

# **Einführung in die Physik I**

**Newton'sche Mechanik und Spezielle Relativitätstheorie**

**Michael H. Soffel**

**Dresden 2008**  
Stand: 3. Februar 2016



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>5</b>
1.1	Was ist Physik? . . . . .	5
1.2	Newton'sche Konzepte von Raum und Zeit . . . . .	6
1.2.1	Vektoren, Skalar- und Vektor-Produkt . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Newtonsche Mechanik</b>	<b>9</b>
2.1	Translationsbewegung punktförmiger Körper . . . . .	9
2.1.1	Ortsvektoren und differenzierbare Funktionen . . . . .	9
2.1.2	Geschwindigkeits- und Beschleunigungs-Vektor . . . . .	13
2.1.3	Meter und Sekunde . . . . .	14
2.1.4	Masse und Kilogramm . . . . .	15
2.1.5	Bezugssysteme . . . . .	15
2.1.6	Wechselwirkungen . . . . .	16
2.1.7	Inertialsysteme und Axiom der Newton'schen Dynamik . . . . .	16
2.1.8	Der kräftefreie Massenpunkt . . . . .	17
2.1.9	Das Äquivalenzprinzip . . . . .	17
2.1.10	Die gravitative Beschleunigung . . . . .	17
2.1.11	Bewegung unter konstanter Beschleunigung . . . . .	18
2.1.12	Weitschuss mit der Kanone . . . . .	18
2.1.13	Das ungedämpfte Federpendel . . . . .	20
2.1.14	Das ungedämpfte schwere Pendel . . . . .	22
2.2	Reibung . . . . .	28
2.2.1	Haftreibung . . . . .	28
2.2.2	Die Münze auf dem Buchrücken . . . . .	29
2.2.3	Gleitreibung . . . . .	30
2.2.4	Freier Fall mit Luftreibung . . . . .	30
2.2.5	Federpendel mit Reibung und Anregung . . . . .	35
2.3	Newtonsches Gravitationsgesetz . . . . .	43
2.3.1	Die drei Kepler'schen Gesetze . . . . .	43
2.3.2	Die Geometrie einer Ellipse . . . . .	44
2.3.3	Integrale der Bewegung . . . . .	47
2.3.4	Bahngleichung; 1tes und 3tes Keplersches Gesetz . . . . .	50
2.3.5	Kepler-Gleichung . . . . .	52
2.3.6	Die elliptische Keplerbahn im Raum . . . . .	55

2.4	Rotationsbewegung ausgedehnter Körper . . . . .	61
2.4.1	Rotationsbewegung um eine feste Drehachse . . . . .	61
2.4.2	Drehimpuls und Drehmoment . . . . .	67
<b>3</b>	<b>Nicht Inertialsysteme</b>	<b>75</b>
3.1	Drehungen um eine feste Achse . . . . .	75
3.2	Rotierende Systeme . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Spezielle Relativitätstheorie</b>	<b>85</b>
4.1	Die Zeitdilatation . . . . .	85
4.1.1	Die Lorentz-Transformation . . . . .	88
<b>5</b>	<b>Prüfungsfragen</b>	<b>95</b>
5.1	Mathematischen Grundlagen . . . . .	95
5.2	Newtonsche Mechanik von Massenpunkten . . . . .	95
5.3	Federkraft und Pendel . . . . .	97
5.4	Reibung . . . . .	100
5.5	Die Keplerschen Gesetze . . . . .	101
5.6	Mechanik ausgedehnter Körper . . . . .	103
5.7	Nicht-Inertiale Systeme . . . . .	105
5.8	Spezielle Relativitätstheorie . . . . .	107

# Kapitel 1

## Einführung

Diese Vorlesung liefert eine Einführung in die Physik für Studenten der Geowissenschaften. Sie wendet sich speziell an Studenten der Geodäsie und der Kartographie. Sie ist bewusst fachspezifisch gehalten, d.h. sie behandelt zentral physikalische Probleme, die für Geowissenschaftler von Relevanz sind. Aus Gründen von Zeitproblemen hat sich im Rahmen eines Bachelor Studienganges bedauerlicherweise ergeben, dass weder eine Vorlesung über Experimentalphysik noch ein physikalisches Praktikum zu realisieren ist. Dies hat zur Folge, dass wenigstens ansatzweise gewisse Aspekte dieser klassischen Veranstaltungen jetzt auf eine gewisse andere Art und Weise abgedeckt werden müssen. Es wird daher versucht, mit Hilfe von Animationen, anstelle von direkt vorgeführten Experimenten, die physikalischen Sachverhalte zu erläutern.

Zentraler Punkt der 2-semesterigen Vorlesung sind physikalische Systeme. Diese werden zunächst eingeführt, bevor eine mathematisch-physikalische Beschreibung erfolgt. Entsprechende dynamische Differenzialgleichungen werden abgeleitet, gelöst und grafisch dargestellt. Für ein vertieftes Verständnis der physikalischen Sachverhalte werden entsprechende Computerprogramme in MAPLE vorgestellt und dem Studenten zur Verfügung gestellt.

Wir wollen uns ganz am Anfang der Vorlesung der Frage zuwenden, was eigentlich Physik ist.

### 1.1 Was ist Physik?

Physik beschreibt eine gewisse Art und Weise, wie der Mensch mit der Natur umgeht. Er zerlegt die Natur in *Systeme*, welche eine gewisse Zahl von Elementen enthalten, welche miteinander wechselwirken. Andere Teile der Welt werden vom System ausgeschlossen. Meist steckt eine bestimmte Genauigkeitsvorstellung hinter der Konstruktion eines Systems. Wenn ich etwa wissen will, wie eine Kugel von einem Tisch im Hörsaal fällt, werde ich vom Erdbeben in Asien absehen können. Wenn mich dagegen die Rotationsbewegung der Erde im Raum mit einer Genauigkeit von besser als einer Mikrobogensekunde interessiert, kann das

Erdbeben ins Zentrum meines Interesses geraten. Den Systemelementen werden dann physikalische Eigenschaften zugeordnet, um ein Modell der Wechselwirkungen innerhalb des Systems zu gewinnen. Die Dynamik der Systemelemente wird dann im Raum studiert. Dies ist das zentrale Anliegen der Physik: zeitliche Veränderungen der Systemelemente im 3-dimensionalen Raum im Rahmen der Newtonschen Theorie, bzw. in der 4-dimensionale Raum-Zeitgeometrie ganz allgemein.

Viele Fragen, welche physikalisch erscheinen, gehören demnach gar nicht in das Gebiet der Physik. Dazu gehört alles, was direkt mit unseren primären Sinneswahrnehmungen wie etwa Schmerz oder subjektiver Erfahrung von Farbe zu tun hat. Farbe eines Objektes wird in Rahmen der Physik mit Wellenlängen von Licht verknüpft, also mit Eigenschaften von elektromagnetischen Wellen, welche sich im Raum ausbreiten. Auch Fragen wie: “Was ist denn nun eigentlich ein Elektron? Was sind Raum und Zeit? Was war vor dem Urknall?,” haben nur sehr eingeschränkte wissenschaftliche Relevanz.

Heutzutage umfasst die physikalische Beschreibung eines geeigneten Systems die Formulierung entsprechender dynamischer Bewegungsgleichungen, sowie deren Lösung und Visualisierung. Die Lösung gelingt für komplexere Systeme in der Regel nur numerisch, d.h. mit den Methoden der numerischen Mathematik. Im Rahmen der Vorlesung werden jedoch nur einfache Systeme betrachtet, wo man mit analytischen Methoden Lösungen der Bewegungsgleichungen erzielen kann. Wie bereits erwähnt, werden Programmstrukturen in der Computer-Algebra Sprache MAPLE diskutiert werden. Dem interessierten Studenten wird dringend nahegelegt, sich mit diesen MAPLE Programmen auseinander zu setzen.

## 1.2 Newton'sche Konzepte von Raum und Zeit

Die Vorlesung beginnt mit dem Thema der Newton'schen Mechanik, basierend auf den Newton'schen Vorstellungen von Raum und Zeit. Der Raum wird idealisierend als 3-dimensionaler Euklidischer Raum, also als  $\mathbb{R}^3$  betrachtet (unabhängig z.B. davon, welche kleine Abstände im Raum prinzipiell messbar sind).

### 1.2.1 Vektoren, Skalar- und Vektor-Produkt

Um einen Punkt im Raum zu markieren werden Koordinaten benötigt. Bezüglich eines irgendwie gewählten Koordinatenursprunges (z.B. der Ort eines Beobachters, Topozentrum genannt) kann man drei *kartesische Koordinaten* einführen, die man zu einem *Vektor*

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

zusammenfasst. Führt man kartesische Basisvektoren

$$\mathbf{e}_x \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_y \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_z \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

ein, so lässt sich der Vektor  $\mathbf{x}$  schreiben als

$$\mathbf{x} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z. \quad (1.3)$$

Vektoren lassen sich addieren und subtrahieren sowie mit einer Zahl multiplizieren. Weitere einfache Operationen mit Vektoren sind das *Skalarprodukt*

$$\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \quad (1.4)$$

und das *Kreuzprodukt*

$$\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 \equiv (y_1 z_2 - z_1 y_2) \mathbf{e}_x + (z_1 x_2 - x_1 z_2) \mathbf{e}_y + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \mathbf{e}_z. \quad (1.5)$$

Mit Hilfe des Skalarproduktes läßt sich die Länge (Betrag) eines Vektors definieren:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}. \quad (1.6)$$

Der Winkel  $\alpha$  zwischen zwei Vektoren  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$  ist gegeben durch:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1| |\mathbf{x}_2|}. \quad (1.7)$$

In MAPLE lassen sich diese Objekte und Relationen einfach programmieren. Dies sieht dann etwa so aus:

```
> with(LinearAlgebra):
> #####
> A := <xA,yA,zA>;
      A :=  $\begin{bmatrix} xA \\ yA \\ zA \end{bmatrix}$ 
> B := <xB,yB,zB>;
      B :=  $\begin{bmatrix} xB \\ yB \\ zB \end{bmatrix}$ 
> DotProduct(A,B);
       $\overline{xA} xB + \overline{yA} yB + \overline{zA} zB$ 
> A &x B;
       $\begin{bmatrix} yA zB - zA yB \\ zA xB - xA zB \\ xA yB - yA xB \end{bmatrix}$ 
```

```
> #####  
> A := <1,2,3>;  
A :=  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$   
> B := <2,2,2>;  
B :=  $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$   
> DotProduct(A,B);  
12  
> A &x B;  
 $\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ 
```



# Kapitel 2

## Newton'sche Mechanik

### 2.1 Translationsbewegung punktförmiger Körper

#### 2.1.1 Ortsvektoren und differenzierbare Funktionen

Denken wir uns nun einen Körper, dessen räumliche Ausdehnung so klein sein soll, dass wir ihn als 'punktförmig' betrachten können. Der Vektor  $\mathbf{x}_K$  markiere die Position des Körpers zu irgendeinem Zeitpunkt in einem geeignet gewählten kartesischen Koordinatensystem.  $\mathbf{x}_K$  wird dann als *Ortsvektor* des Körpers bezeichnet. Bewegt sich der Körper in unserem Koordinatensystem, dann werden die Komponenten des Ortsvektors zeitabhängige Funktionen, d.h.,

$$\mathbf{x}_K = \mathbf{x}_K(t) = \begin{pmatrix} x_K(t) \\ y_K(t) \\ z_K(t) \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

In der Regel werden derartige Ortsvektoren durch stetige, differenzierbare Funktionen beschrieben. Derartige Funktionen wollen wir durch konvergente Potenzreihen beschreiben, d.h. Reihen der Form

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \quad (2.2)$$

von denen wir annehmen, dass die Folge der Partialsummen bis zu einem endlichen Wert von  $n$  zu einem Grenzwert konvergiert.

Folgende Reihen werden von besonderer Bedeutung sein:

$$f_s(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (2.3)$$

$$f_c(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (2.4)$$

$$f_e(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (2.5)$$

wenn  $n!$  (n-Fakultät) definiert ist durch

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 \quad (2.6)$$

für  $n \geq 1$  und  $0! = 1$ . Diese drei Funktionen sind von solcher Bedeutung, dass man ihnen eigene Namen gegeben hat.  $f_s$  heißt Sinus-,  $f_c$  Kosinus- und  $f_e$  Exponential-Funktion,

$$f_s(x) = \sin(x) \quad (2.7)$$

$$f_c(x) = \cos(x) \quad (2.8)$$

$$f_e(x) = \exp(x) \equiv e^x. \quad (2.9)$$

Diese Funktionen sind überall differenzierbar, d.h.  $\forall x \in \mathbb{R}$  existiert der Limes

$$f'(x) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (2.10)$$

Nun ist

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \mathcal{O}(h^2), \quad (2.11)$$

d.h.,

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \quad (2.12)$$

Das Symbol  $\mathcal{O}$  deutet an, welche Glieder vernachlässigt werden. Damit ergeben sich sofort die Ableitungen unserer drei Funktionen. Beispielsweise hat man:

$$f_s'(x) = 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \dots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \cos(x).$$

Es ergibt sich:

$$[\sin(x)]' = \cos(x) \quad (2.13)$$

$$[\cos(x)]' = -\sin(x) \quad (2.14)$$

$$[\exp(x)]' = \exp(x). \quad (2.15)$$

Der Umgang mit solchen Reihen ist mit MAPLE problemlos:

```
> # Funktionenreihen.mws
> #####
> fs := taylor(sin(x), x=0, 10);
      fs := x - 1/6 x^3 + 1/120 x^5 - 1/5040 x^7 + 1/362880 x^9 + O(x^10)
> fc := taylor(cos(x), x=0, 10);
      fc := 1 - 1/2 x^2 + 1/24 x^4 - 1/720 x^6 + 1/40320 x^8 + O(x^10)
> F := taylor(cos(x) + I*sin(x), x=0, 6);
      F := 1 + I x - 1/2 x^2 - 1/6 I x^3 + 1/24 x^4 + 1/120 I x^5 + O(x^6)
```

```

> Fe := taylor(exp(I*x), x=0, 6);
      Fe := 1 + I x - 1/2 x^2 - 1/6 I x^3 + 1/24 x^4 + 1/120 I x^5 + O(x^6)
> #####
> Fs := convert(fs,polynomial);
      Fs := x - 1/6 x^3 + 1/120 x^5 - 1/5040 x^7 + 1/362880 x^9
> Fc := convert(fc,polynomial);
      Fc := 1 - 1/2 x^2 + 1/24 x^4 - 1/720 x^6 + 1/40320 x^8
> subs(x=2.4,Fs); sin(2.4);
      0.6758306963
      0.6754631806
> subs(x=2.4,Fc); cos(2.4);
      -0.7357203748
      -0.7373937155

```

Im obigen Beispiel steht das Symbol 'i' für die imaginäre Einheit, d.h.

$$i^2 = -1. \quad (2.16)$$

Wie man sieht, gilt einfach

$$e^{ix} = \exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x). \quad (2.17)$$

Von dieser Relation wird öfters Gebrauch gemacht.

Zur Erinnerung: die Folge der Partialsummen mit immer mehr Gliedern konvergiert zum exakten Funktionswert.

Die Funktionen  $\sin(x)$  und  $\cos(x)$  haben die übliche geometrische Bedeutung. Wir betrachten dazu ein rechtwinkliges Dreieck mit Innenwinkel  $\alpha$ . Ein derartiger Winkel wird in der Regel im Bogenmaß (rad) angegeben. Oft wird er durch Multiplikation mit  $180^\circ/\pi$  in Grad umgewandelt:

$$\alpha_{\text{Grad}} = \alpha \cdot \frac{180^\circ}{\pi}. \quad (2.18)$$

Dann ist der  $\cos(\alpha)$  ( $\sin(\alpha)$ ) durch das Verhältnis von Ankathete (Gegenkathete) zu Hypotenuse gegeben.

Funktionen wie  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$  und  $\exp(x)$  sind beliebig oft differenzierbar und aus allen Ableitungen an einer Stelle  $x_0$  lassen sich die entsprechenden Reihen aus dem Satz von Taylor wiedergewinnen.

**Satz von Taylor** Eine Funktion  $f$  sei im Intervall  $\mathcal{I}$  beliebig oft differenzierbar,  $x_0 \in \mathcal{I}$ . Dann läßt sich  $f$  an der Stelle  $x \in \mathcal{I}$  annähern durch

$$\mathcal{T}_n(x, x_0) \equiv \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i. \quad (2.19)$$

Hierbei gilt

$$f(x) = \mathcal{T}_n(x, x_0) + R_n(x, x_0), \quad (2.20)$$

wobei das Restglied  $R_n(x, x_0)$  gegeben ist durch

$$R_n(x, x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt. \quad (2.21)$$

Man erkennt leicht, dass man aus den Ableitungen von  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$  und  $\exp(x)$  an der Stelle  $x = 0$  im Limes  $n \rightarrow \infty$  die entsprechenden Funktionsreihen erhält.

Schließlich soll noch vermerkt werden, dass man ganze Funktionsreihen miteinander multiplizieren und dividieren kann, was mit MAPLE einfach gelingt.

Eine Kurve, welche den Ortsvektor eines Partikels als Funktion der Zeit beschreibt heißt *Weltlinie*. Mit MAPLE lassen sie sich leicht grafisch darstellen:

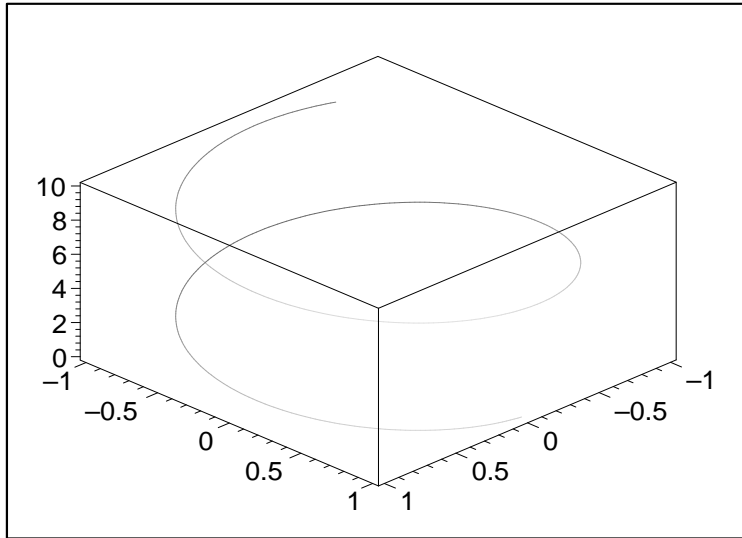
```
> # Weltlinie.mws

> #

> #####
> #

> with(plots):

> spacecurve([sin(t), cos(t),t], t = 0..10,numpoints=400, style=line,
> axes=boxed);
```



### 2.1.2 Geschwindigkeits- und Beschleunigungs-Vektor

Sei  $\mathbf{x}_K(t)$  der Ortsvektor eines punktförmigen Körpers, dann wird

$$\mathbf{v}_K(t) \equiv \frac{d\mathbf{x}_K(t)}{dt} \quad (2.22)$$

*Geschwindigkeitsvektor* des Körpers genannt. Die erste Zeitableitung des Geschwindigkeitsvektors, bzw. die zweite Zeitableitung des Ortsvektors wird *Beschleunigungsvektor*  $\mathbf{a}_K(t)$  genannt:

$$\mathbf{a}_K(t) \equiv \frac{d\mathbf{v}_K(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{x}_K(t)}{dt^2} \quad (2.23)$$

Zur kompakteren Schreibweise wird die Zeitableitung oft mit einem Punkt über der jeweiligen Funktion gekennzeichnet:

$$\dot{f} \equiv \frac{d}{dt}f, \quad (2.24)$$

d.h.

$$\mathbf{v}_K = \dot{\mathbf{x}}_K, \quad \mathbf{a}_K = \dot{\mathbf{v}}_K = \ddot{\mathbf{x}}_K. \quad (2.25)$$

In MAPLE kann mit dem Operator 'diff' differenziert werden.

```
> # Geschwindigkeit und Beschleunigung
> #####
> x := <sin(t),cos(t),0>;
      x :=  $\begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{bmatrix}$ 
> v := <diff(x[1],t), diff(x[2],t), diff(x[3],t)>;
      v :=  $\begin{bmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ 0 \end{bmatrix}$ 
> a := <diff(v[1],t), diff(v[2],t), diff(x[3],t)>;
      a :=  $\begin{bmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \\ 0 \end{bmatrix}$ 
```

Liegt die Beschleunigung  $\mathbf{a}_K(t)$  als Funktion der Zeit vor, dann erhält man die Geschwindigkeit des Körpers durch Integration über die Zeit:

$$\mathbf{v}_K(t) = \int_0^t \mathbf{a}_K(t') dt' + \mathbf{v}_K(0) \quad (2.26)$$

wobei  $\mathbf{v}_K(0)$  eine Integrationskonstante darstellt. Analog gilt:

$$\mathbf{x}_K(t) = \int_0^t \mathbf{v}_K(t') dt' + \mathbf{x}_K(0). \quad (2.27)$$

Die Integration stellt dabei die Umkehroperation zur Differentiation dar. Aus (2.12) ergibt sich ( $n > 0$ )

$$\int_0^t t'^n dt' = \frac{1}{n+1} t'^{n+1} + \text{const.} \quad (2.28)$$

### 2.1.3 Meter und Sekunde

Üblicherweise werden physikalische Größen in entsprechenden physikalischen Einheiten angegeben.

Die Einheit der Länge ist das *Meter*. Gegenwärtig ist es definiert als "die Strecke, die das Licht im Vakuum in einer Zeit von  $1 / 299.792.458$  Sekunden zurücklegt".

Dies impliziert, dass das Meter über einen gewissen Wert der Vakuumlichtgeschwindigkeit festgelegt ist. Diese Definition basiert auf der Erkenntnis, dass

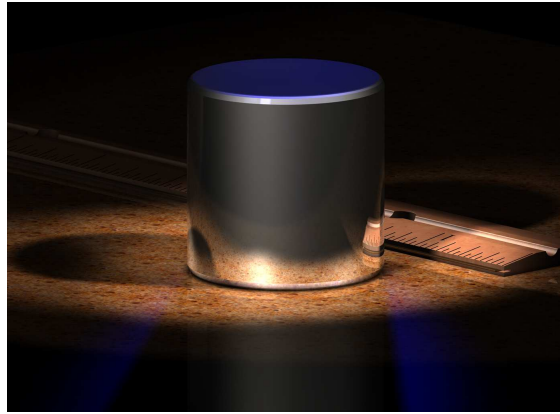


Abbildung 2.1: Der Prototyp des Kilogramms am BIPM, Sevre, Paris.

der Wert der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum unabhängig ist vom Bewegungszustand der Lichtquelle und des Beobachters; andernfalls wäre diese Meterdefinition unsinnig. Wir werden auf diesen Punkt im Kapitel über die Spezielle Relativitätstheorie zurückkommen.

Die Einheit der Zeit ist die *Sekunde*. Gegenwärtig gilt

Eine Sekunde ist das 9 192 631 770-fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids  $^{133}\text{Cs}$  entsprechenden Strahlung.

Details dieser Definition werden an späterer Stelle erläutert werden. Hier genügt es zu wissen, dass Atome aufgrund verschiedener Elektronenzustände in der Hülle Strahlung mit wohldefinierten Frequenzen, bzw. Periodendauern emittieren und eine ganz bestimmte Strahlung dient der Definition der Sekunde. Die Definition des Meters und der Sekunde beziehen sich auf das Internationale Einheitensystem (SI). Man spricht daher auch vom SI-Meter und der SI-Sekunde.

#### 2.1.4 Masse und Kilogramm

Eine grundlegende physikalische Größe, welche jedem Körper zugeordnet wird ist dessen *Masse*  $m_K$ . Die *träge Masse* eines Körpers ist ein Maß für einen inneren Widerstand, gegen jede Art von Beschleunigung. Massen werden üblicherweise durch Waagen, etwa Balkenwaagen miteinander verglichen. Die Einheit der Masse ist das *Kilogramm*, welche über einen Prototyp (das Ur-Kilo) definiert ist.

#### 2.1.5 Bezugssysteme

Um ein Ereignis in Raum und Zeit festzulegen, benötigt man insgesamt drei Raum- und eine Zeit-Koordinate. Ein raum-zeitliches Koordinatensystem hat

zunächst mathematische Bedeutung. Redet man über physikalische Systeme, so werden derartige Koordinaten mit tatsächlichen Ereignissen in unserer Welt (der Satellit ist zu diesem Zeitpunkt an diesem Ort) verknüpft. Dann wird ein solches Koordinatensystem auch Bezugssystem oder Referenzsystem genannt. Ein Referenzsystem hängt in der Regel an einem Beobachter, deren Topozentrum den Ursprung des Bezugssystems bildet. Mit diesem bewegt sich also das Referenzsystem durch die Welt. In der Newton'schen Welt ist die Konstruktion einer Zeitkoordinate problemlos, da von einer absoluten Zeit, welche ohne Bezug auf materielle Gebilde und deren Wechselwirkung verstreicht und bis auf Ursprung und Einheit der Sekunde festgelegt ist.

### 2.1.6 Wechselwirkungen

Die Dynamik eines physikalischen Systems wird durch die darin befindlichen materiellen Gebilde und deren physikalische Wechselwirkungen bestimmt. Im Rahmen dieser Vorlesung sind allein zwei Wechselwirkungen von Bedeutung:

- die gravitative Wechselwirkung und
- die elektromagnetische Wechselwirkung.

Die gravitative Wechselwirkung, bzw. die Schwerkraft bestimmt unser Gewicht, bewirkt dass ein nach oben geworfener Gegenstand in der Regel wieder herunterfällt. Sie bestimmt die Dynamik des Sonnensystems und wesentlich die Bewegung künstlicher Erdsatelliten.

Die elektromagnetische Wechselwirkung umfasst alle elektrischen und magnetischen Phänomene. Sieht man von der Schwerkraft ab, so werden alle Phänomene unseres Lebens von dieser Wechselwirkung bestimmt, die Ausbreitung von Radiosignalen ebenso wie die Farbe einer Rose oder die Wirkungsweise eines LCD-Monitors. Aber auch Phänomene wie Reibung sind elektromagnetischen Ursprungs.

### 2.1.7 Inertialsysteme und Axiom der Newton'schen Dynamik

Um die Bewegung von Körpern bestimmen zu können benötigt man ein Konzept, um die Wechselwirkungen der Körper untereinander oder mit dem Rest der Welt beschreiben zu können. In der Newtonschen Mechanik gelingt dies mit den Konzepten der Kraft und der Inertialsysteme. Wir wollen dazu das grundlegende *Axiom der Newtonschen Dynamik* formulieren:

*Es existiert eine Klasse von Referenzsystemen  $(t, \mathbf{x})$  derart, dass die auf einen Körper wirkende Kraft  $\mathbf{F}_K$ , definiert über*

$$\mathbf{F}_K = m_K \mathbf{a}_K, \quad (2.29)$$



*direkt aus den vorliegenden Wechselwirkungen abgeleitet werden kann. Derartige Referenzsysteme werden Inertialsysteme genannt.*

Wirken mehrere Kräfte auf einen Körper, so addieren sich diese vektoriell zu einer wirkenden Gesamtkraft. Um die Bedeutung derartiger Inertialsysteme zu verstehen betrachten wir folgendes System:

### 2.1.8 Der kräftefreie Massenpunkt

**System 1 (S1): kräftefreier Massenpunkt** Wir betrachten einen einzigen Massenpunkt auf den keine Kräfte wirken sollen. In einem Inertialsystem gilt dann:

$$m_K \mathbf{a}_K = 0,$$

d.h. die Beschleunigung des Körpers verschwindet,

$$\mathbf{a}_K = 0. \quad (2.30)$$

Dies führt uns auf

$$\mathbf{v}_K(t) = \text{const.} = \mathbf{v}_K \quad (2.31)$$

und

$$\mathbf{x}_K(t) = \mathbf{v}_K t + \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_K(t - t_0). \quad (2.32)$$

Ein kräftefreier Körper bewegt sich in einem Inertialsystem geradlinig und gleichförmig. Dies charakterisiert gerade ein Inertialsystem: ein Referenzsystem ist dann inertial, wenn sich ein kräftefreier Körper geradlinig und gleichförmig bewegt.

Die erste Kraft die wir betrachten wollen ist die Schwerkraft (Gravitation), welche von jeder Masse ausgeht. Hier stellt man sich vor, dass jede Masse ein sogenanntes Gravitationsfeld produziert, welches mathematisch durch eine Gravitationspotenzial  $U(t, \mathbf{x})$  beschrieben wird.

### 2.1.9 Das Äquivalenzprinzip

Das sogenannte Äquivalenzprinzip sagt aus, dass in einem äußeren Gravitationsfeld (hervorgerufen durch die Massen anderer Körper) im Vakuum (d.h. ohne Luftreibung) alle hinreichend kleinen Körper gleich schnell fallen, die Gravitationsbeschleunigung  $\mathbf{a}_G$  also unabhängig vom fallenden Körper selbst ist.

### 2.1.10 Die gravitative Beschleunigung

In der Nähe der Erdoberfläche hat  $\mathbf{a}_G$  den Wert

$$|\mathbf{a}_G| = g = 9,81 \text{ ms}^{-2}. \quad (2.33)$$

Genaue Messungen zeigen, dass sich der Wert von  $\mathbf{a}_G$  an verschiedenen Orten etwas unterscheidet.  $\mathbf{a}_G$  nimmt mit wachsendem Abstand von der Erdoberfläche ab - und zwar umgekehrt proportional vom Quadrat des Abstandes vom Erdmittelpunkt. Ein und derselbe Körper wiegt in großer Höhe etwas weniger als in Höhe des Meeresspiegels. Da die Erde keine Kugelgestalt aufweist, hängt die Schwerebeschleunigung auch noch von Länge und Breite des Beobachters ab. In guter Näherung weist  $\mathbf{a}_G$  in Richtung zum Erdmittelpunkt.

### 2.1.11 Bewegung unter konstanter Beschleunigung

**S2: Bewegung unter konstanter Beschleunigung** Wir wollen die Bewegung eines Massenpunktes unter Wirkung der als konstant betrachteten Erdbeschleunigung in einem erdfesten Inertialsystem an der Erdoberfläche studieren. Aus

$$\mathbf{a}_K = \mathbf{a}_G$$

folgt:

$$\mathbf{v}_K(t) = \mathbf{a}_G t + \mathbf{v}_0 \quad (2.34)$$

und

$$\mathbf{x}_K(t) = \frac{1}{2} \mathbf{a}_G t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{x}_0. \quad (2.35)$$

### 2.1.12 Weitschuss mit der Kanone

**S3: Weitschuss mit der Kanone (Müller et al., 2007)** Ein Granatwerfer wird vor einem hohen Bahndamm in Stellung gebracht. Es soll ein Ziel hinter dem Bahndamm in 620 m Entfernung, das aber 50 m höher liegt, getroffen werden. Die Mündungsgeschwindigkeit der Granate beträgt 91 m/s. Der Luftwiderstand soll vernachlässigt werden. Welcher Winkel  $\alpha$  gegenüber der Horizontalen muss eingestellt werden?

Hier wird die Funktion

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad (2.36)$$

benötigt werden.

Die krummlinige Bewegung wird zweckmässig in der  $x, y$ -Ebene dargestellt, wobei die  $y$ -Richtung in (negative) Lotrichtung weise (siehe Abbildung 2.2).

$$x_1 = 620 \text{ m} \quad y_1 = 50 \text{ m} \quad v_{x0} = v_0 \cos \alpha \quad v_{y0} = v_0 \sin \alpha$$

mit  $v_0 = 91 \text{ m/s}$ . Um die Bahngleichung  $y(x)$  zu ermitteln, beschreiben wir die Bewegung in der  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung zunächst getrennt. In  $x$ -Richtung ist

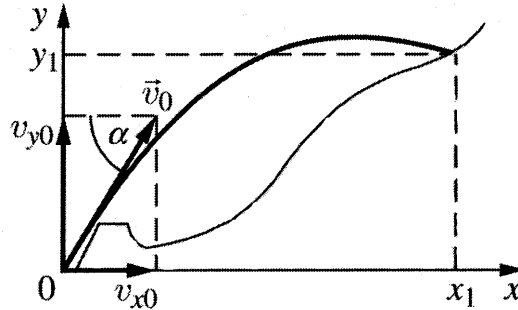


Abbildung 2.2: Geometrie beim Kanonenproblem (S3).

keine Beschleunigung vorhanden. Die Bewegung ist daher gleichförmig:

$$x = v_{x0}t = (v_0 \cos \alpha)t.$$

In negativer  $y$ -Richtung wirkt hingegen die Fallbeschleunigung:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{y0}t = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t.$$

Löst man die erste Gleichung nach  $t$  auf und setzt den Ausdruck  $x/(v_0 \cos \alpha)$  für  $t$  in die zweite Gleichung ein, so erhält man die Bahngleichung  $y(x)$

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}x^2 + (\tan \alpha)x$$

d.h. die Bahn wird durch eine Parabel beschrieben. Wegen  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  ist  $1/\cos^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$ . Setzt man dies für den Zielpunkt  $x_1, y_1$  ein, so hat man

$$y_1 = -\frac{gx_1^2}{2v_0^2}(1 + \tan^2 \alpha) + x_1 \tan \alpha.$$

Die Normalform dieser quadratischen Gleichung lautet:

$$\tan^2 \alpha - \frac{2v_0^2}{gx_1} \tan \alpha + \frac{2v_0^2 y_1}{gx_1^2} + 1 = 0.$$

Daraus folgt

$$\tan \alpha = \frac{v_0^2}{gx_1} \pm \sqrt{\frac{v_0^4}{g^2 x_1^2} - \frac{2v_0^2 y_1}{gx_1^2} - 1}.$$

Daraus ergeben sich zwei mögliche Einstellwinkel:  $\alpha_1 = 65.1^\circ$  und  $\alpha_2 = 29.5^\circ$ . Wegen des hohen Bahndammes wird der größere Winkel gewählt.

### 2.1.13 Das ungedämpfte Federpendel

**S4: Das ungedämpfte Federpendel (einfacher harmonischer Oszillator)** Eine Masse  $m$  befinde sich am Ende einer Feder zunächst im Ruhezustand. Diese definiere den Ursprung eines entlang der Feder gerichteten 1-dimensionalen Referenzsystems mit Koordinate  $x$ . Wird die Feder dann eine Strecke  $x_K$  ausgelenkt, so ist die wirkende Kraft ohne Reibung in guter Näherung durch das *Hook'sche Gesetz* gegeben. Dieses lautet: die wirkende Kraft ist proportional zur Auslenkung. Mathematisch ausgedrückt bedeutet dies:

$$F = -kx_K \quad (2.37)$$

wobei  $k$  Federkonstante genannt wird. Das Newton'sche Axiom liefert uns dann die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x}_K = -kx_K$$

bzw.

$$\ddot{x}_K + \omega^2 x_K = 0 \quad (2.38)$$

mit

$$\omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Dies ist die Differenzialgleichung des einfachen harmonischen Oszillators. Die Lösungen sind gegeben durch

$$x_K(t) = \sin \omega t, \quad \cos \omega t$$

oder Linearkombinationen dieser. Wir wählen

$$x_K(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t). \quad (2.39)$$

Die Lösung ist damit eine reine Sinus- bzw. Kosinusschwingung. Man überprüft leicht, dass die intuitive Benennung der Konstanten sinnvoll war, denn

$$x_K(0) = x_0$$

bezeichnet die Anfangsauslenkung und

$$\dot{x}_K(0) = -\omega x_0 \sin(0) + v_0 \cos(0) = v_0$$

die Anfangsgeschwindigkeit. Schreibt man die Lösung in der Form

$$x_K(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (2.40)$$

so wird  $A$  die *Amplitude* und  $\varphi$  die *Phase* der Schwingung genannt. Wegen  $v_K(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$  gilt:  $x_0 = A \cos \varphi$  und  $v_0 = -A\omega \sin \varphi$  und damit

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{v_0}{\omega x_0}\right), \quad (2.41)$$

wenn  $\arctan$  die inverse  $\tan$ -Funktion bezeichnet. Für die Amplitude findet man:

$$A = \frac{x_0}{\cos \varphi} = x_0 \sqrt{1 + \tan^2 \varphi} = x_0 \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{\omega^2 x_0^2}}. \quad (2.42)$$

Wir definieren

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k x_K^2 \equiv U(x) \quad (2.43)$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v_K^2. \quad (2.44)$$

$E_{\text{pot}}$  wird *potenzielle Energie*,  $E_{\text{kin}}$  *kinetische Energie* genannt. Wir berechnen die Summe aus potenzieller und kinetischer Energie. Dazu benutzen wir, dass

$$x_K = A \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{und} \quad v_K = \dot{x}_K = -A\omega \sin(\omega t + \varphi).$$

Setzen wir  $\omega t + \varphi \equiv \Phi$  und beachten, dass  $k/m = \omega$  so ist

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} k \left( x_K^2 + \frac{m}{k} v_K^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} k \left( A^2 \cos^2 \Phi + \frac{1}{\omega^2} A^2 \omega^2 \sin^2 \Phi \right) \\ &= \frac{1}{2} k A^2 (\cos^2 \Phi + \sin^2 \Phi). \end{aligned}$$

Die Gesamtenergie als Summe potenzieller und kinetischer Energie ergibt sich also zu

$$E = \frac{1}{2} k A^2, \quad (2.45)$$

und ist demnach zeitunabhängig. Sie stellt eine Erhaltungsgröße dar, die man auch Integral der Bewegung nennt. Die Bewegungsgleichung des einfachen harmonischen Oszillators kann man auch in der Form

$$\boxed{E = \frac{1}{2} m v_K^2 + U(x)} \quad (2.46)$$

angeben woraus sich die Beziehung

$$v_K^2 = \frac{2E}{m} - \frac{kx_K^2}{m} \quad (2.47)$$

ergibt. Im Raum  $(v, x)$ , welcher *Phasenraum* genannt wird, erfolgt die Bewegung damit längs elliptischer Trajektorien. Für  $k = m = \omega = 1, \varphi = 0$  hat man einfach  $x_K(t) = A \cos t, v_K(t) = A \sin t$ , d.h. die Bewegung erfolgt auf Kreisen im Phasenraum, wobei der Radius des Kreises die konstante Gesamtenergie beschreibt.

### 2.1.14 Das ungedämpfte schwere Pendel

**S5: Das ungedämpfte schwere Pendel** Wir betrachten einen (starren) Faden der Länge  $l$  an dem eine Masse  $m$  befestigt ist. Dieses fest montierte Pendel schwingt im Gravitationsfeld der Erde, wobei wir die Luftreibung vernachlässigen wollen.

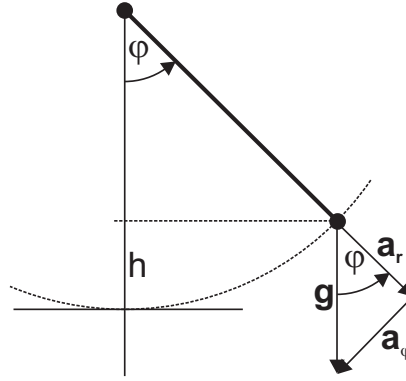


Abbildung 2.3: Geometrie im Problem des schweren Pendels

Man erkennt, dass der Ausschlagswinkel  $\varphi$  eine zweckmässige Koordinate des Problems darstellt. Mathematisch bedeutet dies, dass es oft zweckmässig ist anstelle von kartesischen Koordinaten andere zu verwenden. Wir wollen jetzt in der  $x, y$ -Ebene sogenannte Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  einführen (Abb. 2.4). Sie sind definiert über

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (2.48)$$

bzw.

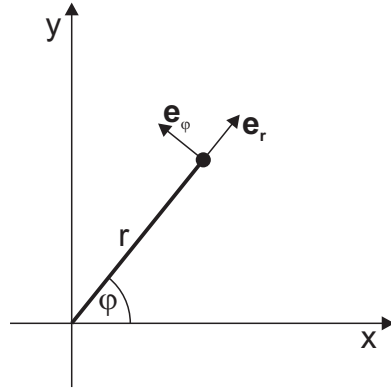
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x). \quad (2.49)$$

Statt der Basisvektoren  $\mathbf{e}_x$  und  $\mathbf{e}_y$  führen wir ortsabhängige Basisvektoren  $\mathbf{e}_r$  und  $\mathbf{e}_\varphi$  ein.  $\mathbf{e}_r$  weise in radiale Richtung:

$$\mathbf{e}_r = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y \quad (2.50)$$

mit  $(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = 0)$ :

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = (\cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y)^2 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1.$$

Abbildung 2.4: Polarkoordinaten in der  $x, y$ -Ebene.

Der Einheitsvektor  $\mathbf{e}_\varphi$  stehe senkrecht auf  $\mathbf{e}_r$  und weise in wachsende  $\varphi$ -Richtung. Es gilt

$$\mathbf{e}_\varphi = \frac{d\mathbf{e}_r}{d\varphi} = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y, \quad (2.51)$$

denn

$$\mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi = (-\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y)^2 = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

und

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\varphi = (\cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y) \cdot (-\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y) = -\sin \varphi \cos \varphi + \sin \varphi \cos \varphi = 0.$$

Wir betrachten jetzt ein Partikelchen, welches sich in der  $x, y$ -Ebene bewegt.

Den Ortsvektor schreiben wir als

$$\mathbf{x}_K = r_K \mathbf{e}_r. \quad (2.52)$$

Für den Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}_K(t)$  gilt dann

$$\mathbf{v}_K = \frac{d\mathbf{x}_K}{dt} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \frac{d\mathbf{e}_r}{d\varphi},$$

wobei der Punkt wieder die Zeitableitung bezeichnet,

$$\dot{f} = \frac{df}{dt}.$$

Damit ergibt sich

$$\mathbf{v}_K = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi. \quad (2.53)$$

Für den Beschleunigungsvektor  $\mathbf{a}_K$  finden wir

$$\mathbf{a}_K = \ddot{r} \mathbf{e}_r + \dot{r} \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + \dot{r} \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + r \ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt}.$$

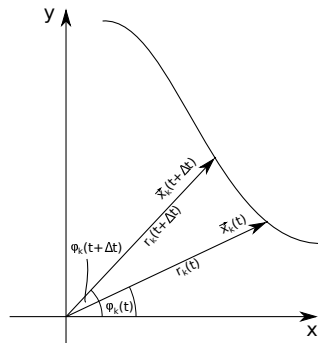


Abbildung 2.5: Lage und zeitliche Änderung von Polarwinkel und Radius in der  $x$ - $y$ -Ebene.

Nun ist

$$\frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \frac{d\mathbf{e}_\varphi}{d\varphi} = \dot{\varphi}(-\cos \varphi \mathbf{e}_x - \sin \varphi \mathbf{e}_y) = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_r,$$

also

$$\mathbf{a}_K = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi. \quad (2.54)$$

Wir kommen jetzt zum Problem des Fadenpendels zurück. Zur Formulierung des Newtonschen Axioms zerlegen wir die auf die Masse  $m$  wirkende Gesamtkraft in eine radiale und eine tangenziale Komponente. Die radiale Komponente dient dazu die Fadenspannung aufrecht zu erhalten, so dass nur die Beschleunigung in  $\varphi$ -Richtung betrachtet werden muss, um die zeitliche Änderung von  $\varphi$  berechnen zu können. In (2.54) kann  $r = l = \text{const.}$  gesetzt werden. Wir haben dann

$$a_\varphi = l\ddot{\varphi} = -g \sin \varphi$$

bzw. die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (2.55)$$



Wir wollen zunächst die Bewegung für kleine Ausschläge betrachten und setzen dazu  $\sin \varphi \simeq \varphi$ . In diesem Fall lautet die genäherte Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0, \quad (2.56)$$

es handelt sich also um die Gleichung des harmonischen Oszillators. Die Lösung hierfür ist durch

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right) + \dot{\varphi}_0 \sqrt{\frac{l}{g}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right) \quad (2.57)$$

gegeben. Die Schwingungsdauer ( $\arg = 2\pi$ )

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2.58)$$

ist unabhängig vom Ausschlag, solange dieser nur hinreichend klein ausfällt.

Auch in diesem Fall findet man eine Größe  $E$ , die Gesamtenergie, welche zeitunabhängig ist. Wir wollen die potenzielle Energie des Pendels in der Ruhelage bei  $\varphi = 0$  als Null annehmen. Die Höhe des Pendels  $h$  über der Nulllage ist dann durch

$$h = l(1 - \cos \varphi)$$

gegeben (siehe Abb. 2.3). Die potenzielle Energie des Pendels ergibt sich damit zu

$$U(\varphi) = mgh = mgl(1 - \cos \varphi) = 2mgl \sin^2\left(\frac{1}{2}\varphi\right). \quad (2.59)$$

Für kleine Ausschläge ist  $\sin^2(\varphi/2) \simeq \varphi^2/4$ , so dass die potenzielle Energie

$$U \simeq \frac{1}{2}mgl\varphi^2$$

die uns bereits vom harmonischen Oszillator bekannte Gestalt annimmt.

Mit der Geschwindigkeit  $v_K = l\dot{\varphi}$  und der kinetischen Energie (2.44) ist die Gesamtenergie  $E$  durch

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + 2mgl \sin^2\left(\frac{1}{2}\varphi\right) \quad (2.60)$$

gegeben. Aus ihr folgt:

$$\dot{\varphi} = \pm \sqrt{\frac{2E}{ml^2} - \frac{4g}{l} \sin^2\left(\frac{1}{2}\varphi\right)}. \quad (2.61)$$

Betrachtet man den Punkt maximalen Ausschlags wo  $v_K = 0$  gilt, so findet man

$$E = 2mgl \sin^2 \left( \frac{1}{2} \varphi_{\max} \right)$$

also

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm 2\sqrt{\frac{g}{l} \left[ \sin^2 \left( \frac{1}{2} \varphi_{\max} \right) - \sin^2 \left( \frac{1}{2} \varphi \right) \right]}$$

bzw.

$$2\sqrt{\frac{g}{l}} t = \int_{\varphi_0}^{\varphi_t} \frac{d\varphi}{\pm \sqrt{\sin^2 \left( \frac{1}{2} \varphi_{\max} \right) - \sin^2 \left( \frac{1}{2} \varphi \right)}}.$$

Wir wollen nun versuchen mit Hilfe dieser Formel Aussagen über die Schwingungsperiode zu gewinnen. Nehmen wir das Integral von  $\varphi_0 = 0$  bis  $\varphi_t = \varphi_{\max}$ , so beschreibt dieses ein Viertel der gesamten Schwingungsperiode, d.h.

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_{\max}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \left( \frac{1}{2} \varphi_{\max} \right) - \sin^2 \left( \frac{1}{2} \varphi \right)}}.$$

Wir wechseln nun von der Variable  $\varphi$  zu einem  $\chi$  mit

$$\sin \chi = \frac{\sin \left( \frac{1}{2} \varphi \right)}{\sin \left( \frac{1}{2} \varphi_{\max} \right)}$$

so dass

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_{\max}} \frac{d\varphi}{\sin \left( \frac{1}{2} \varphi_{\max} \right) \cos \chi}.$$

Nun ist

$$\cos \chi \frac{d\chi}{d\varphi} = \frac{1}{2} \frac{\cos \left( \frac{1}{2} \varphi \right)}{\sin \left( \frac{1}{2} \varphi_{\max} \right)}$$

d.h.

$$\frac{d\varphi}{\sin \left( \frac{1}{2} \varphi_{\max} \right)} = \frac{2 \cos \chi d\chi}{\cos \left( \frac{1}{2} \varphi \right)} = \frac{2 \cos \chi d\chi}{\sqrt{1 - \sin^2 \left( \frac{1}{2} \varphi_{\max} \right) \sin^2 \chi}}.$$

Daraus ergibt sich schließlich für die Schwingungsperiode

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\chi}{\sqrt{1 - \sin^2 \left( \frac{1}{2} \varphi_{\max} \right) \sin^2 \chi}}. \quad (2.62)$$

Eine Möglichkeit diesen Ausdruck auszuwerten besteht darin, den Integranden in eine Potenzreihe von  $\varphi_{\max}$  zu entwickeln. In nullter Näherung mit  $\varphi_{\max} \simeq 0$  liefert das Integral  $\pi/2$ , so dass man obige Periode im Falle kleiner Ausschläge erhält. Nimmt man das erste Glied der sin-Reihe mit, so hat man

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\chi}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \varphi_{\max}^2 \sin^2 \chi}} \simeq \int_0^{\pi/2} d\chi \left[ 1 + \frac{1}{8} \varphi_{\max}^2 \sin^2 \chi \right] \simeq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{32} \varphi_{\max}^2.$$

Im Falle großer Ausschläge wird die Schwingungsperiode damit von der Schwingungsamplitude abhängig und bis zur Ordnung  $\varphi_{\max}^2$  gilt

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{16}\varphi_{\max}^2 + \dots \right). \quad (2.63)$$

Das folgende MAPLE-File integriert die Bewegungsgleichung des starren Pendels numerisch, wobei wir  $g/l = 1$  gesetzt haben. Hier ist es einfach, alle interessanten Größen grafisch darzustellen.

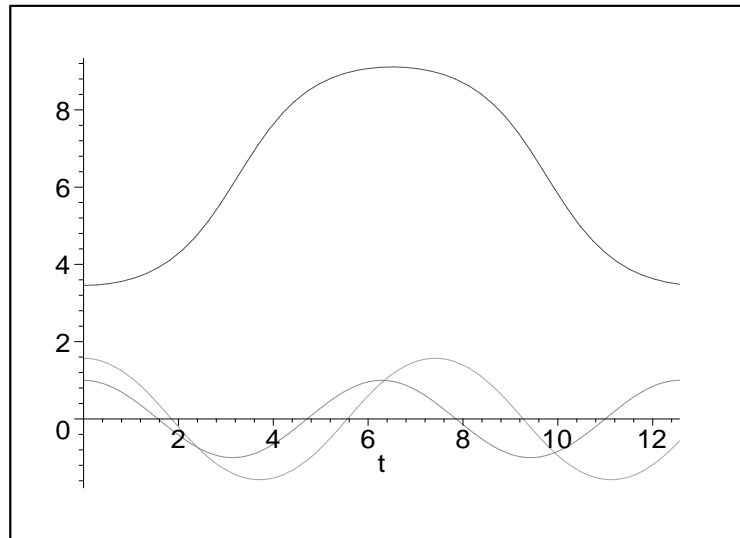
```

> # Numerische Loesung des schweren Pendels
> # pendelnumeric.mws
> #####
> eq := diff(phi(t),t,t) + sin(phi(t)) = 0;
      eq := ( $\frac{d^2}{dt^2} \phi(t)$ ) + sin( $\phi(t)$ ) = 0
> sol1 := dsolve({eq,phi(0)=Pi/2,D(phi)(0)=0},phi(t),numeric);
      sol1 := proc(x_rkf45) ... end proc
> #
> Phi1 := s -> rhs(sol1(s)[2]);
       $\Phi_1 := s \rightarrow \text{rhs}(\text{sol1}(s)_2)$ 
> dPhi1:= s -> rhs(sol1(s)[3]);
       $d\Phi_1 := s \rightarrow \text{rhs}(\text{sol1}(s)_3)$ 
> #

> sol1(2.0);
[t = 2.0,  $\phi(t) = -0.205640064624114050$ ,  $\frac{d}{dt} \phi(t) = -1.39923652916272444$ ]
> Phi1(2.0);dPhi1(2.0);
      -0.205640064624114050
      -1.39923652916272444
> #
> sol2 := dsolve({eq,phi(0)=1.1*Pi,D(phi)(0)=0},phi(t),numeric):
> Phi2 := s -> rhs(sol2(s)[2]):
> dPhi2 := s -> rhs(sol2(s)[3]):
> #
> Phi1(0.),Phi2(0.);
      1.5707963267949, 3.4557519189488
> #

```

```
> plot('{cos(t), Phi1(t), Phi2(t)}', t=0..4*Pi);
```



## 2.2 Reibung

Ohne Reibung würden alle unsere Transportsysteme - angefangen vom Laufen bis hin zu Autos - nicht funktionieren (Tipler & Mosca 2006). Man könnte nicht einmal auf einer horizontalen Fläche einfach loslaufen, Schlittschuh- oder Skilaufen wäre unmöglich, genauso wie die Bewegung auf einer Kinderschaukel. Die Reibung kommt letztlich durch elektromagnetische Wechselwirkung der Atome und Moleküle an den Kontaktflächen zustande. Wir wollen jetzt verschiedene Arten der Reibung studieren.

### 2.2.1 Haftreibung

Wir betrachten eine große Kiste, die auf dem Boden steht. Solange man nur eine geringe horizontale Kraft auf sie ausübt, bewegt sie sich keinen Millimeter vorwärts. In diesem Fall kompensiert die *Haftreibungskraft*  $\mathbf{F}_{R,h}$ , die vom Boden auf die Kiste ausgeübt wird, die Kraft mit der man auf die Kiste drückt. Je nachdem, mit welcher Kraft man drückt, kann die Haftreibung, die der auf die Kiste einwirkenden Kraft entgegenwirkt, zwischen null und einem maximalen Wert  $|\mathbf{F}_{R,h,\max}|$  liegen. Wenn  $\mathbf{F}_n$  die Normalkomponente der Kraft bezeichnet,

die senkrecht auf der Reibungsfläche steht, so gilt:

$$|\mathbf{F}_{R,h,\max}| = \mu_h |\mathbf{F}_n|. \quad (2.64)$$

Die Größe  $\mu_h$  wird *Haftreibungskoeffizient* genannt.

### 2.2.2 Die Münze auf dem Buchrücken

**S6: Münze auf dem Buchrücken**(Bsp. 5.2 aus Tipler & Mosca) Ein Buch mit festem Umschlag liegt mit der Titelseite nach oben auf dem Tisch. Auf dem Bucheinband wird eine kleine Münze gelegt. Anschließend wird das Buch sehr langsam geöffnet, bis die Münze zu rutschen beginnt.  $\theta_{\max}$  sei derjenige Winkel zwischen dem Bucheinband und der Horizontalen, bei dem sich die Münze gerade in Bewegung setzt. Wir wollen den Haftreibungskoeffizienten  $\mu_h$  aus  $\theta_{\max}$  berechnen.

Wir betrachten dazu die Situation für  $\theta < \theta_{\max}$ . Hier ist die Münze im statischen Gleichgewicht. Die Kräftebilanz ist in Abb.2.6 zu sehen. Die Gravi-

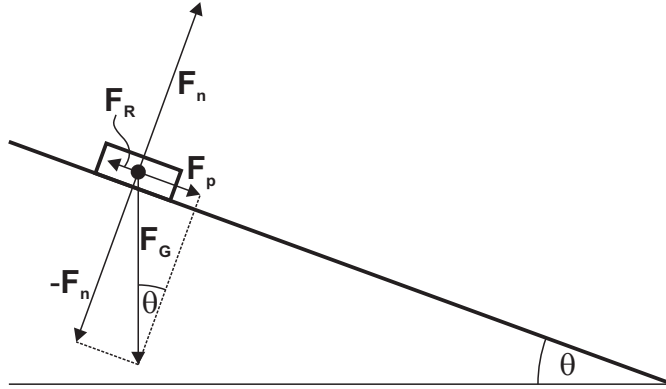


Abbildung 2.6: Kräftebilanz im Problem der Münze auf dem Buchrücken.

tationskraft, welche auf die Münze wirkt, wird in zwei Komponenten zerlegt, in eine Normalkomponente  $\mathbf{F}_n$ , welche senkrecht zum Bucheinband wirkt und eine Parallelkomponente  $\mathbf{F}_p$ , welche entlang des Einbandes nach unten wirkt. Es gilt:

$$|\mathbf{F}_n| = mg \cos \theta, \quad |\mathbf{F}_p| = mg \sin \theta.$$

Für einen gewissen Winkel  $\theta$  ist

$$|\mathbf{F}_{R,h,\max}| = \mu_h |\mathbf{F}_n| = \mu_h mg \cos \theta.$$

Mit steigendem Winkel  $\theta$  wächst die nach unten weisende Parallelkomponente der Schwerkraft und die maximale Haftreibung nimmt ab, bis die Beträge beider

Tabelle 2.1: Ungefähre Werte für die Reibungskoeffizienten

Material	$\mu_h$	$\mu_g$
Stahl auf Stahl	0,7	0,6
Messing auf Stahl	0,5	0,4
Glas auf Glas	0,9	0,4
Gummi auf trockenem Beton	1,0	0,8
Gummi auf nassem Beton	0,30	0,25

Kräfte bei  $\theta_{\max}$  gerade gleich groß werden. Dann gilt

$$mg \sin \theta_{\max} = \mu_h mg \cos \theta_{\max}$$

bzw.

$$\mu_h = \tan \theta_{\max}.$$

### 2.2.3 Gleitreibung

Wenn man stark genug auf die Kiste drückt, gleitet sie über den Boden. Während sie gleitet, übt der Boden eine *Gleitreibungskraft*  $\mathbf{F}_{R,g}$  auf sie aus, deren Richtung der, in die die Kiste gleitet, entgegengesetzt ist. Der Gleitreibungskoeffizient  $\mu_g$  ist durch

$$|\mathbf{F}_{R,g}| = \mu_g |\mathbf{F}_n| \quad (2.65)$$

definiert. Tab.2.1 gibt ungefähre Werte für  $\mu_h$  und  $\mu_g$ .

### 2.2.4 Freier Fall mit Luftreibung

Ein frei fallender Körper wird in nicht allzu großer Entfernung von der Erdoberfläche durch die Erdschwere annähernd konstant beschleunigt mit  $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$ . Ein Fallschirmspringer, der beim Ausstieg aus dem Flugzeug eine verschwindende, nach unten gerichtete Geschwindigkeit aufweist, wird zunehmend schneller. Nach einer Sekunde hat er eine Geschwindigkeit von etwa 9,8 m/s (ca. 71 km/h). Ohne die Luftreibung würde die Geschwindigkeit stetig weiter wachsen. Aufgrund der Luftreibung ist dies tatsächlich nicht der Fall. In der Realität verschwindet nach rund 7 Sekunden die Beschleunigung und der Fallschirmspringer fällt mit einer Grenzgeschwindigkeit von etwa 55 m/s (ca. 200 km/h).

#### S7: Freier Fall mit Luftreibung

Wir betrachten den freien Fall eines Körpers, welcher die konstante Schwerebeschleunigung  $g$  erfahre, unter der Wirkung der Luftreibung. Die entsprechende Reibungskraft ist dabei stets in Richtung von  $-\mathbf{v}$  gerichtet:

$$\mathbf{F}_{R,L} = -F(v)\mathbf{v}/v. \quad (2.66)$$

Für kleine Geschwindigkeiten  $v$  ist die Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit, d.h.

$$F(v) = \beta v \quad (\text{Stokes'sche Reibung}) \quad (2.67)$$

für große Geschwindigkeiten ist die Reibung dagegen proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit

$$F(v) = kv^2 \quad (\text{Newton'sche Reibung}). \quad (2.68)$$

Der Reibungskoeffizient der Newton'schen Reibung  $k$  ergibt sich zu

$$k = \frac{1}{2}c_w A \rho, \quad (2.69)$$

wobei  $c_w \simeq 0,4$  den *Widerstandsbeiwert*,  $A$  die Körperquerschnittsfläche und  $\rho$  die Luftdichte bezeichnet.

Wir legen zur theoretischen Behandlung des Problems die  $z$ -Achse in Richtung der negativen Lotrichtung (d.h. nach unten weisend). Die Kraftgleichung lautet im 1-dimensionalen Fall dann

$$ma_K = mg - F(v)$$

bzw.

$$\dot{v}_K = dv_K/dt = g - F(v)/m. \quad (2.70)$$

Wir können in dieser Relation die Variablen  $t$  und  $v_K$  voneinander trennen und dann integrieren:

$$dt = \frac{dv}{g - F(v)/m}$$

bzw.

$$\int_0^t dt' = \int_{v_0}^v \frac{dv'}{g - F(v')/m} \quad (2.71)$$

und damit

$$t = \int_0^v \frac{dv'}{g - F(v')/m}, \quad (2.72)$$

wobei wir noch  $v_0 = v(t_0) = 0$  gesetzt haben. Wir wollen jetzt die beiden Reibungsgesetze getrennt betrachten.

## 1. Stokes'sches Reibungsgesetz

Im Falle des Stokes'schen Reibungsgesetzes ist

$$F(v)/m = (\beta/m)v \equiv \eta v ,$$

so dass sich ergibt

$$t = \int_0^v \frac{dv'}{g - \eta v'} = -\frac{1}{\eta} \ln(g - \eta v') \Big|_0^v = -\frac{1}{\eta} \ln \frac{g - \eta v}{g}$$

also

$$v_K(t) = \frac{mg}{\beta} \left( 1 - e^{-\beta t/m} \right) . \quad (2.73)$$

Hier ist  $\ln$  die Funktion des natürlichen Logarithmus, d.h., die zu  $e^x$  inverse Funktion:  $\ln(e^x) = x$ . Es ist

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \pm \dots \quad (2.74)$$

Die Ableitung von  $\ln(x)$  ergibt sich aus der Kettenregel:

$$\frac{d}{dx} \ln(e^x) = \frac{d}{dx} (x) = 1$$

bzw. mit  $y = e^x$ :

$$d/dx \ln(y) = d/dy \ln(y) dy/dx = d/dy \ln(y) \cdot e^x = 1$$

Damit ist

$$d/dy \ln(y) = e^{-x} = 1/y ,$$

und schließlich

$$d/dx \ln(x) = 1/x . \quad (2.75)$$

Umgekehrt ist die Logarithmusfunktion  $\ln(x)$  das Integral von  $1/x$ , was wir oben benutzt haben. Aus (2.73) sieht man, dass die Fallgeschwindigkeit sich einer Grenzgeschwindigkeit

$$v_\infty = v(t \rightarrow \infty) = \frac{mg}{\beta} \quad (2.76)$$

nähert. Die Annäherung an die Grenzgeschwindigkeit erfolgt umso rascher, je kleiner die Masse und je stärker die Reibung ist. Die Zeitkonstante dafür wird Relaxationszeit genannt. Sie ist durch  $\tau_{\text{relax}} = m/\beta$  gegeben.

> #####

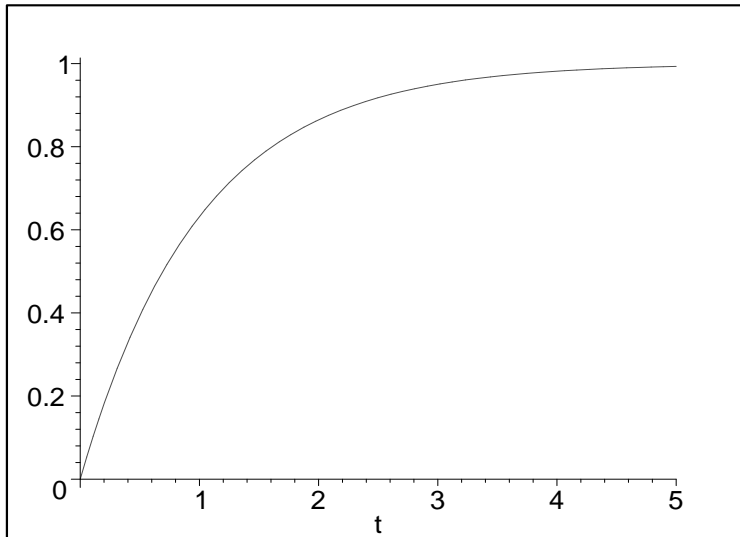


```

> # Figvstokes.mws
> #####

> v := t -> evalf(1.- exp(-t));
      v := t -> evalf(1. - e(-t))
> plot(v(t), t = 0..5);

```



Eine nochmalige Integration von (2.73) liefert:

$$z_K(t) = -\frac{g}{\eta^2}(1 - e^{-\eta t}) + \frac{g}{\eta}t + z_0. \quad (2.77)$$

Wir wollen jetzt zusätzlich noch eine Geschwindigkeitskomponente in horizontaler-Richtung ( $x$ -Richtung) zulassen. Mit Stokes'scher (Luft-)Reibung haben wir

$$m \frac{dv_x}{dt} = -\beta v_x$$

woraus sich

$$v_x(t) = v_{0x} e^{-\eta t} \quad (2.78)$$

und

$$x_k(t) = x_0 + \frac{v_{0x}}{\eta} (1 - e^{-\eta t}) \quad (2.79)$$

ergibt. Für kleine Zeitspannen können wir die Exponentialfunktion entwickeln:

$$e^{-\eta t} \simeq 1 - \eta t + \frac{1}{2}\eta^2 t^2,$$

d.h.

$$x_K(t) \simeq x_0 + v_{0x}t - \frac{1}{2}v_{0x}\eta t^2. \quad (2.80)$$

Zusätzlich zur gleichförmigen Bewegung in  $x$ -Richtung gibt es eine abbremsende Komponente aus der Luftreibung.

### 2. Newton'sches Reibungsgesetz

Im Falle des Newton'schen Reibungsgesetzes  $F(v) = kv^2$  erhalten wir mit

$$\alpha^2 = (k/mg)$$

$$\begin{aligned} t &= \int_0^v \frac{dv'}{g - kv'^2/m} = \frac{1}{g} \int_0^v \frac{dv'}{1 - \alpha^2 v'^2} \\ &= \frac{1}{2g} \int_0^v dv' \left( \frac{1}{1 - \alpha v'} + \frac{1}{1 + \alpha v'} \right) \end{aligned} \quad (2.81)$$

Dabei wurde eine Partialbruchzerlegung von  $1/(1 - \alpha^2 v'^2)$  wie folgt vorgenommen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \alpha^2 v'^2} &= \frac{1}{(1 - \alpha v')(1 + \alpha v')} \\ &= \frac{1/2 \cdot (1 + \alpha v' + 1 - \alpha v')}{(1 + \alpha v')(1 - \alpha v')} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 - \alpha v'} + \frac{1}{1 + \alpha v'} \right). \end{aligned}$$

Eine Integration führt auf

$$2\alpha g t = \ln \frac{1 + \alpha v}{1 - \alpha v} = \ln(1 + \alpha v) - \ln(1 - \alpha v)$$

bzw.

$$\alpha v = \frac{e^{2\alpha g t} - 1}{e^{2\alpha g t} + 1} \equiv \tanh(\alpha g t).$$

Dabei wurde der Tangens Hyperbolicus eingeführt. In Analogie zur Definition der trigonometrischen Funktionen über die komplexe Exponentialfunktion nennt man

$$\begin{aligned} \sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \tanh(x) &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \end{aligned}$$

Man sieht leicht

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{(e^{2x} - 1)e^{-x}}{(e^{2x} + 1)e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

Damit erhalten wir schließlich:

$$v_K(t) = \frac{1}{\alpha} \tanh(\alpha g t). \quad (2.82)$$

Die Grenzggeschwindigkeit ergibt sich wieder im Limes  $t \rightarrow \infty$  ( $\tanh(\alpha g t) \rightarrow 1$ ):

$$v_\infty = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{mg}{k}}. \quad (2.83)$$

Die Relaxationszeit, nach der praktisch die Grenzggeschwindigkeit erreicht ist, ist durch

$$\tau_{\text{relax}} = \frac{1}{\alpha g} = \sqrt{\frac{m}{gk}} \quad (2.84)$$

gegeben.

## 2.2.5 Federpendel mit Reibung und Anregung

**S8: Federpendel mit Stokes'scher Reibung** Wir wollen jetzt ein 1-dimensionales Federpendel mit Stokes'scher Reibung betrachten. Das Newtonsche Axiom liefert:

$$m\ddot{x}_K = -kx_K - \beta\dot{x}_K$$

bzw.

$$\ddot{x}_K + 2\alpha\dot{x}_K + \omega^2x_K = 0. \quad (2.85)$$

Hier ist

$$\alpha = \frac{\beta}{2m}$$

eine Dämpfungskonstante (inverse Dämpfungszeit) mit der Dimension einer inversen Zeit und wieder  $\omega^2 = k/m$ . Die Lösung für  $x_K(t)$  wird sich aus Gliedern der Form

$$f(t) = e^{(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2})t}$$

ergeben. Es ist

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \left(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}\right) e^{\dots} \\ \ddot{f} &= \left(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}\right)^2 e^{\dots} \end{aligned}$$

woraus sich

$$\ddot{f} + 2\alpha\dot{f} + \omega^2 f = 0$$

ergibt. Die Lösung hängt damit kritisch davon ab, ob

$\alpha < \omega$ : unterkritische Dämpfung

$\alpha = \omega$ : kritische Dämpfung, oder

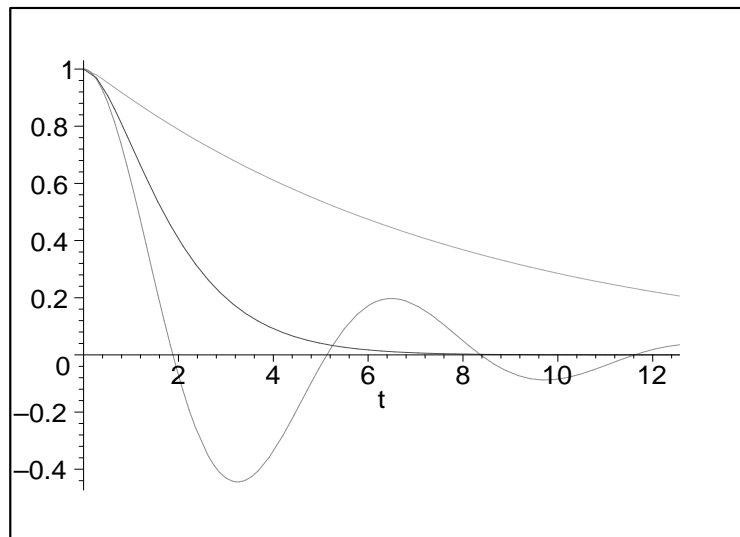
$\alpha > \omega$ : überkritische Dämpfung gilt.

Mit MAPLE können wir uns schnell einen Überblick über diese drei Möglichkeiten verschaffen (wir setzen  $\omega = 1$ ).

```
> #####
> # pendelgedaempft
> #####
> restart;
> eq := diff(x(t),t,t) + 2*alpha*diff(x(t),t) + x(t) = 0:
> sol := dsolve({eq,x(0)=1., D(x)(0)=0.},x(t)):

> simplify(subs(sol,eq));
                                0 = 0

> assign(sol):
> plot({limit(x(t),alpha=.25), limit(x(t),alpha=1.),
> limit(x(t),alpha=4)}, t = 0..4*Pi);
```



- Fall kleiner Dämpfung ( $\alpha < \omega$ )

Im Fall kleiner Dämpfung  $\alpha < \omega$  ergibt sich unsere Funktion  $f$  mit

$$\omega_1^2 \equiv \omega^2 - \alpha^2 > 0$$

zu

$$f = e^{-\alpha t} e^{\pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} t} = e^{-\alpha t} e^{\pm i \omega_1 t}.$$

Wegen  $\exp(i\omega_1 t) = \cos(\omega_1 t) + i \sin(\omega_1 t)$  gilt für den Realteil von  $f$  damit

$$\Re(f) = e^{-\alpha t} \cos \omega_1 t$$

welcher ja eine Lösung unserer Bewegungsgleichung darstellt. Man kann leicht zeigen, dass man anstelle der Kosinus-Funktion ebenfalls die Sinus-Funktion als Lösung verwenden kann. Die allgemeine Lösung lautet:

$$x_K(t) = \frac{\alpha x_0 + v_0}{\omega_1} e^{-\alpha t} \sin \omega_1 t + x_0 e^{-\alpha t} \cos \omega_1 t. \quad (2.86)$$

Hierfür gilt:  $x_K(0) = x_0$  und  $v_K(0) = \dot{x}_K(0) = v_0$ .

- Fall der kritischen Dämpfung ( $\alpha = \omega$ )

In Gleichung (2.86) können wir den Fall der kritischen Dämpfung durch den Limes

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} \rightarrow 0$$

erhalten. Der zweite Term in (2.86) liefert einfach  $x_0 \exp(-\alpha t)$ . Im ersten Term nutzen wir

$$\lim_{\omega_1 \rightarrow 0} [(1/\omega_1) \sin \omega_1 t] = \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} \left( (1/\omega_1) \left[ \omega_1 t - \frac{(\omega_1 t)^3}{3!} \dots \right] \right) = t$$

und erhalten somit

$$x_K(t) = [x_0(1 + \alpha t) + v_0 t] e^{-\alpha t}. \quad (2.87)$$

- Fall der überkritischen Dämpfung ( $\alpha > \omega$ )

Im Fall der überkritischen Dämpfung mit  $\alpha > \omega$  ist

$$\eta \equiv \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} > 0.$$

Unsere Lösungsfunktion  $f$  wird dann zu

$$f(t) = e^{-(\alpha \mp \eta)t}.$$

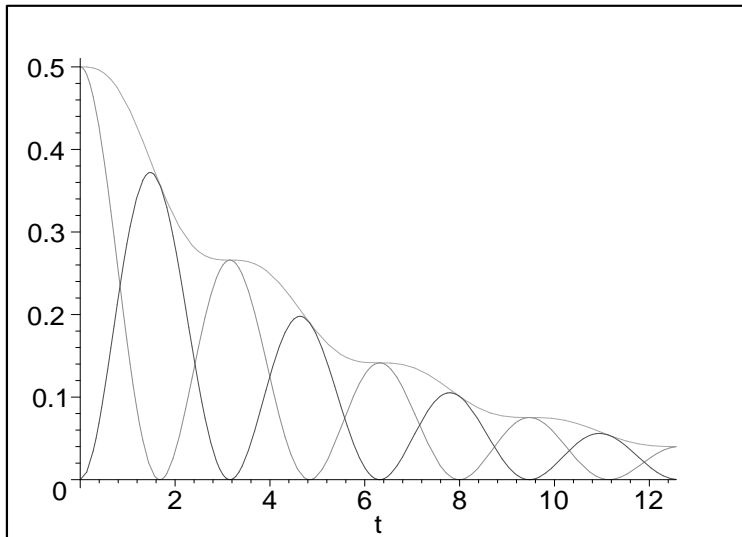
In beiden Fällen ist wegen  $\alpha > \eta$  der Faktor  $(\alpha \mp \eta)$  positiv, d.h.  $f(t)$  nimmt exponentiell mit der Zeit ab. Allgemein hat man

$$x_K(t) = \frac{[(\alpha + \eta)x_0 + v_0]}{2\eta} e^{-(\alpha - \eta)t} - \frac{[(\alpha - \eta)x_0 + v_0]}{2\eta} e^{-(\alpha + \eta)t}. \quad (2.88)$$

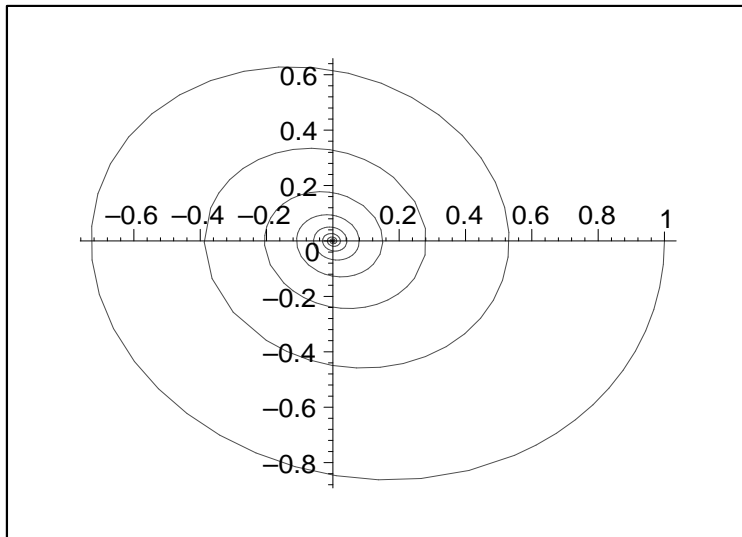
Für große Zeiten  $t \gg 1/(\alpha + \eta)$  dominiert der erste Term.

Das MAPLE-sheet `epengedaempft.mws` berechnet im Spezialfall die kinetische, die potenzielle und die Gesamtenergie als Funktion der Zeit  $t$  ( $v_0 = 0$ , d.h.,  $E_{\text{kin}} = 0$  für  $t = 0$ ). Man sieht, wie alle Formen der Energie aufgrund der Reibung mit der Zeit gegen Null gehen. Im selben MAPLE-sheet wird noch ein Phasenraumbild berechnet, wo  $v_K(t)$  gegen  $x_K(t)$  als Funktion der Zeit aufgetragen ist.

```
> #####
> # epengedaempft.mws
> #####
> x0 := 1.: v0 := 0.: omega := 1.: alpha := 1/10:
> #
> omega1 := sqrt(omega^2 - alpha^2):
> #
> xk := ((alpha*x0/omega1)*sin(omega1*t) +
> x0*cos(omega1*t))*exp(-alpha*t):
> #
> vk := diff(xk,t):
> #####
> Ekin := 0.5*vk^2:
> Epot := 0.5*xk^2:
> Etot := Ekin + Epot:
> #
> plot({Ekin,Epot,Etot}, t = 0..4*Pi);
```



```
> plot([xk,vk, t = 0..20*Pi]);
```



S8: Das angetriebene, gedämpfte Federpendel

Wir wollen jetzt noch einmal das gedämpfte Federpendel betrachten, allerdings mit einer zusätzlichen äußeren periodisch wirkenden Kraft. Die Bewegungsgleichung hierfür lautet

$$\ddot{x}_K + 2\alpha\dot{x}_K + \omega_0^2 x_K = f_0 \cos \omega t \quad (2.89)$$

mit

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Diese stellt eine gewöhnliche inhomogene Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten dar, deren Lösung sich aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung mit  $f_0 = 0$  und einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung zusammensetzt:

$$x_K(t) = x_{\text{hom}} + x_{\text{inhom}}. \quad (2.90)$$

Für den Fall der kleinen Dämpfung hatten wir bereits die Lösung ohne antreibende Kraft gefunden:

$$x_{\text{hom}} = \frac{\alpha x_0 + v_0}{\omega_1} e^{-\alpha t} \sin \omega_1 t + x_0 e^{-\alpha t} \cos \omega_1 t$$

mit

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}.$$

Zum Auffinden einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung wollen wir die Bewegungsgleichung mit komplexen Zahlen schreiben. Mit  $z_k = x_K + iy_K$  betrachten wir

$$\ddot{z}_K + 2\alpha\dot{z}_K + \omega_0^2 z_K = f_0 e^{i\omega t}.$$

Dann ist (2.89) gerade durch den Realteil dieser Gleichung gegeben. Mit dem Ansatz

$$z_K(t) = A e^{i(\omega t - \varphi)}$$

hat man

$$\begin{aligned} \dot{z}_K &= Ai\omega e^{i(\omega t - \varphi)} \\ \ddot{z}_K &= -A\omega^2 e^{i(\omega t - \varphi)}. \end{aligned}$$

Die komplexe Bewegungsgleichung liefert dann

$$(-\omega^2 + 2i\alpha\omega + \omega_0^2) A e^{-i\varphi} e^{i\omega t} = f_0 e^{i\omega t}$$

bzw.

$$A e^{-i\varphi} = A(\cos \varphi - i \sin \varphi) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\alpha\omega}. \quad (2.91)$$



Hieraus lassen sich Amplitude  $A$  und Phase  $\varphi$  ableiten. Zunächst einmal kann man den Betrag einer komplexen Zahl  $z = x + iy$  durch

$$|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

gewinnen, wenn  $z^* = x - iy$  die zu  $z$  konjugiert komplexe Zahl bezeichnet. Damit ist

$$|e^{-i\varphi}| = [e^{-i\varphi}e^{+i\varphi}]^{1/2} = 1$$

und

$$|\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\alpha\omega| = [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2]^{1/2}.$$

Die Amplitude  $A$  ergibt sich dann zu

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}. \quad (2.92)$$

Für die Phase  $\varphi$  müssen wir die rechte Seite von (2.91) in Real- und Imaginärteil zerlegen. Ist  $z$  eine beliebige komplexe Zahl, dann ist Real- und Imaginärteil durch

$$\Re(z) = \frac{1}{2}(z + z^*), \quad \Im(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*) \quad (2.93)$$

gegeben. Schreiben wir die rechte Seite ( $rS$ ) von (2.91) in der Form  $rS = a/(b + ic)$  dann ist

$$\Re(rS) = \frac{ab}{b^2 + c^2} \quad \Im(rS) = -\frac{ac}{b^2 + c^2}.$$

Damit ergibt sich

$$A(\cos \varphi - i \sin \varphi) = \frac{a}{b^2 + c^2} [(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\alpha\omega]$$

bzw.

$$\tan \varphi = \frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (2.94)$$

Im folgenden MAPLE-File sind Amplituden und Phasen für  $f_0 = \omega_0 = 1$  und verschiedene Werte von  $\alpha$  als Funktion der Erregerfrequenz  $\omega$  dargestellt. Kommt  $\omega$  in die Nähe der Eigenfrequenz  $\omega_0$  so tritt der Fall der Resonanz auf und die Amplitude wird verstärkt, welche ohne Reibung sogar formal divergiert!

```
> #####
> # phaseampgho.mws
> #####
> restart:
```

```

> omega0 := 1:

> phi := arctan(2.*alpha*omega,omega0^2 - omega^2):

> f0 := 1:

> ampl := f0/sqrt((omega0^2 - omega^2)^2 + 4*alpha^2*omega^2);

```

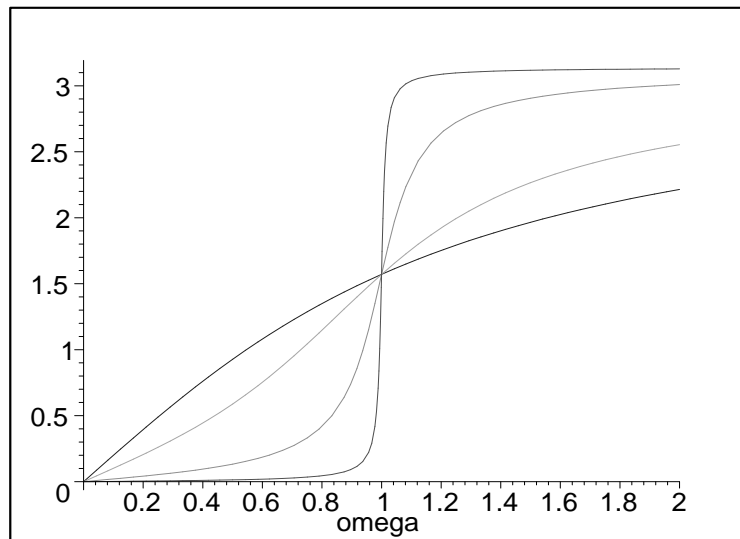
$$ampl := \frac{1}{\sqrt{1 - 2\omega^2 + \omega^4 + 4\alpha^2\omega^2}}$$

```

> phi1 := subs(alpha = .01,phi):
> phi2 := subs(alpha = .1,phi):
> phi3 := subs(alpha = .5,phi):
> phi4 := subs(alpha = 1.0,phi):

> plot({phi1,phi2,phi3,phi4}, omega = 0..2);

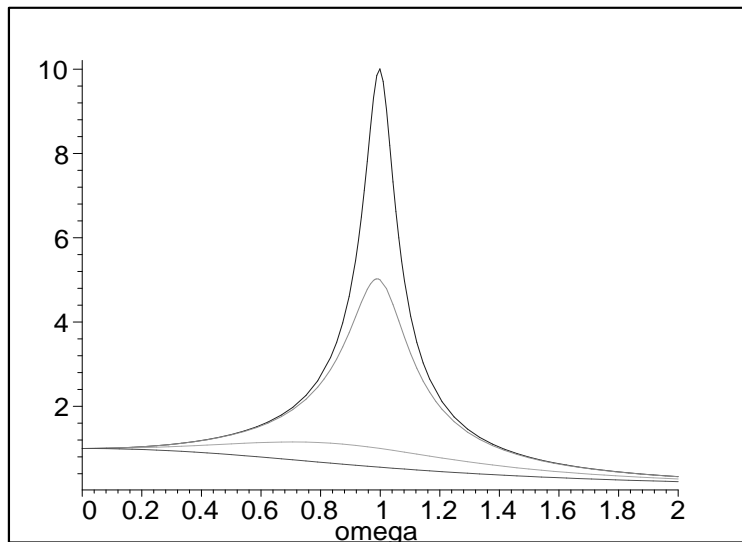
```



```

> amp1 := subs(alpha = 0.05,ampl):
> amp2 := subs(alpha = 0.1,ampl):
> amp3 := subs(alpha = 0.5,ampl):
> amp4 := subs(alpha = 0.9,ampl):
> plot({amp1,amp2,amp3,amp4}, omega = 0..2);

```



## 2.3 Newtonsches Gravitationsgesetz

### 2.3.1 Die drei Kepler'schen Gesetze

Bezüglich geeignet gewählter kartesischer Inertialkoordinaten  $(t, \mathbf{x})$  lautet die Newtonsche Kraft, welche ein Körper der Masse  $M$  auf einen anderen der (hinreichend kleinen) Masse  $m$  ausübt:

$$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (2.95)$$

Hier bezeichnet  $\mathbf{r}$  einen Vektor, der von  $M$  zu  $m$  weist; das Minuszeichen in (2.95) sagt dann aus, dass die Newtonsche Gravitationskraft stets attraktiv wirkt.

Für das Problem der Planetenbewegung um die Sonne gelten in Näherung die drei Kepler'schen Gesetze:

1. Die Bewegung eines Planeten erfolgt auf einer Ellipsenbahn wobei die Sonne in einem Brennpunkt der Ellipse steht;

2. Die Verbindung Sonne-Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.  
Ist ein Planet also der Sonne näher so muss er sich schneller bewegen als wenn er weiter von der Sonne steht;
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten  $T$  verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen  $a$ , d.h.

$$T^2 \propto a^3.$$

### 2.3.2 Die Geometrie einer Ellipse

Es gibt im Gartenbau eine einfache Konstruktion, um ein elliptisches Areal abzustecken. Man steckt dazu zwei Holzstäbe im Abstand  $2l$  in die Erde und legt darum ein geschlossenes Seil der Länge  $2a$ . Spannt man nun das Seil mit einem Stab und bewegt diesen, so läuft er längs einer Ellipse. Die Geometrie ist in Abb. 2.7 zu sehen. Die Strecke  $P_1A$  beläuft sich auf die Hälfte der Seillänge, d.h.  $P_1A = L$ . Dementsprechend ist die große Halbachse der Ellipse  $a = OA = L - l$ . Nun schreiben wir  $l = a \cdot e$  mit  $e \leq 1$ .  $e$  wird (numerische) Exzentrizität genannt. Damit ist

$$r_+ = L = a + ae = a(1 + e),$$

die Entfernung eines Brennpunktes (wo sich ein Stab in der Erde befindet) vom Apozentrum (der Punkt der größten Entfernung vom Brennpunkt). Die Entfernung eines Brennpunktes zum Perizentrum (Punkt der kleinsten Distanz) ist durch

$$r_- = L - 2l = a(1 - e)$$

gegeben.

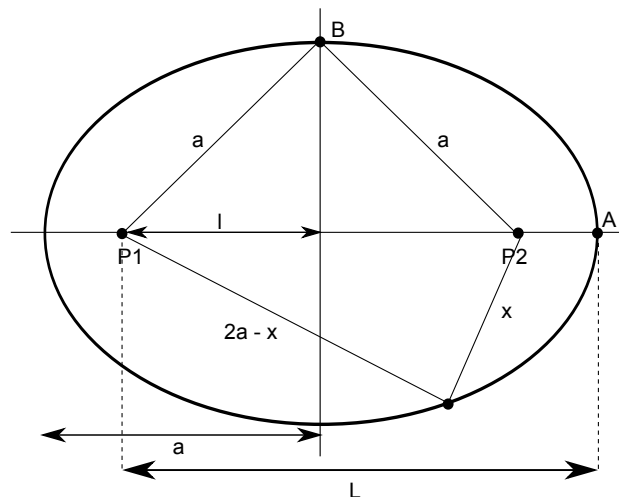


Abbildung 2.7: Ellipsengeometrie.

Wir wollen nun noch die kleine Halbachse  $b = OB$  der Ellipse berechnen. Die Strecke  $P_2B$  hat die Länge  $(2L - 2l)/2 = a$ . Damit ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras für das Dreieck  $OP_2B$ :

$$b^2 + (ae)^2 = a^2$$

bzw.

$$b = a\sqrt{1 - e^2}. \quad (2.96)$$

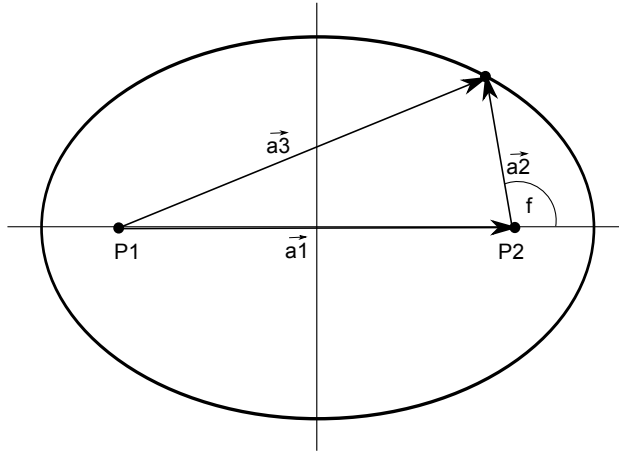


Abbildung 2.8: Vektoren in einer Ellipse.

Sehen wir uns nun Abb. 2.8 an. Der Vektor  $\mathbf{a}_1$  zeigt von  $P_1$  zu  $P_2$ , Vektor  $\mathbf{a}_2$  von  $P_2$  zu einem Punkt der Ellipse und  $\mathbf{a}_3$  von  $P_1$  zu eben diesem Punkt. Der Winkel zwischen den Vektoren  $\mathbf{a}_1$  und  $\mathbf{a}_2$  werde  $f$  genannt. Aus  $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$  folgt

$$\begin{aligned} a_3^2 &= a_1^2 + a_2^2 + 2\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \\ &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos f. \end{aligned}$$

Nun ist  $a_1 = 2l = 2ae$ ,  $a_2 = r$  und  $a_3 = 2L - 2l - r = 2a - r$ , also

$$4a^2 - 4ar + r^2 = 4a^2e^2 + r^2 + 4aer \cos f$$

bzw.

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}. \quad (2.97)$$

Dies ist die Polardarstellung einer Ellipse. Der Ursprung dieser Darstellung liegt in einem Brennpunkt und die wahre Anomalie  $f$  zählt von der Richtung zum Perizentrum. Mit  $f = 0$  bzw.  $f = \pi$  erhalten wir wieder die alten Werte für  $r_{\pm}$ .

Betrachten wir nun kartesische Koordinaten  $(x, y)$  mit dem Koordinatenursprung in  $O$ . Dann ist ein Punkt der Ellipse gegeben durch

$$x = ae + r \cos f, \quad y = r \sin f$$

und es ergibt sich die kartesische Darstellung der Ellipse:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1. \quad (2.98)$$

Dies bedeutet, dass man eine Ellipse mit Halbachsen  $a$  und  $b$  leicht aus einem Kreis mit Radius  $a$  erhalten kann. Ein Punkt auf dem Kreise werde durch die kartesischen Koordinaten  $x_K$  und  $y_K$  markiert (Abb.2.9). Setzt man

$$x_K = x \quad y_K = (a/b)y$$

so erhält man durch  $(x, y)$  den entsprechenden Punkt in der Ellipse.

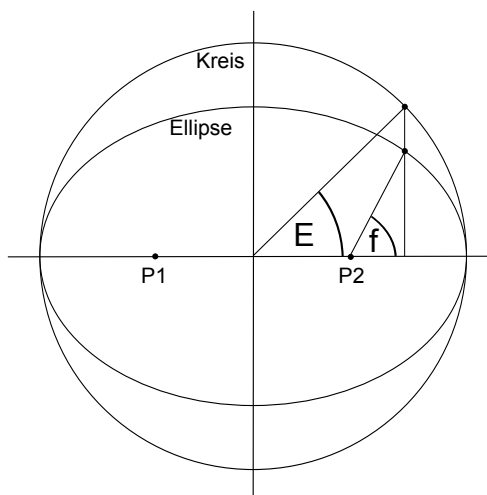


Abbildung 2.9: Konstruktion einer Ellipse aus einem Kreis heraus.

### S9: Satellitenbewegung um die Erde

Wir wollen jetzt die Bewegung eines Satelliten im Gravitationsfeld der Erde behandeln. Dazu werde an dieser Stelle nur die Wirkung der Gesamtmasse  $M_{\oplus}$  der Erde betrachtet; die Masse des Satelliten kann dabei als vernachlässigbar klein betrachtet werden. Zur Herleitung des sogenannten Schwerpunktssatzes ist es dagegen zweckmässig mit dem Problem zweier Körper endlicher Masse  $m_1$  und  $m_2$  zu starten.

### 2.3.3 Integrale der Bewegung

Wir betrachten zunächst zwei Himmelskörper der Massen  $m_1$  und  $m_2$ , die sich allein unter der Einwirkung ihrer Gravitationskräfte bewegen mögen. Bezüglich eines irgendwie gewählten Koordinatenursprunges seien  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  die entsprechenden Ortsvektoren der beiden Massen. Aus Gleichung (2.95) ergeben sich dann zusammen mit dem Newtonschen Axiom in einem Inertialsystem

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= -G m_2 m_1 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -G m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Diese Gleichungen weisen insgesamt 12 skalare Integrationskonstanten auf: 6 für die zwei Anfangspositionen und 6 weitere für die Anfangsgeschwindigkeiten. Teilt man die erste der Gleichungen (2.99) durch  $m_1$ , die zweite durch  $m_2$  und subtrahiert diese, so erhält man

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = -G(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3},$$

welches wir in der Form

$$\ddot{\mathbf{r}} = -GM \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (2.100)$$

schreiben wollen. Hier ist

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

der Relativvektor von  $m_1$  nach  $m_2$  und

$$M \equiv m_1 + m_2$$

die Gesamtmasse.

#### Schwerpunktsatz

Addition der beiden Gleichungen (2.99) und 2malige Integration liefert

$$m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{a}$$

und

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{a}t + \mathbf{b}.$$

Hier bezeichnen  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  insgesamt 6 Integrationskonstanten. Die linke Seite schreiben wir in der Form

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = M \mathbf{r}_S,$$

wobei also

$$\boxed{\mathbf{r}_S \equiv \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{M}} \quad (2.101)$$

den *Schwerpunktsvektor* des Systems bezeichnet, so haben wir

$$M\mathbf{r}_S = \mathbf{a}t + \mathbf{b}, \quad (2.102)$$

d.h. der Schwerpunkt bewegt sich in unseren kartesischen Inertialkoordinaten gleichförmig und geradlinig.

Wir wollen jetzt die Masse des Satelliten  $m_2$  zu Null setzen;  $m_1$  sei die Masse der Erde  $m_1 = M_\oplus$ . Der Schwerpunkt des Systems befindet sich damit bei  $m_1$ .

### Drehimpulssatz

Nach dem Schwerpunktsatz (2.102) wollen wir den Drehimpulserhaltungssatz behandeln. Dieser gilt für jede *Zentralkraft* mit  $\ddot{\mathbf{r}} \propto \mathbf{r}$ . Daraus folgt  $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = 0$ , bzw.

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{C}, \quad (2.103)$$

wo  $\mathbf{C}$  drei weitere Integrationskonstanten bezeichnen.

Der Drehimpulserhaltungssatz impliziert, daß die durch  $\mathbf{r}$  und  $\dot{\mathbf{r}}$  definierte Bahnebene fest im Raum steht. Der spezifische Freimpulsvektor  $\mathbf{C}$  steht dabei senkrecht auf der Bahnebene.

Wir bemerken noch, daß der Drehimpulserhaltungssatz in der Form (2.103) äquivalent ist zum Keplerschen Flächensatz. Die während einer kleinen Zeitspanne  $\Delta t$  vom Relativvektor  $\mathbf{r}$  überstrichene (mathematisch orientierte) Fläche ist nämlich

$$\Delta \mathbf{F} = \frac{1}{2} \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}(t + \Delta t) \simeq \frac{1}{2} \mathbf{C} \cdot \Delta t, \quad (2.104)$$

d.h. der Relativvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (2. Keplersches Gesetz).

### Energiesatz

Wir kommen nun zum *Energiesatz*. Aus  $\mathbf{r}^2 = r^2$  folgt zunächst

$$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = r\dot{r}$$

und damit

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^2} \dot{r},$$

bzw.

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{r}}^2 = GM \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{r} \right).$$



Diese Relation können wir sofort integrieren und mit

$$U(r) \equiv \frac{GM}{r}$$

erhalten wir den Energiesatz in der Form

$$\boxed{\frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - U(r) = h.} \quad (2.105)$$

Hier hat die Integrationskonstante  $h$  die Dimension einer Energie pro Masse (spezifische Energie).

### Laplace-Integral und Runge-Lenz Vektor

Bisher hatten wir 10 skalare Integrale der Bewegung:  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  liefern 6, welche im Falle  $m_2 = 0$  keine große Rolle spielen, da der Schwerpunkt dann in  $m_1$  gelegt werden kann. Der spezifische Drehimpulsvektor  $\mathbf{C}$  liefert legt die Bahnebene fest, welche durch zwei Winkel und  $|\mathbf{C}|$  beschrieben werden kann und die spezifische Energie  $h$  liefert eine weitere, die zehnte Integrationskonstante. Eine weitere Integrationskonstante erhält man auf folgende Art und Weise: wir multiplizieren zunächst (2.100) vektoriell mit  $\mathbf{C} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ :

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{C} = -GM \frac{\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})}{r^3}.$$

Mit

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{C}) &= -GM \left( \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{r^3} \mathbf{r} - \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} \right) = GM \left( \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \frac{\dot{r}}{r^2} \mathbf{r} \right) \\ &= GM \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right). \end{aligned}$$

Dies führt uns auf das sogenannte *Laplace-Integral* in der Form

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{C} = GM \left( \frac{\mathbf{r}}{r} + e\mathbf{P} \right). \quad (2.106)$$

Hier ist  $\mathbf{P}$  ein Einheitsvektor, d.h.

$$|\mathbf{P}| = 1.$$

Da  $\mathbf{P}$  in der durch  $\mathbf{C}$  definierten Bahnebene (senkrecht auf  $\mathbf{C}$ ) liegt und den Betrag Eins hat legen  $e$  und  $\mathbf{P}$  zwei weitere Integrationskonstanten fest. Wie weiter unten gezeigt, ist  $e$  bereits durch die bekannten 10 Integrationskonstanten

festgelegt, so dass das Laplace-Integral nur eine weitere unabhängige Integrationskonstante, die elfte, liefert. Der Vektor  $\mathbf{L} = GM\mathbf{e}\mathbf{P}$  trägt auch den Namen *Runge-Lenz Vektor*. Eine letzte Integrationskonstante legt fest wo genau in der Bahn sich der Körper zu einem festen Zeitpunkt befindet (gegeben z.B. durch den Zeitpunkt des Perigäumsdurchganges).

Mit 6 Integrationskonstanten im Falle der Satellitenbewegung ist die Dynamik des Satelliten damit vollständig festgelegt.

### 2.3.4 Bahngleichung; 1tes und 3tes Keplersches Gesetz

Wir können die Bahngleichung aus dem Laplace-Integral (2.106) ableiten. Wegen  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$  hat man

$$C^2 = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{C} = (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{r} = GMr \left( 1 + e \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{r} \right).$$

Den Winkel zwischen  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{r}$  wollen wir mit  $f$  bezeichnen. Dieser Winkel trägt den Namen *wahre Anomalie*. Mit

$$\mathbf{P} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \cos f$$

erhält man die Bahngleichung in der Form

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f} \quad (2.107)$$

mit

$$p = \frac{C^2}{GM}.$$

Dies ist das erste Keplersche Gesetz: die Relativbewegung erfolgt längs eines *Kegelschnittes*, wobei der eine Körper im Brennpunkt der Ellipse steht. Der Punkt der nächsten Annäherung der beiden Körper aneinander (das Perizentrum) ist durch  $f = 0$  gegeben. Dies bedeutet, daß der Runge-Lenz Vektor  $\mathbf{P}$  gerade zum Perizentrum weist.

### Bahnform und spezifische Energie

Die numerische Exzentrizität  $e$  des Kegelschnittes gibt an, ob es sich um eine Ellipse ( $e < 1$ ), Parabel ( $e = 1$ ) oder Hyperbel ( $e > 1$ ) handelt. Die Unterscheidung gelingt einfach mit Hilfe der spezifischen Energie: ist  $h < 0$  ist die Bahn gebunden, also elliptisch. Ist  $h > 0$  handelt es sich um eine nicht-gebundene Hyperbelbahn und für  $h = 0$  um eine Parabelbahn. Im Fall einer Ellipse ist

$$p = a(1 - e^2), \quad (2.108)$$

wenn  $a$  die große Halbachse der Ellipse bezeichnet.

Den Wert von  $h$  erhält man aus dem Energieintegral ( $\mu \equiv GM$ )

$$\frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{\mu}{r} = h.$$

Mit

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r; \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{f}\mathbf{e}_f$$

lautet das Energieintegral

$$\dot{r}^2 + (r\dot{f})^2 - \frac{2\mu}{r} = 2h.$$

Der zweite Term auf der linken Seite lässt sich mit der Drehimpulskonstanten  $C$  ausdrücken:

$$C = |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}| = |r\mathbf{e}_r \times (\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{f}\mathbf{e}_f)| = r^2\dot{f}, \quad (2.109)$$

also

$$(r\dot{f})^2 = C^2/r^2.$$

Im Falle der elliptischen Bewegung ergibt sich aus (2.107)

$$\dot{r} = \frac{\mu e}{C} \sin f \quad (2.110)$$

und schließlich

$$h = -\frac{1}{2} \frac{\mu}{a}. \quad (2.111)$$

Die spezifische Energie in der Keplerbahn ist durch die große Halbachse der Bahn gegeben. Hieraus können wir noch die Geschwindigkeit in der Keplerbahn ableiten:

$$\mathbf{v}^2 = \frac{2\mu}{r} + 2h = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (2.112)$$

### Drittes Kepler'sches Gesetz

Für die *elliptische Bahn* hat man gemäß des Flächensatzes mit  $F_{\text{Ell.}} = \pi a^2(1 - e^2)^{1/2}$

$$C = 2F/T = 2\pi a^2(1 - e^2)^{1/2}/T,$$

wenn  $T$  die Umlaufzeit bezeichnet. Wegen  $C^2 = GMr(1 + e \cos f) = GMa(1 - e^2)$  ergibt sich

$$T = \frac{2\pi}{n} \quad \text{mit} \quad n = \left( \frac{GM}{a^3} \right)^{1/2}.$$

Hieraus ergibt sich das dritte Keplersche Gesetz in der Form

$$GM = n^2 a^3. \quad (2.113)$$

Man bemerke, daß für zwei Planeten um die Sonne dieses Gesetz in korrekter Form so lautet

$$\frac{M_{\odot} + m_1}{M_{\odot} + m_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2. \quad (2.114)$$

Nur wenn wir die Planetenmassen gegenüber der Sonnenmasse vernachlässigen, verhalten sich die Kuben der großen Halbachsen so wie die Quadrate der Umlaufzeiten.

### 2.3.5 Kepler-Gleichung

Nachdem die Bahnform des Kepler-Problems geklärt ist, werden wir uns der Zeitabhängigkeit in der elliptischen Bahn zuwenden. Dazu ist es nützlich, kartesische Koordinaten mit Ursprung im Mittelpunkt der Bahnellipse einzuführen. Sei  $b = a(1 - e^2)^{1/2}$  die kleine Halbachse der Ellipse. Wir schreiben dann

$$(x, y) = (a \cos E, b \sin E),$$

wobei der Winkel  $E$  exzentrische Anomalie genannt wird. Aus der Abbildung

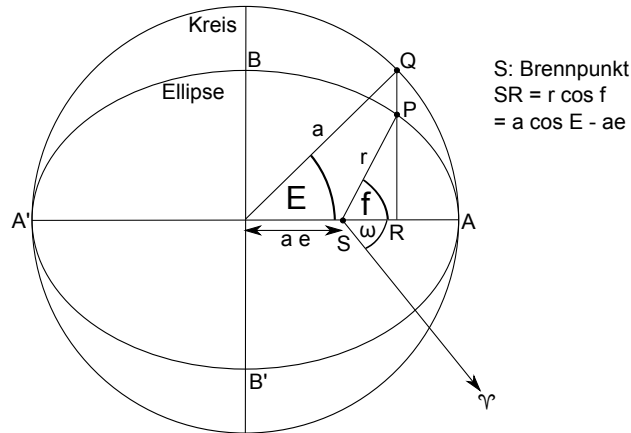


Abbildung 2.10: Wahre und exzentrische Anomalie in der elliptischen Bahn.

erkennt man, dass gilt

$$\begin{aligned} r \cos f &= a(\cos E - e) \\ r \sin f &= a(1 - e^2)^{1/2} \sin E \end{aligned} \quad (2.115)$$

Daraus ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} r &= (r^2 \cos^2 f + r^2 \sin^2 f)^{1/2} \\ &= a(\cos^2 E - 2e \cos E + e^2 + (1 - e^2) \sin^2 E)^{1/2} \\ &= a(1 - 2e \cos E + e^2 \cos^2 E)^{1/2} \end{aligned}$$

bzw.

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (2.116)$$

Dieses Ergebnis können wir mit  $r \cos f = a(\cos E - e)$  nach  $\cos f$  auflösen:

$$\cos f = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}. \quad (2.117)$$

Daraus folgt sofort

$$\sin f = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E} \quad (2.118)$$

und analog ergibt sich

$$\cos E = \frac{e + \cos f}{1 + e \cos f}; \quad \sin E = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin f}{1 + e \cos f}. \quad (2.119)$$

Später werden wir den Ausdruck  $df/dE$  benötigen. Wir leiten dazu  $\sin f$  aus (2.118) nach der exzentrischen Anomalie  $E$  ab:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dE} \sin f &= \cos f \frac{df}{dE} = \left( \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \right) \frac{df}{dE} \\ &= \frac{\sqrt{1 - e^2} [(1 - e \cos E) \cos E - e \sin^2 E]}{(1 - e \cos E)^2} = \frac{\sqrt{1 - e^2} (\cos E - e)}{(1 - e \cos E)^2} \end{aligned}$$

und erhalten

$$\frac{df}{dE} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos E}. \quad (2.120)$$

Für praktische Berechnungen verwendet man in der Regel eine weitere Relation zwischen  $f$  und  $E$ :

$$\begin{aligned} \tan^2 \frac{f}{2} &= \frac{1 - \cos f}{1 + \cos f} = \frac{1 - e \cos E - \cos E + e}{1 - e \cos E + \cos E - e} \\ &= \frac{(1 + e)(1 - \cos E)}{(1 - e)(1 + \cos E)} = \left( \frac{1 + e}{1 - e} \right) \tan^2 \frac{E}{2} \end{aligned}$$

bzw.

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan \frac{E}{2}. \quad (2.121)$$

Die Zeitabhängigkeit in der elliptischen Bahn erhalten wir schließlich aus dem Flächensatz. Aus  $r^2 \dot{f} = C$  ergibt sich nämlich

$$\begin{aligned} C(t - t_0) &= \int_{f_0}^f r^2(f) df = \int_{E_0}^E a^2 (1 - e \cos E)^2 \left( \frac{df}{dE} \right) dE \\ &= a^2 \int \sqrt{1 - e^2} (1 - e \cos E) dE \\ &= a^2 \sqrt{1 - e^2} \left[ E - e \sin E \right]_{E_0}^E, \end{aligned}$$

bzw. mit  $C^2 = \mu a (1 - e^2)$

$$\sqrt{\mu a} (t - t_0) = a^2 \left[ E - e \sin E \right]_{E_0}^E.$$

Teilen wir beide Seiten durch  $a^2$  so ergibt sich auf der linken Seite ein Vorfaktor von  $(\mu/a^3)^{1/2} = n$ . Hier ist  $n$  wieder die mittlere Bewegung, welche dem 3. Keplerschen Gesetz  $n^2 a^3 = \mu$  genügt. Damit ergibt sich schließlich die *Kepler Gleichung* in der Form

$$M = E - e \sin E, \quad (2.122)$$

wobei der Winkel  $M$

$$M = n(t - T) \quad (2.123)$$

*mittlere Anomalie* genannt wird. Im Falle einer Kreisbahn wären wahre und mittlere Anomalie gleich. Im elliptischen Fall stelle man sich vor, daß zusätzlich zum physikalischen Körper ein weiterer fiktiver Körper auf einer Kreisbahn mit der selben mittleren Winkelgeschwindigkeit  $n$  um den anderen Körper umläuft. Dieser fiktiver Körper dient hier lediglich der Berechnung der Zeitabhängigkeit in der Bahn.  $T$  ist hier der Zeitpunkt eines Durchganges durch das Perizentrums; aus  $M = 0$  folgt nämlich  $E = v = 0$ .

Die Zeitabhängigkeit in der elliptischen Kepler-Bahn folgt damit aus den Gleichungen (2.122) und (2.123): zu einer beliebigen Zeit  $t$  berechnet man zunächst die mittlere Anomalie  $M$ , durch Lösen der Kepler-Gleichung gewinnt man die exzentrische Anomalie  $E$  und schließlich aus (2.121) die wahre Anomalie  $f$ , welche auch in der Bahngleichung auftaucht.

Die Kepler-Gleichung ist eine transzendente Gleichung für die exzentrische Anomalie  $E$ , wenn die wahre Anomalie  $M$  gegeben ist. Man hat sich viele Methoden ausgedacht, um die Kepler-Gleichung zu lösen. Neben einer rein numerischen Methode, welche weiter unten diskutiert werden soll, wollen wir hier auf zwei Lösungsverfahren eingehen.

Eine erste Möglichkeit ist die Lösung durch Iteration. Sei  $E_0$  eine nullte Näherung für  $E$ , so können wir leicht formal eine Korrektor  $\Delta E_0$  aus der Kepler-Gleichung ausrechnen. Danach ist nämlich:

$$M = E - e \sin E = E_0 + \Delta E_0 - e \sin(E_0 + \Delta E_0)$$

$$= E_0 - e \sin E_0 + (1 - e \cos E_0) \Delta E_0 + \dots$$

d.h.

$$\Delta E_0 \simeq \frac{M - M_0}{1 - e \cos E_0}; \quad M_0 = E_0 - e \sin E_0$$

Es ist klar, daß wir diese Korrektur mehrfach im Sinne einer Iteration anbringen können. Die Konvergenz einer derartigen Iteration ist freilich von vornherein gar nicht klar. Die Erfahrung zeigt, daß diese für  $e < 0.2$  in der Regel eintreten wird.

Eine andere Möglichkeit die Kepler-Gleichung zu lösen ist freilich die numerische Methode:

```
> #####
> # kepler.mws
> #####
> restart:

> rad := evalf(Pi/180.):
> #
> e := .9673;
                                e := 0.9673

> #
> Mdeg := 359.4743;
                                Mdeg := 359.4743

> M := Mdeg*rad;
                                M := 6.274010111

> #####
> E := solve(x - e*sin(x) = M,x);
                                E := 6.058431030
> #####
```

### 2.3.6 Die elliptische Keplerbahn im Raum

Bisher hatten wir die Position des einen Körpers in Bezug auf den anderen in der raumfesten Bahnebene durch die Elemente  $a$ ,  $e$ ,  $\omega$  und  $M$  bzw.  $T$  angegeben. Für praktische Anwendungen wird man jedoch in der Regel eine andere Referenzebene zugrunde legen. In der Satellitentheorie etwa wird eine solche Referenzebene durch die Äquatorebene der Erde zu einem festen Zeitpunkt (evtl. nach Korrektur für Nutations- und Präzessionseffekte) bestimmt sein. In Abb.2.11 ist eine derartige Referenzebene zusammen mit der Bahnebene zu sehen. Hier ist die astronomische  $x$ -Achse durch die Richtung zum sogenannten Frühlingspunkt bestimmt. Dieser ist definiert durch den Schnittpunkt des scheinbaren Himmelsäquators mit der Ekliptik, d.h. die durch die Position und die Geschwindigkeit der Erde um die Sonne definierte Ebene, in der Regel nachdem auch





rechtshändige Basisvektoren  $\mathbf{e}_{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3 = x, y, z$ ).  $\mathbf{e}_{(x)}$  ist also ein Einheitsvektor, der zum Frühlingspunkt weist etc. Vom Basissystem  $\mathbf{e}_{(i)}$  wollen wir zu einem anderen orthonormierten Dreibein  $\mathbf{E}_{(i)}$  übergehen:

- $\mathbf{E}_{(X)}$  und  $\mathbf{E}_{(Y)}$  liegen in der Bahnebene
- $\mathbf{E}_{(X)}$  weise zum Perizentrum.

Dieses Basissystem mit assoziierten Koordinaten  $(X, Y, Z)$  hat den Vorteil, daß die Bahnkoordinaten besonders einfach werden. Es ist nämlich:

$$X = r \cos f = a(\cos E - e); \quad Y = r \sin f = a(1 - e^2)^{1/2} \sin E; \quad Z = 0. \quad (2.124)$$

Unter Verwendung von  $\dot{E} = (a/r)n$ , welches sich aus der differenzierten Kepler-Gleichung,  $dM/dt = n = (1 - e \cos E)\dot{E}$ , ergibt, folgt entsprechend für die Geschwindigkeit

$$\dot{X} = -a\dot{E} \sin E = -(a^2 n/r) \sin E; \quad \dot{Y} = (a^2 n/r)(1 - e^2)^{1/2} \cos E; \quad \dot{Z} = 0. \quad (2.125)$$

Nun sind die Koordinaten  $(x, y, z)$  und  $(X, Y, Z)$  durch eine *Rotationsmatrix* miteinander verknüpft. Aus (das Summenzeichen über Dummy-Indizes  $i, j = 1, 2, 3$  lassen wir weg)

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_{(i)} = X^j \mathbf{E}_{(j)}$$

folgt nämlich durch Bildung des Skalarproduktes mit  $\mathbf{E}_{(j)}$ :

$$x^i = [\mathbf{e}_{(i)} \cdot \mathbf{E}_{(j)}] X^j \equiv R_{ij} X^j$$

mit

$$R_{ij} \equiv \mathbf{e}_{(i)} \cdot \mathbf{E}_{(j)}.$$

$R_{ij}$  dreht die zwei Basissysteme ineinander. Für diese Rotationsmatrix findet man:

$$\begin{aligned} R_{xX} &= \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos I \\ R_{xY} &= -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos I \\ R_{xZ} &= \sin \Omega \sin I \\ \\ R_{yX} &= \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos I \\ R_{yY} &= -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos I \\ R_{yZ} &= -\cos \Omega \sin I \\ \\ R_{zX} &= \sin \omega \sin I \\ R_{zY} &= \cos \omega \sin I \\ R_{zZ} &= \cos I \end{aligned} \quad (2.126)$$

und  $R_{ij} = R_{ji}$ . Diese Komponenten der Rotationsmatrix vom Bahnsystem  $\mathbf{X}$  ins raumfeste System  $\mathbf{x}$  kann man leicht mit Hilfe von Rotationsmatrizen gewinnen. Hier ist ein MAPLE-Programm dazu:

```

> #####
> # rotation.mws
> #####
> with(linalg):
> #####
> ## Definition der Rotationsmatrizen
> #####
> R1 := x -> matrix([[1,0,0],[0,cos(x),sin(x)],
> [0,-sin(x),cos(x)]]):
> R2 := x -> matrix([[cos(x),0,-sin(x)],[0,1,0],
> [sin(x),0,cos(x)]]):
> R3 := x -> matrix([[cos(x),sin(x),0],[-sin(x),cos(x),0],
> [0,0,1]]):
> #####
> M1 := R3(-omega);

```

$$M1 := \begin{bmatrix} \cos(\omega) & -\sin(\omega) & 0 \\ \sin(\omega) & \cos(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```

> M2 := R1(-i);

```

$$M2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(i) & -\sin(i) \\ 0 & \sin(i) & \cos(i) \end{bmatrix}$$

```

> M3 := R3(-Omega);

```

$$M3 := \begin{bmatrix} \cos(\Omega) & -\sin(\Omega) & 0 \\ \sin(\Omega) & \cos(\Omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```

> Ro := evalm(M3 &* (M2 &* M1));

```

$$Ro :=$$

$$[\cos(\Omega) \cos(\omega) - \sin(\Omega) \cos(i) \sin(\omega), -\cos(\Omega) \sin(\omega) - \sin(\Omega) \cos(i) \cos(\omega),$$

$$\sin(\Omega) \sin(i)]$$

$$[\sin(\Omega) \cos(\omega) + \cos(\Omega) \cos(i) \sin(\omega), -\sin(\Omega) \sin(\omega) + \cos(\Omega) \cos(i) \cos(\omega),$$

$$-\cos(\Omega) \sin(i)]$$

$$[\sin(i) \sin(\omega), \sin(i) \cos(\omega), \cos(i)]$$

Mit Hilfe der Rotationsmatrix (2.126) kann man die Komponenten der Vektoren  $\mathbf{x}$  und  $\dot{\mathbf{x}}$  durch die Bahnelemente ausdrücken. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} z &= R_{zX}X + R_{zY}Y = (\sin \omega \sin I)r \cos f + (\cos \omega \sin I)r \sin f \\ &= r \sin I (\sin \omega \cos f + \cos \omega \sin f) = r \sin I \sin(\omega + f). \end{aligned}$$

Insgesamt hat man:

$$\begin{aligned} x &= r[\cos \Omega \cos(\omega + f) - \sin \Omega \sin(\omega + f) \cos I] \\ y &= r[\sin \Omega \cos(\omega + f) + \cos \Omega \sin(\omega + f) \cos I] \\ z &= r \sin(\omega + f) \sin I. \end{aligned} \quad (2.127)$$

Den Radiusvektor  $r$  kann man zu gegebenem Zeitpunkt aus

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f}$$

gewinnen, wobei die wahre Anomalie  $f$  aus der Kepler-Gleichung folgt.

Die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors erhält man aus

$$\dot{x}^i = R_{ij} \dot{X}^j$$

d.h. aus

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{na}{r}(bR_{xY} \cos E - aR_{xX} \sin E) \\ \dot{y} &= \frac{na}{r}(bR_{yY} \cos E - aR_{yX} \sin E) \\ \dot{z} &= \frac{na}{r}(bR_{zY} \cos E - aR_{zX} \sin E) \end{aligned} \quad (2.128)$$

mit

$$b \equiv a(1 - e^2)^{1/2}.$$

### Berechnung der Bahnelemente aus gegebenen Vektoren $\mathbf{x}$ und $\dot{\mathbf{x}}$ .

Der spezifische Drehimpulsvektor  $\mathbf{C} = \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}$  besitzt die kartesischen Komponenten

$$\begin{aligned} C_x &= y\dot{z} - z\dot{y} \\ C_y &= z\dot{x} - x\dot{z} \\ C_z &= x\dot{y} - y\dot{x} \end{aligned} \quad (2.129)$$

woraus sich zunächst die Größe  $p$  berechnen läßt ( $\mu = GM$ )

$$p = \frac{C^2}{\mu} \quad (2.130)$$

Mit  $r^2 = \mathbf{x}^2$  ergibt sich die große Halbachse  $a$  aus

$$\mathbf{v}^2 = \dot{\mathbf{x}}^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (2.131)$$

und zusammen mit dem Wert für  $p$  erhalten wir denjenigen für  $e$  aus

$$p = a(1 - e^2). \quad (2.132)$$

Nun sind die Winkel  $I$  und  $\Omega$  gerade die Polarwinkel des Drehimpulsvektors  $\mathbf{C}$  ( $I$  ist auch der Winkel zwischen  $\mathbf{C}$  und  $z$ -Achse), d.h. die kartesischen Komponenten von  $\mathbf{C}$  können wir in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} C_x &= \pm C \sin I \sin \Omega \\ C_y &= \mp C \sin I \cos \Omega \\ C_z &= C \cos I \end{aligned} \quad (2.133)$$

wobei das obere Vorzeichen für  $I \leq 90^\circ$  bzw.  $C_z \geq 0$  zu nehmen ist und das untere für  $I \geq 90^\circ$ , d.h. für  $C_z \leq 0$ . Daraus ergeben sich  $\Omega$  und  $I$  gemäß:

$$\tan \Omega = -C_x/C_y \quad (2.134)$$

$$\cos I = C_z/C. \quad (2.135)$$

Aus den Gleichungen (2.127) für  $x, y$  und  $z$  erhält man ( $\operatorname{cosec} = 1/\sin$ )

$$\begin{aligned} \sin(\omega + f) &= \frac{z}{r} \operatorname{cosec} I \\ \cos(\omega + f) &= \frac{1}{r}(x \cos \Omega + y \sin \Omega) \end{aligned} \quad (2.136)$$

und daraus eindeutig  $(\omega + f)$ . Aber die wahre Anomalie  $f$  ist für nichtverschwindende Werte von  $e$  bestimmt durch

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f}.$$

Aus  $f$  erhält man dann  $E$  und  $M = E - e \sin E$  und damit auch  $T$ .

## 2.4 Rotationsbewegung ausgedehnter Körper

Wir wollen uns jetzt mit der allgemeinen Bewegung ausgedehnter Körper  $K$  im Rahmen der Newtonschen Mechanik beschäftigen. Wählt man dazu einen bestimmten Punkt  $\mathbf{x}_K$  im Körper aus, so kann man die Bewegung zerlegen in eine Translationsbewegung des Punktes  $\mathbf{x}_K$  (äußere Bewegung) und eine innere Bewegung der materiellen Elemente von  $K$  bzgl.  $\mathbf{x}_K$ . Für einen starren Körper kann  $\mathbf{x}_K$  so gewählt werden, dass die innere Bewegung durch eine reine Rotationsbewegung beschrieben werden kann.

### 2.4.1 Rotationsbewegung um eine feste Drehachse

Wir beginnen mit der Beschreibung der Drehbewegung eines starren Körpers um eine körperfeste Drehachse.

#### Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung

In Abb.2.12 rotiert eine starre Scheibe um eine feste Drehachse. Ein gewisses Massenelement ist hier mit  $P_i$  bezeichnet, welches sich im Abstand  $r_i$  von der Drehachse befindet. Bezüglich einer Bezugsgeraden befindet es sich unter einem Winkel  $\theta_i$ . Dreht sich nun die Scheibe um einen kleinen Winkel  $d\theta$ , so bewegt sich das Massenelement auf einem Kreisbogen der Länge  $ds_i$  mit

$$ds_i = r_i d\theta. \quad (2.137)$$

Nun ist für eine starre Scheibe

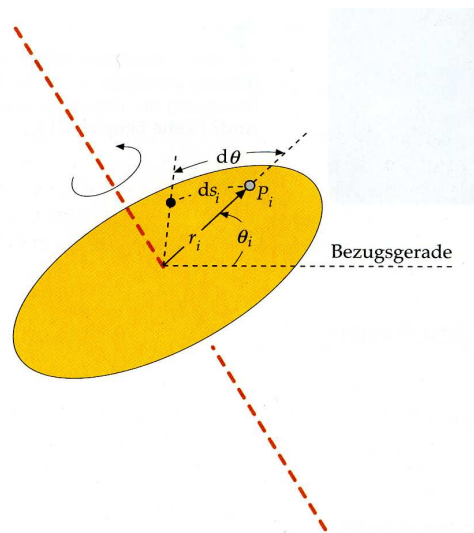


Abbildung 2.12: Geometrie im Problem der rotierenden Scheibe.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (2.138)$$

für alle materiellen Elemente gleich; diese Größe wird *Winkelgeschwindigkeit* genannt. Für konstante Winkelgeschwindigkeit ist

$$\Delta\theta = \omega(t - t_0)$$

und die Dauer einer Umdrehung ist durch

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2.139)$$

gegeben. Im allgemeinen Fall ist die Winkelbeschleunigung  $\alpha$  durch

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (2.140)$$

gegeben.

Die lineare Geschwindigkeit  $v_i$  eines Massenelementes der Scheibe ist tangential zur Kreisbahn des Elementes gerichtet und hat den Betrag

$$v_i = \frac{ds_i}{dt} = \frac{r_i d\theta}{dt} = r_i \omega. \quad (2.141)$$

Im allgemeinen wird die Winkelgeschwindigkeit als Vektor angegeben, welcher in Richtung der Drehachse weist, so dass

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} \quad (2.142)$$

gilt.

### Kinetische Energie und Trägheitsmoment

Wir wollen zunächst ein Ensemble von Massenpunkten  $m_i$  betrachten, welche sich starr um eine feste Drehachse bewegen. Die kinetische Energie dieses Ensembles ist dann durch

$$E_{\text{kin}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2 \equiv \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (2.143)$$

Hier wird

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad (2.144)$$

das Trägheitsmoment des Ensembles genannt. Betrachtet man die Bewegung eines ausgedehnten Körpers welcher starr um eine körperfeste Achse rotiert so ist das Trägheitsmoment durch

$$I = \int_K r^2 dm \quad (2.145)$$

gegeben, wenn  $dm$  ein Massenelement bezeichnet. Wir wollen dazu einige Beispiele betrachten.

### Trägheitsmoment eines Massenringes

In Abb.2.13 rotiert ein Massenring mit Radius  $R$  um eine feste Achse, die senkrecht zu seiner Ebene steht und durch seinen Mittelpunkt verläuft. Da alle Massenelemente den Abstand  $R$  von der Drehachse aufweisen ist das Trägheitsmoment durch

$$I = \int_K r^2 dm = R^2 \int_K dm = MR^2$$

gegeben.

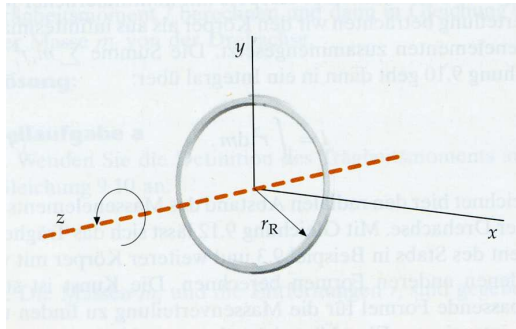


Abbildung 2.13: Geometrie im Problem des rotierenden Massenringes.

### Trägheitsmoment einer Scheibe und eines Zylinders

Wir betrachten nun eine Scheibe der Masse  $M$ , welche um die zentrale Symmetrieachse rotiert. Wir schreiben

$$dm = \rho d^3x$$

wenn  $\rho$  die Massendichte bezeichnet. Das Volumenelement  $d^3x$  kann hier in der Form

$$d^3x = dA \cdot D = 2\pi r dr \cdot D$$

geschrieben werden, wenn  $D$  die Scheibendicke und  $dA$  das Flächenelement eines Ringes mit Radius  $r$  und Dicke  $dr$  bezeichnen. Für das Trägheitsmoment findet man:

$$I = \int_K r^2 dm = 2\pi D \rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi D \rho \frac{R^4}{4}.$$

Das Scheibenvolumen beträgt  $\pi R^2 D$  und die Masse  $M = \pi R^2 D \rho$ , also

$$I = \frac{1}{2} MR^2. \quad (2.146)$$

Betrachten wir nun einen Zylinder, der sich um seine Körperachse dreht, so ist dieser Fall für einen entsprechenden Wert von  $D$  mit enthalten; das Trägheitsmoment ist ebenso durch  $MR^2/2$  gegeben.

### Trägheitsmoment einer Kugel

Nun werde eine Kugel mit Masse  $M$  und Radius  $R$  betrachtet, welche um eine feste Achse durch den Mittelpunkt der Kugel rotiert (Abb.2.14). Zur Berechnung des Trägheitsmomentes zerlegen wir die Kugel in einzelne dünne Scheiben (QRSTQ in Abb.2.14) senkrecht zur Drehachse mit  $P$  als zentralen Punkt,  $z = OP$ ,  $PS = r$  und  $dz$  sei die Scheibendicke. Das Trägheitsmoment dieser Scheibe ist dann durch

$$\frac{1}{2}\pi\rho r^4 dz$$

gegeben. Wegen  $r^2 = R^2 - z^2$  hat man

$$\begin{aligned} I &= \int_{-R}^R \frac{1}{2}\pi\rho(R^2 - z^2)^2 dz = \frac{1}{2}\pi\rho \int_{-R}^R (R^4 - 2R^2z^2 + z^4) dz \\ &= \frac{1}{2}\pi\rho \left[ 2R^5 - \frac{4}{3}R^5 + \frac{2}{5}R^5 \right] = \pi\rho R^5 \left[ \frac{15}{15} - \frac{10}{15} + \frac{3}{15} \right] \\ &= \frac{8}{15}\pi\rho R^5. \end{aligned}$$

Da Masse der Kugel ist

$$M = \frac{4\pi}{3}R^3\rho$$

also,

$$I = \frac{2}{5}MR^2. \quad (2.147)$$

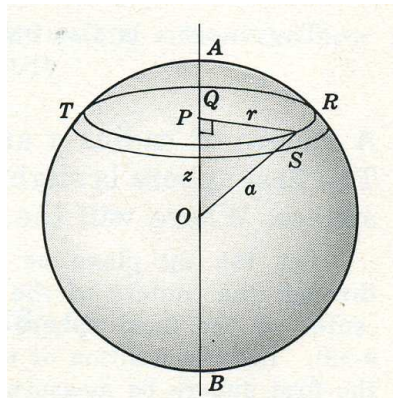


Abbildung 2.14: Zur Berechnung des Trägheitsmomentes einer Kugel.



**Trägheitsmoment eines triaxialen Ellipsoids**

wir betrachten einen homogenen Körper mit Masse  $M$  der Form eines triaxialen Ellipsoids, welches in kartesischen Koordinaten durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

beschrieben wird. Man rechnet aus, daß die Trägheitsmomente um die drei Symmetrieachsen durch:

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{1}{5}M(b^2 + c^2) \\ I_y &= \frac{1}{5}M(a^2 + c^2) \\ I_z &= \frac{1}{5}M(a^2 + b^2) \end{aligned} \quad (2.148)$$

gegeben sind. Im Falle eines um die  $z$ -Achse symmetrischen abgeplatteten spheroidalen Körpers sei  $c$  nur wenig verschieden von  $a = b$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{I_z - I_x}{I_x} &= \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} = \frac{(a - c)(a + c)}{a^2 + c^2} \simeq \frac{2a(a - c)}{2a^2} \\ &= 1 - c/a. \end{aligned}$$

Im Falle unsere Erde ist der Polarradius  $c = 6356,8$  km und der Äquatorialradius  $a = 6378,1$  km. Einsetzen ergibt für die Erde

$$\frac{I_z - I_x}{I_x} \simeq 0.0033.$$

**Der Satz von Steiner**

Die Berechnung des Trägheitsmomentes läßt sich in vielen Fällen durch einen Satz vereinfachen, der das Trägheitsmoment bezüglich einer Achse durch den Massenmittelpunkt mit dem Trägheitsmoment einer beliebigen anderen, zur ersten Achse parallelen Achse verknüpft (Abb.2.15). Sei  $S$  eine körperfeste Achse durch den Massenmittelpunkt des Körpers mit Gesamtmasse  $M$ . Wir wählen kartesische Koordinaten mit Ursprung im Massenmittelpunkt, d.h.

$$x_S = \sum m_i x_i / M = 0, \quad y_S = \sum m_i y_i / M = 0.$$

Sei  $A$  nun eine weitere Achse, parallel zu  $S$  mit Abstand  $h$  mit Koordinaten  $(x_A, y_A, z)$ . Dann ist das Trägheitsmoment bezüglich  $A$  durch

$$I_A = I_S + Mh^2 \quad (2.149)$$

gegeben (Satz von Steiner). Der Beweis erfolgt durch Ausrechnen:

$$I_S = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

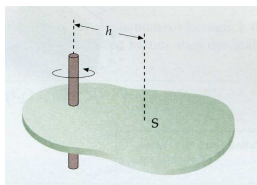


Abbildung 2.15: Zum Satz von Steiner.

und

$$\begin{aligned} I_A &= \sum m_i r_i'^2 = \sum m_i [(x_i - x_A)^2 + (y_i - y_A)^2] \\ &= \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) - 2 \sum m_i x_i x_A - 2 \sum m_i y_i y_A + \sum m_i (x_A^2 + y_A^2). \end{aligned}$$

Der erste Term ist gerade  $I_S$ , der letzte  $Mh^2$  und die beiden mittleren Terme verschwinden wegen der Schwerpunktsbedingung.

### Die rollende Bowlingkugel

Eine Bowlingkugel hat den Radius 11 cm und die Masse 7,2 kg (Beispiel 9.13 aus Tipler & Mosca). Sie rollt, ohne zu gleiten, mit 2 m/s in eine horizontale Kugelrückführung. Dann rollt sie, ohne zu gleiten, auf einer Steigung bis zu einer Höhe  $h$  hinauf, wo ihre Bewegung stoppt (Abb.2.16). Berechnen Sie  $h$ . Die

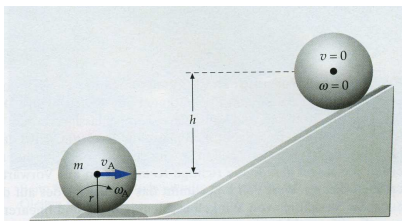


Abbildung 2.16: Problem der Bowlingkugel.

Lösung gelingt mit dem Energiesatz. Im unteren Punkt  $A$  hat die Kugel nur kinetische Energie, die sich aus Translations- und Rotationsanteil zusammensetzt:

$$E_A = \frac{1}{2} M v_A^2 + \frac{1}{2} I_S \omega_A^2$$

mit

$$\omega_A = v_R / R$$

und

$$I_S = \frac{2}{5} M R^2,$$

also

$$E_A = \frac{1}{2} M v_A^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{2}{5} M R^2 \right) \frac{v_A^2}{R^2} = \frac{7}{10} M v_A^2.$$

Im oberen Ruhepunkt hat sie nur noch die potenzielle Energie

$$E_{\text{pot}} = Mgh.$$

Setzt man beide Energien gleich so erhält man

$$h = \frac{7}{10} \frac{v_A^2}{g} = 28,5 \text{ cm}.$$

Das Ergebnis ist unabhängig von Radius und Masse der Bowlingkugel.

## 2.4.2 Drehimpuls und Drehmoment

### Drehimpuls

Wir betrachten zunächst ein einzelnes Teilchen der Masse  $m$  in einem Inertialsystem. Der lineare Impuls des Teilchens ist durch

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (2.150)$$

gegeben. Bezüglich des Koordinatenursprungs ist der *Drehimpuls* über

$$\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} \quad (2.151)$$

definiert. Kommt die Geschwindigkeit durch eine starre Drehung um eine raumfeste Drehachse mit Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$$

zustande, so gilt

$$\mathbf{L} = mr^2 \boldsymbol{\omega}. \quad (2.152)$$

In diesem Fall weist also der Drehimpuls in Richtung von  $\boldsymbol{\omega}$  und es gilt

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}. \quad (2.153)$$

Für einen ausgedehnten, starr rotierenden Körper  $K$  ist

$$\mathbf{L} = \int_K dm (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) = \int_K dm (\mathbf{x} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})). \quad (2.154)$$

Wegen  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$  folgt allgemein:

$$\mathbf{L} = \int_K dm [\mathbf{x}^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{x}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x})]. \quad (2.155)$$

Im Fall dass  $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x} = 0$  gilt für jedes Massenelement von  $K$ , ergibt sich  $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ . Im allgemeinen Fall steht der Drehimpuls aber nicht in Richtung der Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$ .

### Drehmoment

Für ein Massenelement, welches die Kraft  $\mathbf{F}$  erfährt, wird

$$\mathbf{M} = \mathbf{x} \times \mathbf{F} \quad (2.156)$$

als *Drehmoment* bezeichnet. Für einen ausgedehnten Körper  $K$  ist das Drehmoment durch

$$\mathbf{M} = \int_K dm (\mathbf{x} \times \mathbf{a}) \quad (2.157)$$

gegeben, wenn  $\mathbf{a}$  die Beschleunigung des Massenelementes bezeichnet.

### Newtonsches Axiom für Drehbewegungen

Aus dem Newton'schen Axiom folgt in einem Inertialsystem die dynamische Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \mathbf{M}. \quad (2.158)$$

Wir wollen jetzt einige rotierende Systeme als Anwendungsbeispiele studieren.

### Seilrolle mit zwei Massen

Das erste Beispiel wird in Abb.2.17 vorgestellt. Über eine fest montierte Seilrolle

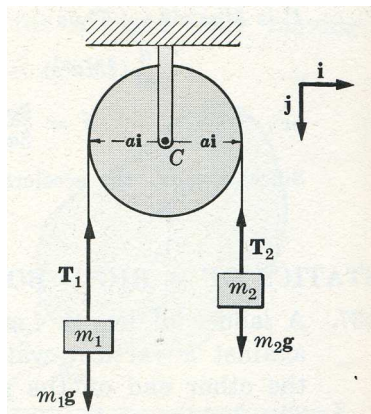


Abbildung 2.17: Geometrie im Problem der Seilrolle mit zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$ .

mit Radius  $R$  führt ein (masseloses) Seil, an dessen Enden sich die beiden Massen  $m_1$  und  $m_2$  befinden. Wir wählen  $\mathbf{i} = \mathbf{e}_x$  und  $\mathbf{j} = \mathbf{e}_y$  wie in der Abbildung angegeben, d.h.  $\mathbf{e}_x$  weise nach rechts,  $\mathbf{e}_y$  nach unten. Der Vektor

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y$$

weist nach hinten. Falls etwa  $m_1 > m_2$ , wird sich  $m_1$  nach unten,  $m_2$  dagegen nach oben bewegen und die Rolle wird sich gegen den Uhrzeigersinn drehen, d.h. die Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  weist nach vorne,

$$\boldsymbol{\omega} = -\omega \mathbf{e}_z,$$

wegen  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$ .

An dieser Stelle wollen wir uns zunächst die Kräfteverhältnisse im Falle eines gespannten Seiles klarmachen. Dazu betrachten wir eine Masse, welche über ein Seil fest an einem Träger montiert sei. Mit Hilfe des Seils werde die Masse in

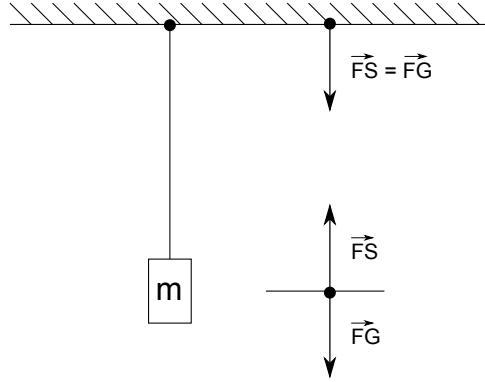


Abbildung 2.18: Eine Masse hänge an einem fest montierten Seil.

Ruhe gehalten. Durch die Elastizität des Seils übt dieses auf die Masse eine nach oben gerichtete Seilkraft aus, welche die Schwerkraft der Masse gerade kompensiert, d.h.  $\mathbf{F}_S|_m = -\mathbf{F}_G$ . Andererseits wirkt eine Seilkraft auf die Seilaufhängung nach unten, welche gleich der Schwerkraft ist, d.h.  $\mathbf{F}_S|_{\text{Aufh.}} = \mathbf{F}_G$ .

Bezeichnen wir nun die resultierende Beschleunigung von  $m_1$  mit  $a$ , so erfährt die Masse  $m_2$  die Beschleunigung  $-a$ , beide in  $y$ -Richtung. Die an der Rolle wirkenden Kräfte werden mit  $T$  bezeichnet. Also

$$m_1 a = m_1 g - T_1, \quad -m_2 a = m_2 g - T_2$$

bzw.

$$T_1 = m_1(g - a), \quad T_2 = m_2(g + a). \quad (2.159)$$

Das auf die Rolle wirkende Drehmoment ist gegeben durch

$$\mathbf{M} = (-R\mathbf{e}_x) \times (T_1\mathbf{e}_y) + (R\mathbf{e}_x) \times (T_2\mathbf{e}_y) = R(T_2 - T_1)\mathbf{e}_z. \quad (2.160)$$

Für den Drehimpuls finden wird

$$\mathbf{L} = I_C \boldsymbol{\omega} = -I_C \omega \mathbf{e}_z, \quad (2.161)$$

wenn  $I_C$  das Trägheitsmoment der Seilrolle bezeichnet. Das Newton'sche Axiom führt uns dann auf

$$R(T_2 - T_1)\mathbf{e}_z = -I_C\dot{\omega}\mathbf{e}_z$$

bzw.

$$I_C\dot{\omega} = R(T_1 - T_2). \quad (2.162)$$

Läuft das Seil ohne Schlupf über die Rolle, so gilt  $v = R\omega$  und

$$a = R\dot{\omega},$$

d.h.

$$T_1 - T_2 = \frac{I_C}{R}\dot{\omega} = \frac{I_C}{R^2}a$$

oder

$$a = \frac{R^2}{I_C}(T_1 - T_2). \quad (2.163)$$

Setzen wir  $I_C = (MR^2)/2$  (Scheibenmasse  $M$ ) so folgt

$$a = \frac{2(T_1 - T_2)}{M} = \frac{2(m_1 - m_2)g - 2(m_1 + m_2)a}{M}$$

bzw.

$$a = \left[ \frac{2(m_1 - m_2)}{2(m_1 + m_2) + M} \right] g. \quad (2.164)$$

Zieht nur eine Masse  $m_1 = m$  an der Seilrolle ( $m_2 = 0$ ), so ist die nach unten gerichtete Beschleunigung

$$a_{\downarrow} = g - a_{\text{Rolle}} = \left[ \frac{2m}{2m + M} \right] g.$$

Wir wollen jetzt annehmen, dass sich diese eine Masse  $m$  zunächst in Ruhe befindet und dann eine Strecke  $h$  hinunterfällt. Aufgrund der Beschleunigung ist dann  $h = \frac{1}{2}at^2$  und  $\omega = (a/R)t$ , d.h.

$$\omega^2 = (a/R)^2 t^2 = 2(a/R^2)h = \frac{Ma}{I_C}h.$$

Wir wollen dieses Ergebnis mit dem Energiesatz nachprüfen. Die Masse habe anfangs nur die potenzielle Energie

$$E_{\text{pot}} = mgh.$$

Nach dem Fall ist die Energie

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2.$$

Wegen  $v = at$  ist  $E_{\text{kin}} = mah$ . Daraus folgt

$$\omega^2 = \frac{2mh(g-a)}{I_C}.$$

Wegen

$$g - a_{\downarrow} = \left[ \frac{M}{2m + M} \right] g = \frac{M}{2m} a_{\downarrow}$$

ergibt sich daraus wieder das alte Ergebnis für  $\omega^2$ .

**S12: Diverse Körper, welche eine schiefe Ebene herunterrollen.**

Wir wollen jetzt verschiedene Körper der Masse  $M$  betrachten, welche eine schiefe Ebene mit Neigungswinkel  $\alpha$  gegenüber der Horizontalen ohne Schlupf herunterrollen. Konkret wollen wir drei Körper betrachten: einen Hohlzylinder, einen Vollzylinder und eine Kugel. Die Trägheitsmomente dieser Körper wollen wir in der Form

$$I_K = \beta MR^2 \quad (2.165)$$

schreiben, mit  $\beta = 1$  für den Hohlzylinder,  $\beta = 1/2$  für den Vollzylinder und  $\beta = 2/5$  für die Kugel. Die wirkenden Kräfte sind in Abb.2.19 zu sehen. Wir führen kartesische Koordinaten derart ein, dass die  $x$ -Achse längs der schiefen Ebene nach unten weist, die  $y$ -Achse dazu senkrecht nach oben. Die kanonische  $z$ -Achse ( $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y$ ) weist dann nach hinten.

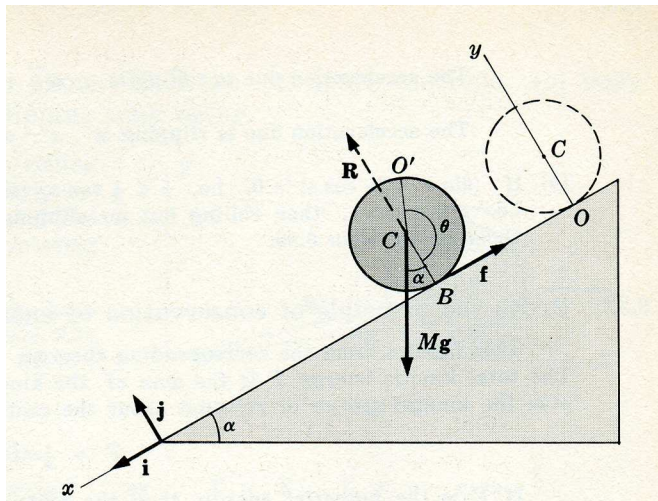


Abbildung 2.19: Ein Körper rollt eine schiefe Ebene hinunter. Die Schwerkraft wirkt nach unten, die Reibungskraft  $\mathbf{f}$  in Richtung der negativen  $x$ -Richtung.

Die auf den Massenmittelpunkt des Körpers wirkende Schwerkraft weist nach unten und muss daher in eine  $x$ - und eine  $y$ -Komponente zerlegt werden. Die  $y$ -Komponente der Schwerkraft wird exakt kompensiert durch eine vom Boden ausgehende nach oben wirkende Kraft; diese wird uns im Weiteren nicht mehr interessieren. Die in  $x$ -Richtung wirkende Schwerkraft ist durch  $Mg \sin \alpha$  gegeben; in entgegengesetzter Richtung wirkt eine Reibungskraft  $f$ . Man beachte, dass

ohne eine solche Reibungskraft der Körper gar keine Drehbewegung ausführen würde; er würde einfach reibungsfrei die Ebene hinunterrutschen ohne sich zu drehen. Die Bewegungsgleichung für den Körperschwerpunkt in  $x$ -Richtung lautet:

$$M\ddot{x}_S = Mg \sin \alpha - f.$$

Das um den Körperschwerpunkt wirkende Drehmoment  $\mathbf{M}$  ist durch

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{f} = (-R\mathbf{e}_y) \times (-f\mathbf{e}_x) = -Rf\mathbf{e}_z$$

gegeben, der Drehimpuls um die Schwerpunktsachse durch

$$\mathbf{L} = I_K \boldsymbol{\omega} = -I_K \dot{\theta} \mathbf{e}_z,$$

wenn der Drehwinkel  $\theta$  mit der Rollbewegung wächst. Also,

$$I_K \ddot{\theta} = Rf,$$

Kein Schlupf bedeutet

$$\theta = x_S/R$$

wenn sowohl  $\theta$  als auch  $x_S$  vom gleichen Startpunkt aus gezählt werden. Aus der letzten Beziehung ergibt sich damit

$$f = I_K \ddot{x}_S / R^2.$$

Dies können wir dann in die Gleichung der Translationsbewegung einsetzen und erhalten

$$M\ddot{x}_S = Mg \sin \alpha - \frac{I_K}{R^2} \ddot{x}_S.$$

Mit dem obigen Ansatz  $I_K = \beta MR^2$  für das Trägheitsmoment des Körpers resultiert die Körperbeschleunigung in  $x$ -Richtung:

$$\ddot{x}_S = \frac{1}{1 + \beta} g \sin \alpha. \quad (2.166)$$

Im Falle unserer drei Körper lautet der Vorfaktor  $1/(1 + \beta) = 1/2$  für den Zylindermantel,  $2/3$  für den Vollzylinder und  $5/7$  für die Kugel. Lässt man alle drei Körper aus dem Ruhezustand auf gleicher Höhe die Ebene hinabrollen, so wird zuerst die Kugel unten ankommen, gefolgt vom Vollzylinder und danach vom Hohlzylinder.

Wir wollen dieses Ergebnis noch auf eine ganz andere Art und Weise ableiten. Wir nehmen an, dass die Reibung hinreichend groß ist, so dass unser Körper wirklich die Ebene hinunterrollt. Als Drehachse wählen wir jedoch nun die Achse, welche durch den instantanen Berührungspunkt  $B$  des Körpers mit der Ebene hindurchgeht. Das Trägheitsmoment des Körpers durch diese Achse ergibt sich aus dem Satz von Steiner:

$$I_B = \beta MR^2 + MR^2 = (\beta + 1)MR^2.$$



Die Schwerkraft induziert dann ein Drehmoment um die  $B$ -Achse von

$$\mathbf{M}_B = -MgR \sin \alpha \mathbf{e}_z$$

was uns auf die Gleichung

$$I_B \ddot{\theta} = MgR \sin \alpha$$

bzw. mit  $\theta = x_S/R$  wieder auf die Gleichung

$$\ddot{x}_S = \frac{1}{1 + \beta} g \sin \alpha$$

führt.

Die Reibungskraft ergibt sich schließlich zu

$$f = \frac{I_K}{R^2} \ddot{x}_S = \left( \frac{\beta}{1 + \beta} \right) Mg \sin \alpha .$$



# Kapitel 3

## Nicht Inertialsysteme

Bisher hatten wir die uns interessierenden Systeme in einem inertialen Referenzsystem beschrieben, in dem das Newtonsche Gesetz in der oben angegebenen Form Gültigkeit besitzt. Will man nun beispielsweise ein System wie einen frei fallenden Körper in einem mit der Erdoberfläche fest verbundenen System beschreiben, so muss die tägliche Erddrehung Berücksichtigung finden. Wir wollen dazu zunächst Referenzsysteme studieren, die sich um eine feste Drehachse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit, von einem Inertialsystem aus gesehen, bewegen.

### 3.1 Drehungen um eine feste Achse

Wir wollen von einem Inertialsystem  $\Sigma_I$  mit räumlichen Koordinaten  $X, Y, Z$  ausgehen und dann ein System mit Koordinaten  $x, y, z$  betrachten, welches sich durch eine Drehung um die gemeinsame  $z$ -Achse ( $z = Z$ ) um den festen Winkel  $\alpha$  unterscheidet (Abb.3.1). Eine Drehung um einen positiven Winkel erfolgt in der  $x-y$ -Ebene entgegen des Uhrzeigersinnes. Wir betrachten zunächst einen Punkt

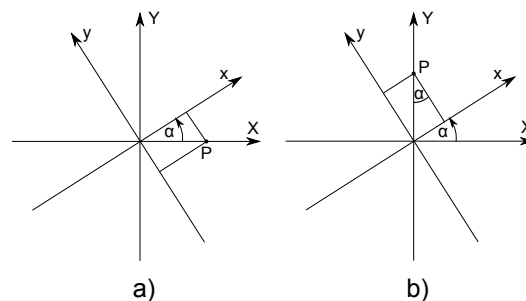


Abbildung 3.1: Drehung des Systems  $X, Y$  um einen festen Winkel  $\alpha$ . Betrachtet wird ein Punkt auf der  $X$ -Achse (links), bzw.  $Y$ -Achse (rechts).

auf der  $X$ -Achse (Abb.3.1, links). Dafür gilt  $\cos \alpha = x/X$  und  $\sin \alpha = -y/X$ . Für einen Punkt auf der  $Y$ -Achse haben wir:  $\cos \alpha = y/Y$  und  $\sin \alpha = x/Y$ . Im allgemeinen Fall ergibt sich so für die konstante Drehung um einen Winkel  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}x &= X \cos \alpha + Y \sin \alpha \\y &= -X \sin \alpha + Y \cos \alpha.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Die inverse Drehung kann durch Vertauschen von  $(x, y)$  mit  $(X, Y)$  und Ersetzen von  $\alpha$  durch  $-\alpha$  beschrieben werden:

$$\begin{aligned}X &= x \cos \alpha - y \sin \alpha \\Y &= x \sin \alpha + y \cos \alpha.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Es gibt zwei einfache Art und Weisen, Drehungen dieser Art zu beschreiben. Die erste ist mit Hilfe von Rotationsmatrizen. Seien

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

dann können wir die Drehung um die gemeinsame  $z$ -Achse mit Hilfe der Matrix

$$\mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\tag{3.3}$$

über

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}_z(\alpha)\mathbf{X}\tag{3.4}$$

beschreiben. Eine zweite Methode zur Beschreibung einer solchen Drehung involviert komplexe Zahlen. Sei

$$u \equiv x + iy, \quad U \equiv X + iY\tag{3.5}$$

dann haben wir einfach:

$$\begin{aligned}u &= x + iy = X \cos \alpha + Y \sin \alpha - iX \sin \alpha + iY \cos \alpha \\ &= (X + iY)(\cos \alpha - i \sin \alpha) = e^{-i\alpha}U.\end{aligned}\tag{3.6}$$

## 3.2 Rotierende Systeme

Wir wollen jetzt ein System  $\Sigma_R$  betrachten, welches mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  bzgl. eines Inertialsystems  $\Sigma_I$  um die gemeinsame  $z$ -Achse rotiert. Dazu wollen wir annehmen, dass sich der Drehwinkel  $\alpha$  durch

$$\alpha = \omega t\tag{3.7}$$

beschreiben lässt. Seien

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_x, \mathbf{j} = \mathbf{e}_y, \mathbf{k} = \mathbf{e}_z$$

rotierende Einheitsvektoren an die  $x, y, z$ -Achsen. Im rotierenden System hat man einfach

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Im Inertialsystem sind diese rotierenden Basisvektoren durch

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Betrachten wir nun die Zeitabhängigkeit etwa von  $\mathbf{i}$  vom Inertialsystem aus gesehen, der Einfachheit halber zunächst für  $t = 0$ :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{i} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ +\cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\left. \frac{d}{dt}\mathbf{i} \right|_{t=0} = \omega \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \omega \mathbf{j} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}.$$

Dies lässt sich sofort verallgemeinern: ist  $\mathbf{e}^R$  ein in  $\Sigma_R$  ruhender, d.h. in  $\Sigma_I$  mit  $\boldsymbol{\omega}$  rotierender Vektor, so gilt in  $\Sigma_I$ :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}^R = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}^R. \quad (3.8)$$

Sei  $\mathbf{r}_K$  ein zeitabhängiger Vektor in  $\Sigma_I$ , etwa ein Positionsvektor eines bewegten Teilchens. Dann ist

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt}\mathbf{r} \right|_{\Sigma_I} &= \frac{d}{dt}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} + x\frac{d}{dt}\mathbf{i} + y\frac{d}{dt}\mathbf{j} + z\frac{d}{dt}\mathbf{k} \\ &= \left. \frac{d}{dt}\mathbf{r} \right|_{\Sigma_R} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Mit der symbolischen Schreibweise

$$D_I \equiv \left. \frac{d}{dt} \right|_{\Sigma_I}, \quad D_R \equiv \left. \frac{d}{dt} \right|_{\Sigma_R} \quad (3.9)$$

gilt damit

$$D_I = D_R + \boldsymbol{\omega} \times . \quad (3.10)$$

Diese Schreibweise ist nützlich, um das Newtonsche Axiom in rotierenden Koordinaten zu erhalten. Es ist nämlich für konstante Winkelgeschwindigkeit

$$D_I \mathbf{r} = D_R \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

und

$$D_I^2 \mathbf{r} = D_R^2 \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times (D_R \mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).$$

Bezeichnen wir mit  $\mathbf{v} \equiv D_R \mathbf{r}$  die Geschwindigkeit eines Teilchens vom rotierenden System aus gesehen, so können wir das Newtonsche Axiom in der Form

$$\mathbf{F} \equiv m D_I^2 \mathbf{r} = m D_R^2 \mathbf{r} + 2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) + m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

bzw.

$$m D_R^2 \mathbf{r} = \mathbf{F} - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) - m[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] \quad (3.11)$$

schreiben. Hierbei bezeichnet  $\mathbf{F}$  die Kraft, wie sie im Inertialsystem bestimmt wird. Der zweite Term auf der rechten Seite von (3.2) beschreibt die *Coriolis-Kraft*, der dritte Term die *Zentrifugalkraft*.

Die Zentrifugalkraft oder Fliehkraft wirkt von der Drehachse weg. Um ein Körper in einem rotierenden System an einem Ort zu halten muss also eine vom Betrag her gleiche, aber zur Drehachse hin gerichtete Kraft wirken. Eine solche wird *Zentripetalkraft* genannt.

Zum Verständnis der Coriolis-Kraft betrachten wir auf einer rotierenden Plattform ein Teilchen im Abstand  $r$  von der Rotationsachse (Abb.3.2). Das Teilchen werde durch eine magische Zentripetalkraft im rotierenden System in Ruhe gehalten. Während einer kleinen Zeitspanne  $\Delta t$  legt das Teilchen, vom Inertialsystem aus gesehen, den Weg  $s = \omega r \Delta t = v_t \Delta t$  zurück. Nun geben wird dem Teilchen eine radiale Geschwindigkeit  $v_r$ ; das Teilchen bewegt sich während  $\Delta t$  eine kleine Strecke  $\Delta r = v_r \Delta t$  von  $A$  nach  $A'$  in radialer Richtung. In tangentialer Richtung bewegt sich unser Teilchen weiterhin um die Strecke  $s$ , vom Inertialsystem aus gesehen. Ein bei  $r + \Delta r$  im rotierenden System ruhendes Teilchen würde sich dagegen um eine Strecke  $s' = \omega(r + \Delta r)\Delta t = s + \Delta s$  bewegen. Dies impliziert, dass unser Teilchen durch eine im rotierenden System auftretende Kraft, welche entgegen der Drehrichtung weist, gezwungen wird, die Strecke  $\Delta s$  'zurückzulaufen'. Nun ist  $\Delta s = \omega \Delta r \Delta t = \omega v_r (\Delta t)^2$ , d.h. diese Kraft hat den Betrag  $2\omega v_r \cdot m$ . Dies ist nun gerade die Coriolis-Kraft.

### Kräftefreies Teilchen, von einer rotierenden Plattform aus gesehen

Wir wollen nun als Anwendung ein kräftefreies Teilchen von einem rotierenden System aus betrachtet studieren. Dazu wollen wir uns auf die Ebene senkrecht zur Rotationsachse, welche in Richtung der  $z$ -Achse liegt, beschränken. Wir benutzen wieder die Notation der Koordinaten in  $\Sigma_I$  (Großbuchstaben) und in  $\Sigma_R$  (Kleinbuchstaben), sowie die Notation von  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  für die rotierenden Basisvektoren (rotierendes orthonomiertes Dreibein). Wegen  $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$  und  $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$  folgt

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = (\omega \mathbf{k}) \times (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}) = \omega(\dot{x}\mathbf{j} - \dot{y}\mathbf{i})$$

und

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) - \omega^2 \mathbf{r} = -\omega^2 \mathbf{r}.$$

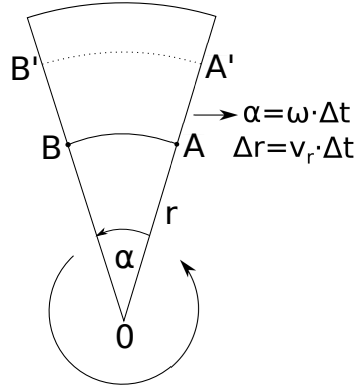


Abbildung 3.2: Diagramm zur Erklärung der Coriolis-Kraft.

Damit lässt sich die Bewegungsgleichung (ohne äußere Kraft)

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

im rotierenden System schreiben als

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x &= 0 \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Diese Gleichung kann man einfach im Komplexen mit  $u \equiv x + iy$  schreiben als

$$\ddot{u} + 2i\omega\dot{u} - \omega^2 u = 0. \quad (3.13)$$

Die Lösung dieser (komplexen) Differentialgleichung kann man auf folgende Art und Weise erraten. Sei

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_0 + V_X t \\ Y_0 + V_Y t \end{pmatrix}$$

der 2-dimensionale Ortsvektor eines kräftefreien Teilchens im Inertialsystem und

$$U \equiv X + iY.$$

Es ist

$$\dot{U} = V_X + iV_Y$$

und

$$\ddot{U} = 0.$$

Dann wird sich die Lösung  $u$  im rotierenden System durch eine Drehung um den Winkel  $\alpha = \omega t$  ergeben (beachte die Analogie zu Gleichung (3.6)), d.h. durch

$$u = e^{-i\omega t} U. \quad (3.14)$$

Wir können nun nachprüfen, ob dieser Ausdruck für  $u$  tatsächlich die Bewegungsgleichung (3.13) erfüllt. Man findet

$$\begin{aligned} u &= e^{-i\omega t} U \\ \dot{u} &= -i\omega u + \dot{U} e^{-i\omega t} \\ \ddot{u} &= -i\omega \dot{u} - i\omega \dot{U} e^{-i\omega t} \\ &= -i\omega \dot{u} - i\omega [\dot{u} + i\omega u] \\ &= -2i\omega \dot{u} + \omega^2 u. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in (3.13) findet man, dass  $u$  in der Tat eine Lösung dieser Gleichung darstellt.

### Karussell und Erbsenpistole

Zwei Brüder sitzen auf gegenüberliegenden Seiten am äußeren Rand eines sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  drehenden Karussells mit Radius  $R$ . Sei  $V_0 = \omega R$  die Geschwindigkeit eines der Kinder vom Inertialsystem aus gesehen. Peter, einer der Brüder, befinde sich bei  $t = 0$  am Punkt  $X = x = R, Y = y = 0$ . Zum Anfangszeitpunkt zielt Peter mit seiner Erbsenpistole genau auf seinen Bruder Hans und feuert. Die Erbse verlässt die Pistole mit einer Geschwindigkeit  $v_{x0} = -V_0, v_{y0} = 0$ . Nach welcher Zeit trifft die Erbse wieder den Rand des Karussells und wie lauten die mitrotierenden Koordinaten  $(x, y)$  für diesen getroffenen Randpunkt (die Koordinaten von Hans lauten:  $(x, y) = (-R, 0)$ )?

Wir betrachten das Problem zunächst vom Inertialsystem aus. Zur Anfangszeit hat die Erbse die Position  $(X, Y) = (R, 0)$  und die Geschwindigkeit  $(V_X, V_Y) = (-V_0, +V_0)$ , da sich Peter ja mit dem Karussell mitdreht und daher eine Geschwindigkeitskomponente von  $V_0$  in  $Y$ -Richtung aufweist. Die Trajektorie der Erbse im Inertialsystem ist durch  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{V}t$  gegeben. Die Erbse befindet sich am Rand des Karussells falls

$$|\mathbf{X}|^2 = \mathbf{X}_0^2 + 2\mathbf{X}_0 \cdot \mathbf{V}t + \mathbf{V}^2 t^2 = R^2$$

gilt. Da  $\mathbf{X}_0^2 = R^2$  ergibt sich

$$2\mathbf{X}_0 \cdot \mathbf{V}t + \mathbf{V}^2 t^2 = 0.$$

Eine Lösung ist freilich der Anfangszeitpunkt  $t = 0$ ; für den zweiten Zeitpunkt haben wir

$$t = -2\mathbf{X}_0 \cdot \mathbf{V} / \mathbf{V}^2.$$

Einsetzen ergibt

$$t = 1/\omega,$$

d.h. einen Drehwinkel von  $\alpha = \omega t = 1$ . Die dazugehörigen Koordinaten lauten:

$$X = 0, Y = R$$

und

$$x = R \sin \alpha = 0,84R, \quad y = R \cos \alpha = 0,54R.$$



### Frei fallendes Teilchen in einem erdfesten Labor; Gravimeter

Bisher hatten wir angenommen, dass Inertialkoordinaten und rotierende Koordinaten den gleichen Ursprung aufweisen. Wir wollen jetzt ein erdfestes System betrachten, welches mit der Erde im Raum bzgl. eines Inertialsystems mit  $\omega$  rotiert. Die Winkelgeschwindigkeit der Erde beträgt dabei rund

$$\omega = 7,29 \times 10^{-5} \text{ rad/s.}$$

Die Geometrie des Problems ist in Abb.3.3 zu sehen. Hier wird die Gestalt der Erde vereinfacht als Kugel angenommen. Der Ursprung des Inertialsystems ist

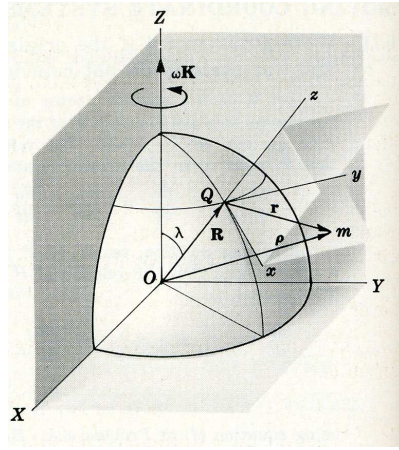


Abbildung 3.3: Geometrie im Problem eines erdfesten Referenzsystems mit Ursprung in  $Q$ . Die rotierende  $x$ -Achse weist gen Süden, die  $y$ -Achse nach Osten und die  $z$ -Achse zum Zenit.

dort mit  $O$  bezeichnet, der Ursprung eines erdfesten Laborsystems mit  $Q$ . Wir betrachten ein frei fallendes Teilchen in der Nähe von  $Q$ . Im Laborsystem sei der Ortsvektor  $\mathbf{r}$ , im Inertialsystem dagegen  $\boldsymbol{\rho}$ . Es gilt:

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{R} + \mathbf{r} \quad (3.15)$$

wenn  $\mathbf{R}$  den Positionsvektor von  $Q$  im Inertialsystem bezeichnet. Damit ergibt sich

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{dt^2} \Big|_{\Sigma_I} = \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{R} + \mathbf{r}) \Big|_{\Sigma_I} = \ddot{\mathbf{R}} + D_I^2 \mathbf{r}. \quad (3.16)$$

Aus dem Newtonschen Axiom ergibt sich damit

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{dt^2} \Big|_{\Sigma_I} = m \ddot{\mathbf{R}} + m D_R^2 \mathbf{r} + 2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) + m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

bzw.

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \Big|_{\Sigma_R} = \mathbf{F}/m - \ddot{\mathbf{R}} - 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (3.17)$$

Nun bewegt sich der erdfeste Koordinatenursprung zwar in  $\Sigma_I$  nicht aber in  $\Sigma_R$  ohne eine auf diesen wirkende Kraft  $\mathbf{F}$ . Daher resultiert die Beschleunigung von  $Q$  allein durch die Zentrifugalbeschleunigung:

$$\ddot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}). \quad (3.18)$$

Zusammen mit der gravitativen Beschleunigung unseres Probeteilchens ergibt sich die erdfeste Bewegungsgleichung eines frei fallenden Körpers zu

$$\left. \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right|_{\Sigma_R} = -\frac{GM}{\rho^3} \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) - 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).$$

Führt man nun die sogenannte *Schwerebeschleunigung* ein:

$$\mathbf{g} = -\frac{GM}{\rho^3} \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \quad (3.19)$$

so können wir die Bewegungsgleichung eines frei fallenden Körpers in der Form

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{g} - 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (3.20)$$

schreiben. In der Nähe der Erdoberfläche kann der zentrifugale Anteil vernachlässigt werden, so dass die Bewegungsgleichung die Form:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{g} - 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) \quad (3.21)$$

annimmt.

Eine im Labor fest montierte Masse mit  $\mathbf{v} = 0$  erfährt daher die Schwerebeschleunigung  $\mathbf{g}$ . Für unsere Erde ist diese abhängig von der Breite  $\phi$  des Beobachters:

$$g(\phi) = (9,7803 + 0,0518 \sin^2 \phi) \text{ m/s}^2. \quad (3.22)$$

Ein Gerät, welches die Erdschwere misst wird Gravimeter genannt.

### Übungsaufgabe

Als Übungsaufgabe (z.B. Spiegel (1967), 6.15-6.16) zeige man: in Gleichung (3.21) werde die Schwerebeschleunigung  $\mathbf{g}$  als konstant angenommen. Sei  $\lambda = 90^\circ - \phi$  die Ko-Breite des Beobachters,  $\mathbf{i}$  weise nach Süden,  $\mathbf{j}$  nach Osten und  $\mathbf{k}$  zum Zenit. Man zeige, dass sich die Coriolis-Beschleunigung in der Form

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \omega [-(\cos \lambda \dot{y}) \mathbf{i} + (\cos \lambda \dot{x} + \sin \lambda \dot{z}) \mathbf{j} - (\sin \lambda \dot{y}) \mathbf{k}] \quad (3.23)$$

schreiben lässt. Die Bewegungsgleichung eines frei fallenden Körpers hat dann die Form

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega \dot{y} \cos \lambda \\ \ddot{y} &= -2\omega(\dot{x} \cos \lambda + \dot{z} \sin \lambda) \\ \ddot{z} &= -g + 2\omega \dot{y} \sin \lambda. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Löse dieses System dann iterativ unter den Anfangsbedingungen  $t = 0 : x = y = 0, z = h; \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ . Vernachlässige dazu zunächst den Einfluss der Coriolis-Beschleunigung in der  $z$ -Bewegung. Zeige dass der Coriolis-Term bewirkt, dass ein frei fallender Körper nach Osten um den Betrag

$$y = \frac{1}{3}\omega g \sin(\lambda)t^3 \quad (3.25)$$

abgelenkt wird.

Eine Ablenkung in Richtung Osten scheint auf den ersten Blick paradox zu sein, da sich die Erde ja in die selbe Richtung dreht. Nun hat aber vom Inertialsystem aus gesehen der anfangs ruhende Körper eine größere Geschwindigkeit als der Erdboden und es ist dieser Geschwindigkeitsüberschuss, welcher das Teilchen in ostwärtige Richtung ablenkt.

### Die Passatwinde

In der Nähe des Äquators steht die Sonne tagsüber hoch über dem Horizont und erwärmt dadurch die Luft über dem Boden stark. Die erwärmte Luft verliert an Dichte und steigt auf, wodurch darunter (entlang der so genannten inner-tropischen Konvergenzzone - ITC) über dem Erdboden eine "Tiefdruckrinne" entsteht. Beim Aufsteigen kühlt sich die Luft adiabatisch ab, so dass Wasser kon-

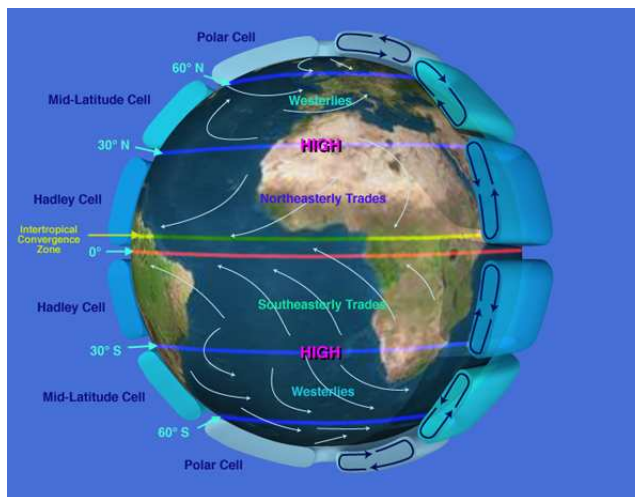


Abbildung 3.4: Geometrie im Zusammenhang mit den Passatwinden.

densiert (Wolkenbildung) und oft heftige Gewittergüsse niedergehen. Über die Verdunstung am Boden und die Kondensation in der Höhe, die Wärme freisetzt, wird zusätzliche Wärmeenergie von der Erdoberfläche in die Höhe befördert. An der Tropopause (in etwa 15 bis 18 Kilometer Höhe) strömt die Luft nach Norden und Süden vom Äquator weg. Dabei kühlt die Luft zwar weiter ab, bleibt

aber im Vergleich zu den Luftmassen der höheren Breiten dennoch relativ warm. Durch die Temperaturschichtung von der sehr warmen, aus der ITC stammenden Luft über der vergleichsweise weniger warmen Luft der höheren Breiten entsteht die stabile Passatinversion, die den vertikalen Luftaustausch weitgehend verhindert. Bei der Bewegung polwärts werden die Luftmassen auf einen engeren Raum zusammengedrängt, weil sich die Meridiane vom Äquator bis zu den Polen einander immer weiter annähern. Diese räumliche Einengung drängt auch die Luftmassen zusammen und zwingt sie näher Richtung Boden. Ein Großteil der polwärts strömenden Luftmassen sinkt im Bereich um ca.  $30^\circ$  Nord bzw.  $30^\circ$  Süd ab. Dadurch entstehen in diesen Regionen stabile Hochdruckgebiete. Beim Absinken erwärmt sich die Luft.

Die aus dem Hochdruckgebiet ausströmende Luft folgt nun wieder dem Luftdruckgefälle, Hauptströmungen wehen daher zur äquatorialen Tiefdruckrinne. Diese Winde sind relativ stabil, jedoch werden sie aufgrund der Coriolis-Kraft zu leicht östlichen Winden abgelenkt, nämlich auf der Nordhalbkugel in Strömungsrichtung nach rechts (west) und auf der Südhalbkugel nach links. So entstehen die Nordost- respektive Südost-Passate (Abb.3.4).

# Kapitel 4

## Spezielle Relativitätstheorie

Die (Spezielle) Relativitätstheorie basiert auf einer Reihe von Prinzipien, welche experimentell mit höchster Genauigkeit Bestätigung fanden. Grundlegend ist das Prinzip von der *Konstanz der Lichtgeschwindigkeit* im Vakuum. Dieses Prinzip beinhaltet mehrere unabhängige Aspekte. Zunächst ist die Vakuumlichtgeschwindigkeit unabhängig vom Bewegungszustand der Lichtquelle, so ähnlich wie die Schallgeschwindigkeit auch nicht von der Geschwindigkeit der Schallquelle abhängt. Dann ist diese Geschwindigkeit unabhängig von Frequenz und Polarisation der Strahlung selbst; das Vakuum ist nicht dispersiv.

Nun ist die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum auch unabhängig vom Bewegungszustand des Beobachters, etwas was vollkommen im Gegensatz zum 'gesunden Menschenverstand' steht.

### 4.1 Die Zeitdilatation

Mit der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit wird das Ablesen einer Uhr relativ, d.h. abhängig vom relativen Bewegungszustand zwischen Uhr und Beobachter, da gemessene Zeitspannen von der Ausbreitung elektromagnetischer Signale abhängen. Wir betrachten dazu eine einfache Lichtuhr, die nur aus zwei ideal reflektierenden Spiegeln mit konstantem Abstand  $L$  ohne äußere Kräfte besteht, zwischen denen ein Lichtpuls hin und her läuft. Im oberen Teil von Abb. (4.1) möge ein Beobachter in Bezug auf diese Lichtuhr ruhen. Die Zeitspanne zwischen der Reflektion des Pulses an einem Spiegel und die Wiederankunft dort werde mit  $\Delta\tau$  bezeichnet:

$$\Delta\tau = \frac{2L}{c}.$$

Im unteren Teil von Abb. (4.1) ist die selbe Uhr von einem dazu bewegten Beobachter aus gesehen. Entscheidend ist, dass auch für diesen sich der Lichtpuls mit der selben Geschwindigkeit  $c$  ausbreitet. Weist die Uhr für diesen Beobachter die Geschwindigkeit  $v$  auf, so misst der Beobachter ein entsprechendes Zeitintervall

$\Delta t$  mit

$$L^2 + \left(\frac{v \cdot \Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{c \cdot \Delta t}{2}\right)^2,$$

was uns auf

$$L^2 + \frac{1}{4}v^2(\Delta t)^2 = \frac{1}{4}c^2(\Delta t)^2$$

bzw.

$$\frac{4L^2}{c^2} = (\Delta t)^2(1 - v^2/c^2),$$

also auf die Relation

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \equiv \gamma\Delta\tau \quad (4.1)$$

führt. Die beobachtete Anzeige einer Uhr hängt demnach von der Geschwindigkeit dieser Uhr in Bezug auf den Beobachter ab. Die von einem mit einer Uhr mitbewegten Beobachter abgelesene Zeit wird *Eigenzeit* genannt. Das von einem bewegten Beobachter abgelesene Zeitintervall  $\Delta t$  ist um einen Faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4.2)$$

größer als das entsprechende Eigenzeitintervall. Einige Zahlenwerte für  $\gamma$  seien im Folgenden aufgelistet.

$v/c$	$\gamma(v/c)$
0,1	1,005
0,3	1,048
0,5	1,155
0,7	1,400
0,9	2,294
0,99	7,089
0,999	22,366

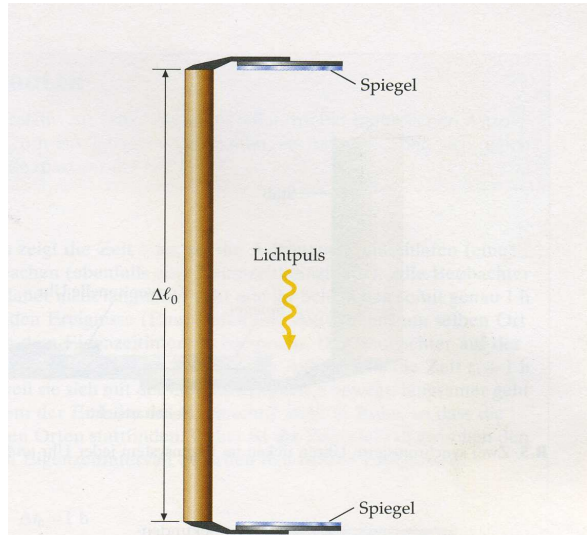
Wir wollen einige einfache Anwendungen dieser 'Zeitdilatation' studieren.

### Die schlummernden Astronauten

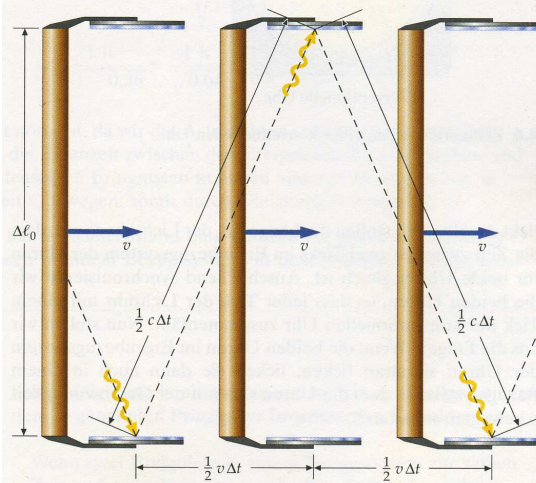
Ein Raumschiff bewegt sich mit einer Geschwindigkeit  $v = 0.7c$  relativ zur Erde (Tipler & Mosca, S. 323). Die in dem Raumschiff befindlichen Astronauten melden sich für eine Stunde bei ihrer Bodenstation ab, um ein Schläfchen zu halten, versprechen aber, sich gleich danach zurückzumelden. Wie lange dauert ihr Schläfchen für Beobachter auf der Erde?

Die eine Stunde Schlafdauer kann als Eigenzeit im Raumschiff gewertet werden,  $\Delta\tau = 1$  h. Ein Beobachter auf der Erde misst dafür das Zeitintervall

$$\Delta t = \gamma(0.7) \times \Delta\tau = 1.4 \text{ h}.$$



**R.3** Die Lichtuhr tickt jedes Mal, wenn der Lichtpuls am unteren Spiegel reflektiert wird.



**R.4** Die bewegte Lichtuhr tickt jedes Mal, wenn der Lichtimpuls am unteren Spiegel reflektiert wird.

Abbildung 4.1: Eine einfache Lichtuhr in der ein Lichtpuls zwischen zwei idealen Spiegeln hin und her läuft. Oben ruht der Beobachter in Bezug auf die Uhr, unten besitzt die Uhr dagegen eine Geschwindigkeit  $v$ .

### Das bewegte Pion

Ein Pion (oder  $\pi$ -Meson, ein subatomares Teilchen) hat im Ruhezustand eine mittlere Lebensdauer von 26 ns ( $1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$ ). Wie groß ist die mittlere Lebensdauer gemessen in einem Bezugssystem, in dem sich das Pion mit einer Geschwindigkeit von  $0,999 c$  bewegt?

Hier liefert ein  $\gamma$ -Faktor von 22,366 eine Lebensdauer von  $22,366 \times 26 \text{ ns} = 581 \text{ ns}$ .

#### 4.1.1 Die Lorentz-Transformation

Wir betrachten nun zwei Inertialsysteme  $\Sigma_X$  und  $\Sigma_x$ , wobei  $\Sigma_X$  als Ruhesystem betrachtet werden soll. Das System  $\Sigma_x$  möge sich dagegen entlang der gemeinsamen  $x$ -Achse mit einer Geschwindigkeit  $v$  bewegen. Die entsprechenden Inertialkoordinaten werden mit  $(T, \mathbf{X})$  in  $\Sigma_X$  und  $(t, \mathbf{x})$  in  $\Sigma_x$  bezeichnet. In der *Newtonschen Mechanik* gilt einfach (neben  $y = Y; z = Z$ ):

$$t = T; \quad x = X - vT.$$

Diese Relationen sind jedoch nicht im Einklang mit der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, da hieraus die gewohnte Addition der Geschwindigkeiten folgt. Ist  $c$  die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit in  $\Sigma_X$  so wäre diese gleich  $c \pm v$  im bewegten System.

Wir wollen jetzt zeigen, dass die Transformation

$$t = \gamma \left( T - \frac{vX}{c^2} \right); \quad x = \gamma(X - vT) \quad (4.3)$$

im Einklang mit der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist. Im Ruhesystem  $\Sigma_X$  sei die Lichtausbreitung entlang der  $X$ -Achse durch

$$X^2 = c^2 T^2$$

beschrieben. Dann ist

$$\begin{aligned} x^2 - c^2 t^2 &= \gamma^2 (X - vT)^2 - c^2 \gamma^2 (T - vX/c^2)^2 \\ &= \gamma^2 [X^2 - 2vXT + v^2 T^2 - c^2 T^2 + 2vXT - (v^2/c^2) X^2] \\ &= \gamma^2 [X^2(1 - v^2/c^2) - c^2 T^2(1 - v^2/c^2)] \\ &= X^2 - c^2 T^2 = 0, \end{aligned}$$

d.h., auch in  $\Sigma_x$  bewegt sich ein Lichtstrahl mit der Geschwindigkeit  $c$ . Die Transformation wird (1-dimensionale) Lorentz-Transformation genannt.

### Die Zwillinge Axel und Maxl

Im Jahr 2100 leben die Zwillinge Axel und Maxl auf der Erde. Maxl wird es hier zu langweilig und er beschließt in einem Super-Raumkreuzer in die Weite



des Alls zu reisen. Sein Raumschiff ist in der Lage in kürzester Zeit auf eine Geschwindigkeit von  $0.99c$  zu kommen. Nach einem halben Jahr hat Maxl Sehnsucht nach seinem Bruder. Er kehrt also um, fliegt zurück zur Erde, bremst ab und begibt sich auf die Suche nach Axel. Maxl stellt fest, dass er nach seiner hochgenauen Bolex am Handgelenk genau 1 Jahr weg war und wir fragen uns, wie lange für Axel die Reise des Bruders gedauert hat. Um diese Frage beantworten zu können, verallgemeinern wir die obige Beziehung zwischen der Koordinatenzeit in einem Inertialsystem (Ruhesystem mit Koordinaten  $(t, \mathbf{x})$ )  $t$  und der Eigenzeit  $\tau$  eines bewegten Beobachters. Für eine beliebig bewegte Uhr in  $\Sigma_x$  gilt:

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right)^{1/2} dt. \quad (4.4)$$

Wenn man die Beschleunigungsphasen des Raumkreuzers als sehr klein ansieht, ergibt sich hieraus eine Zeitspanne von  $\Delta t = \gamma\Delta\tau$ , d.h., die für Axel verstrichene Zeit ist um  $\gamma \simeq 7$  mal länger. Die Zwillinge sind in diesem Beispiel unterschiedlich schnell gealtert. Wenn man lediglich von konstanten Relativgeschwindigkeiten spricht ist die Situation relativ, d.h., wenn ein Beobachter  $B_1$  sieht, dass die Uhr von  $B_2$  langsamer geht als die eigene, so sieht  $B_2$ , dass die von  $B_1$  mitgeführte Uhr langsamer geht. Beide Beobachter sind hier gleichberechtigt. Dies ändert sich jedoch, wenn einer der Beobachter beschleunigte Phasen durchläuft; in diesem Falle sind die Beobachter nicht mehr gleichberechtigt und wenn die Situation so ist, dass die Uhren der Beobachter durch Zusammenführen direkt verglichen werden können, so werden in der Regel unterschiedliche verstrichene Zeitdauern zwischen zwei identischen Ereignissen gemessen.

### Die Lorentz-Kontraktion

Wir betrachten wieder zwei Inertialsysteme  $\Sigma_X$  (Ruhesystem) mit Koordinaten  $(T, \mathbf{X})$  und ein System  $\Sigma_x$  mit Koordinaten  $(t, \mathbf{x})$ , welches sich mit Geschwindigkeit  $v$  in positive  $X$ -Richtung bewegt (bewegtes System). Die Transformationen zwischen den Koordinaten lauten ( $Y = y, Z = z$ ):

$$\begin{aligned} t &= \gamma \left( T - \frac{vX}{c^2} \right), & T &= \gamma \left( t + \frac{vx}{c^2} \right) \\ x &= \gamma (X - vT), & X &= \gamma (x + vt). \end{aligned}$$

Wir betrachten nun einen Maßstab, der im bewegten System ruht und sich dort von  $x = 0$  bis  $x = L$  erstreckt. Die in  $\Sigma_x$  gemessene Stablänge beträgt also  $L$ . Wir wollen uns fragen, wie lange diese Stab im Ruhesystem  $\Sigma_X$  erscheint. Dies hängt von der Definition der Stablänge im Ruhesystem ab. Wir wollen dazu Stabanfang und Stabende im System  $\Sigma_X$  *gleichzeitig* beobachten, z.B. zur Zeit  $T = 0$ . Die Lorentz-Transformation liefert uns dann  $L = \Delta x = \gamma\Delta X$ , bzw.

$$\Delta X = \sqrt{1 - v^2/c^2} L. \quad (4.5)$$

Der bewegte Maßstab erscheint verkürzt (Lorentz-Kontraktion).

### Addition von Geschwindigkeiten

Wir betrachten wieder zwei Inertialsysteme wie im Beispiel der Lorentz-Kontraktion. Ein Teilchen bewege sich in  $\Sigma_x$  mit der Geschwindigkeit  $u_x$ , d.h. die Bewegung des Teilchens kann durch  $x_K = u_x t$  in  $\Sigma_x$  beschrieben werden. Eine Transformation ins Ruhesystem  $\Sigma_X$  liefert:

$$T = \gamma \left( t + \frac{vx}{c^2} \right) = \gamma t \left( 1 + \frac{vu_x}{c^2} \right)$$

und

$$X = \gamma(x + vt) = \gamma(u_x + v)t.$$

Die Teilchengeschwindigkeit im Ruhesystem ergibt sich also zu

$$U_X = \frac{X}{T} = \frac{u_x + v}{1 + vu_x/c^2}. \quad (4.6)$$

Mit diesem Ausdruck für die Addition von Geschwindigkeiten ergibt sich, dass sich ein Körper, der sich mit Unterlichtgeschwindigkeit bewegt, niemals mit  $c$  oder schneller bewegen kann.

### Das Problem der gleichzeitig explodierenden Knallfrösche

Ein Inertialsystem  $\Sigma_x$  mit Koordinaten  $(t, \mathbf{x})$  bewege sich mit Geschwindigkeit  $v$  in Richtung der positiven  $X$ -Achse eines (ruhenden) Inertialsystems  $\Sigma_X$  mit Koordinaten  $(T, \mathbf{X})$ . Beide Sätze von Koordinaten sind über die 1-dimensionale Lorentz-Transformation miteinander verknüpft:

$$T = \gamma \left( t + \frac{vx}{c^2} \right); \quad X = \gamma(x + vt).$$

Zwei Knallfrösche mögen nun im System  $\Sigma_x$  gleichzeitig zum Zeitpunkt  $t = 0$  explodieren: einer bei  $x_1 = 0$  und ein zweiter bei  $x_2$ . Wie lauten die entsprechenden Koordinaten dieser zwei Ereignisse im ruhenden System  $\Sigma_X$ ? Im bewegten System  $\Sigma_x$  haben die beiden Ereignisse die Koordinaten:

$$\begin{aligned} E_1 : t_1 = 0 \quad , \quad x_1 = 0 \\ E_2 : t_2 = 0 \quad , \quad x_2 \end{aligned}$$

Eine Lorentz-Transformation ins ruhende System liefert dann:

$$\begin{aligned} E_1 : \quad T_1 = 0, \quad X_1 = 0 \\ E_2 : \quad T_2 = \gamma(vx_2/c^2), \quad X_2 = \gamma x_2. \end{aligned}$$

Das erste Ereignis (Explosion des Knallfrosches bei  $t = x = 0$ ) findet also im ruhenden System bei  $T = X = 0$  statt, das zweite dagegen später, nämlich zur Zeit  $T = \gamma(vx_2/c^2)$ . Wir wollen beispielsweise für  $v = 0.999c$  Zahlen einsetzen.

Man sieht dass für etwa  $x_2 \sim 10^7$  m (Entfernung Erde-Mond =  $3,8 \times 10^8$  m) der zweite Knallfrosch im Ruhesystem etwa eine Sekunde später explodiert als der Erste.

$x_2[\text{m}]$	$T_2[\text{s}]$
1	$7,5 \times 10^{-8}$
100	$7,5 \times 10^{-6}$
$10^5$	$7,5 \times 10^{-3}$

Tabelle 4.1: Verschiedene Entfernungen  $x_2$  im bewegten und daraus resultierende Verzögerungen  $T$  im ruhenden System.

### Uhrengang und gravitative Rotverschiebung

Nach Obigem kann man die Eigenzeit einer beliebig bewegten Uhr in einem Inertialsystem mit Koordinaten  $(t, \mathbf{x})$  durch

$$d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2} dt \simeq \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right) dt$$

erhalten. Nun wird die Gangrate einer Uhr nicht nur durch deren Bewegungszustand bestimmt, sondern auch durch das bei der Uhr herrschende Gravitationspotenzial  $U$ :

$$\frac{d\tau}{dt} \simeq 1 - \frac{1}{c^2} \left( U + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right). \quad (4.7)$$

Für eine erdgebundene Uhr gilt

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega}_{\oplus} \times \mathbf{x}$$

d.h.

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 - \frac{1}{c^2} U_{\text{geo}} \quad (4.8)$$

mit

$$U_{\text{geo}} = U + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega}_{\oplus} \times \mathbf{x})^2. \quad (4.9)$$

$U_{\text{geo}}$  ist das bereits diskutierte Geopotenzial, welches sich durch Gravitationspotenzial und Zentrifugalpotenzial ergibt. Sei  $U_0$  das Geopotenzial auf mittlerer Meereshöhe, dem Geoid. Dann können wir schreiben:

$$U_{\text{geo}} \simeq U_{\text{geo}}|_0 + \frac{\partial}{\partial r} U_{\text{geo}}|_0 \cdot h \simeq U_0 - g(\psi) \cdot h$$

bzw.

$$\frac{d\tau}{dt} \simeq 1 - \frac{U_0}{c^2} + \frac{g(\psi) \cdot h}{c^2}. \quad (4.10)$$

Hier ist  $g = -\partial U_{\text{geo}}/\partial r$  die Schwerebeschleunigung welche von der geografischen Breite  $\psi$  des Beobachters abhängt,

$$g(\psi) = (9,78027 + 0,05192 \sin^2 \psi) \text{ m/s}^2, \quad (4.11)$$

und  $h$  die Höhe des Beobachters über dem Geoid. Für zwei erdgebundene Uhren hat man damit

$$\begin{aligned} \frac{(d\tau)_1}{(d\tau)_2} &= \frac{(1 - U_{\text{geo}}/c^2)_1}{(1 - U_{\text{geo}}/c^2)_2} \simeq \frac{(1 - U_0/c^2 + gh/c^2)_1}{(1 - U_0/c^2 + gh/c^2)_2} \\ &= \simeq \frac{(1 + gh/c^2)_1}{(1 + gh/c^2)_2}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Als Beispiel betrachten wir Uhren der PTB (Physikalisch Technischen Bundesanstalt) in Braunschweig mit  $h = 73$  m und  $gh/c^2 = 8 \times 10^{-15}$  und solche des NBS (National Bureau of Standards) in Boulder (USA) mit  $h = 1634$  m und  $gh/c^2 = 2 \times 10^{-13}$ . Dann ist

$$\frac{(d\tau)_{\text{PRB}}}{(d\tau)_{\text{NBS}}} = \frac{f_{\text{NBS}}}{f_{\text{PTB}}} = \frac{1 + 8 \times 10^{-15}}{1 + 2 \times 10^{-13}}$$

bzw.

$$(\Delta\tau)_{\text{NBS}} \simeq (1 + 2 \times 10^{-13})(\Delta\tau)_{\text{PTB}}.$$

Für eine Zeitspanne von einem Jahr ( $3 \times 10^7$  s) bedeutet dies, dass eine NBS-Uhr etwa  $6 \times 10^{-6}$  s ( $6\mu\text{s}$ ) gegenüber einer PTB-Uhr vorgeht.

### Das Experiment von Pound, Rebka und Snider

Im berühmten Experiment von Pound und Rebka (1959) und Pound und Snider (1965) wird Strahlung von Eisenatomen ( $\text{Fe}^{57}$ ) im  $\gamma$ -Strahlenbereich von 14,4 keV (Kilo-Elektronenvolt; ein eV ist diejenige kinetische Energie, die ein Elektron aufweist wenn es eine Spannung von einem Volt durchlaufen hat. Gemäß  $E = hf$  mit dem Planckschen Wirkungsquantum  $h$  ist eine Photonenenergie mit der entsprechenden Strahlungsfrequenz verknüpft) betrachtet. Die  $\gamma$ -Quelle war am Boden eines 22,5 m ( $H$ ) hohen Turmes der Harvard Universität angebracht. Ein Strahlungsanalysator befand sich oben im Turm. Aus dem Verhältnis der Eigenzeiten von stationären Uhren

$$\frac{(d\tau)_+}{(d\tau)_-} = \frac{(1 + gh/c^2)_+}{(1 + gh/c^2)_-} \simeq 1 + gH/c^2$$

ergibt sich aus der Analyse der Zeitdauer etwa zwischen zwei bestimmten Wellenbergen der  $\gamma$ -Strahlung

$$\frac{f_-}{f_+} = \frac{(d\tau)_+}{(d\tau)_-} = 1 + gH/c^2,$$

bzw.

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{f_- - f_+}{f_+} = \frac{gH}{c^2}, \quad (4.13)$$

d.h., es kommt zur Rotverschiebung der  $\gamma$ -Strahlung auf dem Weg nach oben. Für  $H = 22,5$  m hat man hierfür

$$\frac{\Delta f}{f} \simeq 9,81 \frac{22,5}{(300\,000\,000)^2} = 2,5 \times 10^{-15}.$$

**GPS-Uhren**

Sei  $\Sigma_x$  ein geozentrisches quasi-Inertialsystem (nicht-rotierend) mit Koordinaten  $(t, \mathbf{x})$ . Wir betrachten nun eine Atomuhr an Bord eines Satelliten (Beispiel: GPS Satelliten) von dem aus Zeitmarken zu Nutzern elektromagnetisch übertragen werden. Wir fragen, wie sich die Eigenzeit  $\tau_s$  einer Satellitenuhr in  $\Sigma_x$  beschreiben lässt. Die Verknüpfung zwischen  $\tau_s$  und  $t$  ist durch

$$\frac{d\tau_s}{dt} \simeq 1 - \frac{1}{c^2} \left( U + \frac{1}{2} \mathbf{v}_s^2 \right)$$

gegeben. Beim Gravitationspotenzial der Erde wollen wir nur die Erdmasse in Betracht ziehen, d.h.

$$U = \frac{GM_\oplus}{r} \equiv \frac{\mu}{r}.$$

Für die Satellitenbahn wollen wir von einer Kepler-Bahn ausgehen für die gilt:

$$\mathbf{v}_s^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

wobei  $a$  die große Halbachse der Satellitenbahn bezeichnet. Damit haben wir

$$\frac{d\tau_s}{dt} \simeq 1 - \frac{\mu}{c^2 r} - \frac{1}{2} \frac{\mu}{c^2} \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) = 1 + \frac{\mu}{2c^2 a} - \frac{2\mu}{c^2 r}$$

also

$$\tau_s = \int_{t_0}^t \left[ \left( 1 + \frac{\mu}{2c^2 a} \right) - \frac{2\mu}{c^2 r} \right] dt.$$

Das Integral kann man lösen, wenn man die Integration über  $t$  ersetzt durch eine Integration über die exzentrische Anomalie  $E$ . Mit  $r = a(1 - e \cos E)$ ,  $dM = n dt$  und  $dM = (1 - e \cos E)dE$  (Kepler-Gleichung) haben wir

$$\begin{aligned} -\frac{2\mu}{c^2} \int \frac{dt}{r} &= -\frac{2\mu}{c^2} \int_{E_0}^E \frac{(1 - e \cos E)}{na(1 - e \cos E)} dE \\ &= -\frac{2\mu}{c^2 na} E + \text{const.} \\ &= -\frac{2\mu}{c^2 na} (M + e \sin E) + \text{const.} \\ &= -\frac{2\mu}{c^2 a} t - \frac{2\mu}{c^2 na} e \sin E + \text{const.} \end{aligned}$$

Setzt man im zweiten Term auf der rechten Seite noch  $n = \mu^{1/2} a^{-3/2}$  (3tes Keplersches Gesetz:  $n^2 a^3 = \mu$ ) ein, so erhält man schließlich

$$\tau_s = \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{\mu}{c^2 a} \right) t - \frac{2}{c^2} \sqrt{\mu a} e \sin E + \text{const.} \quad (4.14)$$

Die Eigenzeit einer Stationsuhr ist dagegen durch

$$\tau \simeq \left(1 - \frac{U_0}{c^2} + \frac{gh}{c^2}\right) t + \text{const.}$$

gegeben, also

$$t \simeq \left(1 + \frac{U_0}{c^2} - \frac{gh}{c^2}\right) \tau + \text{const.}$$

Dies führt uns zuletzt auf

$$\tau_s = \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\mu}{c^2 a} + \frac{U_0}{c^2} - \frac{gh}{c^2}\right) \tau - \frac{2}{c^2} e \sqrt{\mu a} \sin E + C, \quad (4.15)$$

wobei die Konstante  $C$  durch Synchronisation der beiden Uhren festgelegt wird. Man sieht, dass sich in dieser Näherung die Eigenzeit im Satelliten und auf der Basisstation unterscheiden: a) durch eine konstante Driftrate und b) durch periodische Terme, welche von der Exzentrizität der Satellitenbahn herrühren. Um die konstante Driftrate zu berücksichtigen, wurde vor dem Start eines GPS Satelliten die Nominalfrequenz der Borduhr entsprechend angepasst.

# Kapitel 5

## Prüfungsfragen

### 5.1 Mathematischen Grundlagen

1. Seien

$$\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zwei Vektoren. Berechnen Sie A) die Länge der beiden Vektoren, B) den Winkel zwischen  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$  und C) einen Vektor, der auf der durch  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$  aufgespannten Ebene senkrecht steht.

*Lösung:* Länge jeweils 1, Winkel  $60^\circ$ , Senkrechter Vektor  $[1/2, -1/2, -1/2]$

2. Sei

$$\mathbf{x}_K(t) = \begin{pmatrix} 3 + 4t \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

der Ortsvektor eines Körpers  $K$ . Berechnen Sie dessen Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor.

*Lösung:*  $\dot{\mathbf{x}}_K(t) = [4, \cos(t), 0]$ ,  $\ddot{\mathbf{x}}_K(t) = [0, -\sin(t), 0]$

### 5.2 Newtonsche Mechanik von Massenpunkten

3. Ein Körper der Masse 50 kg fällt in der Nähe der Erdoberfläche im Vakuum vertikal eine Strecke von 10 m hinunter. Wie lange braucht der Körper dazu, wenn er sich anfangs in Ruhe befindet?

*Lösung:* 1.4 s

4. Zwei Steine gleicher Masse sollen eine Klippe der Höhe  $H$  hinunter geworfen werden. Stein 1 wird zuerst senkrecht nach oben geworfen, Stein 2 hingegen direkt nach unten.

a) Welcher Stein hat am Fuße der Klippe die höhere Geschwindigkeit, wenn beide mit der gleichen Geschwindigkeit  $v_0$ , jedoch in die oben genannten Richtungen, geworfen werden? Vernachlässigen Sie bei den Überlegungen sämtliche Reibungseffekte.

*Lösung: Beide haben die gleiche Geschwindigkeit.*

b) Sei  $H = 100$  m,  $v_0 = 10 \frac{m}{s}$  die Abwurfgeschwindigkeit. Berechnen Sie für den reibungsfreien Fall die maximale Höhe des 1. Steins sowie dessen Aufschlaggeschwindigkeit am Fuße der Klippe.

*Lösung: Steighöhe des ersten Steins vom Fuß der Klippe:  $h = 5.1$  m, Aufschlaggeschwindigkeit:  $v = 45.41$  m/s*

5. Eine Kanone in einer ebenen Gegend weist einen Winkel von  $45^\circ$  bzgl. der Horizontalen auf. Sie feuert eine Granate mit einer Abschussgeschwindigkeit von  $100$  m/s. Wie weit fliegt die Kanonenkugel, wenn die Luftreibung vernachlässigt wird?

*Lösung: 1019 m*

6. Eine Schießanlage bestehe aus einem höhenverstellbaren Gewehr und einem Target (siehe Abb. 5.1). Das Gewehr lasse sich weiterhin um den Winkel  $\alpha$  kippen. Im Folgenden betrachte man Zielscheiben, welche aus der Höhe  $H$ , im Abstand  $s$  zum Gewehr, fallengelassen werden.  $h$  bezeichne die Höhe des Gewehres.

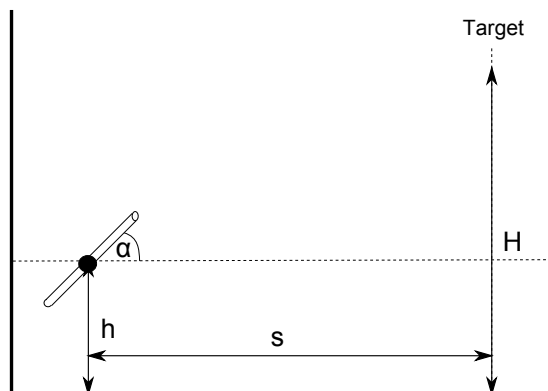


Abbildung 5.1: Querschnitt der Schießanlage

a) Betrachten Sie den Fall  $h = H$ ,  $\alpha = 0$ . Überlegen Sie sich, in welchen Fällen die Scheibe getroffen wird, wenn der Abschuss zur gleichen Zeit erfolgt, wie das Fallenlassen der Scheibe.

*Lösung: Die Zielscheibe wird immer getroffen.*

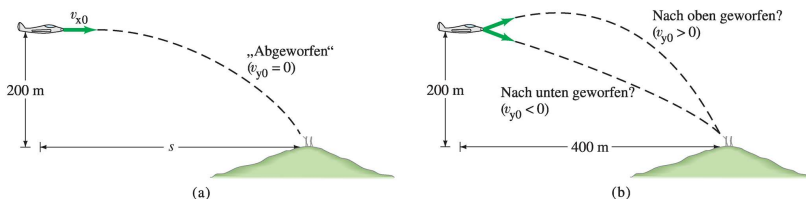


b) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die Gewehrkugel und die Zielscheibe aus A) auf und folgern Sie aus deren Lösungen eine Bedingung für  $v_0$ , für die Ihre Erkenntnis aus A) zutrifft.

*Lösung:* Die Bewegungsgleichungen sind separat für  $x$  und  $y$  aufzustellen. Mit der Forderung, dass der Treffer noch über dem Erdboden stattfinden soll erhält man:  $v_0 \geq \sqrt{(gs^2)/(2H)}$

c) Nun wird das Gewehr auf die Höhe  $h = 0$  gefahren. Außerdem habe das Gewehr stets die gleiche Abschussgeschwindigkeit  $v_0$ . Berechnen Sie die Kipplage des Gewehres  $\alpha$ , um die Zielscheibe bei gleichzeitigem Start zu treffen. Was stellen Sie fest? resultFür einen Treffer gilt  $x_K = x_T$  und  $y_K = y_T$  wobei sich der Index  $K$  auf die Kugel und der Index  $T$  auf das Target bezieht. Für den Winkel erhält man  $\alpha = \arctan H/s$ .

7. Ein Rettungsflugzeug soll Versorgungsgüter zu Bergsteigern, die sich auf einem Felsgrat 200 m unter dem Flugzeug befinden, abwerfen.



a) Wie weit vor den Bergsteigern (Horizontaldistanz) müssen die Vorräte abgeworfen werden, wenn das Flugzeug waagrecht mit einer Geschwindigkeit von 250 km/h fliegt?

*Lösung:*  $s_x = 440$  m

b) Nimmt man stattdessen an, dass das Flugzeug die Vorräte in einer horizontalen Entfernung von 400 m vor den Bergsteigern abwirft: wie groß sollte die vertikale Geschwindigkeit (auf- oder abwärts) der Versorgungsgüter dann sein, damit diese genau an der Position der Bergsteiger landen?

*Lösung:*  $v_y(t_0) = -6.1$  m/s

c) Mit welcher Geschwindigkeit landen die Vorräte im letzteren Fall?

*Lösung:*  $v = 93$  m/s

## 5.3 Federkraft und Pendel

8. Ein ungedämpftes Federpendel der Masse  $m = 0.1$  kg und Federkonstante  $k = 6.4$  kg/s<sup>2</sup> wird zum Schwingen angeregt. Die Anfangswerte lauten:

$x_0 = 0.05 \text{ m}$ ;  $v_0 = -0.25 \text{ m/s}$ . Wie groß sind A) Schwingungsfrequenz  $\omega$ , B) Amplitude  $A$  und C) Phase  $\varphi$  der Schwingung mit

$$x_K(t) = A \cos(\omega t + \varphi) ?$$

*Lösung:*  $\omega = 8 \text{ Hz}$ ,  $A = 0.06 \text{ m}$ ,  $\varphi = 0.56 \text{ rad}$

**9.** Ein ungedämpftes schweres Pendel habe die Länge  $l = 2 \text{ m}$ . Wie groß ist die Schwingungsdauer dieses Pendels bei kleinen Ausschlägen? Wie sehen derartige Schwingungen im Phasenraumdiagramm aus?

*Lösung:* Schwingungsdauer  $T = 2.8 \text{ s}$

**10.** A) Wie lautet das Newtonsche Axiom in einem Inertialsystem? B) Wie lautet das Hooke'sche Gesetz? C) Wie lässt sich die entsprechende Kraft in einer Raumdimension ( $x$ -Richtung) mathematisch darstellen? D) Wie lässt sich die in  $x$ -Richtung wirkende Stokes'sche-Reibungskraft mathematisch beschreiben? E) Wie lautet die Bewegungsgleichung eines Federpendels mit Stokes'scher Reibung (ohne Anregung)? F) Diskutieren Sie die Fälle a)  $\beta = 0.5$ , b)  $\beta = 2$  und c)  $\beta = 10$  mit  $m = k = 1$  qualitativ.

G) Wie lautet die Bewegungsgleichung eines mit  $\cos \omega t$  angetriebenen Federpendels mit Stokes'scher Reibung? H) Was bedeutet in diesem Fall eine 'resonante Anregung' und wann tritt sie auf?

**11.** Ein gedämpftes Federpendel habe die in Abbildung 5.2 gezeigte Orts-Zeit-Funktion.

Des weiteren sei über das Pendel und dessen Bewegung Folgendes bekannt:

Masse:	$m$	=	20 g
Periodendauer:	$T_1$	=	$\pi \text{ s}$
Quotient der Amplituden:	$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{x(t=nT)}{x(t=(n+1)T)}$	=	1.8

a) Berechnen Sie aus den Angaben die Dämpfungskonstante  $\beta$ .

Hinweis: Benutzen Sie die Lösung (2.86) der Differentialgleichung (2.85) aus der Vorlesung.

*Lösung:*  $\beta = 7.484 \frac{\text{g}}{\text{s}}$

b) Berechnen Sie aus den Angaben die Federkonstante  $k$ .

*Lösung:*  $k \approx 81 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}}$

c) Um welche Art von Dämpfung handelt es sich? Geben Sie Beispiele aus dem Alltag für die beiden anderen Dämpfungsarten.

*Lösung:* unterkritische Dämpfung

d) Um wie viel Prozent steigt die Schwingungsdauer aufgrund der Reibung?

*Lösung:* Die Schwingungsdauer wird aufgrund der Dämpfung um 0.44 % erhöht.

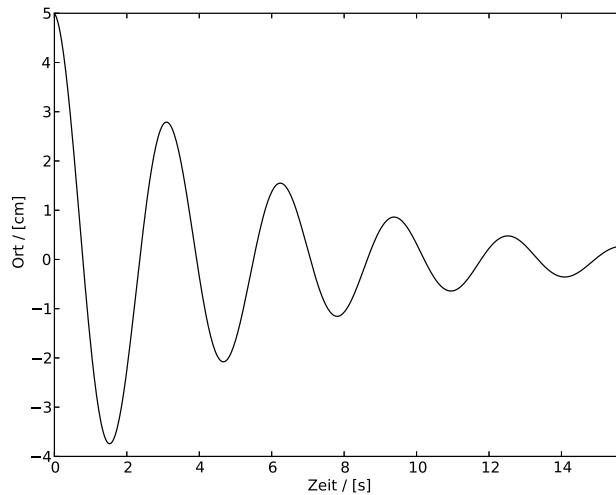


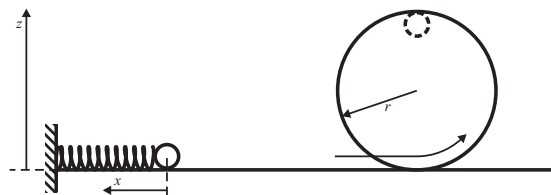
Abbildung 5.2: Orts - Zeit - Funktion eines gedämpften Federpendels

**12.** Eine Kugel der Masse  $m$  wird mit einer Feder (Federkonstante  $k$ ) entlang einer horizontalen Ebene abgeschossen und soll danach eine kreisförmige vertikale Schleife mit dem Radius  $r$  durchlaufen. Um welchen Betrag  $\Delta x$  muss die Feder zusammengedrückt werden, damit die Kugel die Schleife durchlaufen kann, ohne herunterzufallen? (Das Trägheitsmoment der Kugel, ihr Radius, Reibungseffekte sowie die Masse der Feder seien vernachlässigbar klein.)

$$\begin{aligned} k &= 100 \text{ N/m} & r &= 5.00 \text{ cm} \\ m &= 100 \text{ g} \end{aligned}$$

- Die Zentripetalkraft  $F_Z$  bei der Kreisbewegung einer Masse  $m$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und dem Radius  $r$  ist gegeben durch

$$F_Z = m\omega^2 r$$



*Lösung:* Die Feder muss um mindestens  $\Delta x \geq 0.05 \text{ m}$  zusammengedrückt werden.

**13.** Ein Körper der Masse  $m$  wird in der Höhe  $z_1$  losgelassen und trifft bei  $z = 0$  auf das Ende einer senkrecht stehenden Feder mit der Federkonstanten  $k$ , die den Fall bremst. (Die Masse der Feder sowie die Dämpfung werden vernachlässigt.)

$$\begin{array}{rcl} m & = & 10.0 \text{ kg} & z_1 & = & 0.60 \text{ m} \\ k & = & 1.96 \cdot 10^3 \text{ N/m} & z_3 & = & -0.10 \text{ m} \end{array}$$

a) Bis zu welchem Ort  $z_2$  wird die Feder maximal zusammengedrückt?

*Lösung:*  $z_2 = -0.30 \text{ m}$

b) Welche Geschwindigkeit  $v_3$  hat der Körper, wenn die Feder bis zur Stelle  $z_3$  zusammengedrückt wird?

*Lösung:*  $v_3 = \pm 3.43 \text{ m/s}$



Abbildung 5.3: Messprinzip der Reibungskräfte

**14.** Welche Formen der fundamentalen Wechselwirkungen kennen Sie?

## 5.4 Reibung

**15.** Welche Formen der Reibung kennen Sie? Wie könnten Sie sich ohne Reibung fortbewegen?

**16.** Wie verhält sich die Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers der Masse  $m = 100 \text{ kg}$  unter Berücksichtigung einer Stokes'schen Luftreibung mit  $\beta = 15 \text{ kg/s}$  mit der Zeit? Berechnen Sie Grenzgeschwindigkeit und Relaxationszeit.

*Lösung:*  $v_G = 235 \text{ km/h}$ ,  $\tau = 6.7 \text{ s}$

**17.** Ein Holzblock der Masse  $m = 120 \text{ g}$  ruhe auf einer Holzoberfläche. Mit einem Federkraftmesser (Abb. 5.3) soll der Haftreibungs- und der Gleitreibungskoeffizient bestimmt werden. Die am Federkraftmesser angezeigte Kraft wächst bis auf die maximale Kraft  $F_{\text{HR}}$  (Haftreibungskraft) an. Sobald sich der Block in Bewegung versetzt, schnellt der Federkraftmesser zurück und zeigt die geringere Gleitreibungskraft  $F_{\text{GR}}$  an. Der Versuch muss mehrmals durchgeführt werden, da sich die Kraft nicht immer präzise ablesen lässt. (Warum?)

a) Die Gleitreibungskraft ist bei allen Versuchsdurchführungen relativ konstant. Sie wurde zu  $0,54 \text{ N}$  bestimmt. Berechnen Sie daraus den Gleitreibungskoeffizienten!

*Lösung:*  $\mu_{\text{GR}} \approx 0,459$

b) Die Haftreibungskraft wurde in zehn Versuchsdurchführungen bestimmt. Berechnen Sie aus den Werten der folgenden Tabelle einen Mittelwert für den Haftreibungskoeffizienten:

Messung	Kraft / N
1	0,67
2	0,71
3	0,72
4	0,70
5	0,75
6	0,69
7	0,70
8	0,69
9	0,72
10	0,71

Lösung:  $\bar{\mu}_{\text{HR}} \approx 0,706 \text{ N}$

c) Der Untergrund lässt sich an einem Punkt kippen (Abb. 5.4). Um welchen Winkel  $\alpha_{\text{max}}$  lässt sich die Ebene maximal kippen, so dass der Block gerade noch liegen bleibt?

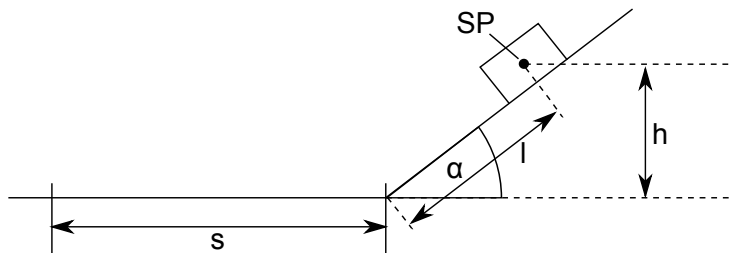


Abbildung 5.4: Größen an der geneigten Ebene

Lösung:  $\alpha_{\text{max}} \approx 31^\circ$

d) Die Ebene werde nun um  $\alpha = \alpha_{\text{max}} + 5^\circ$  gekippt, der Block dabei jedoch zunächst noch in der Entfernung  $l = 30 \text{ cm}$  vom Drehpunkt festgehalten. Berechnen Sie die Strecke  $s$ , die der Körper auf der horizontalen Ebene dann zurücklegen kann, bevor er zum Stehen kommt.

Hinweis: Benutzen Sie das Energiekonzept!

Lösung:  $s = 14,15 \text{ cm}$

## 5.5 Die Keplerschen Gesetze

18. Wie lauten die drei Kepler'schen Gesetze?

**19.** Ein Satellit bewege sich um die Erde in einer Bahn mit  $a = 10000$  km und  $e = 0.1$ . Wie nahe kommt der Satellit der Erdoberfläche ( $R_{\oplus} = 6371$  km)?

*Lösung:* 2629 km

**20.** Ein Satellit bewege sich um die Erde ( $GM_{\oplus} = 3.986005 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$ ) in einer Bahn mit  $a = 10000$  km und  $e = 0.1$ . Für vier ausgewählte Punkte der Bahn sei die wahre Anomalie  $f_1 = 0$ ,  $f_2 = \pi/2$ ,  $f_3 = \pi$  und  $f_4 = 3\pi/2$ . Berechnen Sie die Bahngeschwindigkeit in diesen 4 Punkten.

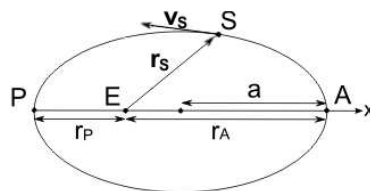
*Lösung:*  $v_1 = 7.0 \text{ km/s}$ ,  $v_2 = 6.4 \text{ km/s}$ ,  $v_3 = 5.7 \text{ km/s}$ ,  $v_4 = 6.4 \text{ km/s}$

**21.** Ein Satellit bewege sich um die Erde ( $GM_{\oplus} = 3.986005 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$ ) in einer Bahn mit  $a = 10000$  km und  $e = 0.01$ . A) Berechnen Sie die mittlere Bewegung  $n$ ! B) Sei  $T = 1$  Stunde der Zeitpunkt eines Perigäumsdurchganges. Berechnen Sie die mittlere Anomalie  $M$ , die exzentrische Anomalie  $E$  und die wahre Anomalie  $f$  für  $t = 4$  Stunden!

*Lösung:*  $n = 0.0006 \text{ rad/s}$ ,  $M = 30.7^\circ$ ,  $E = 31.0^\circ$ ,  $f = 31.3^\circ$

**22.** Ein Satellit bewege sich um die Erde in einer Bahn mit  $a = 10000$  km und  $e = 0.3$ . Er befindet sich in einem Punkt der Bahn, wo die mittlere Anomalie  $M$  gleich der exzentrischen Anomalie  $E$  ist. Welche Werte kann die wahre Anomalie  $f$  in diesem Punkt annehmen?

*Lösung:*  $f = 0^\circ$  oder  $f = 180^\circ$



**23.** Ein Erdsatellit hat im Abstand  $r_1$  vom Erdmittelpunkt die Geschwindigkeit  $v_1$ . Der Radiusvektor  $\mathbf{r}_s$  und der Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}_s$  des Satelliten stehen gerade senkrecht zueinander. Die Masse des Satelliten wird zu Null gesetzt und die Masse der Erde ist  $M$ . Mit der Gravitationskonstante  $G$  multipliziert, erhält man die geozentrische Gravitationskonstante  $GM$ .

$$\begin{aligned} r_1 &= 10500 \text{ km} \\ v_1 &= 5.70 \text{ km/s} \\ GM &= 3.986005 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2 \end{aligned}$$

- Der Punkt, an dem der Satellit der Erde am nächsten ist, wird als Perigäum (P) bezeichnet. Der entfernteste Punkt zur Erde auf der Ellipsenbahn wird Apogäum (A) genannt. Weiterhin ist die große Bahnhalbachse von Bedeutung.

- Der Energiesatz  $\frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{GM}{r} = h$  muss für alle Paare aus Orts-  $\mathbf{r}$  und Geschwindigkeitsvektor  $\dot{\mathbf{r}}$  einer Keplerellipse erfüllt sein, so dass die Gesamtenergie  $h$  für alle Orte konstant ist.
- Das 3. Keplersche Gesetz lautet  $n^2 a^3 = GM$  mit der großen Halbachse  $a$  und der mittleren täglichen Bewegung  $n$ , die mit der Umlaufzeit  $T$  über  $T = 2\pi/n$  verknüpft ist.

a) Berechnen Sie die große Halbachse  $a$  der Satellitenbahn und stellen Sie fest, um welchen Punkt der Bahn es sich handelt!

*Lösung:* Die große Halbachse beträgt  $a = 9177$  km, d.h. der Satellit befindet sich im Apogäum.

b) Wie groß ist die Umlaufdauer  $T$  des Satelliten?

*Lösung:* Die Umlaufdauer beträgt  $T = 8749$  s.

c) Von besonderer Bedeutung für die Telekommunikation sind die so genannten geostationären Satelliten, welche immer über dem gleichen Punkt der Erdoberfläche stehen. In welcher Höhe, relativ zum Erdmittelpunkt, fliegt solch ein Satellit, damit er diese Bedingung erfüllt?

*Lösung:* Nimmt man eine mittlere siderische Tageslänge von  $T = 8,6164099 \cdot 10^4$  s an, ergibt sich ein Abstand vom Erdmittelpunkt von rund  $a = 42164$  km.

**24.** Der Planet Merkur hat den Perihelabstand  $r_P$  und den Aphelabstand  $r_A$  zur Sonne. Weiterhin sind die Umlaufzeit  $T_E$  der Erde und die große Halbachse  $a_E$  der Erdumlaufbahn gegeben.

$$\begin{aligned} r_P &= 46.0 \times 10^6 \text{ km} \\ r_A &= 69.8 \times 10^6 \text{ km} \\ T_E &= 365.25 \text{ d} \\ a_E &= 1.496 \times 10^8 \text{ km} \end{aligned}$$

a) Wie groß ist die Umlaufzeit  $T_M$  von Merkur um die Sonne?

*Lösung:* Die Umlaufzeit beträgt  $T_M = 87.9$  d

b) Wie groß sind seine Bahngeschwindigkeiten  $v_P$  im Perihel und  $v_A$  im Aphel?

*Lösung:* Die Geschwindigkeiten betragen  $v_P = 59.0$  km / s und  $v_A = 38.9$  km / s.

## 5.6 Mechanik ausgedehnter Körper

**25.** Wodurch ist die Rotationsenergie eines starr rotierenden Körpers gegeben?

**26.** Eine Bowlingkugel mit Masse  $M = 6$  kg und Radius  $R = 11$  cm ( $I_K = (2/5)MR^2$ ) rollt ohne Schlupf mit einer Geschwindigkeit von  $v = 2$  m/s eine horizontale Kugelrückführung entlang und anschließend eine Steigung hinauf. Bei welcher Höhe stoppt ihre Bewegung?

*Lösung:* 28.5 cm

**27.** Drei Körper bewegen sich jeweils aus der Ruhelage heraus eine schiefe Ebene mit einem Steigungswinkel  $\alpha = 25^\circ$  hinunter. Körper a gleitet reibungsfrei. Körper b gleitet ebenfalls, allerdings tritt bei ihm Gleitreibung mit dem Koeffizienten  $\mu_G = 0.4$  auf. Körper c ist eine Kugel mit Masse  $M = 10 \text{ kg}$  und Radius  $R = 20 \text{ cm}$  ( $I_K = (2/5)MR^2$ ), die ohne Schlupf rollt. Berechnen und vergleichen Sie die Zeiten, die die Körper zum Überwinden einer Strecke von 20 m Länge benötigen!

*Lösung:*  $t_a = 3.1 \text{ s}$ ,  $t_b = 8.2 \text{ s}$ ,  $t_c = 3.7 \text{ s}$

**28.** Wie groß ist das Trägheitsmoment einer gleichmäßig dicken, homogenen Kreisscheibe mit der Masse  $M$  und dem Radius  $R$ ...

$$\begin{aligned} M &= 1 \text{ kg} \\ M' &= 0.5 \text{ kg} \\ R &= 10.0 \text{ cm} \end{aligned}$$

a) ... um eine senkrecht zur Scheibe stehende Achse durch den Schwerpunkt?

*Lösung:* Das Trägheitsmoment beträgt  $I_S = 5.0 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$ .

b) ... um eine zur Schwerpunktachse parallele Achse durch einen Randpunkt?

*Lösung:* Das Trägheitsmoment vergrößert sich auf  $I_S = 15.0 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$ .

c) ... um eine Achse, wie in B), wenn zusätzlich im Mittelpunkt der Scheibe eine Punktmasse  $M'$  angebracht wird?

*Lösung:* Das Trägheitsmoment vergrößert sich auf  $I_S = 20.0 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$ .

**29.** Ein Wagen der Masse  $m$  hat vier Räder. Jedes Rad hat das Trägheitsmoment  $I_S$  und den Radius  $r$ . Der Wagen rollt aus der Ruhelage einen Hang der Höhe  $h$  hinab. Berechnen Sie die Geschwindigkeit  $v_1$ , die er am Ende des Hanges erreicht hat! Reibungsanteile, die zur Wärmeentwicklung führen, werden vernachlässigt!

$$\begin{aligned} m &= 700 \text{ kg} & I_S &= 0.5 \text{ kg m}^2 \\ r &= 0.25 \text{ m} & h &= 5.0 \text{ m} \end{aligned}$$

*Lösung:* Der Wagen erreicht eine Geschwindigkeit von  $v_1 = 9.7 \text{ m/s}$ .

**30.** Eine Kraft  $\mathbf{F}_Z = 15 \text{ N}$  wird auf ein Seil ausgeübt, das auf einer Rolle (mit einer Masse von  $M = 4.00 \text{ kg}$  und einem Radius  $R_0 = 33.0 \text{ cm}$ ) aufgewickelt ist, siehe Abbildung 5.5. Die Rolle beschleunigt gleichförmig aus dem Stillstand und erreicht nach 3.00 s eine Winkelgeschwindigkeit von 30.0 rad/s.

a) Bestimmen Sie die Winkelbeschleunigung  $\alpha$  der Scheibe.

*Lösung:*  $\alpha = 10.0 \text{ rad/s}$

b) Bestimmen Sie das Trägheitsmoment der Scheibe, wenn ein Reibungsdrehmoment (an der Achse) von  $M_R = 1.10 \text{ Nm}$  vorliegt. Nehmen Sie dabei an, dass sich die Rolle um Ihren Mittelpunkt dreht.

*Lösung:*  $I = 0.385 \text{ kg m}^2$



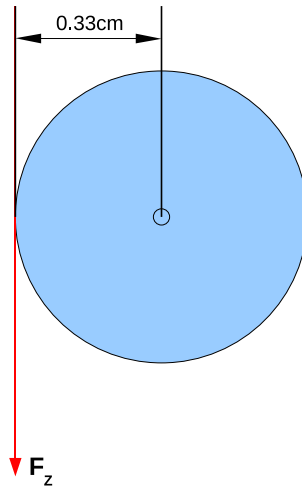


Abbildung 5.5: Rolle (blau) mit einem Radius von  $R_0 = 33$  cm. Auf das Seil (rot) wirkt die Kraft  $F_Z$ .

c) Nehmen Sie nun an, dass jetzt ein Eimer mit einem Gewicht von 15.0 N (Masse  $m = 1.53$  kg) an dem Seil hängt. Berechnen Sie die Winkelbeschleunigung der Rolle und die lineare Beschleunigung des Eimers.

Lösung:  $\alpha = 6.98$  rad/  $s^2$  und  $a = 2.30$  m/  $s^2$

d) Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  der Rolle und die lineare Geschwindigkeit  $v$  des Eimers bei  $t = 3.00$  s, wenn die Rolle und der Eimer aus dem Stillstand bei  $t = 0.0$  starten.

Lösung:  $\omega = 20.9$  rad/ s und  $v = 6.91$  m/ s

## 5.7 Nicht-Inertiale Systeme

31. Zwei Brüder sitzen auf gegenüberliegenden Seiten am äußeren Rand eines sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega = 0.6$  rad/s drehenden Karussells mit Radius  $R = 3$  m. Das Zentrum des Karussells sei der Ursprung eines mitrotierenden Koordinatensystems, dessen  $x$ -Achse durch die beiden Brüder verläuft. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  schießt einer der Brüder (Koordinaten  $(x, y) = (R, 0)$ ) mit einer Erbsenpistole in Richtung seines Gegenübers. Das Projektil verlässt die Pistole mit der Geschwindigkeit  $v = 10$  m/s. Nach welcher Zeit trifft die Erbse wieder den Rand des Karussells und wie lauten die mitrotierenden Koordinaten  $(x, y)$  für diesen getroffenen Randpunkt?

Lösung:  $t = 0.58$  s,  $x = -2.29$  m,  $y = 1.94$  m

**32.** Ein erdfester Beobachter mit Breite  $\Phi$  konstruiert lokale Koordinaten  $x, y, z$  derart, dass  $z$  in Zenitrichtung weist,  $x$  nach Süden und  $y$  nach Osten. Sei

$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z.$$

Berechnen Sie die Komponenten der Coriolis-Beschleunigung  $\ddot{x}_C, \ddot{y}_C$  und  $\ddot{z}_C$ , die im Labor aufgrund der Erddrehung wirkt.

**33.** Der Jenissei ist einer der größten Ströme Sibiriens und fließt zwischen dem 60 und 75. Breitengrad nahezu geradlinig nach Norden.

a) Berechnen Sie allgemein die Coriolisbeschleunigung, welche auf ein Wasserpartikelchen wirkt, dass sich an einem Ort mit der geographischen Breite  $\varphi$  mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegt.

- Führen Sie dazu ein lokales Koordinatensystem ein. Die  $x$ -Achse soll dabei in Richtung Osten, die  $y$ -Achse Richtung Norden und die  $z$ -Achse in Richtung des lokalen Zenits zeigen.
- Bestimmen Sie in diesem Koordinatensystem die Komponenten des Rotationsvektors der Erde  $\boldsymbol{\omega}$ .
- Die Coriolisbeschleunigung ist dann gegeben als  $\mathbf{a}_c = -2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})$

b) Berechnen Sie für den 60. Breitengrad, um wieviel der Wasserstand am östlichen Ufer des Flusses gegenüber dem am westlichen erhöht, bzw. erniedrigt ist. Hier ist der Jenissei 2km breit und besitzt eine Strömungsgeschwindigkeit von 1.5 km/h.

- Der Wasserspiegel wird sich so einstellen, dass er senkrecht zur Resultierenden aus Gewichtskraft und Corioliskraft steht.

*Lösung:* Es ergibt sich eine Höhe des östlichen Ufers von 2.2 cm gegenüber dem westlichen Strand. c) Was würde sich ändern, wenn der Jenissei in die entgegen

gesetzte Richtung, also geradlinig nach Süden, fließen würde?

**34.** Diese Aufgabe behandelt verschiedene Aspekte des freien Falles unter Berücksichtigung der Corioliskraft in einem mitrotierenden Koordinatensystem.

a) Führen Sie ein lokales Koordinatensystem für einen Ort der geographischen Breite  $\varphi$  ein. Die  $x$ -Achse soll dabei in Richtung Osten, die  $y$ -Achse Richtung Norden und die  $z$ -Achse in Richtung des lokalen Zenits zeigen. Bestimmen Sie in diesem Koordinatensystem die Komponenten des Rotationsvektors der Erde  $\boldsymbol{\omega}$ . Berechnen Sie allgemein die Coriolisbeschleunigung, welche auf ein Teilchen wirkt, dass sich an diesem Ort mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegt.

b) Von der Aussichtsplattform des Dresdner Fernsehturms wird ein Stein fallen gelassen. Wie weit von der Lotlinie entfernt, trifft der Stein auf den Erdboden? Vernachlässigen Sie bei Ihren Rechnungen den Luftwiderstand.

- geographische Breite von Dresden:  $\varphi_D = 51^\circ$
- Höhe der Aussichtsplattform:  $h = 145\text{m}$
- Die Winkelgeschwindigkeit der Erde beträgt rund  $\omega = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$ .

*Lösung:* Die Ablenkung beträgt  $\Delta s = 2.4 \text{ cm}$ .

c) Am Fußpunkt des Fernsehturmes wird nun auch noch eine Gewehrkugel senkrecht nach oben geschossen. Die Abschussgeschwindigkeit sei dabei die Aufprallgeschwindigkeit des Steines aus der vorherigen Teilaufgabe. An welcher Stelle kommt die Gewehrkugel wieder auf dem Boden auf? Diskutieren Sie das Ergebnis auch im Hinblick auf das Ergebnis der vorherigen Teilaufgabe.

- Stellen Sie zuerst die Bewegungsgleichungen für die Gewehrkugel im lokalen Koordinatensystem auf.
- Als Näherung nutzen Sie, dass die Corioliskraft gegenüber der Schwerkraft sehr klein ist und deshalb bei der entsprechenden Komponente der Beschleunigung (aber nur dort!) vernachlässigt werden kann.

*Lösung:* Man erhält eine Ablenkung von  $\Delta x \approx -9.6 \text{ cm}$ .

## 5.8 Spezielle Relativitätstheorie

**35.** Ein  $\mu$ -Meson zerfällt im Labor nach einer Halbwertszeit von  $t_{1/2} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ . Nun werde in der Hochatmosphäre ein  $\mu$ -Meson mit einer Geschwindigkeit von  $v = 0,9994c$  erzeugt. Wie lange (im Mittel) ist dessen Lebensdauer von einem erdfesten Beobachter aus gesehen?

*Lösung:*  $6 \cdot 10^{-5} \text{ s}$

**36.** Bei welcher Geschwindigkeit unterscheiden sich die Ergebnisse der relativistischen Gleichungen für die Länge und die Zeitdauer von den klassischen Werten um 1 Prozent? (Dies ist ein sinnvoller Weg um abzuschätzen, ab wann relativistische Berechnungen den klassischen vorzuziehen sind.)

*Lösung:*  $0.141c$

**37.** Ein 5 m langes Auto versucht mit 80% der Lichtgeschwindigkeit ( $0.8c$ ) in eine 3 m lange Garage hinein zu fahren.

- Die Längen von Auto bzw. Garage sind in ihrem jeweiligen Bezugssystem gegeben (in welchem sie sich in Ruhe befinden).
- Um die Länge eines bewegten Körpers zu bestimmen, werden zum selben Zeitpunkt die Positionen beider Enden bestimmt und dann deren Differenz berechnet. Soll daraus die Länge dieses Körpers in seinem eigenen Bezugssystem bestimmt werden (in welchem er ruht), so gelingt dies mittels Lorentz-Transformation.
- Ein Inertialsystem  $\Sigma_x$  (Koordinaten:  $x, t$ ) bewege sich mit der Geschwindigkeit  $v$  entlang der  $X$ -Achse eines ruhenden Bezugs-Inertialsystems  $\Sigma_X$  (Koordinaten:  $X, T$ ). Die  $X$ -Achse des ruhenden liege parallel zur  $x$ -Achse des bewegten Systems. Die Gleichungen für die Lorentz-Transformation von Zeit und  $x$ - bzw.  $X$ -Koordinate lauten dann

$$\begin{aligned} t &= \gamma \left( T - \frac{vX}{c^2} \right) & T &= \gamma \left( t + \frac{vx}{c^2} \right) \\ x &= \gamma (X - vT) & X &= \gamma (x + vt) \end{aligned}$$

mit

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

a) Zeigen Sie im System der Garage, dass das Auto tatsächlich hinein passt, bevor es die Rückwand der Garage durchbricht!

b) Berechnen Sie die Länge der Garage, wie sie sich aus Sicht des Fahrers darstellt!

*Lösung:* Die Länge der Garage im Autosystem beträgt nur  $l_G = 1.8$  m.

c) Zeigen Sie, dass der Fahrer erwartet, die Rückwand der Garage  $4 \text{ m}/c \approx 1.3 \times 10^{-8}$  s eher zu durchbrechen, als dass das Heck des Autos die Garageneinfahrt passiert hat!

d) Zeigen Sie, dass die Nachricht „das Auto hat die Rückwand der Garage durchbrochen“ das Heck des Fahrzeugs erst erreicht, nachdem dieses die Einfahrt passiert hat. Berücksichtigen Sie dabei die Tatsache, dass sich Informationen maximal mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten können!