac{\mathrm{x} + \mathrm{y}}{2} \sin \frac{\mathrm{x} - \mathrm{y}}{2}$$

auf den Zähler der rechten Seite (mit $\mathrm{x} = \mathrm{a},\ \mathrm{y} = \mathrm{b} + \mathrm{c}$) wird erhalten:

$$1 + \cos \alpha = \frac{-2 \sin \frac{\mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c}}{2} \sin \frac{\mathrm{a} - \mathrm{b} - \mathrm{c}}{2}}{\sin \mathrm{b} \ \sin \mathrm{c}} = \frac{2 \sin \frac{\mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c}}{2} \sin \frac{\mathrm{b} + \mathrm{c} - \mathrm{a}}{2}}{\sin \mathrm{b} \sin \mathrm{c}},$$

da

$$\sin\frac{b+c-a}{2} = -\sin\frac{a-b-c}{2}.$$

Mit

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{(FormelsammlungA.1.)}$$

und

$$s = \frac{(a+b+c)}{2}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} 2\cos^2\frac{\alpha}{2} &= 2\frac{\sin s\ \sin(s-a)}{\sin b\ \sin c}, \\ \cos\frac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\frac{\sin s\ \sin(s-a)}{\sin b\ \sin c}}. \end{aligned}$$

Diese Formel wird als Halbwinkelformel bezeichnet. Werden beide Seiten der Ausgangsgleichung von 1 subtrahiert, wird ein Ausdruck für $\sin\alpha/2$ erhalten. Ausgehend vom Winkelkosinussatz werden Halbseitenformeln abgeleitet.

Halbwinkel- und Halbseitenformeln sind unter dem Begriff "Halbstücksrelationen" zusammengefaßt (Formelsammlung C.6.).

Die Tangentenformeln (Formelsammlung C.7.) gehen direkt aus den Halbstücksrelationen hervor :

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Die Delambreschen Formelpaare (Formelsammlung C.8.) werden erhalten durch Einsetzen der Halbstücksrelationen in die Additionstheoreme, z.B.:

$$\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) = \cos(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}) = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}.$$

Durch Division zweier Delambreschen Formeln ergeben sich die Neperschen Analogien (Nepersche Tangentenformeln) (Formelsammlung C.9.).

Somit stehen zur Auflösung des sphärischen Dreiecks bisher 69 Formeln zur Verfügung.

2.5 Berechnung allgemeiner und spezieller sphärischer Dreiecke

2.5.1 Die sechs Grundaufgaben zur Berechnung allgemeiner sphärischer Dreiecke

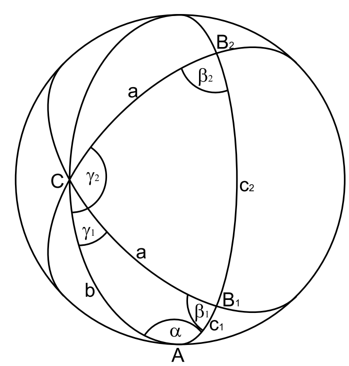
Wenn in einem allgemeinen sphärischen Dreieck drei Stücke gegeben sind, ist seine Berechnung möglich.

Sechs Grundaufgaben mit den im folgenden jeweils gegebenen drei Stücken sind zu unterscheiden:

1. drei Seiten (a, b, c);
2. drei Winkel (α, β, γ);
3. zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel $(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \gamma;\ \mathrm{b}, \mathrm{c}, \alpha;\ \mathrm{c}, \mathrm{a}, \beta)$;
4. eine Seite und die beiden anliegenden Winkel $(\mathrm{a}, \beta, \gamma;\ \mathrm{b}, \gamma, \alpha;\ \mathrm{c}, \alpha, \beta)$;
5. zwei Seiten und der der einen gegenüberliegende Winkel $(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \alpha;\ \mathrm{b}, \mathrm{c}, \beta;\ \mathrm{c}, \mathrm{a}, \gamma)$ oder $(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \beta;\ \mathrm{b}, \mathrm{c}, \gamma;\ \mathrm{c}, \mathrm{a}, \alpha)$;
6. zwei Winkel und die dem einen gegenüberliegende Seite $(\alpha, \beta, \mathrm{a};\ \beta, \gamma, \mathrm{b};\ \gamma, \alpha, \mathrm{c})$ oder $(\alpha, \beta, \mathrm{b};\ \beta, \gamma, \mathrm{c};\ \gamma, \alpha, \mathrm{a})$.

Jede dieser sechs Grundaufgaben kann man mit dem System der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie (Abschnitt 2.3.) oder mit dem System der abgeleiteten Formeln (Abschnitt 2.4.) bzw. unter Verwendung von Formeln aus beiden Systemen lösen. Eine Zusammenstellung von Lösungsvorschlägen für die unter 1. bis 6. jeweils an erster Stelle genannte Kombination von gegebenen drei Stücken ist in der Formelsammlung unter C.10. gegeben. Besondere Beachtung verdienen hier die Fälle 5 und 6. In beiden Fällen muß immer zuerst mit dem Sinussatz gerechnet werden. Der Sinussatz liefert aber im Bereich von 0 bis π zwei Lösungen, so daß eine zweideutige Lösung für das sphärische Dreieck vorliegen kann.

In nebenstehendem Fall 5 sind a, b und α gegeben. Die Möglichkeit der Zweideutigkeit ist gezeigt.
Nur eine Lösung wird es geben, wenn $\mathrm{a} > \mathrm{b}$. Die Entscheidung über den richtigen Winkel β kommt erst in der weiteren Rechnung.

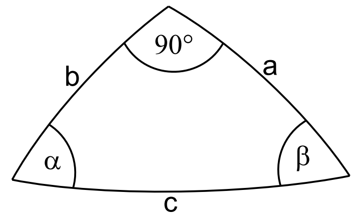


In allen anderen Fällen sollte man die Rechnungen mit dem Sinussatz vermeiden, da andere trigonometrische Funktionen (cos, tan) zur Verfügung stehen, die sich mittels des Vorzeichens eindeutig den Quadranten zuordnen lassen.

Die fehlenden Ausdrücke in einigen Formeln unter C.10. sollten selbständig ergänzt werden.

2.5.2 Rechtwinklige und rechtseitige sphärische Dreiecke

Rechtwinklige sphärische Dreiecke haben mindestens einen rechten Winkel. Ist $\gamma = 90°$, so sind a und b die Katheten, und c ist die Hypothenuse.



Da die trigonometrischen Funktionen für den Winkel 90° die speziellen Funktionswerte $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$ besitzen gilt:

- **Sinussatz**: $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \dfrac{\sin \mathrm{a}}{\sin \mathrm{c}}$.

  Mit $\sin\gamma = 1$ folgt:

  $$\sin\alpha = \frac{\sin \mathrm{a}}{\sin \mathrm{c}}.$$

- **Seitenkosinussatz**: $\cos \mathrm{c} = \cos \mathrm{a} \cos \mathrm{b} + \sin \mathrm{a} \sin \mathrm{b} \cos\gamma$.

  Mit $\cos\gamma = 0$ folgt:

  $$\cos \mathrm{c} = \cos \mathrm{a} \cos \mathrm{b}.$$

- **Kotangentensatz**: $\cos \mathrm{b} \cos\alpha = \sin \mathrm{b} \cot \mathrm{c} - \sin\alpha \cot\gamma$.

  Mit $\cot\gamma = 0$ folgt:

  $$\cos\alpha = \frac{\tan \mathrm{b}}{\tan \mathrm{c}}$$

  oder

  $$\cos \mathrm{b} \cos\gamma = \sin \mathrm{b} \cot \mathrm{a} - \sin\gamma \cot\alpha;$$

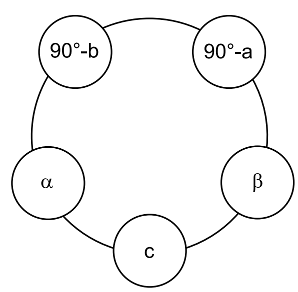
  mit $\cos\gamma = 0$ und $\sin\gamma = 1$ folgt:

  $$\tan\alpha = \frac{\tan \mathrm{a}}{\sin \mathrm{b}},$$

  usw.

Die Verallgemeinerung der Ergebnisse kann in der Neperschen Regel zusammengefaßt werden:

Die Stücke eines rechtwinkligen Dreieckes werden fortlaufend gleichmäßig auf einen Kreis (Neperscher Ring) geschrieben. Der rechte Winkel wird dabei ausgelassen und die Katheten durch die Komplemente ersetzt.



Jetzt gilt die Regel: Der Kosinus eines Stückes im Neperschen Ring ist gleich dem Produkt der Kot**a**ngens der beiden **a**nliegenden Stücke oder gleich dem Produkt der **Si**nus der beiden n**i**chtanliegenden Stücke (Formelsammmlung C.11.).

Folgende Beziehungen sind im Fall ($\gamma = 90°$) ablesbar:

$$\begin{aligned} \sin \mathrm{a} &= \sin\alpha \sin \mathrm{c} = \tan \mathrm{b} \cot\beta, \\ \sin \mathrm{b} &= \sin\beta \sin \mathrm{c} = \tan \mathrm{a} \cot\alpha, \\ \cos\alpha &= \sin\beta \cos \mathrm{a} = \tan \mathrm{b} \cot \mathrm{c}, \\ \cos \mathrm{c} &= \cos \mathrm{a} \cos \mathrm{b} = \cot\alpha \cot\beta, \\ \cos\beta &= \sin\alpha \cos \mathrm{b} = \tan \mathrm{a} \cot \mathrm{c}. \end{aligned}$$

Sind beispielsweise β und c gegeben, und es besteht die Aufgabe, α, a und b jeweils nur mit den gegebenen Stücken zu berechnen, dann sind die folgenden Beziehungen zu benutzen:

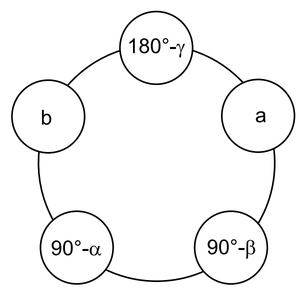
$$\cos \mathrm{c} = \cot\alpha \cot\beta \quad \text{daraus} \quad \cot\alpha = \cos \mathrm{c} \tan\beta,$$

$$\cos\beta = \tan \mathrm{a} \cot \mathrm{c} \quad \text{daraus} \quad \tan \mathrm{a} = \cos\beta \tan \mathrm{c}$$

und

$$\sin \mathrm{b} = \sin\beta \sin \mathrm{c}.$$

Diese Nepersche Regel gilt auch für das rechtseitige Dreieck, nur wird hier auf dem Neperschen Ring die rechte Seite ausgelassen und zusätzlich der der rechten Seite gegenüberliegende Winkel durch den Supplementwinkel ersetzt (Formelsammlung C.11).



2.6 Mehrdeutige Lösungen bei der Berechnung sphärischer Dreiecke

In den Fällen 5 und 6 zur Berechnung allgemeiner sphärischer Dreiecke können sich Mehrdeutigkeiten ergeben. Es sollen deshalb hier einige Regeln angegeben werden, mit deren Hilfe auch bei Rechnung mit dem Sinussatz richtige Lösungen gefunden werden können.

In Abschnitt 2.2. wurde schon gezeigt, daß die Winkelsumme im sphärischen Dreieck größer als 180° werden kann. Im folgenden wird gezeigt, daß die Winkelsumme im sphärischen Dreieck immer größer als 180° ist.

Im Winkelkosinussatz

$$\cos\gamma = -\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \cos \mathrm{c}$$

wird gesetzt

$$\alpha = 180^\circ - \delta,$$

dann gilt:

$$\cos\gamma = \cos\delta\cos\beta + \sin\delta\sin\beta\cos\mathrm{c}$$

($\cos\mathrm{c}$ kann Werte zwischen -1 und $+1$ annehmen).

Setzt man $\cos\mathrm{c} = +1$, also $\mathrm{c} = 0$, dann wird die rechte Seite gewiß zu groß, und es gilt:

$$\begin{aligned}
\cos\gamma &< \cos\delta\cos\beta + \sin\delta\sin\beta,\\
\cos\gamma &< \cos(\delta - \beta),\\
\gamma &> \delta - \beta,\\
\gamma &> 180^\circ - \alpha - \beta,
\end{aligned}$$

also

$$\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ.$$

Der Überschuß der Winkelsumme im sphärischen Dreieck wird als der sphärische Exzeß ε bezeichnet. Im folgenden Abschnitt wird dazu mehr gesagt. Oftmals hilft diese Winkelsummenbedingung, Mehrdeutigkeiten zu beseitigen.

Ohne weitere Beweise sollen noch einige Regeln angegeben werden, mit denen Lösungen beurteilt werden können:

- Die Summe zweier Winkel im sphärischen Dreieck ist kleiner als der um π vergrößerte dritte Winkel ($\alpha + \beta < \pi + \gamma$).
- Jede Seite im sphärischen Dreieck ist größer als die Differenz der beiden anderen ($\mathrm{a} > \mathrm{b} - \mathrm{c}$).
- Jede Summe zweier Seiten im sphärischen Dreieck ist größer als die dritte ($\mathrm{a} + \mathrm{b} > \mathrm{c}$).
- Der Umfang eines sphärischen Dreieckes ist kleiner als 360° ($360^\circ > \mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c}$).
- Im sphärischen Dreieck liegt dem größeren von zwei Winkeln die größere Seite gegenüber. Umgekehrt liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber (wenn $\mathrm{b} < \mathrm{a}$ dann $\beta < \alpha$).

Eine Erweiterung dieser Aussage führt (ohne Ableitung) zur Halbsummenregel:

- Die halbe Summe zweier Winkel im sphärischen Dreieck und die halbe Summe der diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten ist jeweils entweder ein stumpfer, ein rechter oder ein spitzer Winkel.

Es sind bei der Lösung der Grundaufgaben 5 und 6 jeweils 2 Fälle zu unterscheiden.

Grundaufgabe 5.

1. Fall

$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{2} &> \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{2} > \frac{\pi}{2}, \\
\alpha &< \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta > \frac{\pi}{2} && \text{(geometrisch eindeutig)}, \\
\alpha &> \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta < \frac{\pi}{2} \text{ oder } > \frac{\pi}{2} && \text{(geometrisch zweideutig)}.
\end{aligned}$$

2. Fall

$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{2} &< \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{\pi}{2}, \\
\alpha &< \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta < \frac{\pi}{2} \text{ oder } > \frac{\pi}{2} && \text{(geometrisch zweideutig)}, \\
\alpha &> \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta < \frac{\pi}{2} && \text{(geometrisch eindeutig)}.
\end{aligned}$$

Entsprechendes gilt für die Grundaufgabe 6, wobei die Seiten durch die Winkel und die Winkel durch die Seiten zu ersetzen sind.

2.7 Der sphärische Exzeß und die Fläche des sphärischen Dreiecks

Im vorigen Abschnitt wurde der sphärische Exzeß ε als Überschuß der Winkelsumme über 180° definiert.

Da in Eulerschen Dreiecken die Winkelsumme maximal 3π betragen darf, gilt:

$$\varepsilon_{\max} = 2\pi.$$

Ein solches Dreieck ist zu einer Halbkugel mit der Fläche $I = 2\pi R^2$ (bzw. $I = 2\pi$ für die Einheitskugel) entartet. Da die drei Winkel gestreckt sind, verschwinden die Ecken. Offensichtlich ist mit dem maximalen Exzeß auch die maximal mögliche Fläche eines sphärischen Dreieckes überhaupt verbunden. Ein anderes sphärisches Dreieck, dessen Oberfläche

$$I = \frac{1}{2}\pi R^2$$

beträgt (das zugehörige Dreikant könnte der Kugeloktant sein), besitzt die Winkel

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

Der sphärische Exzeß ist in diesem Fall

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2}.$$

Aus dem Vergleich der Flächen und der Exzesse dieser beiden Dreiecke ist ersichtlich, daß beide Größen miteinander zusammenhängen.

Im folgenden soll dieser Zusammenhang untersucht werden.

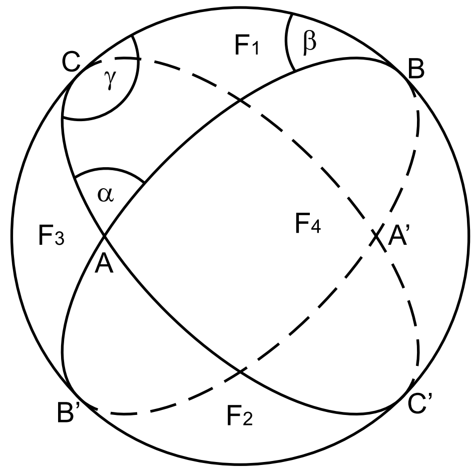
Die Seiten des sphärischen Dreiecks ABC wurden zu vollen Großkreisen ergänzt.

Jetzt zerfällt die Oberfläche der Halbkugel in 4 sphärische Dreiecke, deren Flächen mit F_i bezeichnet werden

$$\frac{O}{2} = F_1 + F_2 + F_3 + F_4,$$

mit

$$F_1 = ABC,$$
$$F_2 = AB'C',$$
$$F_3 = AB'C,$$
$$F_4 = ABC'.$$



Je zwei der genannten sphärischen Dreiecke bilden zusammen ein sphärisches Zweieck, welches jeweils das Grunddreieck ABC enthält:

$$\begin{aligned} F_{AA'} &= F_1 + F_2 = \frac{O}{360°} \cdot \alpha°, \\ F_{BB'} &= F_1 + F_3 = \frac{O}{360°} \cdot \beta°, \\ F_{CC'} &= F_1 + F_4 = \frac{O}{360°} \cdot \gamma°. \end{aligned}$$

Die Summation dieser drei Gleichungen ergibt:

$$3F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = \frac{O\,(\alpha + \beta + \gamma)}{360°}$$

und mit $F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = O/2$ folgt:

$$\begin{aligned} 2F_1 + \frac{O}{2} &= \frac{O(\alpha + \beta + \gamma)}{360°}, \\ 720 \cdot F_1 &= O\,(\alpha + \beta + \gamma) - 180° \cdot O, \\ I &= \frac{O(\alpha + \beta + \gamma - 180°)}{720} = \frac{O \cdot \varepsilon}{720}, \quad (F_1 = I). \end{aligned}$$

Die Proportionalitätskonstante zwischen dem Flächeninhalt I eines sphärischen Dreiecks und seinem Exzeß ist der 720te Teil der Kugeloberfläche O.

Mit $O = 4\pi R^2$ wird erhalten

$$I = \frac{4\pi R^2 \cdot \varepsilon}{4\pi} = R^2 \cdot \varepsilon$$

und bei $R = 1$ folgt

$$I = \operatorname{arc} \varepsilon \quad \text{(Vgl. Formelsammlung C.12.)}$$

Hier sind auch weitere Formeln zur Berechnung von ε unter Einbeziehung der Seiten des sphärischen Dreieckes angegeben.

2.8 Differentialformeln für das sphärische Dreieck

Bei den Anwendungen der sphärischen Trigonometrie ergeben sich oft Situationen, in denen zu berechnen ist, wie sich kleine Änderungen oder Fehler der gegebenen Stücke auf die trigonometrisch berechneten Größen auswirken.

Natürlich kann man die gesuchten Stücke mit veränderten Ausgangswerten noch einmal nach den gleichen Formeln wie bei der ersten Rechnung bestimmen. Einfacher gestaltet sich die Rechnung aber unter Verwendung einer Differentialformel.

Die Herleitung einer Differentialformel (ohne weitere mathematische Betrachtungen) besteht in der partiellen Differentiation der Ausgangsgleichungen nach allen Veränderlichen und Summation der mit den Veränderungsgrößen Δ multiplizierten Differentiale.

Ableitung der Differentialformel für den Kosinussatz

$$\cos a - \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos \alpha = 0,$$

es muß gelten:

$$F(a, b, c, \alpha) = 0 = F(a + \Delta a, b + \Delta b, c + \Delta c, \alpha + \Delta\alpha).$$

Bildung der partiellen Differentialquotienten

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta a} &= -\sin a, \quad \frac{\delta F}{\delta b} = +\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos \alpha, \\ \frac{\delta F}{\delta c} &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha, \quad \frac{\delta F}{\delta \alpha} = \sin b \sin c \sin \alpha, \end{aligned}$$

und mit

$$\frac{\delta F}{\delta a} \cdot \Delta a + \frac{\delta F}{\delta b} \cdot \Delta b + \frac{\delta F}{\delta c} \cdot \Delta c + \frac{\delta F}{\delta \alpha} \cdot \Delta\alpha = 0$$

wird erhalten:

$$\begin{aligned} -\sin a \Delta a \quad &+ \quad (\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos \alpha)\Delta b \\ &+ \quad (\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha)\Delta c \\ &+ \quad \sin b \sin c \sin \alpha \Delta\alpha = 0. \end{aligned}$$

Mit den Fünfstückebeziehungen

$$\begin{aligned} \sin \mathrm{b} \cos \mathrm{c} - \cos \mathrm{b} \sin \mathrm{c} \cos \alpha &= \sin \mathrm{a} \cos \gamma, \\ \cos \mathrm{b} \sin \mathrm{c} - \sin \mathrm{b} \cos \mathrm{c} \cos \alpha &= \sin \mathrm{a} \cos \beta, \end{aligned}$$

und dem Sinussatz

$$\sin \mathrm{b} \sin \alpha = \sin \mathrm{a} \sin \beta,$$

und abschließender Division der Gesamtgleichung durch sin a wird die endgültige Differentialformel für den Seitenkosinussatz erhalten:

$$-\Delta \mathrm{a} + \cos \gamma \Delta \mathrm{b} + \cos \beta \Delta \mathrm{c} + \sin \mathrm{c} \sin \beta \Delta \alpha = 0.$$

Dieser Ausdruck kann nach einer beliebigen gesuchten Veränderung Δ aufgelöst werden.

Die Differentialformel für den Sinussatz (ohne Herleitung) lautet:

$$\cot \mathrm{a} \Delta \mathrm{a} + \cot \beta \Delta \beta - \cot \mathrm{b} \Delta \mathrm{b} - \cot \alpha \Delta \alpha = 0.$$

3 Anwendungen der sphärischen Trigonometrie

3.1 Berechnungen auf der Erdkugel

3.1.1 Sphärische Koordinaten eines Punktes auf der Erdoberfläche

Für die vorliegenden Betrachtungen wird die Erde als Kugel angesehen
($\mathrm{R} = 6371\mathrm{km}$).

Die sphärischen Koordinaten auf der Erdkugel werden als geographische Koordinaten bezeichnet.

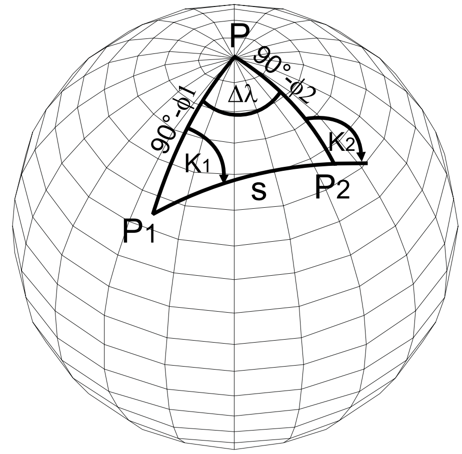
Die Grundebene dieses Koordinatensystems ist der Äquator (Großkreis).

Alle durch die Pole des Grundkreises (Nord- und Südpol) laufenden und senkrecht auf dem Äquator stehenden Großkreise heißen Meridiane. Der Schnittpunkt des Meridians von Greenwich mit der Grundebene ist nach internationaler Übereinkunft der Nullpunkt des Koordinatensystems.

Alle zum Äquator parallelen Kreise in Richtung der Pole (Kleinkreise) werden als Breiten- oder Parallelkreise bezeichnet.

Die sphärischen Koordinaten eines Oberflächenpunktes sind die geographischen Koordinaten Länge λ und Breite φ. Die geographische Länge λ eines Ortes ist der Winkel zwischen der Meridianebene von Greenwich und der Ortsmeridianebene.

Dieser Winkel entspricht dem Großkreisbogen, den die beiden Meridiane auf dem Äquator begrenzen. Die geographische Breite φ eines Ortes ist der sphärische Abstand des Ortes vom Äquator, gemessen im Meridian. Die geographische Länge λ wird vom Greenwicher Meridian von $0°$ bis $180°$ in östlicher bzw. westlicher Richtung gezählt. Die geographische Breite φ zählt man vom Äquator von $0°$ bis $90°$ jeweils als nördliche oder südliche Breite.



Sind die Koordinaten (λ, φ) von zwei Punkten auf der Erdoberfläche gegeben, läßt sich mit einem Erdpol ein sphärisches Dreieck bilden. Das Dreieck enthält die beiden Seiten $(90° - \varphi_1)$ und $(90° - \varphi_2)$ als Teile der Meridiane und den Großkreisbogen zwischen P_1 und P_2. Der Winkel am Pol entspricht der Längendifferenz $\lambda_2 - \lambda_1$. Die Winkel in P_1 und P_2 sind die sogenannten Kurswinkel oder deren Supplemente. Kurswinkel werden wie Azimute in der Geodäsie von Nord über Ost, Süd, West gezählt.

Sind mit $\varphi_1, \varphi_2, \lambda_1$ und λ_2 drei Stücke (2 Seiten und der eingeschlossene Winkel: Grundaufgabe 3) im Dreieck gegeben, so lassen sich die fehlenden Stücke problemlos berechnen. Die Großkreisentfernung s wird erhalten

$$\cos \mathrm{s} = \cos(90° - \varphi_1)\cos(90° - \varphi_2) + \sin(90° - \varphi_1)\sin(90° - \varphi_2)\cos(\lambda_2 - \lambda_1),$$

$$\cos \mathrm{s} = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\Delta\lambda,$$

(P_1 und P_2 haben hier beide östliche Länge und nördliche Breite.)

3.1.2 Der Satz von Legendre - kleine sphärische Dreiecke

Kleine sphärische Dreiecke, deren Seiten $< 1°$ sind, werden als Legendresche Dreiecke bezeichnet. Ein Dreieck in der Ebene, dessen Seiten genauso lang sind wie die Seiten des kleinen Kugeldreiecks bezeichnet man als das dazugehörige Plandreieck.

Nach Legendre läßt sich ein kleines sphärisches Dreieck als ebenes Dreieck berechnen, wenn die Seiten im metrischen Maß eingeführt und die sphärischen Winkel um je $\varepsilon/3$ vermindert werden.

Es soll sein

- sphärisches Dreieck: Winkel: α, β, γ; Seiten: a, b, c (in Grad bzw. Bogenmaß);
- Plandreieck: Winkel: α', β', γ'; Seiten: $\mathrm{a}', \mathrm{b}', \mathrm{c}'$, im linearen Maß, z.B. km.

Behauptung:

$$\alpha' = \alpha - \frac{\varepsilon}{3},\ \beta' = \beta - \frac{\varepsilon}{3},\ \gamma' = \gamma - \frac{\varepsilon}{3}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{\sin\gamma}{\sin \mathrm{c}} &= \frac{\sin\alpha}{\sin \mathrm{a}}, \\ \sin\gamma \sin \mathrm{a} &= \sin\alpha \sin \mathrm{c}, \\ \sin\gamma \sin\frac{\mathrm{a}'}{\mathrm{R}} &= \sin\alpha \sin\frac{\mathrm{c}'}{\mathrm{R}} \end{aligned}$$

mit $\mathrm{a} = \mathrm{a}'/\mathrm{R}, \mathrm{c} = \mathrm{c}'/\mathrm{R}$ (a und c im Bogenmaß, a', c', R in km).

Unter Verwendung der Sinusreihe $\sin \mathrm{x} = \mathrm{x} - \mathrm{x}^3/3!$ kann bei Abbruch nach dem zweiten Glied geschrieben werden:

$$\sin\gamma\,(\frac{\mathrm{a}'}{\mathrm{R}} - \frac{\mathrm{a}'^3}{6\mathrm{R}^3}) = \sin\alpha\,(\frac{\mathrm{c}'}{\mathrm{R}} - \frac{\mathrm{c}'^3}{6\mathrm{R}^3}).$$

Nach Multiplikation mit R und Ausklammern von a' bzw. c' wird erhalten

$$\mathrm{a}'\,(\sin\gamma - \frac{\mathrm{a}'^2 \sin\gamma}{6\mathrm{R}^2}) = \mathrm{c}'\,(\sin\alpha - \frac{\mathrm{c}'^2 \sin\alpha}{6\mathrm{R}^2}).$$

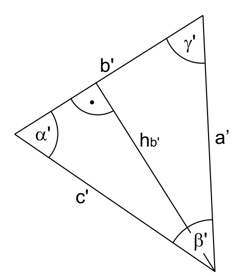
Desweiteren kann gesetzt werden:

$$\mathrm{a}' \sin\gamma' = \mathrm{h}_{\mathrm{b}'} = \mathrm{c}' \sin\alpha',$$

$$\mathrm{a}' = \mathrm{b}' \cos\gamma' + \mathrm{c}' \cos\beta'$$

und

$$\mathrm{c}' = \mathrm{a}' \cos\beta' + \mathrm{b}' \cos\alpha'.$$



Diese Beziehungen sind leicht aus dem ebenen Dreieck mit den Seiten $\mathrm{a}', \mathrm{b}', \mathrm{c}'$ und den Winkeln α', β', γ' ablesbar.

Jetzt gilt, wenn in den Gliedern 2. Ordnung $\sin\gamma = \sin\gamma'$ und $\sin\alpha = \sin\alpha'$ gesetzt wird:

$$\mathrm{a}'\,[\sin\gamma - \frac{\mathrm{h}_{\mathrm{b}'}}{6\mathrm{R}^2}\,(\mathrm{b}'\cos\gamma' + \mathrm{c}'\cos\beta')] = \mathrm{c}'\,[\sin\alpha - \frac{h_{\mathrm{b}'}}{6\mathrm{R}^2}\,(\mathrm{a}'\cos\beta' + \mathrm{b}'\cos\alpha')]$$

und anders geschrieben

$$\mathrm{a}'\,(\sin\gamma - \frac{\mathrm{h_{b'}}\mathrm{b}'\,\cos\gamma}{6\mathrm{R}^2}) - \frac{\mathrm{a}'\mathrm{c}'\,\mathrm{h_{b'}}\,\cos\beta'}{6\mathrm{R}^2} = \mathrm{c}'\,(\sin\alpha - \frac{\mathrm{h_{b'}}\mathrm{b}'\cos\alpha'}{6\mathrm{R}^2}) - \frac{\mathrm{a}'\mathrm{c}'\,\mathrm{h_{b'}}\,\cos\beta'}{6\mathrm{R}^2},$$

$$\mathrm{a}'\,(\sin\gamma - \frac{\mathrm{h_{b'}}\mathrm{b}'\cos\gamma'}{6\mathrm{R}^2}) = \mathrm{c}'\,(\sin\alpha - \frac{\mathrm{h_{b'}}\mathrm{b}'\cos\alpha'}{6\mathrm{R}^2}).$$

In den Gliedern 2. Ordnung kann geschrieben werden

$$\cos\gamma' = \cos\gamma \quad \text{bzw.} \quad \cos\alpha' = \cos\alpha.$$

Außerdem kann in diesen Gliedern 2. Ordnung die Fläche $\mathrm{I} = (\mathrm{h_{b'}}\mathrm{b}')/2$ in die Formel $\varepsilon = \mathrm{I}/\mathrm{R}^2$ eingesetzt werden:

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{h}'_{\mathrm{b}}\,\mathrm{b}'}{2\mathrm{R}^2},$$

also

$$\begin{aligned} \mathrm{a}'\,(\sin\gamma - \frac{\varepsilon}{3}\cos\gamma) &= \mathrm{c}'\,(\sin\alpha - \frac{\varepsilon}{3}\cos\alpha), \\ \mathrm{a}'\,\sin(\gamma - \frac{\varepsilon}{3}) &= \mathrm{c}'\,\sin(\alpha - \frac{\varepsilon}{3}), \end{aligned}$$

da

$$\sin(\gamma - \frac{\varepsilon}{3}) = \sin\gamma\cos\frac{\varepsilon}{3} - \cos\gamma\sin\frac{\varepsilon}{3} = \sin\gamma - \frac{\varepsilon}{3}\,\cos\gamma$$

mit

$$\cos\frac{\varepsilon}{3} = 1 \text{ und } \sin\frac{\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Mit der Behauptung,

$$\alpha' = \alpha - \frac{\varepsilon}{3} \text{ und } \gamma' = \gamma - \frac{\varepsilon}{3}$$

ergibt sich

$$a'\sin\gamma' = \mathrm{c}'\sin\alpha'$$

als Sinussatz der ebenen Trigonometrie.

Damit ist nachgewiesen, daß die Winkel des Plandreiecks um $\varepsilon/3$ kleiner sind als die Winkel des Legendreschen Dreiecks.

3.1.3 Die Loxodrome

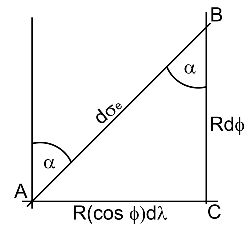
Die Loxodrome ist eine Kurve, die alle Meridiane unter gleichem Winkel schneidet. Auf ihr kann man unter konstantem Kurswinkel von P_1 nach P_2 gelangen. Bei einer Fahrt auf der Orthodrome ändert sich dagegen der Kurswinkel laufend.

Praktisch ist es üblich, die orthodromische Distanz in mehrere Loxodromenstücke aufzuteilen.

Sonderfälle der Loxodromen sind die Meridiane und der Äquator (diese sind gleichzeitig Orthodromen) und die Breitenkreise (Kurswinkel 90°).

Betrachtet wird ein differentielles Stück $\mathrm{d}\sigma_\mathrm{l}$ zwischen zwei Punkten A und B auf einer Loxodromen. A hat die Koordinaten φ und λ und B die Koordinaten $\varphi + \Delta\varphi$ und $\lambda + \Delta\lambda$.

Ein Parallelkreis durch A und ein Meridian durch B schneiden sich in C. Dieses Dreieck ist kein sphärisches Dreieck, weil es nur einen Großkreisbogen (BC) enthält.



Wenn $\Delta\varphi$ und $\Delta\lambda$ genügend klein gehalten werden, kann es als ebenes Dreieck angesehen werden und es gilt:

$$\tan\alpha = \frac{\text{Parallelkreisbogenstück}}{\text{Meridianbogenstück}} = \frac{\mathrm{R}\cos\varphi\,\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{R}\,\mathrm{d}\varphi}$$

und weiter

$$\mathrm{d}\lambda = \frac{\tan\alpha\,\mathrm{d}\varphi}{\cos\varphi},$$

und nach Integration

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \tan\alpha\,[\ln\tan(\frac{\varphi_2}{2} + \frac{\pi}{4}) - \ln\tan(\frac{\varphi_1}{2} + \frac{\pi}{4})],$$

$$\Delta\lambda = \tan\alpha\,(\mathrm{q}_2 - \mathrm{q}_1) = \tan\alpha\,\Delta\mathrm{q}$$

$$(\mathrm{q} = \text{ isometrische Breite, } \mathrm{q}_2 = \ln\tan(\frac{\varphi_2}{2} + \frac{\pi}{4}), \mathrm{q}_1 = \ln\tan(\frac{\varphi_1}{2} + \frac{\pi}{4})).$$

Der Kurswinkel α der Loxodromen ist dann:

$$\tan\alpha = \frac{\Delta\lambda}{\Delta\mathrm{q}} \quad (\Delta\lambda \text{ im Bogenmaß}).$$

Außerdem kann an der Figur abgelesen werden:

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{R}\,\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\sigma_l},$$

$$\mathrm{d}\sigma_l = \frac{\mathrm{Rd}\varphi}{\cos\alpha},$$

und nach Integration wird die Länge σ_l der Loxodromen erhalten:

$$\sigma_l = \frac{\mathrm{R}\,(\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos\alpha} \qquad (\varphi_2 - \varphi_1 \text{ im Bogenmaß}).$$

Diese Formel gibt für den Parallelkreis einen unbestimmten Ausdruck, deshalb gilt hier:

$$\sigma_l = \sigma_{\mathrm{p}} = \mathrm{R}\,\cos\varphi\,\Delta\lambda.$$

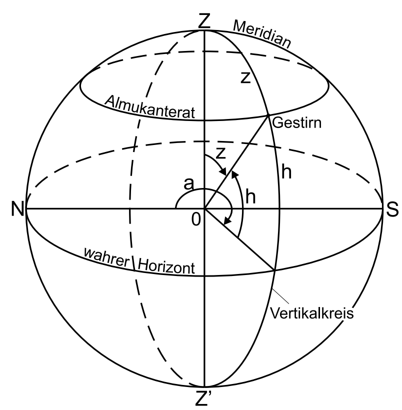
3.2 Anwendungen aus der sphärischen Astronomie

Wie auf der Erdkugel, so werden auch an der Himmelskugel Punkte durch zwei Winkelangaben eindeutig festgelegt. Die Himmelskugel ist eine gedachte Kugel mit dem Radius R = 1, deren Mittelpunkt im Beobachtungsort B auf der Erdkugel oder genauer im Erdmittelpunkt O liegt. Auf diese Himmelskugel werden alle Gestirne von O aus projiziert.

3.2.1 Das Horizontalkoordinatensystem

Das einfachste sphärische Koordinatensystem der Himmelskugel hat als Grundkreis den Horizont, der als Tangentialebene an die Erdkugel im Beobachtungsort B zu denken ist.

Die Tangentialebene steht in B senkrecht zur Lotrichtung und schneidet die Himmelskugel in einem Großkreis, dem scheinbaren Horizont. Der wahre Horizont entsteht durch Parallelverschiebung der Tangentialebene in den Erdmittelpunkt O. Die Richtungen nach Fixsternen fallen von B und von O aus wegen ihrer großen Entfernungen zusammen.



Lediglich für die Körper unseres Sonnensystems ist die tägliche Parallaxe, wie man den Richtungsunterschied nach einem Himmelskörper von B und O aus nennt, meßbar.

Es bedeuten

- Z: **Zenit**
- Z': **Nadir**

$\Big\{$ Pole zum Grundkreis des wahren Horizontes.

• Vertikalkreis oder **Vertikal**:	Großkreis von Z durch das Gestirn nach Z', steht senkrecht auf dem Horizont.
• **Meridian**:	Vertikalkreis durch die Himmelspole und Z, schneidet den Horizont im Nordpunkt N und im Südpunkt S.

Als Himmelspole seien hier die Schnittpunkte der verlängerten Rotationsachse der Erde mit der Himmelskugel angenommen.

I. Vertikal = Vertikal in Ost- West-Richtung.

Als Gestirnskoordinaten werden definiert:

- a = **Azimut**, gemessen im Horizont als Bogen von Nord (N) über Ost, Süd (S), West von $0°$ bis $360°$
  oder als Winkel in Z im gleichen Sinn vom Nordmeridian bis zum Gestirnsvertikal;
- z = **Zenitdistanz**, gemessen als Bogen vom Zenit im Gestirnsvertikal bis zum Gestirn von $0°$ bis $180°$
  oder als Winkel im Kugelmittelpunkt zwischen der Zenitrichtung und der Richtung zum Gestirn;
- h = **Höhenwinkel** = $90° - z$.

Alle Punkte mit gleicher Zenitdistanz z bzw. gleichem Höhenwinkel h liegen auf einem **Almukantarat** oder **Höhenkreis**.

Das Horizontsystem hat den wesentlichen Vorteil, daß seine Koordinaten Azimut und Zenitdistanz mit Instrumenten gemessen werden können, deren Hauptachse durch geeignete Meßelemente (Libelle, mechanische Neigungskompensation) unmittelbar an die Lotrichtung angeschlossen werden können.

Während das Azimut nur relativ erhalten wird, da der Nordpunkt in der Natur nicht markiert ist, ist die Messung der Zenitdistanz bzw. des Höhenwinkels wegen des direkten Anschlusses an die Lotrichtung absolut möglich. Die erreichbaren Genauigkeiten bei der Messung der Koordinaten des Horizontsystems liegen für eine einzelne Messung mit den genauesten Instrumenten (Präzisionstheodolit) bei wenigen Zehntel Bogensekunden.

Der Nachteil des Horizontsystems ist, daß durch die tägliche Drehung der Erde bzw. durch die scheinbare tägliche Drehung der Himmelskugel Azimut und

Zenitdistanz sich in jedem Augenblick ändern. Das bedeutet, daß alle Messungen dieser Koordinaten nur dann verwertbar sind, wenn zugleich die genauen Meßzeitpunkte festgehalten werden.

Außerdem ist bei Angaben von a und z unbedingt anzumerken, für welchen Erdort (φ, λ) diese Werte Gültigkeit haben, da die Lotrichtung als Nullpunkt der z-Zählung und als Definition des Meridians für die a- Zählung dient. Andererseits kann die Messung von a und z zur Bestimmung von φ und λ benutzt werden, wie bald noch gezeigt wird.

3.2.2 Die Äquatorkoordinatensysteme

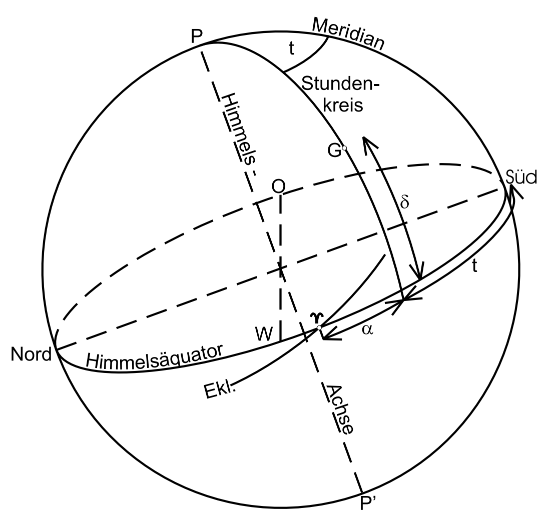
Da es eine Aufgabe der sphärischen Astronomie ist, die Position von Fixsternen in einem unveränderlichen Koordinatensystem zu definieren, ist es notwendig, zu einer anderen Grundebene überzugehen, gegenüber der die relative Position der Sterne nicht von der täglichen Drehung der Erde und auch nicht vom Erdort abhängt.

Eine solche Grundebene ist diejenige, die senkrecht auf der Rotationsachse der Erde steht und durch den Erdmittelpunkt geht. Es ist die Ebene des Erdäquators, die vergrößert bis zum Schnitt mit der Himmelkugel an dieser den Himmelsäquator ausschneidet.

Die Pole des Himmelsäquators sind der Himmelsnordpol P und der Himmelssüdpol P′.

Um im Äquatorsystem Koordinaten festzulegen, wird ein Großkreis durch die Pole und das Gestirn gelegt.

Auf diesem sogenannten **Stundenkreis** wird vom Äquator aus die **Deklination** δ des Sternes von 0 bis 90° nach Norden und von 0 bis −90° nach Süden gezählt. Die zweite Koordinate, der **Stundenwinkel** t, wird als Bogen in der Äquatorebene beginnend vom Schnittpunkt des südlichen Meridianbogens mit dem Himmelsäquator in Uhrzeigerrichtung von 0 bis 360° oder von 0 bis 24° gezählt. Der Stundenwinkel t stellt sich am Pol als Schnittwinkel der Tangenten an Meridian und Stundenkreis dar.



Der Stundenwinkel eines Gestirns kann angesehen werden als die Zeit, die seit der oberen **Kulmination** (Meridiandurchgang) dieses Gestirns vergangen ist.

Da die Zählung des Stundenwinkels t vom Meridian des Beobachtungsortes abhängt, ist er wegen der täglichen Erddrehung proportional zur Zeit veränderlich, während die Deklination δ von der täglichen Erddrehung nicht beeinflußt wird.

Den Durchgang eines Gestirns durch den Südmeridian nennt man die obere Kulmination. Die untere Kulmination desselben Gestirns findet 12 Stunden später beim Durchgang durch den Nordmeridian statt.

Die geographische Breite φ des Beobachtungsortes und die Deklination δ des Sternes bestimmen, ob die untere Kulmination über oder unter dem Horizont stattfindet. Sterne, bei denen die untere Kulmination über dem Horizont erfolgt, werden als Zirkumpolarsterne bezeichnet.

Um auch in der Grundebene eine von der Erddrehung unabhängige Koordinate zu bekommen, verlegt man den Nullpunkt der Zählung an den Sternhimmel, und zwar in den Punkt, in dem zu Frühlingsanfang die Sonne steht, in den Frühlingspunkt Υ (astronomisches Zeichen für das Sternbild Widder). Der Frühlingspunkt ist der Schnittpunkt des Himmelsäquators mit der Ebene der Erdbahn, der sogenannten **Ekliptik**. Diese neu eingeführte Koordinate wird vom Frühlingspunkt aus im Gegenuhrzeigersinn von 0^{h} bis 24^{h} gezählt und heißt **Rektaszension** α.

Alle Gestirne mit gleicher Deklination δ liegen auf einem Parallelkreis, diejenigen mit gleichem Stundenwinkel t bzw. mit gleicher Rektaszension α auf einem Stundenkreis.

Die sphärischen Gestirnskoordinaten α und δ sind unabhängig vom Erdort und der Zeit (Erddrehung).

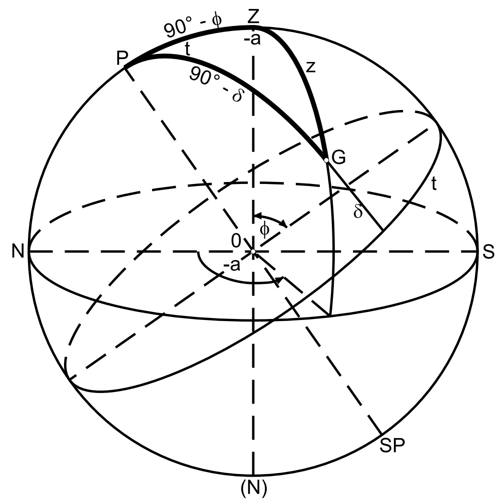
Es werden also zwei Äquatorkoordinatensysteme unterschieden:

- das äquatoriale System erster Art mit den Koordinaten Stundenwinkel t und der Deklination δ;

- das äquatoriale System zweiter Art mit der Rektaszension α und der Deklination δ (auch als siderisches System oder Stellarsystem bezeichnet).

3.2.3 Das nautische Dreieck

Eine Kombination aus Horizont- und Äquatorsystem läßt das nautische oder Polardreieck mit den Ecken P, G, Z entstehen, dessen Seiten $90° - \delta, 90° - \varphi$ und z die Winkel t, -a und q einschließen. Der Winkel q am Gestirn G wird als parallaktischer Winkel bezeichnet. Die Seite $90° - \varphi$ ist für einen Beobachtungsort konstant; die Seite $90° - \delta$ für einen Stern. Die übrigen Stücke des nautischen Dreiecks ändern sich infolge der täglichen Drehung der Erde.



Es sind zwei Fälle im nautischen Dreieck zu unterscheiden:

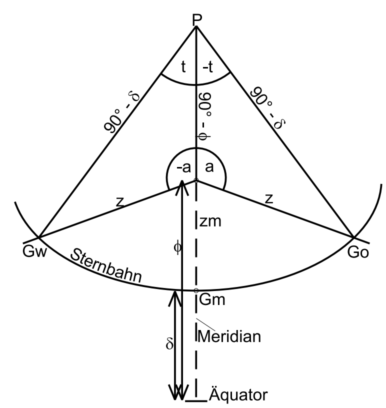
- G_0 östlich vom Meridian;
  t > 180°, die Zenitdistanz z wird bei der scheinbaren täglichen Bewegung kleiner;
- G_w Gestirn westlich vom Meridian;
  t < 180°, die Zenitdistanz wird bei der scheinbaren täglichen Bewegung größer.

Ein Sonderfall des nautischen Dreieckes tritt ein, wenn das Gestirn kulminiert, also wenn es im Meridian steht. Dann ist

$$a = 180°, t = 0°, q = 0°$$

und es gilt:

$$z + \delta = \varphi.$$

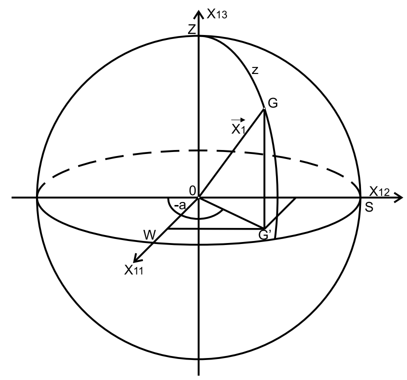


In dem hier gezeigten Fall kulminiert das Gestirn zwischen Zenit und Äquator. Ebenso einfache Zusammenhänge ergeben sich, wenn die Sternbahn zwischen Zenit und Himmelspol verläuft.

3.2.4 Koordinatentransformation mit Drehmatrix

Sphärische Koordinaten lassen sich auch leicht durch rechtwinklige Koordinaten ausdrücken.

Dazu wird ein rechtwinkliges dreiachsiges Koordinatensystem z.B. in das Horizontsystem gelegt. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt im Kugelmittelpunkt O. Die positive x_{11}-Achse zeigt in der Horizontebene in die Westrichtung, die x_{12}-Achse nach Süden und die x_{13}-Achse zum Zenit.



Wird der Kugelradius gleich 1 gesetzt, kann der Vektor $\underline{x_1}$ durch die Komponenten x_{11}, x_{12} und x_{13} ausgedrückt werden:

$$\underline{x_1} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin a \sin z \\ -\cos a \sin z \\ \cos z \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \cos z &= x_{13}, \\ \tan a &= \frac{x_{11}}{x_{12}}, \end{aligned}$$

Zeigt im Äquatorsystem 1. Art die positive x_{21}-Achse in der Äquatorebene nach Westen, die x_{22}-Achse nach Süden und die x_{23}-Achse zum Himmelspol (senkrecht auf der Äquatorebene), kann geschrieben werden

$$\underline{x_2} = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \cos \delta \\ \cos t \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \sin \delta &= x_{23}, \\ \tan t &= \frac{x_{21}}{x_{22}}. \end{aligned}$$

Im Äquatorsystem 2. Art gilt:
x_{31} - liegt in der Äquatorebene und zeigt zum Frühlingspunkt;
x_{32} - steht in der Äquatorebene senkrecht auf x_{31};
x_{33} - zeigt zum Himmelpol (= x_{23});

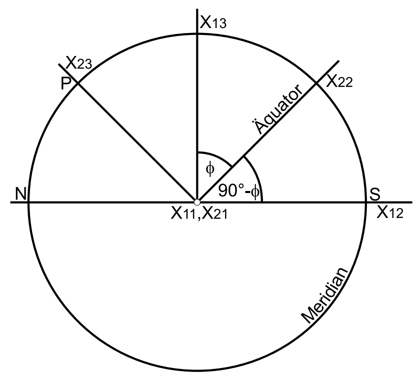
$$\underline{x_3} = \begin{pmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\delta \\ \sin\alpha\cos\delta \\ \sin\delta \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \sin\delta &= x_{33}, \\ \cot\alpha &= \frac{x_{31}}{x_{32}}. \end{aligned}$$

Dreht man das Horizontsystem um die O-W-Achse um den Winkel $(90° - \varphi)$, so geht das Horizontsystem in das Äquatorsystem 1. Art über.

Die Koordinaten a und z lassen sich mit Hilfe einer Rotations- oder Drehmatrix als Funktion von t und δ darstellen. Der Vektor $\underline{x_1}$ wird mit der Drehmatrix $D_1(\varphi)$ multipiziert, und es wird der Vektor $\underline{x_2}$ erhalten:

$$\underline{x_2} = D_1(\varphi)\underline{x_1}$$



mit

$$D_1(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & +\sin\varphi & +\cos\varphi \\ 0 & -\cos\varphi & +\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & +\sin\varphi & +\cos\varphi \\ 0 & -\cos\varphi & +\sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin a \sin z \\ -\cos a \sin z \\ \cos z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\sin a \sin z \\ -\sin\varphi\cos a \sin z + \cos\varphi\cos z \\ +\cos\varphi\cos a\sin z + \sin\varphi\cos z \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sin t\cos\delta \\ \cos t\cos\delta \\ \sin\delta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es lassen sich folgende Gleichungen aufschreiben:

$$\sin t\cos\delta = -\sin a\sin z \quad \text{(Sinussatz)};$$

$$\cos \mathrm{t} \cos \delta = \cos \mathrm{z} \cos \varphi - \sin \mathrm{z} \sin \varphi \cos \mathrm{a} \quad \text{(Fünfstückebeziehung);}$$
$$\sin \delta = \cos \mathrm{z} \sin \varphi + \sin \mathrm{z} \cos \varphi \cos \mathrm{a} \quad \text{(Seitenkosinussatz).}$$

Diese Zusammenhänge (t bzw. δ als Funktionen von a, z und φ) lassen sich auch finden, wenn man die allgemeinen Formeln der sphärischen Trigonometrie auf das nautische Dreieck anwendet.

3.2.5 Einige Bemerkungen zu Zeitsystemen

Da bis vor wenigen Jahrzehnten die bürgerliche Zeit aus astronomischen Vorgängen abgeleitet wurde, sollen hier einige wenige Definitionen zu den bekanntesten Zeitsystemen gegeben werden.

Man bezeichnet als wahre Sonnenzeit eines Ortes, auch wahre Ortszeit (WOZ) genannt, diejenige Zeit, die seit der unteren Kulmination der wahren Sonne vergangen ist. Es gilt also

$$\mathrm{WOZ} = \mathrm{t}_{\odot} \pm 12\mathrm{h},$$

wobei $\mathrm{t}_{\odot}$ der Stundenwinkel der wahren Sonne ist.

Da die Erde sich nach den Keplerschen Gesetzen auf einer Ellipsenbahn mit einer Neigung von $\varepsilon = 23,5°$ gegen die Äquatorebene um die Sonne bewegt, läuft die wahre Sonnenzeit nicht gleichförmig ab. Für die praktischen Zwecke der Zeitrechnung wird eine fiktive mittlere Sonne eingeführt, die die Ableitung einer mittleren (Orts-) Sonnenzeit oder einfach mittleren Ortszeit erlaubt.

Die Differenz zwischen wahrer und mittlerer Zeit - als Zeitgleichung bezeichnet - kann etwas mehr als ± 15 Minuten betragen.

Beide genannten Zeiten, wie auch die im folgenden behandelte Sternzeit sind Ortszeiten, da sie vom Meridian des Beobachtungsortes abhängen.

Die Definition der Sternzeit SZ ist einfach. Es gilt:

$$\mathrm{SZ} = \mathrm{t}_{\Upsilon}$$

wobei t_{Υ} der Stundenwinkel des Frühlingspunktes ist.

Aus dem Bild der Äquatorsysteme erkennt man, daß die Summe aus Stundenwinkel plus Rektaszension eines Sterns zu einem bestimmten Zeitpunkt den Stundenwinkel des Frühlingspunktes, also die Sternzeit, angibt:

$$\mathrm{SZ} = \mathrm{t} + \alpha.$$

Die durch Radiozeitzeichen bekanntgegebene Zeit wird heute nicht mehr direkt aus der Erdrotation abgeleitet, da diese außer den genannten noch weitere Unregelmäßigkeiten aufweist. Die amtliche Zeiteinheit, die sogenannte Atomsekunde wird aus atomaren Vorgängen (10^{10} Schwingungen zwischen zwei hyperfeinen Energieniveaus des Caesiumatoms) abgeleitet und führt zur Atomzeit.

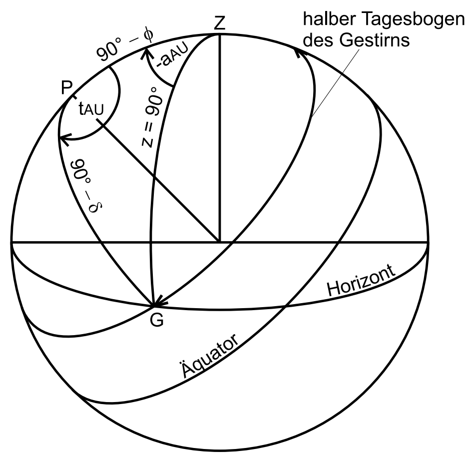
Die durch Radiosignale verbreitete koordinierte Weltzeit UTC (Universal Time Coordinated) basiert auf der Atomzeit. Diese koordinierte Weltzeit wird, wenn nötig, durch Sekundensprünge zur Jahresmitte oder am Jahresende der mittleren Sonnenzeit Greenwich angenähert.

Aus vielen Gründen bilden Kugelzweiecke mit einer Längendifferenz von 15° sogenannte Zeitzonen, deren Zeiten sich jeweils um ganze Stunden von der Weltzeit unterscheiden. Bestimmt wird dieser Unterschied durch den Mittelmeridian dieser Zweiecke.

Z.B. Mitteleuropäische Zeit MEZ = UTC $+1^{\mathrm{h}}$. Der 15° Meridian östlicher Länge ist hier der Mittelmeridian. Das Kugelzweieck wird von $7,5°$ ö.L. und $22,5°$ ö.L. begrenzt. In kleineren Ländern legt man sich immer nur auf eine Zeitzone fest.

3.2.6 Auf- und Untergangsberechnungen - Berechnung der Dämmerung

Das nautische Dreieck für den Zeitpunkt des Auf- oder Unterganges eines Gestirns ergibt sich als Sonderfall eines sphärischen Dreieckes, da die Seite z den Wert $\pi/2$ annimmt. Es liegt also ein rechtseitiges Dreieck vor, in dem für einen gegebenen Beobachtungsort und für ein bestimmtes Gestirn die Seiten $\pi/2-\varphi$ und $\pi/2-\delta$ bekannt sind.



Von Interesse sind nun der Zeitpunkt $\mathrm{t_{AU}}$ und das Azimut a_{AU} des Auf- oder Unterganges eines Gestirns. Für $\mathrm{t_{AU}}$ ergibt sich nach der Neperschen Regel oder aus dem Seitenkosinussatz:

$$\cos \mathrm{z} \quad = \quad \sin\varphi\sin\delta+\cos\varphi\cos\delta\cos\mathrm{t}.$$

Mit $\cos \mathrm{z} = 0$ folgt:

$$\cos \mathrm{t_{AU}} \quad = \quad -\tan\varphi\tan\delta.$$

Das Ergebnis kann in allen vier Quadranten liegen, da für das Aufgangsdreieck und für das Untergangsdreieck analoge Verhältnisse vorliegen. Die Größe $\mathrm{t_{AU}}$ kann auch als halber Tagbogen des Gestirns bezeichnet werden, da sie die Zeit vom Aufgang bis zur Kulmination bzw. von der Kulmination bis zum Untergang des Gestirns darstellt.

Für das Azimut gilt:

$$\cos \mathrm{a}_{\mathrm{AU}} = \frac{\sin\delta}{\cos\varphi}.$$

Ein Gestirn mit $\delta = 0°$ wird unter einem Stundenwinkel von $\mathrm{t} = \pm 6$ Stunden genau im Osten ($\mathrm{a} = 90°$) auf- und im Westen ($\mathrm{a} = 270°$) untergehen (Sonne zu Frühlings- bzw. Herbstanfang). Bei der Sonne bezeichnet man die Abweichungen des Aufgangs- bzw. Untergangsazimut vom Ost-West-Vertikal als Morgen- bzw. Abendweite.

In Wirklichkeit sind jedoch die Verhältnisse etwas schwieriger als hier dargestellt. Man sieht einen Stern schon, ehe er über dem Horizont erscheint, und man sieht ihn noch, wenn er schon unter dem Horizont steht. Ursache für diese Umstände ist die atmosphärische Refraktion, die auf der Brechung des Lichtes in der Erdatmosphäre beruht. Es muß für Auf- und Untergangsrechnungen für die Gestirne der Wert $\mathrm{z} = 90°35'$ gesetzt werden.

Desweiteren muß bei Berechnungen mit der Sonne noch deren Radius beachtet werden. Die Koordinaten α und δ haben für den Mittelpunkt der Sonne Gültigkeit. Die Sonne geht aber für uns auf oder unter, wenn der obere Rand erscheint oder verschwindet. Ist dies der Fall, dann ist der Sonnenmittelpunkt noch oder schon wieder um den Betrag des Radius unter dem Horizont.

Bei einem scheinbaren Sonnenradius von $\mathrm{r} = 16'$ sind deshalb alle Auf- und Untergangsberechnungen mit der Sonne (a und t) mit $\mathrm{z} = 90°35' + 16' = 90°51'$ auszuführen.

Ist $\mathrm{z} = 90°51'$, spricht man vom Beginn der Dämmerung, der entsprechende Stundenwinkel sei t.

Ist $\mathrm{z} = 96°30'$, spricht man vom Ende der bürgerlichen Dämmerung, der Stundenwinkel der Sonne sei $\mathrm{t_b}$. Das menschliche Empfinden besagt, daß es jetzt dunkel ist. $\mathrm{z} = 108°$ definiert das Ende der astronomischen Dämmerung. Der Stundenwinkel der Sonne sei $\mathrm{t_a}$. Jetzt kann mit der Langzeitbelichtung einer Photoplatte begonnen werden. Es gilt:
$\mathrm{Db} = t_b - t$ (Dauer der bürgerlichen Dämmerung),
$\mathrm{Da} = t_a - t$ (Dauer der astronomischen Dämmerung)
mit

$$\begin{aligned}
\cos \mathrm{t} &= \frac{-\sin 51' - \sin\varphi\sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta}, \\
\cos \mathrm{t_b} &= \frac{-\sin 6°30' - \sin\varphi\sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta}, \\
\cos \mathrm{t_a} &= \frac{-\sin 18° - \sin\varphi\sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta}.
\end{aligned}$$

3.2.7 Berechnung von Sonnenuhren

Die einzige Uhr, die die wahre Zeit anzeigt, ist die Sonnenuhr. Sonnenuhren werden heute fast ausschließlich als Schmuckelemente an Häusern, in Gärten oder Parks verwendet. Die Konstruktion, d.h. die Berechnung der Lage des Schattenstabes und der Zifferblatteinteilung läßt sich mit den Mitteln der sphärischen Trigonometrie durchführen.
Die Einteilung der Sonnenuhren in

a) Horizontaluhren,
b) Äquatorialuhren,
c) Vertikaluhren

bezieht sich auf die Lage der Zifferblattebenen im Horizont, parallel zum Äquator oder in einer Vertikalebene (Hauswand).

a) **Horizontaluhr** mit senkrechtem Schattenstab = Gnomon.
Es ist leicht einzusehen, daß gilt:

$$\mathrm{a_S} = \mathrm{a}_\odot \pm 180^\circ$$

mit

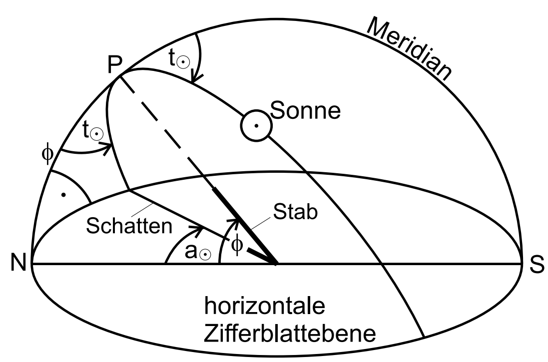
$\mathrm{a_S}$ = Azimut des Schattens,
$\mathrm{a}_\odot$ = Azimut der Sonne.
$\mathrm{a}_\odot$ wird berechnet mit:

$$\cot(-\mathrm{a}_\odot) = \frac{\cos\varphi\tan\delta_\odot - \sin\varphi\cos\mathrm{t}_\odot}{\sin\mathrm{t}_\odot}.$$

Diese Uhr ist sehr unpraktisch, da die Einteilung des Zifferblattes im Lauf des Jahres mit der Sonnendeklination veränderlich ist.

Zeigt bei einer Horizontaluhr der Schattenstab dagegen zum Himmelspol, gestalten sich die Verhältnisse bedeutend einfacher. In dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck NPS kann nach Neper geschrieben werden:

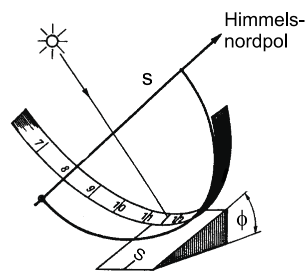
$$\tan\mathrm{a_S} = \sin\varphi\tan\mathrm{t}_\odot.$$



Der Schatten des Stabes fällt immer in die jeweilige Stundenkreisebene. Die Zifferblatteinteilung ist für jede Jahreszeit gültig, da sie unabhängig von der Sonnendeklination ist.

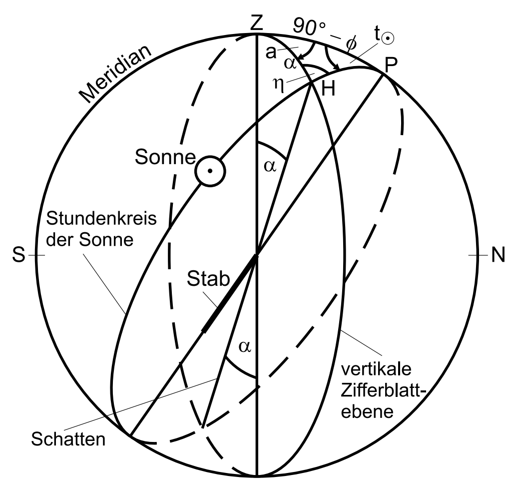
b) **Äquatorialuhr** mit zum Pol gerichtetem Schattenstab.
Diese Uhr hat die einfachste Konstruktion.

Die Zifferblattebene ist meist als Halbring ausgebildet.
Darauf sind die Stundenmarken in Abständen von 1/24tel des Ringumfanges gleichmäßig angeordnet.



c) **Vertikaluhr** mit zum Pol gerichtetem Schattenstab.
Die vertikale Sonnenuhr wird an einer Hauswand oder an einer sonstigen vertikalen ebenen Fläche angebracht.

Im Gegensatz zur Horizontaluhr gibt es eine unendliche Vielfalt von Möglichkeiten für eine Vertikaluhr, da die Zifferblattebene in beliebigem Azimut stehen kann. In die Berechnung der Zifferblatteinteilung geht als weiterer Parameter noch das Azimut a der Hauswand ein.
α = Winkel zwischen der Senkrechten im Befestigungspunkt des Schattenstabes und der Zifferblatteinteilung für einen bestimmten Stundenwinkel.



Die Sonne ist im nebenstehenden Bild vor der Zeichenebene zu denken. Sie befindet sich an der östlichen Himmelshalbkugel.

Im sphärischen Dreieck ZHP wird im Punkt H der Hilfswinkel η eingeführt. Jetzt lassen sich Sinussatz und Fünfstückebeziehungen anwenden:

$$\sin\eta\sin\alpha = -\sin \mathrm{t}_\odot \cos\varphi$$

und

$$\sin\eta\cos\alpha = \cos \mathrm{t}_\odot \sin \mathrm{a} - \sin \mathrm{t}_\odot \cos \mathrm{a} \sin\varphi.$$

Durch Division dieser beiden Gleichungen erhält man:

$$\tan\alpha = \frac{\sin \mathrm{t}_\odot \cos\varphi}{\sin \mathrm{t}_\odot \cos \mathrm{a} \sin\varphi - \cos \mathrm{t}_\odot \sin \mathrm{a}}$$

und damit den gesuchten Winkel α.

Für den Fall einer Süduhr (a = 90°, Hauswand steht genau in Ost-West-Richtung), ergibt sich sehr einfach:

$$\tan\alpha_\mathrm{S} = -\tan \mathrm{t}_\odot \cos\varphi.$$

Den Berechnungen zu Vertikaluhren muß immer eine genügend genaue Bestimmung des Azimutes der Vertikalebene vorausgehen.