Modul: Astronomische Referenzsysteme

Sphärische Trigonometrie

Bachelor Geodäsie und Geoinformation

Büro	BEY 147b
WWW	http://astro.geo.tu-dresden.de

Institut für Planetare Geodäsie, Lohrmann-Observatorium
Technische Universität Dresden, D-01062 Dresden

Bachelor Geodäsie und Geoinformation
Modul: Astronomische Referenzsysteme

- Leistungspunkte: 8, Aufwand: 240 Stunden
- Wintersemester:
  - VO Sphärische Trigonometrie (Soffel, 1 SWS)
  - ÜO Sphärische Trigonometrie (Tupikova, 1 SWS)
  - ÜO Fachspezifische Datenverarbeitung (Klioner, 1 SWS)
  - Prüfung: Trig. und DV, schriftl., 90min
- Sommersemester
  - VO Astronomische Referenzsysteme (Soffel, 2 SWS)
  - ÜO Astronomische Referenzsysteme (Tupikova, 1 SWS)
  - Prüfung: Referenzsysteme, mdl., 20min
- Modulnote: arithmetisches Mittel aus Prüfungen

Organisatorisches

Vorlesung:	Di, 3. DS (11:10-12:40), BEY/98, ungerade KW, 14tägig
Übungen:	Di, 5. DS (14:50-16:20), BEY/69, ungerade KW, 14tägig
Planetarium:	1 VL-Termin, wird bekannt gegeben
Abschluss:	Klausurarbeit, 90min

Inhalt

- Goniometrie und ebene Trigonometrie (Wdh.)
- Grundlagen der sphärischen Trigonometrie
- Berechnungen auf der Erdkugel
- Anwendungen aus sphärischer Astronomie

Literatur

- **Steinert, K.-G.,** *Sphärische Trigonometrie,* Kleine naturwissenschaftliche Bibliothek, Reihe Mathematik, Band 8, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1977.

- **Sigl, R.,** *Ebene und sphärische Trigonometrie,* Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt am Main 1969, Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1977.

- **Dörrie, H.,** *Ebene und sphärische Trigonometrie,* Oldenbourg Verlag, München, 1950.

Literatur (Forts.)

- **Kern, H. und J. Rung,** *Sphärische Trigonometrie,* Bayerische Verlagsanstalt GmbH, 1997.

- **Hame, R.,** *Sphärische Trigonometrie,* Ehrenwirth Verlag GmbH, 11. Additum, München (o. Jahrg.).

- **Bronstein, I., N. und K. A. Semendjajew,** *Taschenbuch der Mathematik,* Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt (Main), 1987.

- …

Trigonometrie (allg.)

- urspr.: Dreiecksmessung, d.h. „Lehre von Beziehungen zwischen Winkeln und Seiten des Dreiecks“

- i.w.S.: funktionale Zusammenhänge von Winkeln, Strecken und Flächen
  $\Rightarrow$ math. Berechnung ebener u. räuml. Gebilde

- Geometrie: Operation mit algebraischen Fktn.
  Trigonometrie: Operation mit transzendenten, hier trigonometrischen Fktn.

Anwendungsbereiche

- wichtig für alle Gebiete der angewandten Mathematik, insbes. für Geodäsie, Geografie u. Astronomie

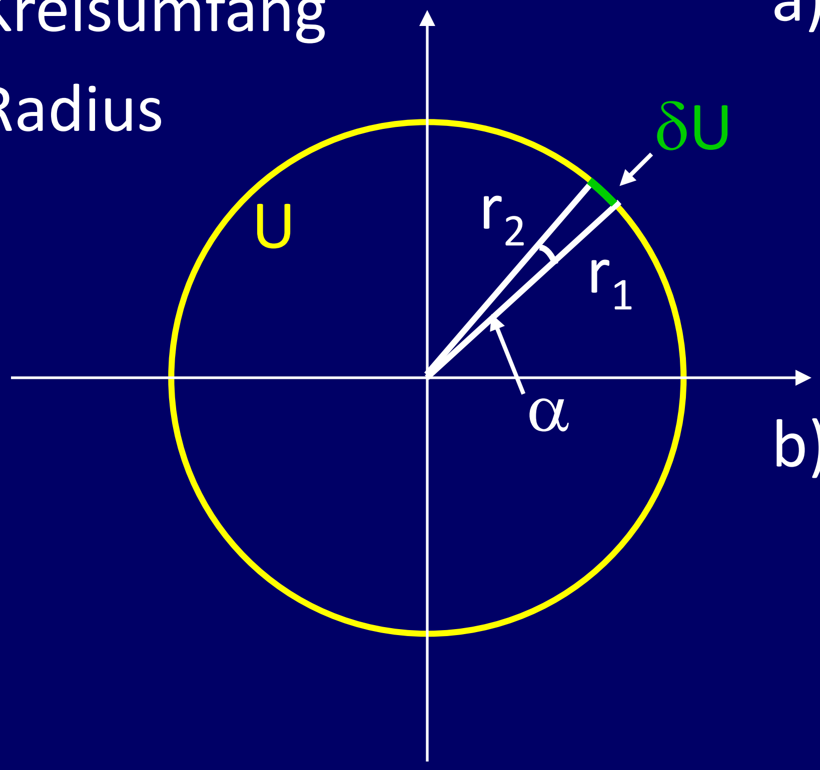
- ↳ „niedere“ Geodäsie (Vermessungskunde): Untersuchungsgebiet ≈ Ebene ⇒ ebene Trigonometrie

- ↳ „höhere“ Geodäsie (Erdvermessung), sphärische u. geodätische Astronomie, math. Geografie: gekrümmte Flächen ⇒ sphärische Trigonometrie

Winkelmaße: 1. Gradmaß

U = Kreisumfang

r = Radius



a) $\delta U = U/360$

⇨ Richtungsabstand $r_1 r_2$:

α = 1 **Grad** = 1°

1° = 60' = 3600''

b) $\delta U = U/400$

⇨ Richtungsabstand $r_1 r_2$:

α = 1 **gon** = 1000 mgon

Veraltet:

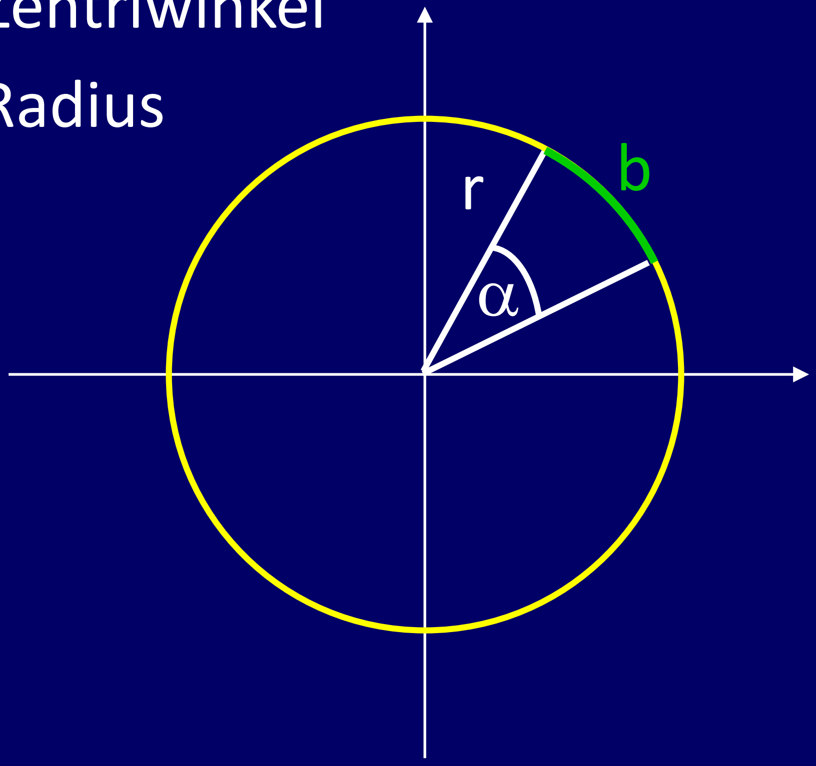
α = 1 **Neugrad**

$= 1^g = 100^c = 10000^{cc}$

Winkelmaße: 2. Bogenmaß

α = Zentriwinkel

r = Radius



b/r = α **[rad]**

bei r = 1:

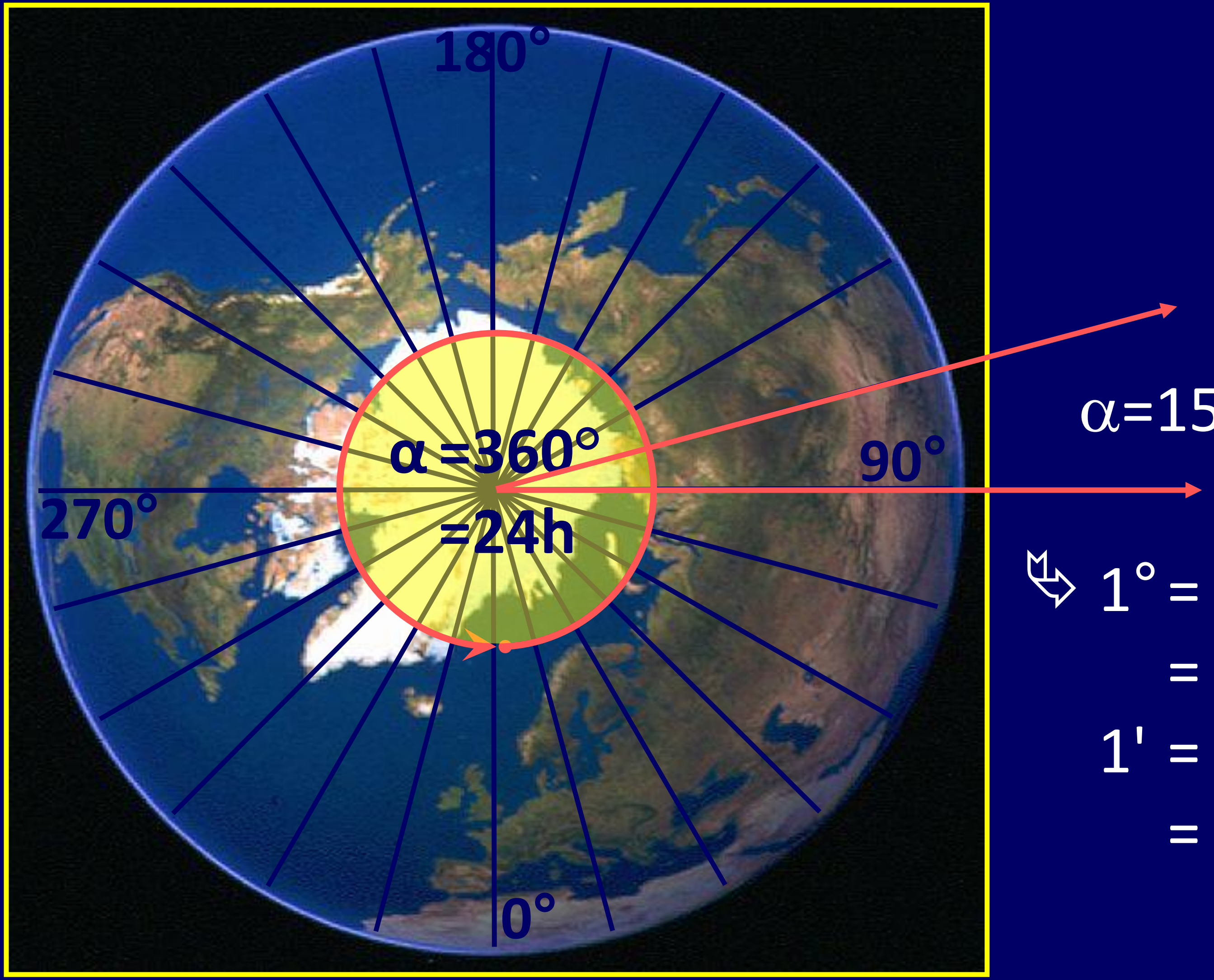
⇒ b = α **[rad]**

Vollkreis:
$\alpha = 2\pi$ **rad**

Veraltet:
arc α

Winkelmaße: 3. Zeitmaß

Winkelmaße: 3. Zeitmaß



$\alpha = 15° = 1^h$

$\Rightarrow$ $1° = 1/15^h$

$= 4^m$

$1' = 1/15^m$

$= 4^s$

Winkelmaße: Zusammenhänge

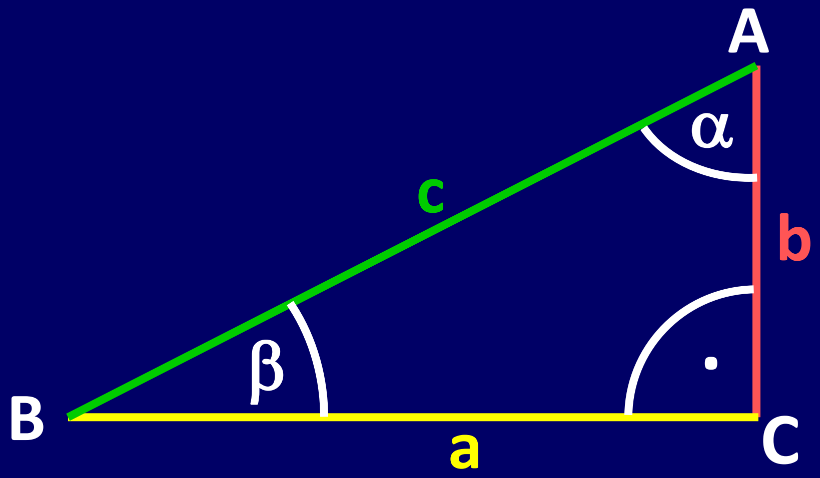
$$\frac{\alpha \mathrm{rad}}{2\pi\,\mathrm{rad}} = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{\alpha \mathrm{gon}}{400\,\mathrm{gon}} = \frac{\alpha^{\mathrm{h}}}{24^{\mathrm{h}}}$$

Umrech-
nungs-
faktoren

von \ zu	[rad]	[°]	[gon]	[^{h}]
[rad]	–	(=180/π) 57,295780	(=200/π) 63,661977	(=12/π) 3,819719
[°]	(=π/180) 0,017453	–	(=200/180) 1,111111	(=12/180) 0,066667
[gon]	(=π/200) 0,015708	(=180/200) 0,900000	–	(=12/200) 0,060000
[^{h}]	(=π/12) 0,261799	(=180/12) 15,000000	(=200/12) 16,666667	–

Winkelfunktionen: „Definition“

rechtwinkliges Dreieck:



Sinus:

$$\sin\beta = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{b}{c}$$

Kosinus:

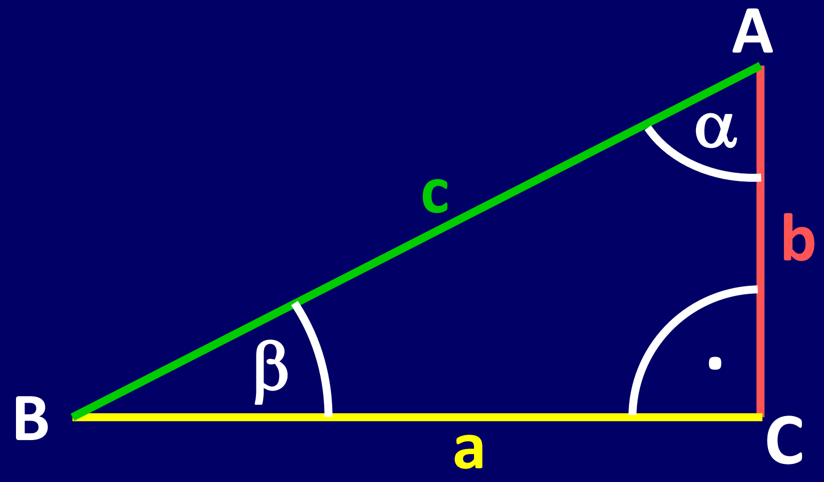
$$\cos\beta = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{a}{c}$$

↳ **Tangens:**

$$\tan\beta = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{b}{a} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$

Winkelfunktionen: „Definition“

rechtwinkliges Dreieck:



Sekans:

$$\sec\beta = \frac{1}{\cos\beta} = \frac{c}{a}$$

Kosekans:

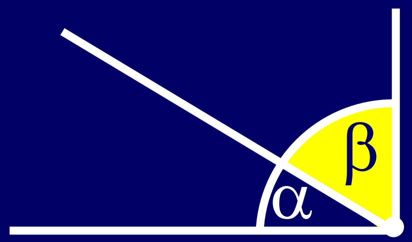
$$\operatorname{cosec}\beta = \frac{1}{\sin\beta} = \frac{c}{b}$$

Kotangens:

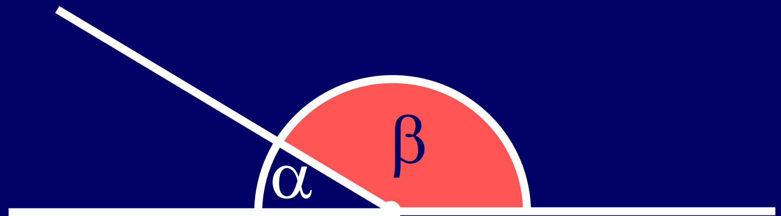
$$\cot\beta = \frac{1}{\tan\beta} = \frac{a}{b}$$

Winkelergänzungen

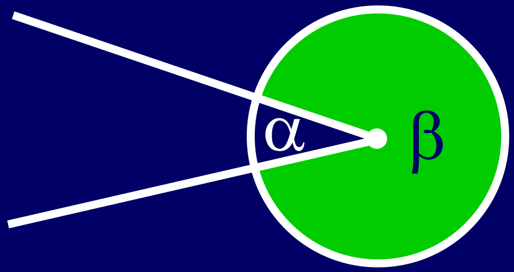
- β heißt **Komplementwinkel** zu α, wenn $\beta=90°-\alpha$



- β heißt **Supplementwinkel** zu α, wenn $\beta=180°-\alpha$



- β heißt **Implementwinkel** zu α, wenn $\beta=360°-\alpha$

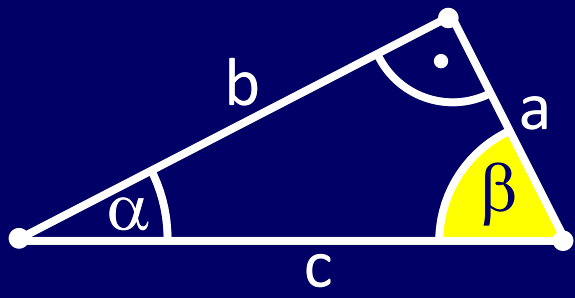


Funktion-Kofunktion-Relation

Kosinus (lat. *complementi sinus*)

=

Sinus des Komplementwinkels



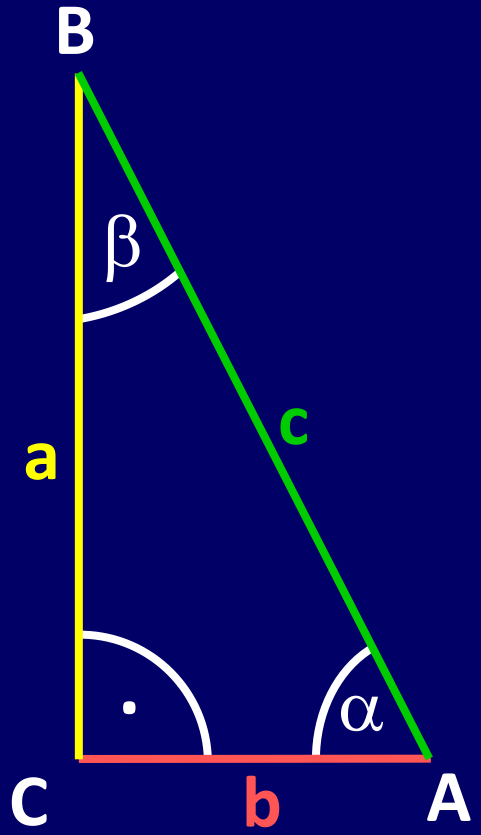
$\cos\alpha = \sin\beta = \sin(90° - \alpha)$ und $\sin\alpha = \cos\beta = \cos(90° - \alpha)$

entsprechend gilt auch:

$\cot\alpha = \tan(90° - \alpha)$ und $\tan\alpha = \cot(90° - \alpha)$

$\sec\alpha = \mathrm{cosec}(90° - \alpha)$ und $\mathrm{cosec}\,\alpha = \sec(90° - \alpha)$

Beziehungen zw. Winkelfunktionen
(bei gleichem Argumentwert)



$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad \text{(Satz des Pythagoras)}$$

$$\frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \underbrace{\left(\frac{a}{c}\right)^2}_{\sin\alpha} + \underbrace{\left(\frac{b}{c}\right)^2}_{\cos\alpha} = 1$$

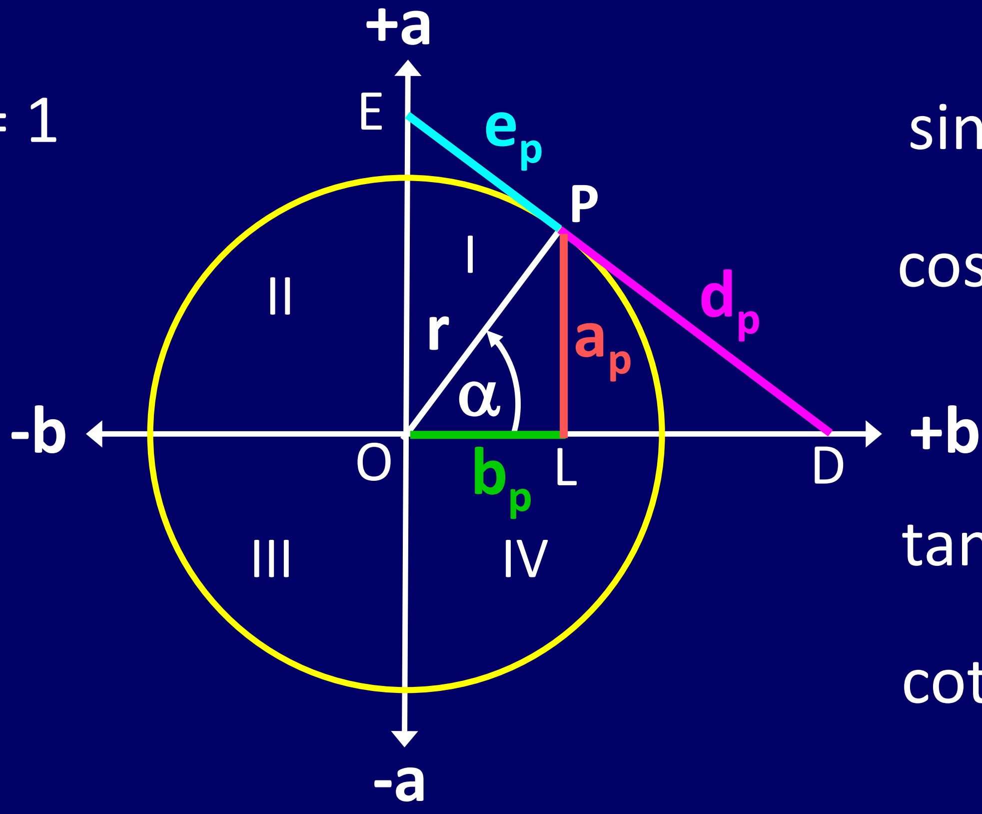
$$\Rightarrow \quad \boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Beziehungen zw. Winkelfunktionen

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$
$\sin\alpha =$	—	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{\tan\alpha}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha}$	$\frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha}$
$\cos\alpha =$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	—	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{\cot\alpha}{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sec\alpha}$	$\frac{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}{\operatorname{cosec}\alpha}$
$\tan\alpha =$	$\frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	—	$\frac{1}{\cot\alpha}$	$\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}$
$\cot\alpha =$	$\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\tan\alpha}$	—	$\frac{1}{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	$\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}$
$\sec\alpha =$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{1}{\cos\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}$	$\frac{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}}{\cot\alpha}$	—	$\frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}$
$\operatorname{cosec}\alpha =$	$\frac{1}{\sin\alpha}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}$	$\frac{\sec\alpha}{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	—

Werte der Winkelfunktionen
(graphische Bestimmung)

Einheitskreis: r = 1



$\sin\alpha = a_p$

$\cos\alpha = b_p$

$\tan\alpha = d_p$

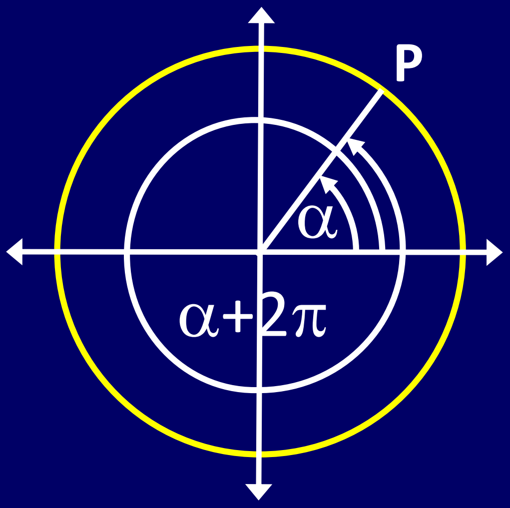
$\cot\alpha = e_p$

	Quadrant I	II	III	IV
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tan	+	−	+	−
cot	+	−	+	−

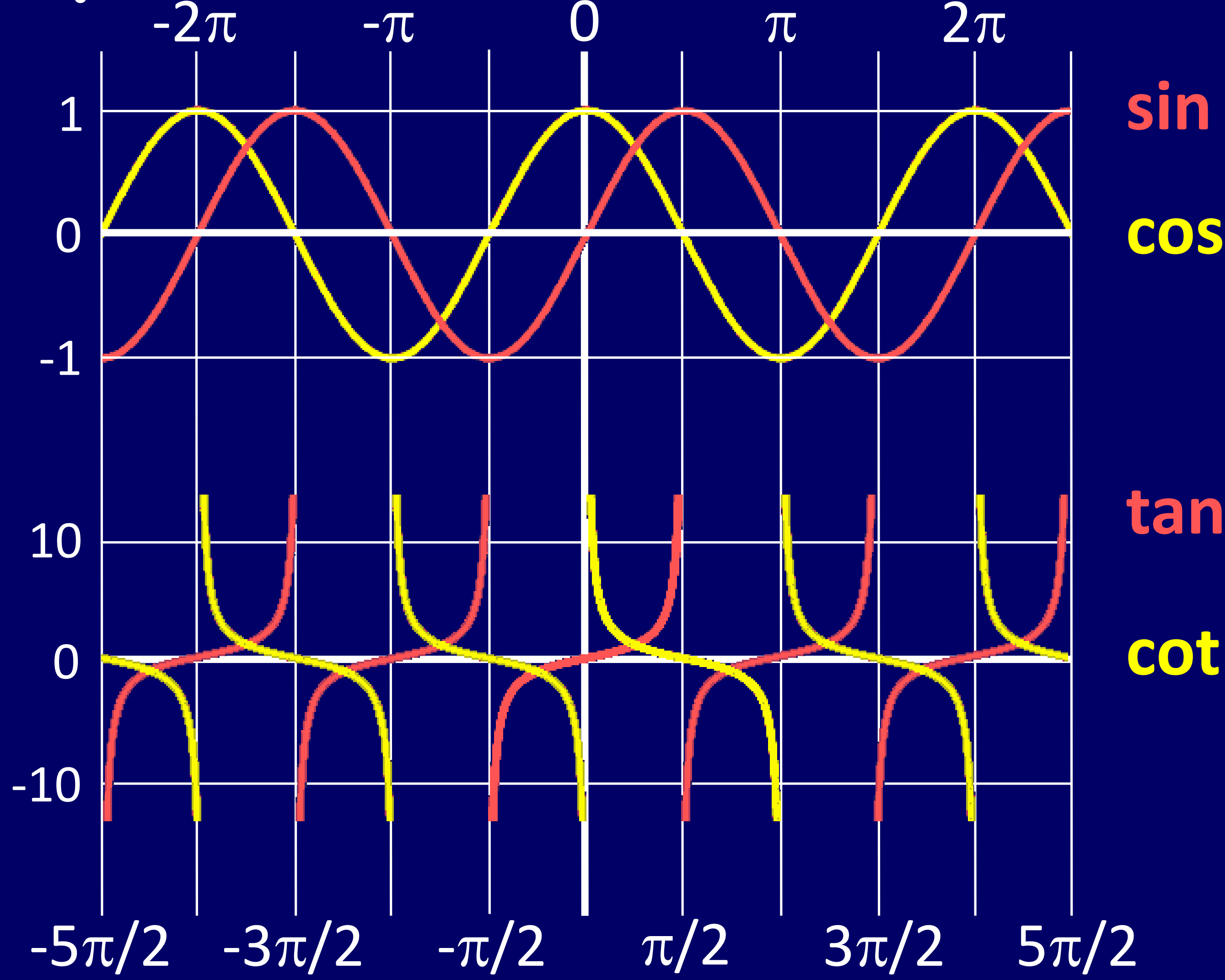
Periodizität der Winkelfunktionen

Bogenmaß	Gradmaß
$\sin\alpha = \sin(\alpha + k\,2\pi)$	$\sin\alpha° = \sin(\alpha° + k \cdot 360°)$
$\cos\alpha = \cos(\alpha + k\,2\pi)$	$\cos\alpha° = \cos(\alpha° + k \cdot 360°)$
$\tan\alpha = \tan(\alpha + k\,\pi)$	$\tan\alpha° = \tan(\alpha° + k \cdot 180°)$
$\cot\alpha = \cot(\alpha + k\,\pi)$	$\cot\alpha° = \cot(\alpha° + k \cdot 180°)$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$



Graphen der Winkelfunktionen



Funktionswerte trigon. Funktionen

1. Zurückführung des Winkelarguments auf das Intervall $[0, \pi/2]$, d.h. den I. Quadranten
2. Umrechnung des Winkelarguments in das Bogenmaß (falls erforderlich)
3. Bestimmung des Funktionswertes (i.d.R. mittels Reihenentwicklung)

Funktionswerte trigon. Funktionen

1. Zurückführung des Winkelarguments α auf $[0, \pi/2]$

a) wenn $\alpha < 0$

$\rightarrow$ Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften

$\cos -\alpha = \cos \alpha$ (gerade Fkt.)

$$\left.\begin{aligned} \sin -\alpha &= -\sin \alpha \\ \tan -\alpha &= -\tan \alpha \\ \cot -\alpha &= -\cot \alpha \end{aligned}\right\} \text{(ungerade Fkt.)}$$

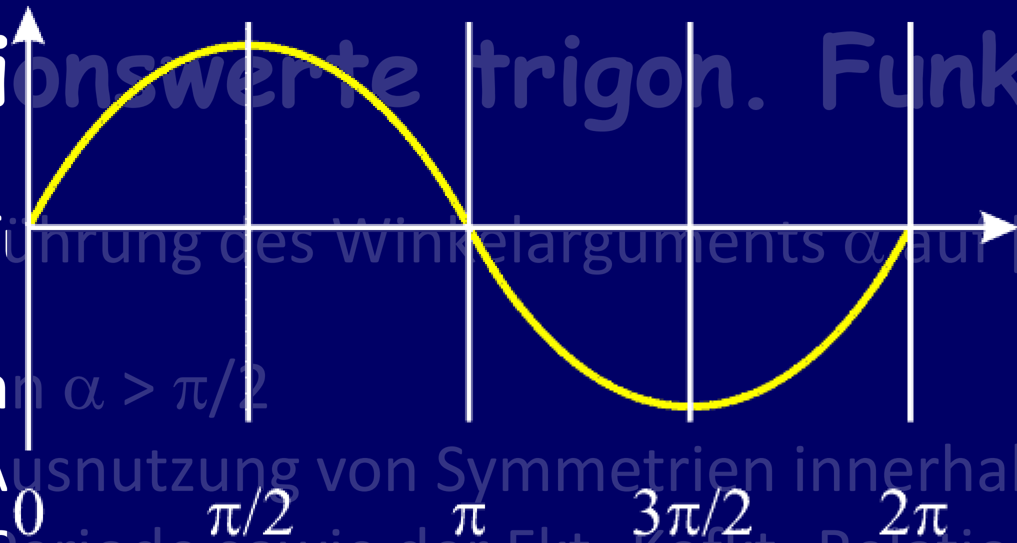
b) wenn $\alpha > 2\pi$

$\rightarrow$ Ausnutzung der Periodizität

Subtraktion von $k \cdot 2\pi$

Funktionswerte trigon. Funktionen

1. Zurückführung des Winkelarguments α auf $[0, \pi/2]$



c) wenn $\alpha > \pi/2$

→ Ausnutzung von Symmetrien innerhalb einer Periode sowie der Fkt.-Kofkt.-Relationen

z.B.:

II. Quadrant: $$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=+\cos\alpha$$

III. Quadrant: $$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$

IV. Quadrant: $$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-\cos\alpha.$$

Funktionswerte trigon. Funktionen

2. Umrechnung in Bogenmaß

$$\alpha\,\mathrm{rad} = \frac{\alpha^{\circ}}{180^{\circ}}\pi = \frac{\alpha\,\mathrm{gon}}{200\,\mathrm{gon}}\pi = \frac{\alpha^{\mathrm{h}}}{12^{\mathrm{h}}}\pi$$

Funktionswerte trigon. Funktionen

3. Bestimmung des Funktionswertes

a) Spezielle Funktionswerte

Bogenmaß	0	$\pi / 6$	$\pi / 4$	$\pi / 3$	$\pi / 2$
Gradmaß	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cot\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Funktionswerte trigon. Funktionen

3. Bestimmung des Funktionswertes

b) Reihenentwicklung

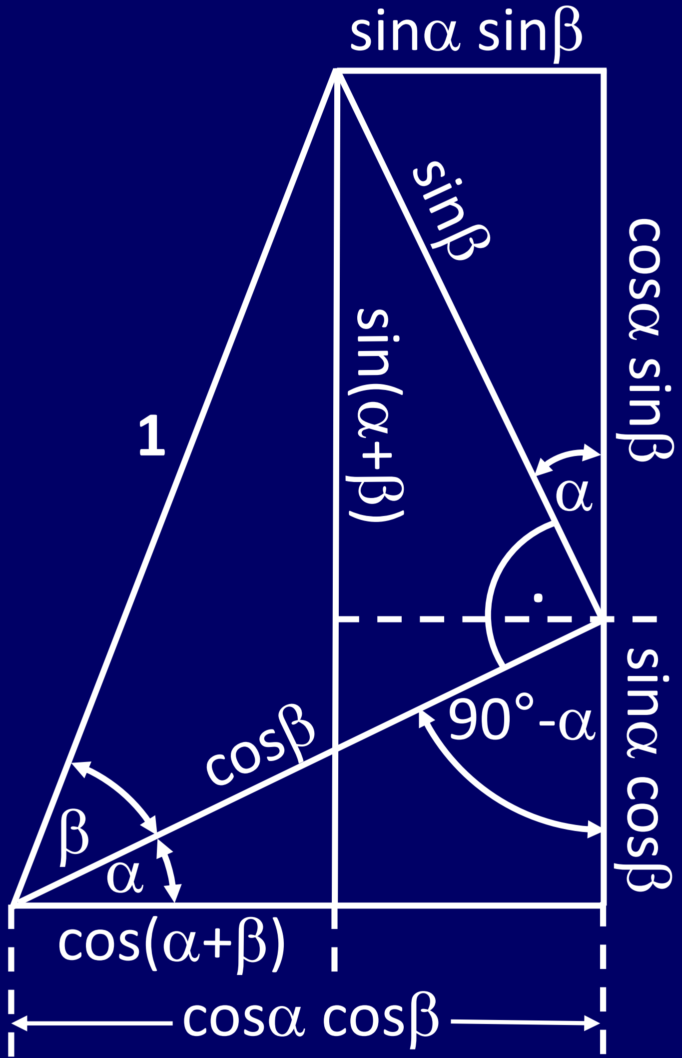
$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x - x_0)^{\nu} + R_n(x)$$ (Taylorformel)

z.B. sin und cos an der Entwicklungsstelle $\alpha_0 = 0$

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + R_9(\alpha)$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + R_8(\alpha)$$

Additionstheoreme



$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ &= \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) \\ &= 2\cos^2\alpha - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2\alpha\end{aligned}$$

Verwandlungsformeln

(I) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

(II) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

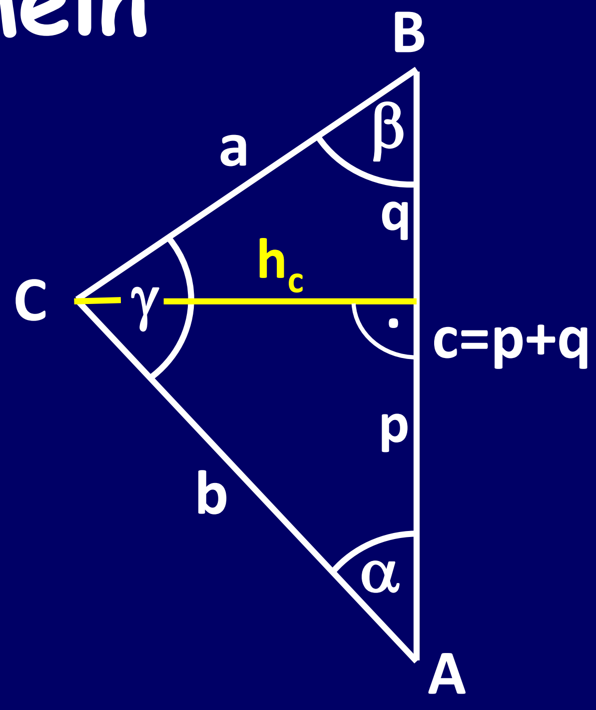
(I) + (II): $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

(I) – (II): $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$

Mit $\alpha+\beta = x,\ \alpha-\beta = y$ folgt $\alpha = \frac{x+y}{2},\ \beta = \frac{x-y}{2}.$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \\ \sin x - \sin y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \end{aligned}}$$

Berechnung ebener Dreiecke: Grundformeln



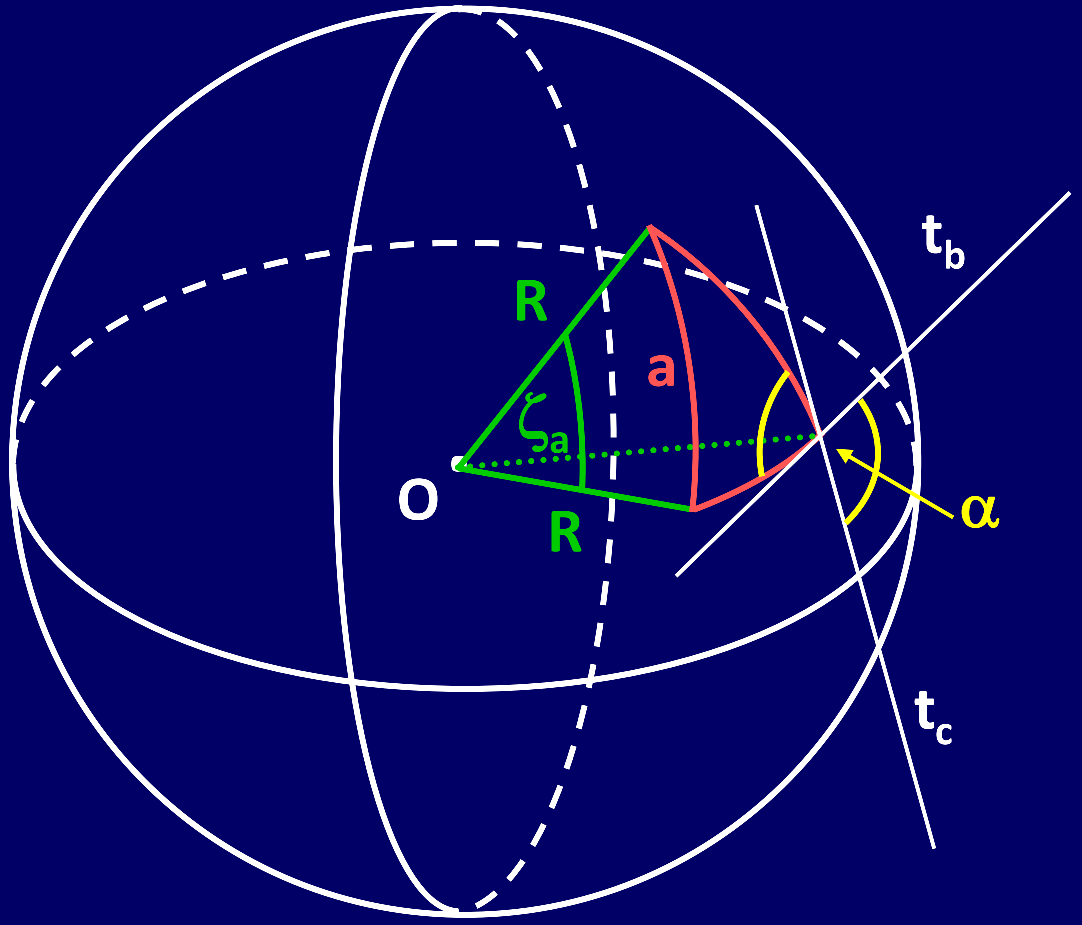
Ebener Sinussatz

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}$$

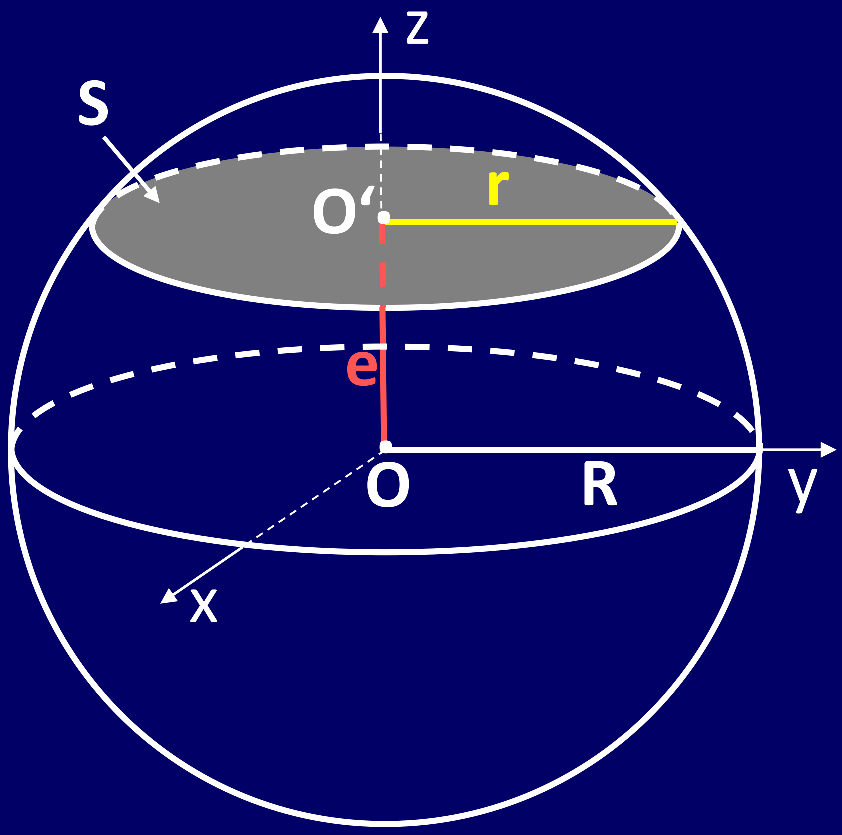
Ebener Kosinussatz

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$

Sphärische Trigonometrie



Kreise und Winkel auf der Kugel



Fallunterscheidung:

I) e = 0

⇨ S…Großkreis ($O \in S$)

mit r = R

II) 0 < e < R

⇨ S…Kleinkreis

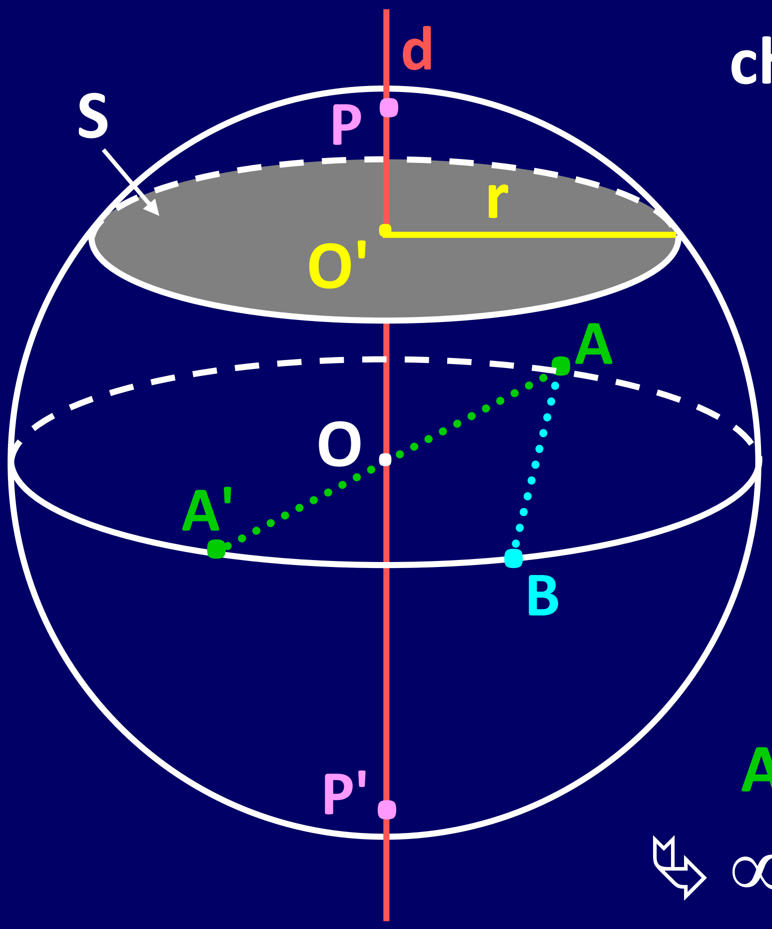
mit 0 < r < R

III) e = R

⇨ S…Tangentialebene

mit r = 0

Kreise und Winkel auf der Kugel



charakteristische Größen:

d = Kugeldurchmesser ⊥ S

O' = wahrer Mittelpunkt von S

P, P' = sphärische Mittelpunkte

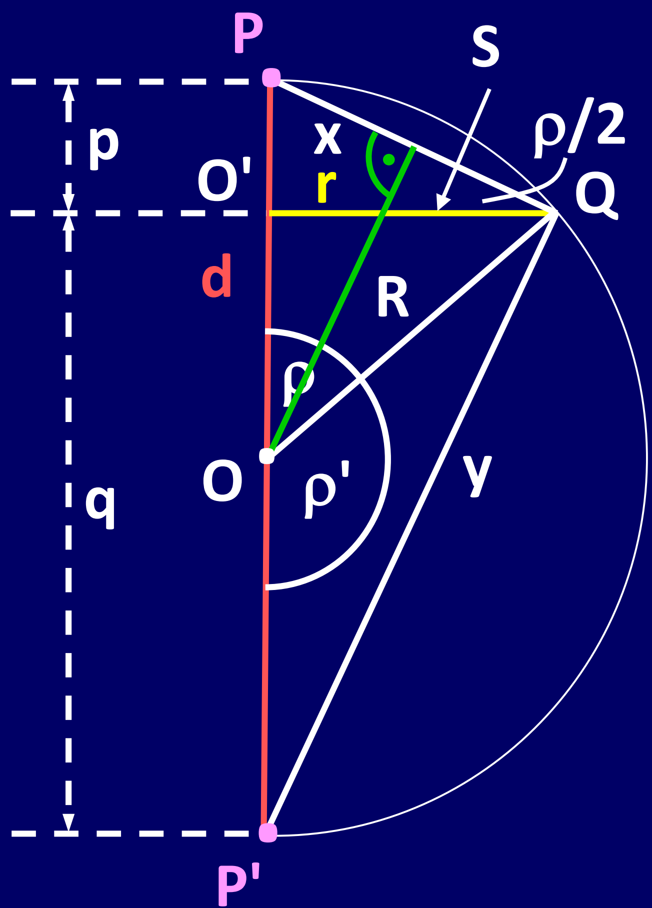
P = Nahpol, P' = Fernpol

A, A' = diametrale Punkte

⇘ ∞ viele Großkreise durch A, A'

A, B nicht diametral ⇨ 1 Großkreis

Polare Abstände



ρ, ρ' = sphärische Abstände

x, y = direkte Abstände

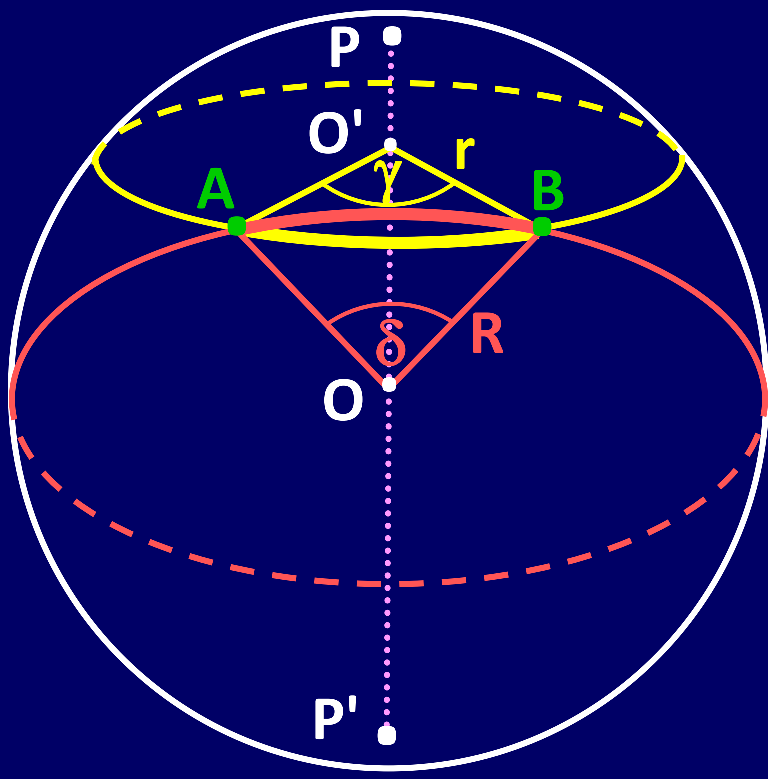
Wegen $\sin\frac{\rho}{2} = \frac{x/2}{R} = \frac{p}{x}$

gilt $x^2 = 2Rp \Rightarrow x = \sqrt{2Rp}$

$$\boxed{\sin\frac{\rho}{2} = \frac{\sqrt{2Rp}}{2R} = \sqrt{\frac{p}{2R}}}$$

analog: $$\boxed{\sin\frac{\rho'}{2} = \frac{\sqrt{2Rq}}{2R} = \sqrt{\frac{q}{2R}}}$$

Minimalabstand zweier Punkte



Kleinkreis:

AB = **r** γ rad = **r** $\gamma°\ \pi/180°$

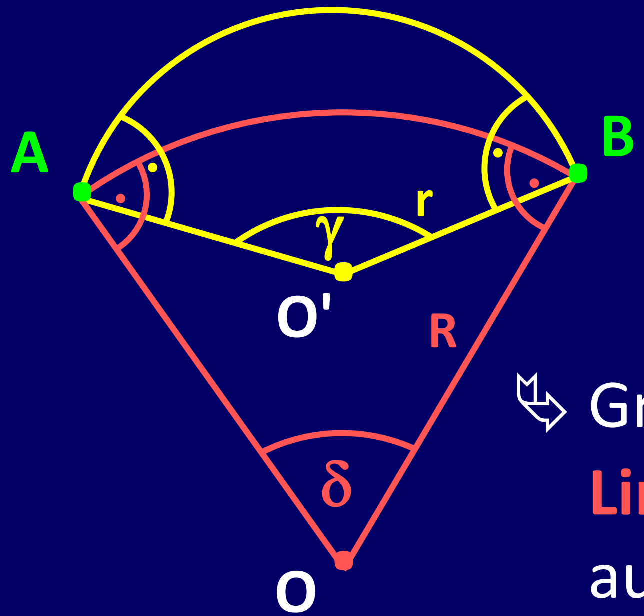
Großkreis:

AB = **R** δ rad = **R** $\delta°\ \pi/180°$

Behauptung:

Länge von AB *wird auf Großkreisbogen minimal.*

Minimalabstand zweier Punkte



Behauptung:
Länge von AB *wird auf Großkreisbogen minimal .*

- Großkreisbögen sind **geodätische Linien**, d.h. kürzeste Verbindungen auf der Kugeloberfläche.

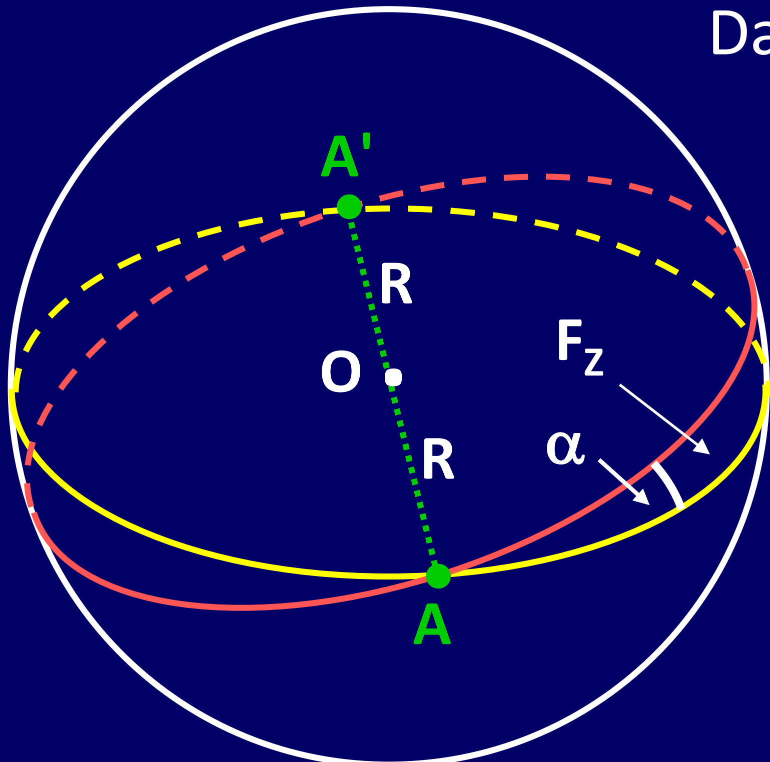
- Entfernung AB allein durch Winkel im Kugelzentrum $\delta \leq 180°$ bestimmt:

$$\frac{AB}{2\pi R} = \frac{\delta°}{360°} \Rightarrow AB = \frac{\pi}{180°} R\ \delta° = R\ \delta\ \mathrm{rad}$$

Merke:

⇨ Großkreisbögen = kürzeste Verbindungen auf der Kugeloberfläche !

Das sphärische Zweieck



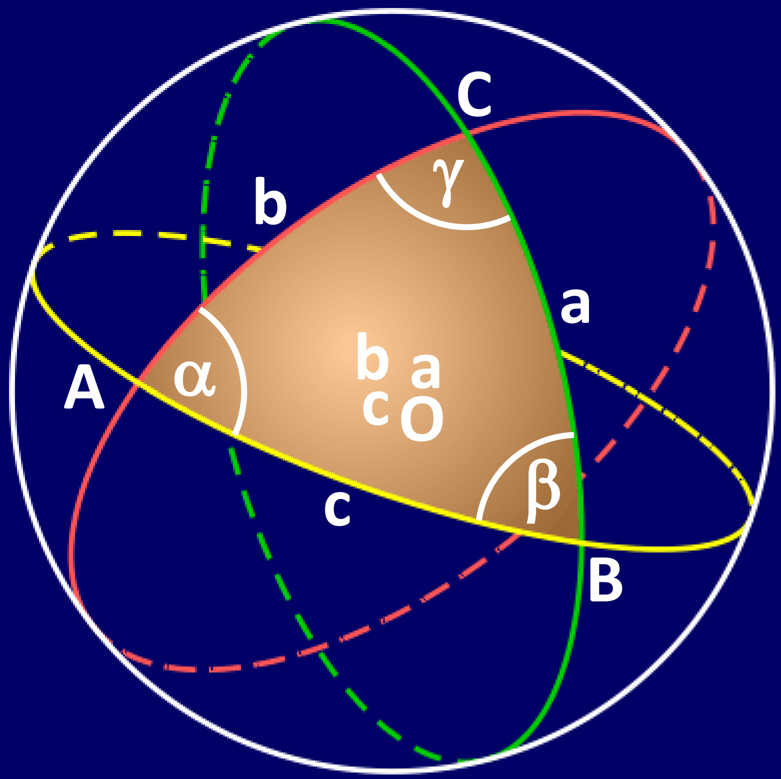
Da $F_Z \sim \alpha$ und $F_K = 4\pi R^2$, gilt:

$$\frac{2F_Z}{F_K} = \frac{\alpha \; rad}{\pi}$$

$$\boxed{F_Z = 2R^2 \alpha \text{ rad}}$$

bzw. $F_Z = 2R^2 \alpha° \dfrac{\pi}{180°}$

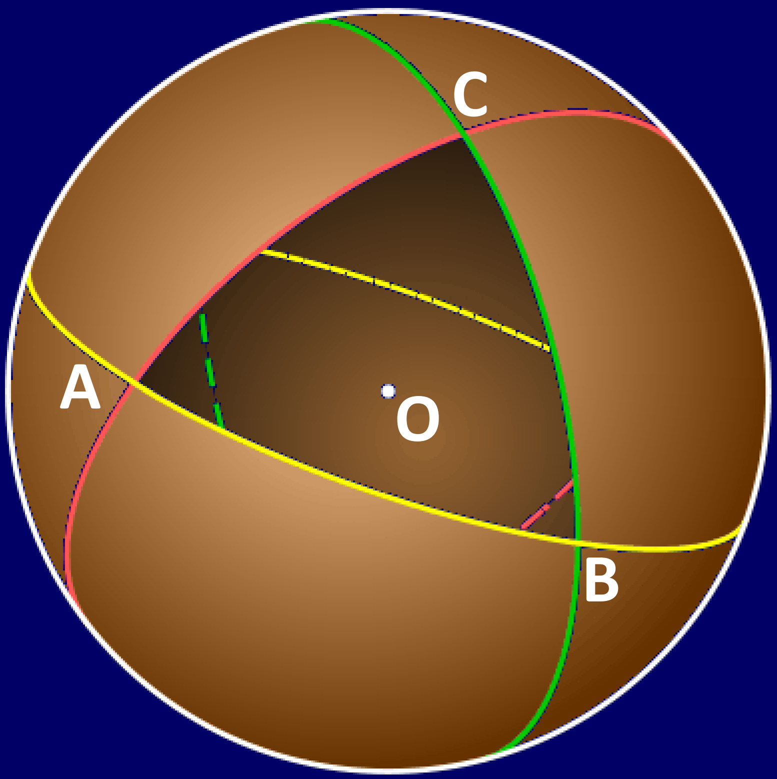
Das sphärische Dreieck



Betrachtungen ausschließlich für **Eulersche Dreiecke:**

⇘ $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \leq 180°$

Das sphärische Dreieck



1 Grunddreieck

1 Gegendreieck

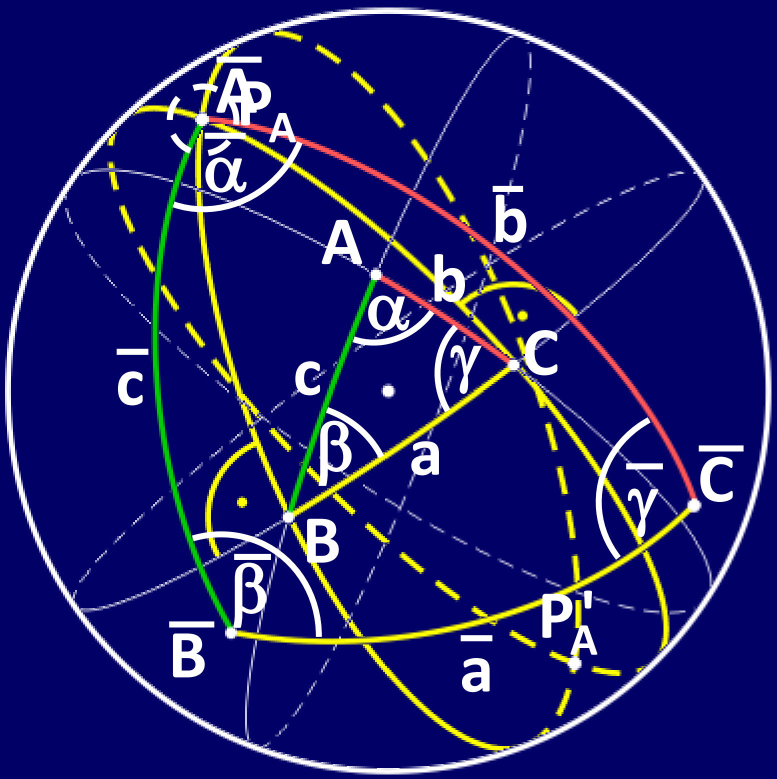
3 Scheiteldreiecke

3 Nebendreiecke

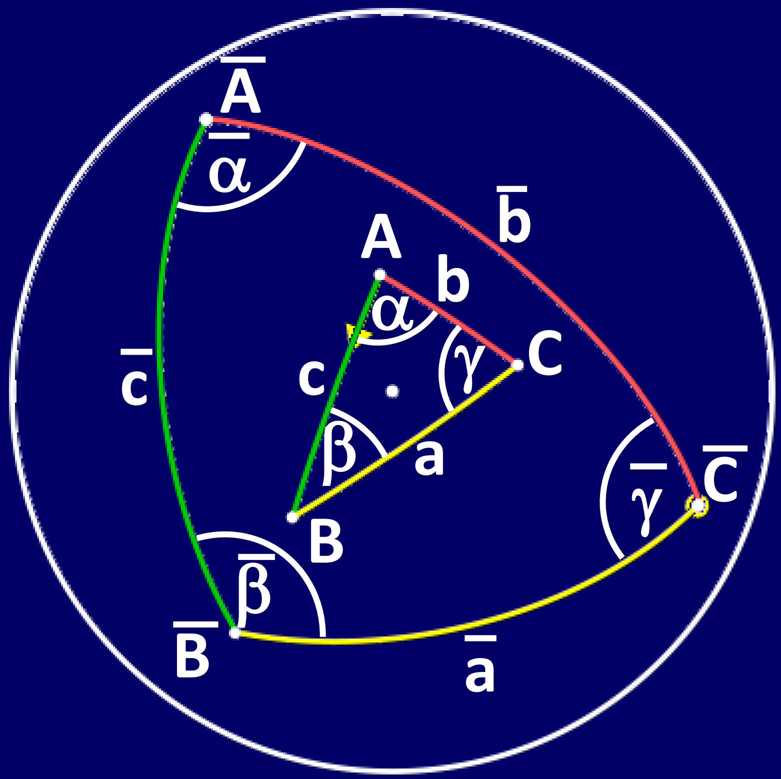
8 sph. Dreiecke

Das Polardreieck

Def.: $\Delta\ \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ **= Polardreieck**



Das Polardreieck



Def.: Δ **$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ = Polardreieck**

Drehung des Großkreises c in Punkt A um $\angle$ π-α lässt dessen Pol $\bar{C}$ entlang $\bar{a}$ zu $\bar{B}$ wandern

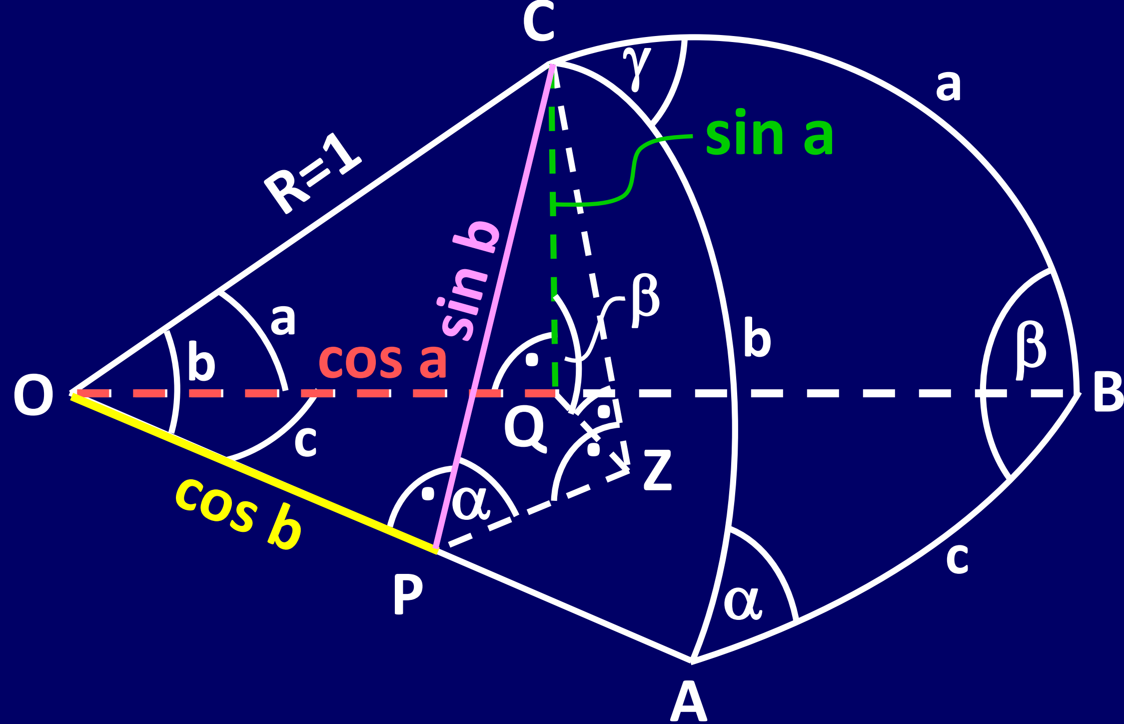
⇒ $\boxed{\bar{a} = \pi - \alpha}$ $\quad \bar{b} = \pi - \beta$, $\quad \bar{c} = \pi - \gamma$

Polardreieck von Δ $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ ist Δ ABC, deshalb gilt analog:

$$a = \pi - \bar{\alpha}$$

⇒ $\boxed{\bar{\alpha} = \pi - a}$ $\quad \bar{\beta} = \pi - b$, $\quad \bar{\gamma} = \pi - c$

Grundformeln für sph. Dreiecke



OQ = cos a

OP = cos b

CQ = sin a

CP = sin b

$$\sin\alpha\sin \mathrm{b} = \sin\beta\sin \mathrm{a}$$

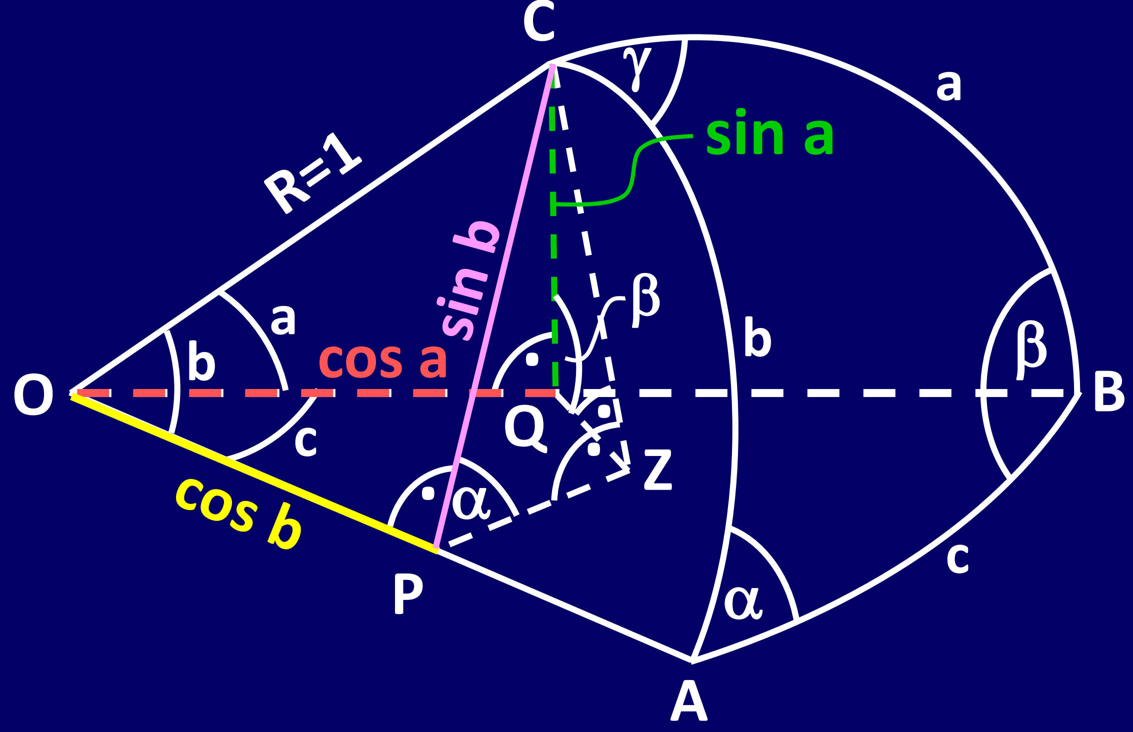
Dreieck CPZ: $\sin\alpha = \frac{\mathrm{CZ}}{\mathrm{CP}} = \frac{\mathrm{CZ}}{\sin \mathrm{b}}$

Dreieck CQZ: $\sin\beta = \frac{\mathrm{CZ}}{\mathrm{CQ}} = \frac{\mathrm{CZ}}{\sin \mathrm{a}}$

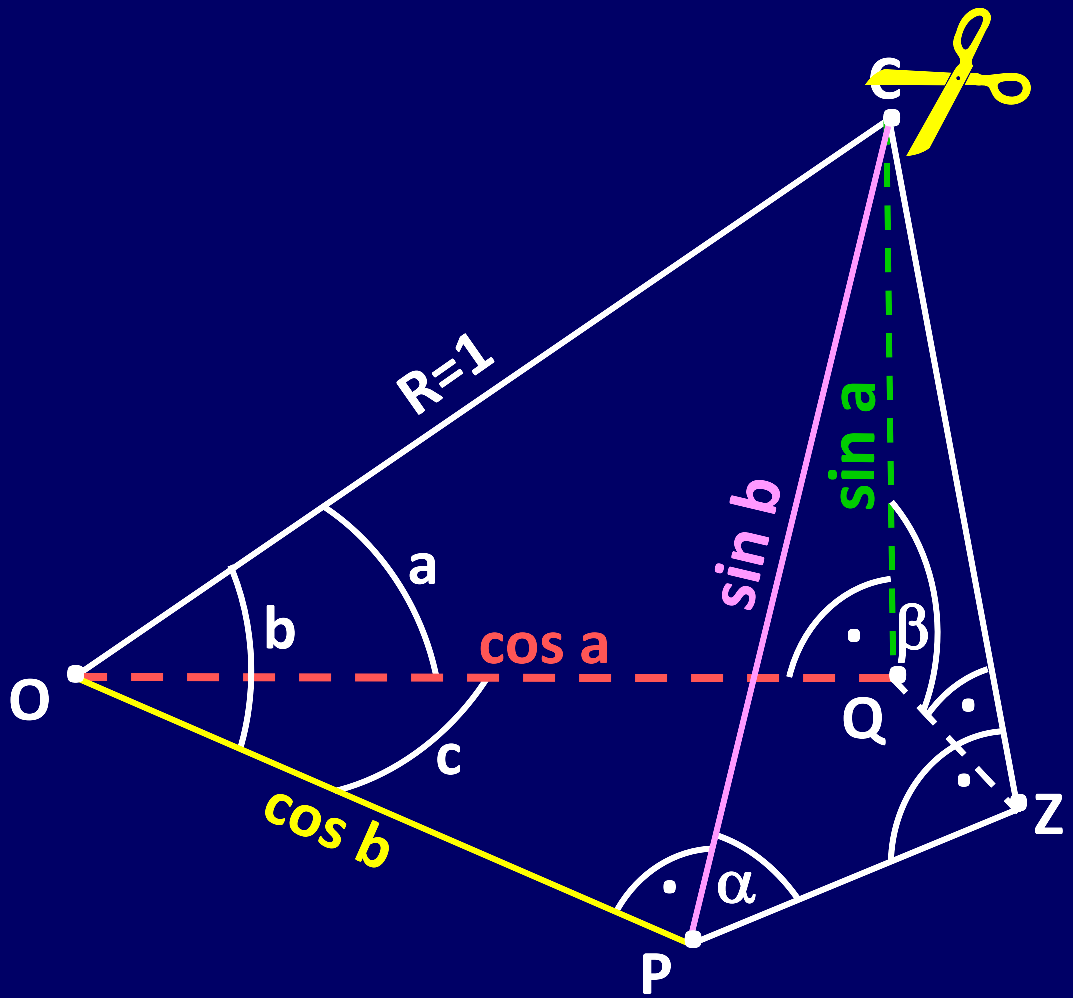
$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\sin \mathrm{a}} = \frac{\sin\beta}{\sin \mathrm{b}}} = \frac{\sin\gamma}{\sin \mathrm{c}}$$

sphärischer Sinussatz

Grundformeln für sph. Dreiecke



Grundformeln für sph. Dreiecke



Dreieck PCZ:

$$\cos\alpha = \frac{PZ}{PC} = \frac{PZ}{\sin b}$$

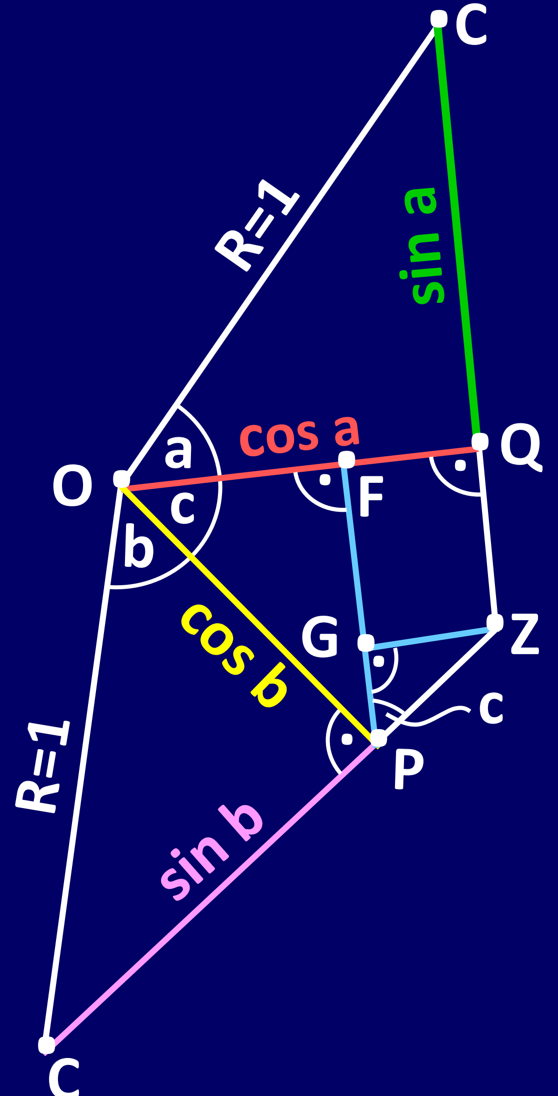
$$PZ = \cos\alpha \sin b$$

Dreieck QCZ:

$$\cos\beta = \frac{QZ}{QC} = \frac{QZ}{\sin a}$$

$$QZ = \cos\beta \sin a$$

Grundformeln für sph. Dreiecke



$$
\begin{aligned}
OQ &= \cos a \\
&= OF + FQ \\
&= OF + GZ
\end{aligned}
$$

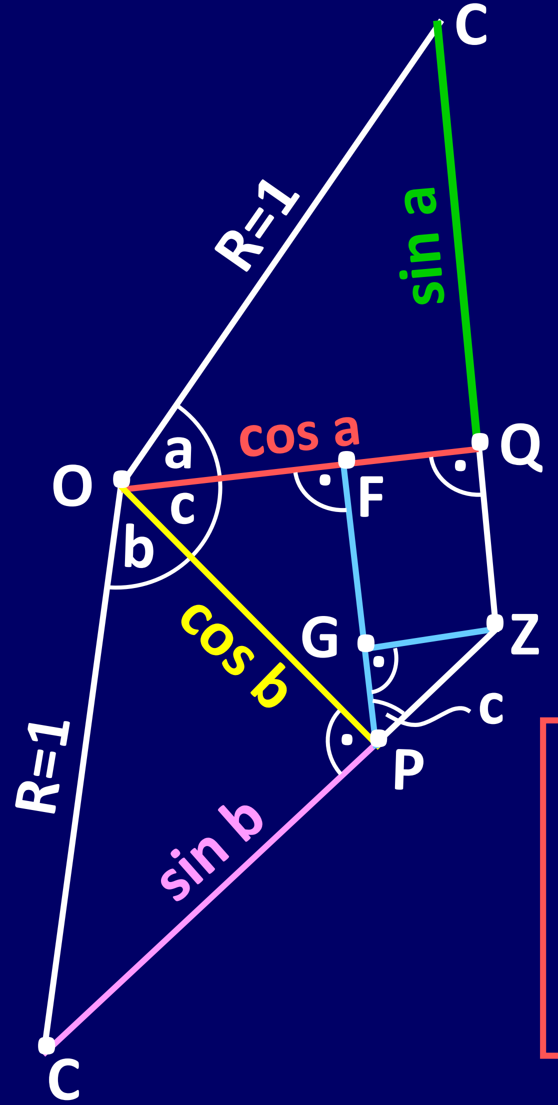
$$OF = \cos b \cos c$$

$$
\begin{aligned}
GZ &= PZ \sin c \\
&= \cos \alpha \sin b \sin c
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos a = \; & \cos b \cos c \\ + \; & \sin b \sin c \cos \alpha \end{aligned}}$$

sphärischer Seitenkosinussatz

Grundformeln für sph. Dreiecke



$$FG = QZ$$
$$= \cos\beta \sin a$$
$$= FP - GP$$

$$FP = \cos b \sin c$$

$$GP = PZ \cos c$$
$$= \cos\alpha \sin b \cos c$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin a \cos\beta &= \cos b \sin c \\ &\quad - \sin b \cos c \cos\alpha \\ \sin a \cos\gamma &= \cos c \sin b \\ &\quad - \sin c \cos b \cos\alpha \end{aligned}}$$

Sinus-Kosinussatz

Grundformeln für sph. Dreiecke

Sinus-Kosinussatz:

$$\sin a \cos\beta = \cos b \sin c - \cos\alpha \sin b \cos c$$

$$\cos\alpha \cos c = \frac{\cos b \sin c}{\sin b} - \frac{\sin a \cos\beta}{\sin b} \qquad \text{(I)}$$

sphärischer Sinussatz:

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} \rightarrow \frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad \text{(II)}$$

(II) in (I) eingesetzt:

$$\cos\alpha \cos c = \frac{\cos b \sin c}{\sin b} - \frac{\sin\alpha \cos\beta}{\sin\beta}$$

$$\boxed{\cos\alpha \cos c = \cot b \sin c - \sin\alpha \cot\beta}$$

Kotangenssatz

Grundformeln für sph. Dreiecke

sphärischer Seitenkosinussatz für Polardreieck:

$$\cos\bar{a} = \cos\bar{b}\cos\bar{c} + \sin\bar{b}\sin\bar{c}\cos\bar{\alpha}$$

Beziehungen zwischen Stücken des Polar- und des Grunddreiecks einsetzen:

$$\begin{aligned}\cos(\pi-\alpha) = {} & \cos(\pi-\beta)\cos(\pi-\gamma) \\ & + \sin(\pi-\beta)\sin(\pi-\gamma)\cos(\pi-a)\end{aligned}$$

$$-\cos\alpha = (-\cos\beta)(-\cos\gamma) + \sin\beta\sin\gamma(-\cos a)$$

$$\boxed{\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a}$$

Winkelkosinussatz

Abgeleitete Formeln: Halbstückrelationen

Additionstheorem:

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad \textbf{(I)}$$

Seitenkosinussatz:

$$\cos a = \cos b \cos c + \cos\alpha \sin b \sin c$$

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \qquad \textbf{(II)}$$

(I) auf linke Seite von (II) angewendet:

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin b \sin c - \cos a + \cos b \cos c}{2\sin b \sin c}$$

Abgeleitete Formeln: Halbstückrelationen

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin b \sin c - \cos a + \cos b \cos c}{2 \sin b \sin c}$$

mit Additionstheorem

$$\cos(b-c) = \cos b \cos c + \sin b \sin c$$

folgt:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{2 \sin b \sin c}$$

Abgeleitete Formeln: Halbstückrelationen

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{2\sin b \sin c}$$

mit Verwandlungsformel:

$$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\text{mit } x = b - c \text{ und } y = a$$

$$\cos(b-c) - \cos a = -2\sin\left(\frac{(b-c)+a}{2}\right)\sin\left(\frac{(b-c)-a}{2}\right)$$

folgt:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\left(\frac{b+a-c}{2}\right)\sin\left(\frac{a+c-b}{2}\right)}{\sin b \sin c}$$

Abgeleitete Formeln: Halbstückrelationen

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\left(\frac{b+a-c}{2}\right)\sin\left(\frac{a+c-b}{2}\right)}{\sin b \sin c}$$

mit Hilfsgröße:

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

folgt:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\left(\frac{b+a-c}{2} - s + s\right)\sin\left(\frac{a+c-b}{2} - s + s\right)}{\sin b \sin c}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\left(\frac{-2c}{2} + s\right)\sin\left(\frac{-2b}{2} + s\right)}{\sin b \sin c}$$

Abgeleitete Formeln: Halbstückrelationen

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\left(\frac{-2c}{2}+s\right)\sin\left(\frac{-2b}{2}+s\right)}{\sin b \sin c}$$

$$\boxed{\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-c)\sin(s-b)}{\sin b \sin c}}}$$

analog aus Add.theorem mit cos²:

$$\boxed{\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}}$$

und schließlich tan=sin/cos:

$$\boxed{\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-c)\sin(s-b)}{\sin s \sin(s-a)}}}$$

Halbwinkel-sätze

Abgeleitete Formeln: Halbstückrelationen

aus Additionstheorem für Seite:

$$\cos a = 2\cos^2\frac{a}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2}$$

und Winkelkosinussatz umgestellt nach cos a:

$$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$$

sowie der Hilfsgöße σ:

$$\sigma = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$$

folgen analog Halbseitensätze, z.B.:

$$\boxed{\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\sigma - \beta)\cos(\sigma - \gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}}}$$

Abgeleitete Formeln: Delambresche Formelpaare

Additionstheorem:

$$\cos\frac{\alpha\pm\beta}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\mp\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$$

Einsetzen der Halbwinkelsätze:

$$\cos\frac{\alpha\pm\beta}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin c\sin a}}$$

$$\mp\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}\sqrt{\frac{\sin(s-c)\sin(s-a)}{\sin c\sin a}}$$

$$\cos\frac{\alpha\pm\beta}{2}=\sqrt{\frac{\sin^2 s\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin^2 c\sin a\sin b}}$$

$$\mp\sqrt{\frac{\sin^2(s-c)\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin^2 c\sin a\sin b}}$$

Abgeleitete Formeln: Delambresche Formelpaare

$$\cos\frac{\alpha\pm\beta}{2}=\sqrt{\frac{\sin^2 s\,\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin^2 c\,\sin a\sin b}}\mp\sqrt{\frac{\sin^2(s-c)\,\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin^2 c\,\sin a\sin b}}$$

mit Halbwinkelsatz:

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}}$$

folgt:

$$\cos\frac{\alpha\pm\beta}{2}=\frac{\sin s}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2}\mp\frac{\sin(s-c)}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2}$$

Abgeleitete Formeln: Delambresche Formelpaare

$$\cos\frac{\alpha\pm\beta}{2}=\frac{\sin s}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2}\mp\frac{\sin(s-c)}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$\cos\frac{\alpha\pm\beta}{2}=\frac{1}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2}[\sin s\mp\sin(s-c)]$$

mit Verwandlungsformeln:

$$\begin{aligned}\sin s-\sin(s-c)&=2\cos\frac{s+(s-c)}{2}\sin\frac{s-(s-c)}{2}\\&=2\cos\frac{2s-c}{2}\sin\frac{c}{2}\\&=2\cos\frac{2[(a+b+c)/2]-c}{2}\sin\frac{c}{2}\\&=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{c}{2}\end{aligned}$$

Abgeleitete Formeln: Delambresche Formelpaare

$$\cos\frac{\alpha \pm \beta}{2} = \frac{\sin s}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2} \mp \frac{\sin(s-c)}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$\cos\frac{\alpha \pm \beta}{2} = \frac{1}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2}[\sin s \mp \sin(s-c)]$$

mit Verwandlungsformeln:

$$\sin s - \sin(s-c) = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{c}{2}$$

$$\sin s + \sin(s-c) = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{c}{2}$$

folgt:

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{2}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{c}{2}$$

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{2}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{c}{2}$$

Abgeleitete Formeln: Delambresche Formelpaare

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{2}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{c}{2}$$

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{2}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{c}{2}$$

mit Additionstheorem:

$$\sin c = 2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}$$

folgt:

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1}{\cos\frac{c}{2}}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{a+b}{2}$$

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{1}{\sin\frac{c}{2}}\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{a+b}{2}$$

Abgeleitete Formeln: Delambresche Formelpaare

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1}{\cos\frac{c}{2}} \sin\frac{\gamma}{2} \cos\frac{a+b}{2}$$

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{1}{\sin\frac{c}{2}} \sin\frac{\gamma}{2} \sin\frac{a+b}{2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{a+b}{2} &= \cos\frac{c}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{a+b}{2} &= \sin\frac{c}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \end{aligned}}$$

Delambresche Formelpaare

Abgeleitete Formeln: Nepersche Analogien

$$\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{a+b}{2} = \cos\frac{c}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad \text{(I)}$$

$$\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{a+b}{2} = \sin\frac{c}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \text{(II)}$$

Delambresches Formelpaar dividieren (II)/(I):

$$\tan\frac{a+b}{2} = \tan\frac{c}{2}\,\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$\boxed{\frac{\tan\frac{a+b}{2}}{\tan\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}}$$

Nepersche Analogien

Rechnen mittels Nepperscher Analogien

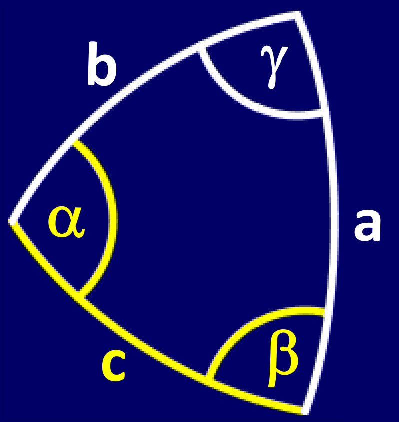
z.B. gegeben in sphär. Dreieck WSW (α, c, β)

$$\tan\frac{a+b}{2} = \tan\frac{c}{2}\,\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} \qquad \tan\frac{a-b}{2} = \tan\frac{c}{2}\,\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$= x$ $\qquad$ $= y$

$$\Rightarrow\quad x+y = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

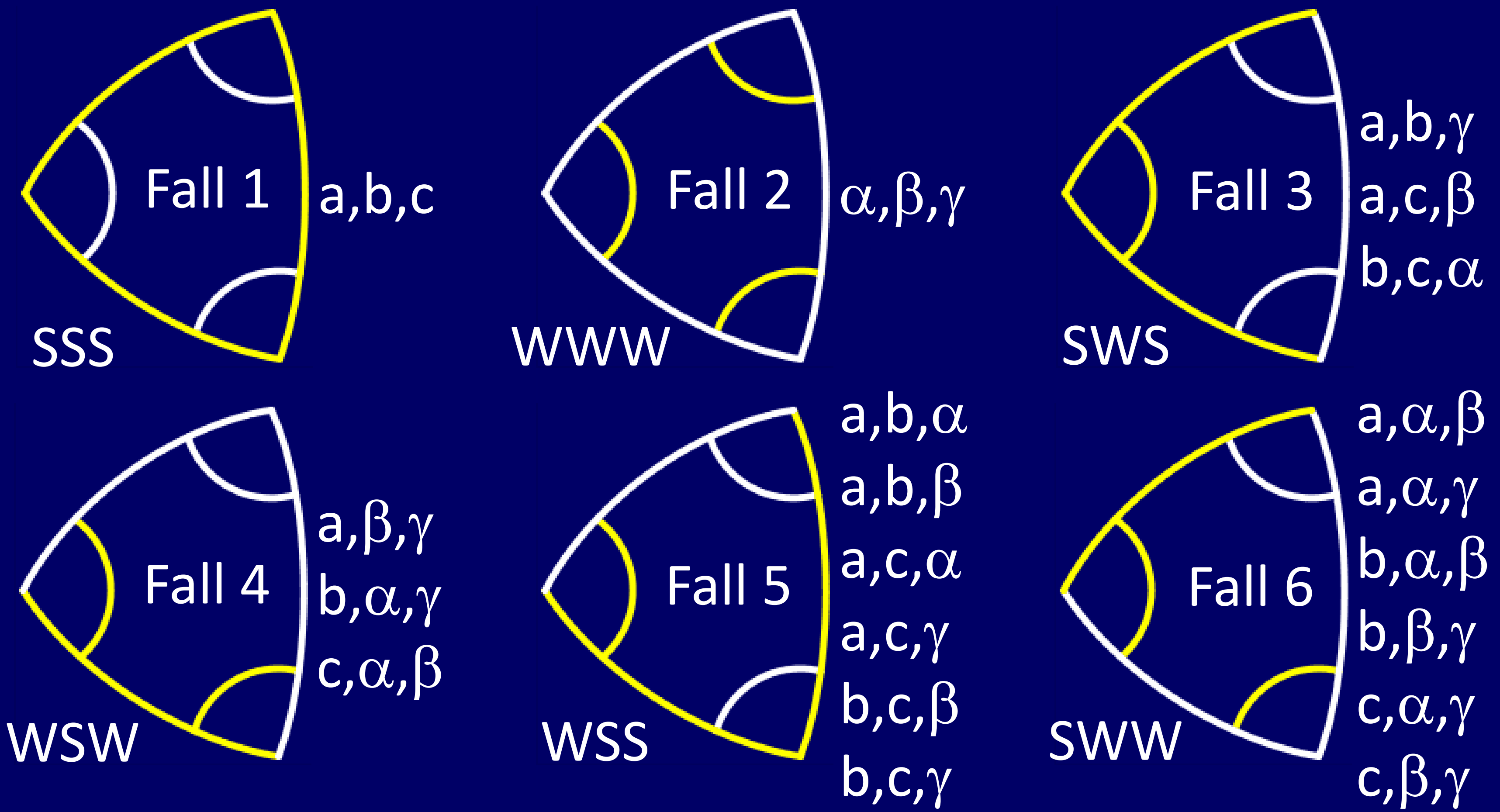
$$x-y = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = \frac{2b}{2} = b$$



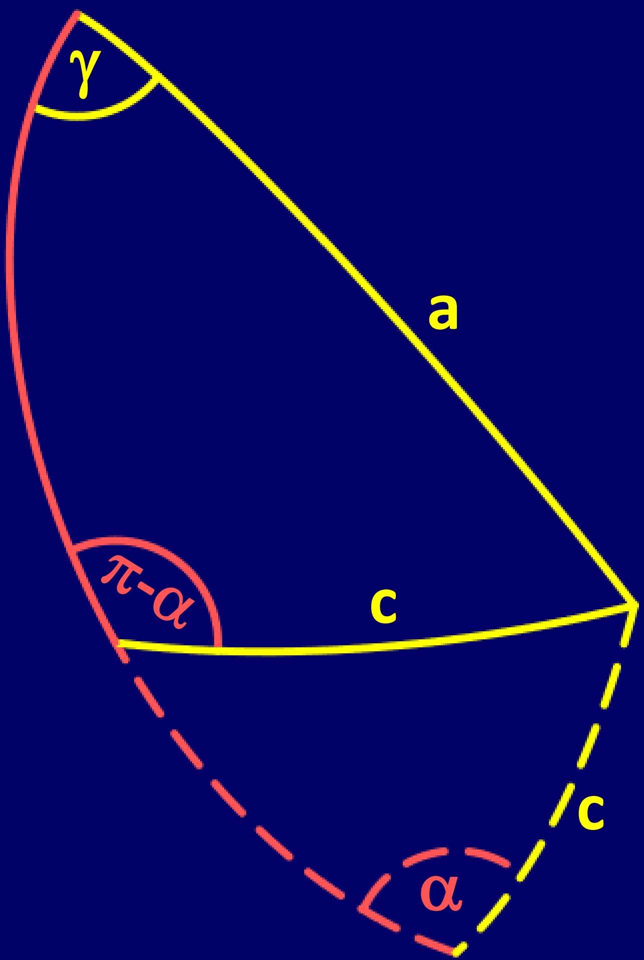
$$\Rightarrow\quad \cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c$$

Die 6 "Grundaufgaben"

Berechnung eines sph. Dreiecks möglich, wenn mind. drei Stücke gegeben sind → 6 Standardfälle



Zweideutige Lösung eines sphärischen Dreiecks



z.B.: **Fall 5 (SSW)**

geg.: **a**, **c**, **γ**

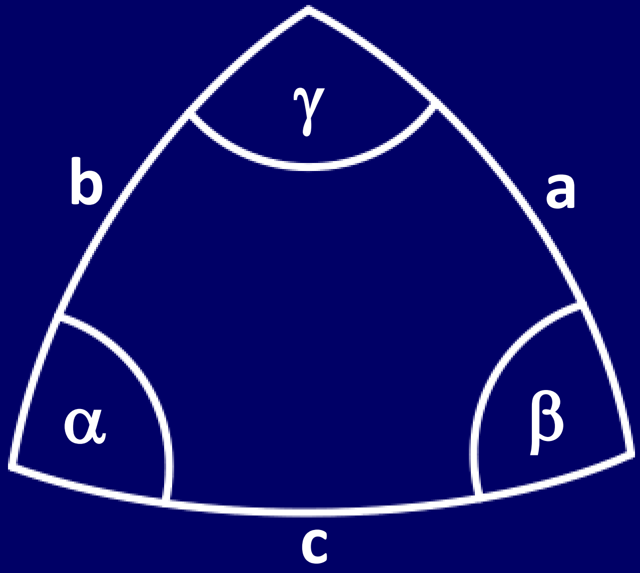
α aus Sinussatz:

$$\sin\alpha = \sin\gamma \frac{\sin a}{\sin c}$$

Mehrdeutige Lösung möglich, da

$$\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha)$$

Rechtwinklige sphärische Dreiecke



$\gamma = 90°$

↳ $\cos\gamma = 0$, $\sin\gamma = 1$

↳ Vereinfachung der Grundformeln:

Sph. Sinussatz: $\dfrac{\sin a}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin c}{\sin\gamma}, \quad \dfrac{\sin b}{\sin\beta} = \dfrac{\sin c}{\sin\gamma}$

$$\Longrightarrow \quad \sin a = \sin\alpha \, \sin c \, , \quad \sin b = \sin\beta \, \sin c$$

Seitenkosinussatz:

$$\cos c = \cos a \, \cos b + \sin a \, \sin b \, \cos\gamma$$

$$\Longrightarrow \quad \cos c = \cos a \, \cos b$$

Rechtwinklige sphärische Dreiecke

$\gamma = 90°$ ⇨ $\cos\gamma = 0$, $\sin\gamma = 1$

Kotangenssatz:

$$\sin\gamma \cot\alpha = \cot a \sin b - \cos b \cos\gamma ,$$
$$\sin\gamma \cot\beta = \cot b \sin a - \cos a \cos\gamma$$

$$\Longrightarrow \quad \cot\alpha = \cot a \sin b \quad \Longrightarrow \quad \sin b = \tan a \cot\alpha ,$$
$$\cot\beta = \cot b \sin a \quad \Longrightarrow \quad \sin a = \tan b \cot\beta$$

Sinus-Kosinussatz:

$$\sin a \cos\gamma = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos\alpha ,$$
$$\sin b \cos\gamma = \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos\beta$$

$$\Longrightarrow 0 = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos\alpha \Longrightarrow \cos\alpha = \cot c \tan b ,$$
$$0 = \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos\beta \Longrightarrow \cos\beta = \cot c \tan a$$

Rechtwinklige sphärische Dreiecke

$\gamma = 90°$ ⇨ $\cos\gamma = 0$, $\sin\gamma = 1$

Winkelkosinussatz:

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a\ ,$$
$$\cos\beta = -\cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha\cos b\ ,$$
$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c$$

$$\Longrightarrow\quad \cos\alpha = \sin\beta\cos a\ ,$$
$$\cos\beta = \sin\alpha\cos b\ ,$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \sin\alpha\sin\beta\cos c \Longrightarrow \cos c = \cot\alpha\cot\beta$$

Rechtwinklige sphärische Dreiecke

$\gamma = 90° \Rightarrow \cos\gamma = 0, \sin\gamma = 1$

Sph. Sinussatz:

$$\sin a = \sin\alpha \sin c\,, \quad \sin b = \sin\beta \sin c$$

Seitenkosinussatz:

$$\cos c = \cos a \cos b$$

Kotangenssatz:

$$\sin b = \tan a \cot\alpha\,, \quad \sin a = \tan b \cot\beta$$

Sinus-Kosinussatz:

$$\cos\alpha = \cot c \tan b\,, \quad \cos\beta = \cot c \tan a$$

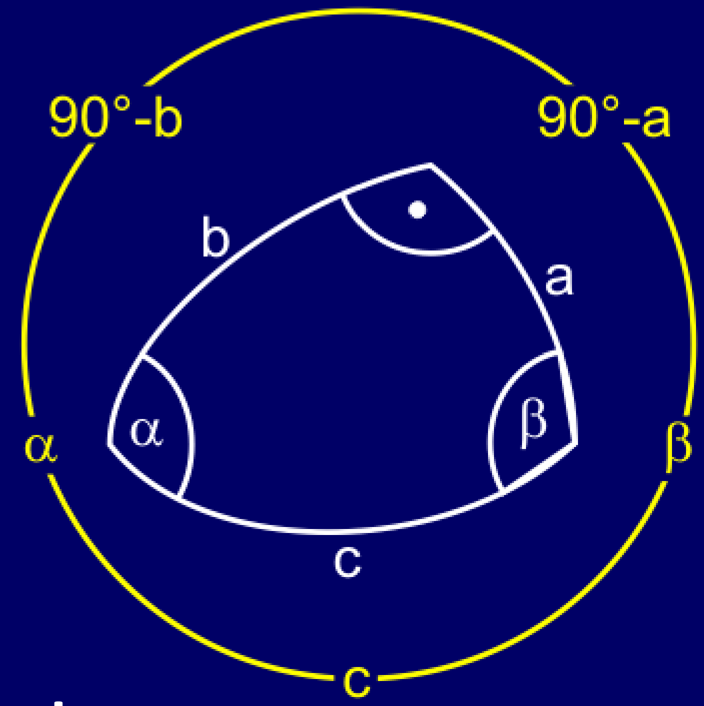
Winkelkosinussatz:

$$\cos\alpha = \sin\beta \cos a\,, \quad \cos\beta = \sin\alpha \cos b\,,$$

$$\cos c = \cot\alpha \cot\beta$$

All diese Formeln für rechtwinklige sphärische Dreiecke kann man sich auf geniale Art und Weise merken:

Rechtwinklige sphärische Dreiecke



γ=90°

Nepersche Regel:

"Der Kosinus irgendeines Stückes ist gleich dem Produkt der Kotangens der beiden anliegenden Stücke oder gleich dem Produkt der Sinusse der beiden nicht anliegenden Stücke."

Rechtwinklige sphärische Dreiecke: Nepersche Relationen

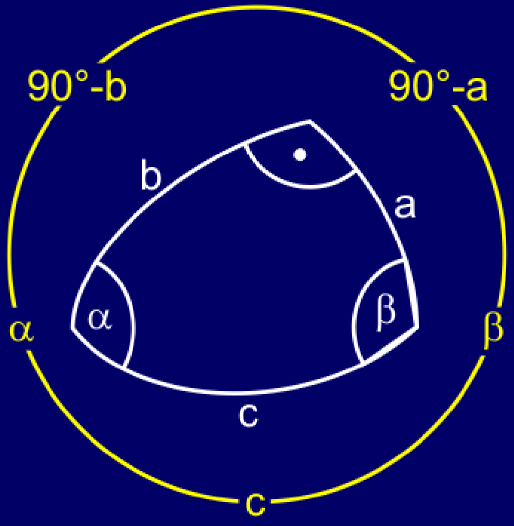
Nepersche Regel (Kurzform):

cos = cot (anliegend) • cot (anliegend)

= sin (nicht anliegend) • sin (nicht anliegend)

↳ 10 Formeln im rechtwinkligen Dreieck

für γ = 90°:



$$\cos c = \cot\beta \cot\alpha \qquad \cos c = \cos a \cos b$$

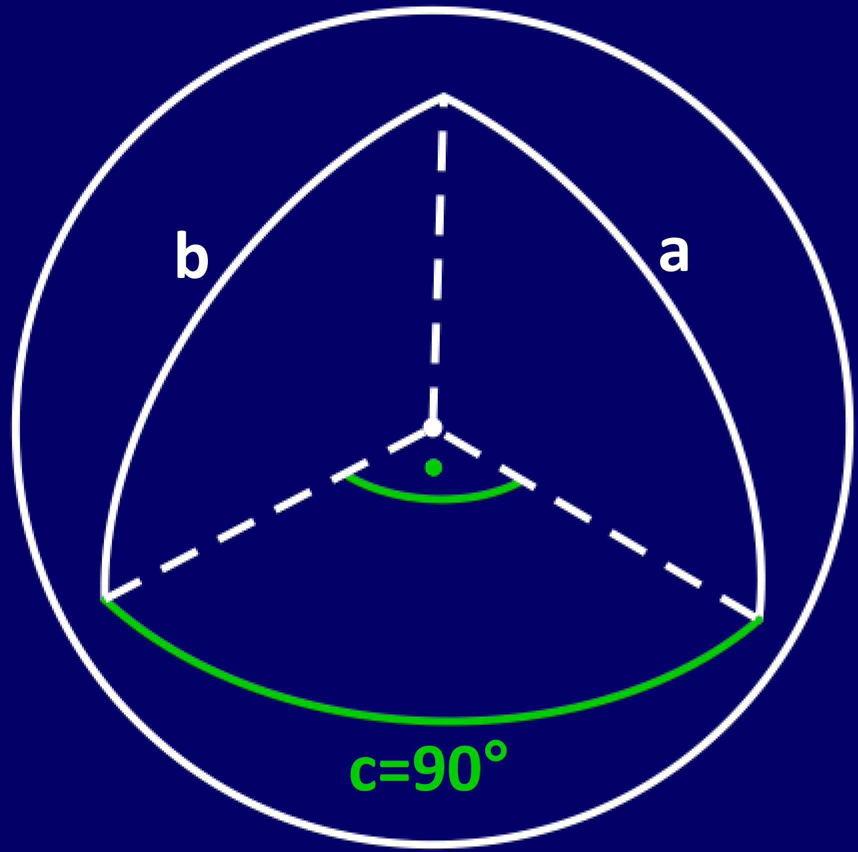
$$\cos\alpha = \cot c \tan b \qquad \cos\alpha = \sin\beta \cos a$$

$$\sin b = \cot\alpha \tan a \qquad \sin b = \sin c \sin\beta$$

$$\sin a = \tan b \cot\beta \qquad \sin a = \sin\alpha \sin c$$

$$\cos\beta = \tan a \cot c \qquad \cos\beta = \cos b \sin\alpha$$

Rechtseitige sphärische Dreiecke



Rechtseitige sphärische Dreiecke

$c = 90° \Rightarrow \cos c = 0, \sin c = 1$

Sph. Sinussatz:

$$\Rightarrow \sin\alpha = \sin a \sin\gamma\,, \quad \sin\beta = \sin b \sin\gamma$$

Seitenkosinussatz:

$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta$$

Kotangenssatz:

$$\sin\beta = \tan\alpha\cot a\,, \quad \sin\alpha = \tan\beta\cot b$$

Sinus-Kosinussatz:

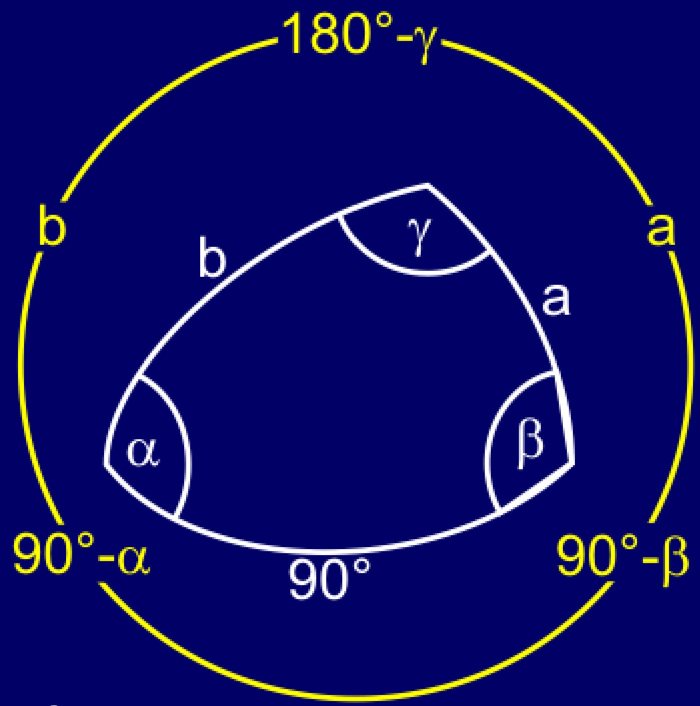
$$\cos a = -\cot\gamma\tan\beta\,, \quad \cos b = -\cot\gamma\tan\alpha$$

Winkelkosinussatz:

$$\cos a = \sin b\cos\alpha\,, \quad \cos b = \sin a\cos\beta\,,$$

$$\cos\gamma = -\cot a\cot b$$

Rechtseitige sphärische Dreiecke



c=90°

Nepersche Regel:
"Der Kosinus irgendeines Stückes ist gleich dem Produkt der Kotangens der beiden anliegenden Stücke oder gleich dem Produkt der Sinusse der beiden nicht anliegenden Stücke."

Merke:
Nepersche Regel

⇨ rechtwinkliges bzw. rechtseitiges Dreieck:

Kosinus = Produkt der Kotangens der anliegenden Stücke, bzw.
= Produkt der Sinusse der nicht anliegenden Stücke

Ungleichungen im sph. Dreieck

Seitenkosinussatz:

$$\cos c = \cos a \, \cos b + \sin a \, \sin b \, \cos \gamma$$

im Eulerschen Dreieck gilt: a,b,c ≤ 180°

⇒ $\sin a \, \sin b \geq 0$

weil γ > 0° gilt zudem stets: cos γ < 1

⇒ $\cos c \leq \cos a \, \cos b + \sin a \, \sin b$

$\cos c \leq \cos(a - b)$

wegen -180° < (a-b) < 180° und fallenden cos-Funktionswerten von 0° an sowohl in positiver Richtung bis 180° als auch negativer Richtung bis -180° folgt

⇒ $c \geq |a - b|$

Ungleichungen im sph. Dreieck

$$c \geq |a - b|$$

$$c \geq |b - a|$$

Da c stets positiv ist, kann die Betragbildung entfallen

↳ $c \geq a - b$ Analog: $a \geq b - c$ $b \geq c - a$

$c \geq b - a$ $a \geq c - b$ $b \geq a - c$

Jede Seite ist stets größer gleich der Differenz der beiden anderen.

bzw.

Die Summe zweier Seiten ist stets größer gleich der dritten.

Ungleichungen im sph. Dreieck

Seitenkosinussatz:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

Supplementwinkel:

$$\begin{aligned} a' &= 180^\circ - a & \qquad & a = 180^\circ - a' \\ c' &= 180^\circ - c & \Rightarrow \qquad & c = 180^\circ - c' \\ \gamma' &= 180^\circ - \gamma & \qquad & \gamma = 180^\circ - \gamma' \end{aligned}$$

Einsetzen dieser Winkel in Seitenkosinussatz

$$\Rightarrow \quad -\cos c' = -\cos a' \cos b - \sin a' \sin b \cos \gamma'$$

$$\cos c' = \cos a' \cos b + \sin a' \sin b \cos \gamma'$$

Äquivalente Ableitung führt auf:

$$\Rightarrow \quad c' \geq a' - b$$

$$c' \geq b - a'$$

Ungleichungen im sph. Dreieck

$c' \geq a' - b$ **(I)**

$c' \geq b - a'$ **(II)**

Rücksubstitution der Supplemente

(I)

$$(180° - c) \geq (180° - a) - b$$
$$-c \geq -a - b$$
$$c \leq a + b \quad ✓$$

(II)

$$(180° - c) \geq b - (180° - a)$$
$$180° - c \geq b + a - 180°$$
$$360° \geq a + b + c$$

Die Summe aller Seiten ist stets kleiner gleich 360°

Ungleichungen im sph. Dreieck

Winkelkosinussatz:

$$\cos\gamma = -\cos\alpha\,\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta\,\cos c$$

Supplement $\alpha' = 180° - \alpha \rightarrow \alpha = 180° - \alpha'$ einsetzen

⇨ $$\cos\gamma = \cos\alpha'\cos\beta + \sin\alpha'\sin\beta\cos c$$

Äquivalente Ableitung führt auf:

⇨ $\gamma \geq \alpha' - \beta$ **(I)**

$\gamma \geq \beta - \alpha'$ **(II)**

Rücksubstitution:

⇨ **(I)** $\gamma \geq 180° - \alpha - \beta$ **(II)** $\gamma \geq \beta - (180° - \alpha)$

$180° \leq \alpha + \beta + \gamma$ $\gamma + 180° \geq \alpha + \beta$

Ungleichungen im sph. Dreieck

$$180° \leq \alpha + \beta + \gamma \qquad \text{(I)}$$
$$\gamma + 180° \geq \alpha + \beta \qquad \text{(II)}$$

Gleichheitsfall, wenn sin α' sin β = 0

Wertebereiche: $0° < \alpha \leq 180° \implies 0° \leq \alpha' < 180°$

$0° < \beta \leq 180°$

Gleichheitsfall nur falls α oder β oder beide 180°

↳ zum Zweieck entartetes sph. Dreieck

↳ ist einer der Winkel 180°, so sind die anderen beiden gleich groß

z.B. α = 180° ⇨ $\beta = \gamma$, einsetzen in

(I) $180° = 180° + 2\beta \implies \beta = \gamma = 0$ ⇨ **Widerspruch**

Gleichheitsfall für (I) ausgeschlossen

(II) $\gamma + 180° = 180° + \beta \implies \beta - \gamma = 0$ ✓

Ungleichungen im sph. Dreieck

$$180^\circ < \alpha + \beta + \gamma$$

Die Winkelsumme im sphärischen Dreieck ist stets größer als 180°

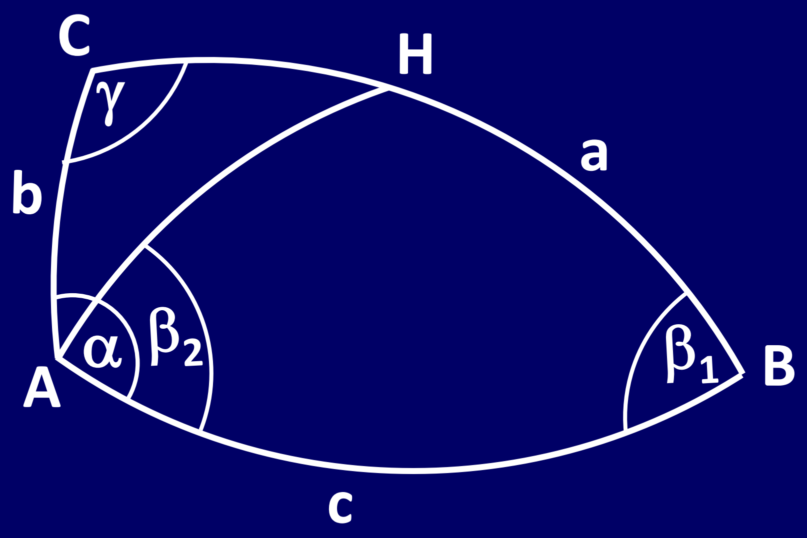
$$\gamma + 180^\circ \geq \alpha + \beta$$

Die Summe zweier Winkel im sphärischen Dreieck ist stets kleiner gleich dem dritten Winkel zzgl. 180°

Merke:

⇨ **Die Winkelsumme im sph. Dreieck ist stets > 180° !**

Ungleichungen im sph. Dreieck



In ABC sei $\alpha > \beta_1$

In ABH ist $\beta_1 = \beta_2$

➯ HA = HB

In ACH ist HA+HC > b

HA+HC = HB+HC = a

➯ **a > b**

Im sphärischen Dreieck liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber

Je nachdem, ob die Summe zweier Seiten >, =, < 180° ist, wird auch die Summe ihrer Gegenwinkel >, =, < 180° sein

Mehrdeutige Lösungen

Ist die Summe zweier Seiten >, =, < 180°, so wird auch die Summe ihrer Gegenwinkel >, =, < 180°.

Bsp.: Grundaufgabe 5 (geg.: a, b, α)

Fall 1:

$$a + b > 180° \Rightarrow \alpha + \beta > 180°$$

$\alpha < 90° \Rightarrow \beta > 90°$ eindeutige Lsg.

$\alpha > 90° \Rightarrow \beta < 90° \text{ o. } \beta > 90°$ zweideutige Lsg.

Fall 2:

$$a + b < 180° \Rightarrow \alpha + \beta < 180°$$

$\alpha < 90° \Rightarrow \beta < 90° \text{ o. } \beta > 90°$ zweideutige Lsg.

$\alpha > 90° \Rightarrow \beta < 90°$ eindeutige Lsg.

Sphärischer Exzess

$\alpha + \beta + \gamma > \pi$ bzw. $\alpha + \beta + \gamma > 180°$

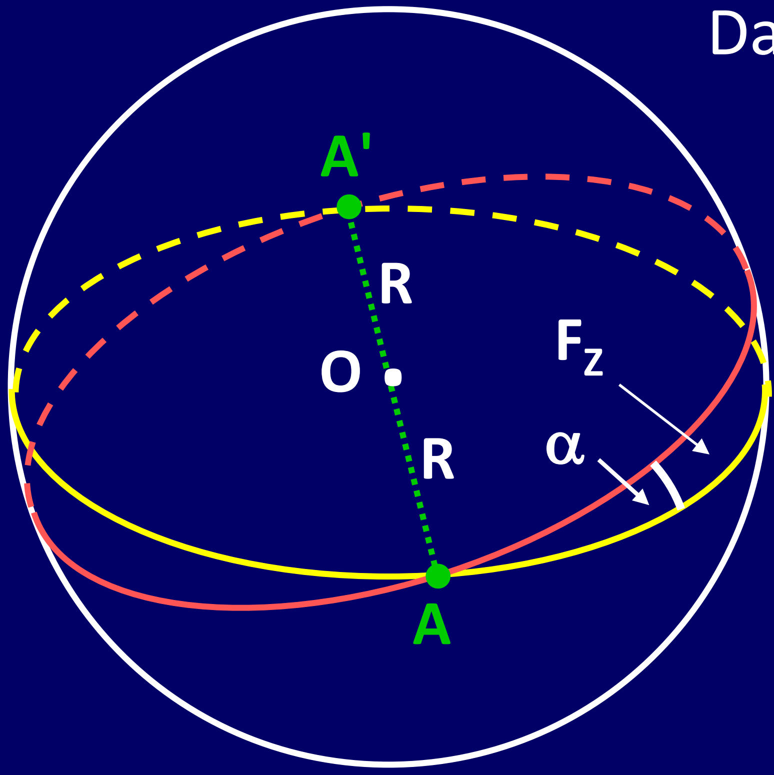
$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi + \varepsilon$

$$\boxed{\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi}$$ sphärischer Exzess

Eulersches Dreieck: $\alpha, \beta, \gamma \leq \pi$

$\Rightarrow \varepsilon_{max} = 2\pi$

Das sphärische Zweieck
(Wdh.)



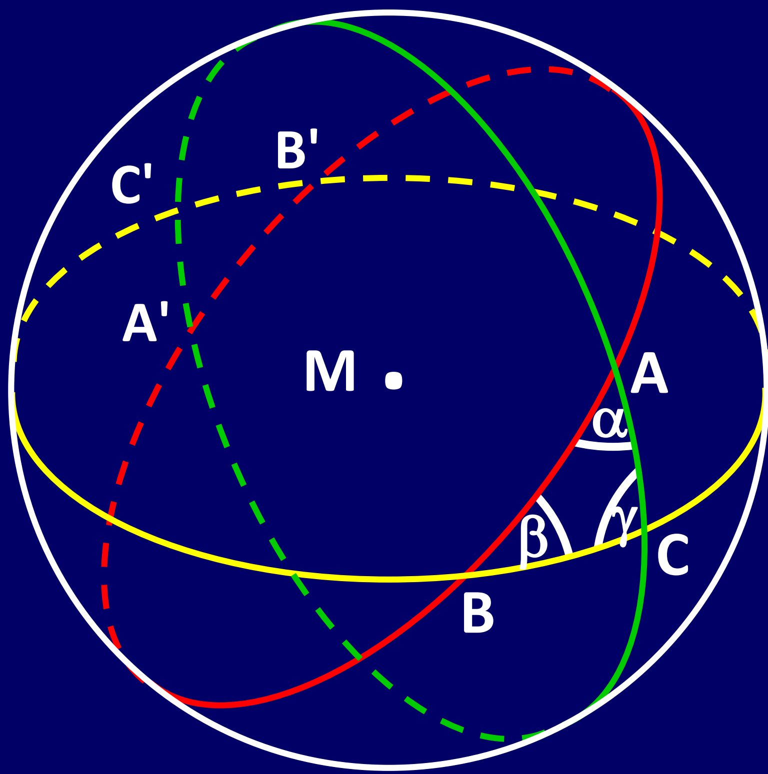
Da $F_Z \sim \alpha$ und $F_K = 4\pi R^2$, gilt:

$$\frac{F_Z}{F_K} = \frac{\alpha \text{ rad}}{2\pi}$$

$$\boxed{F_Z = 2R^2 \alpha \text{ rad}}$$

bzw. $F_Z = 2R^2 \alpha° \dfrac{\pi}{180°}$

Fläche des sphärischen Dreiecks



O = Kugeloberfläche

F = Fläche

$F_{ABC} = F_{A'B'C'}$

Zweiecksflächen:

$F_{AA'} = F_{ABC} + F_{BCA'}$

$F_{BB'} = F_{ABC} + F_{ACB'}$

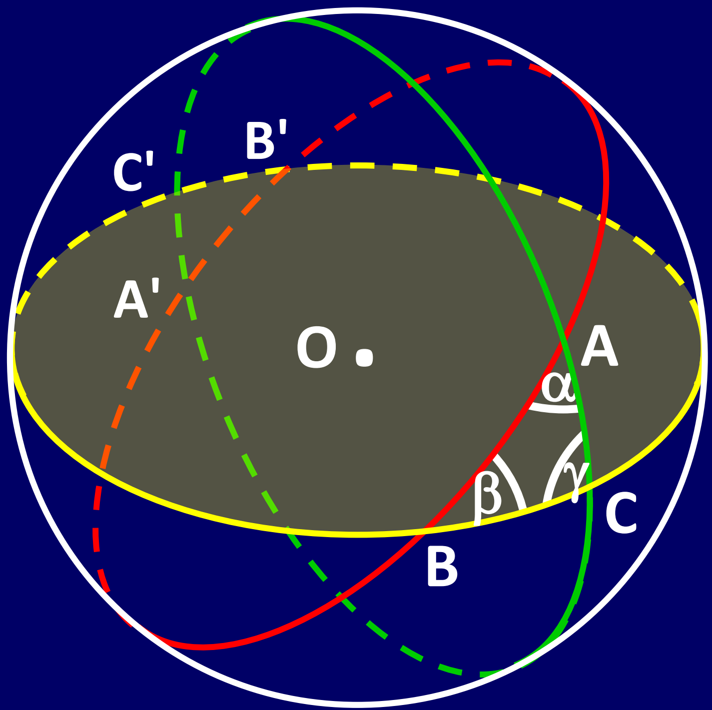
$F_{CC'} = F_{ABC} + F_{ABC'}$

$$F_{AA'} + F_{BB'} + F_{CC'} = 2R^2(\alpha + \beta + \gamma) \quad \alpha, \beta, \gamma \text{ in [rad]}$$

$$= 3F_{ABC} + F_{BCA'} + F_{ACB'} + F_{ABC'}$$

Fläche des sphärischen Dreiecks

$$2R^2(\alpha+\beta+\gamma) = 3F_{ABC} + F_{BCA'} + F_{ACB'} + F_{ABC'}$$



$$O = 4\pi R^2$$

$$\frac{O}{2} = F_{ABC} + F_{ACB'} + F_{AB'C'} + F_{ABC'}$$

mit $F_{AB'C'} = F_{BCA'}$ folgt:

$$2R^2(\alpha+\beta+\gamma) = 2F_{ABC} + \frac{O}{2}$$

$$\Rightarrow F_{ABC} = R^2(\alpha+\beta+\gamma) - \frac{O}{4}$$

Fläche des sphärischen Dreiecks

$$F_{ABC} = R^2(\alpha+\beta+\gamma) - \frac{O}{4}$$

$$= R^2(\alpha+\beta+\gamma) - \frac{4\pi R^2}{4}$$

$$= R^2(\alpha+\beta+\gamma) - \pi R^2$$

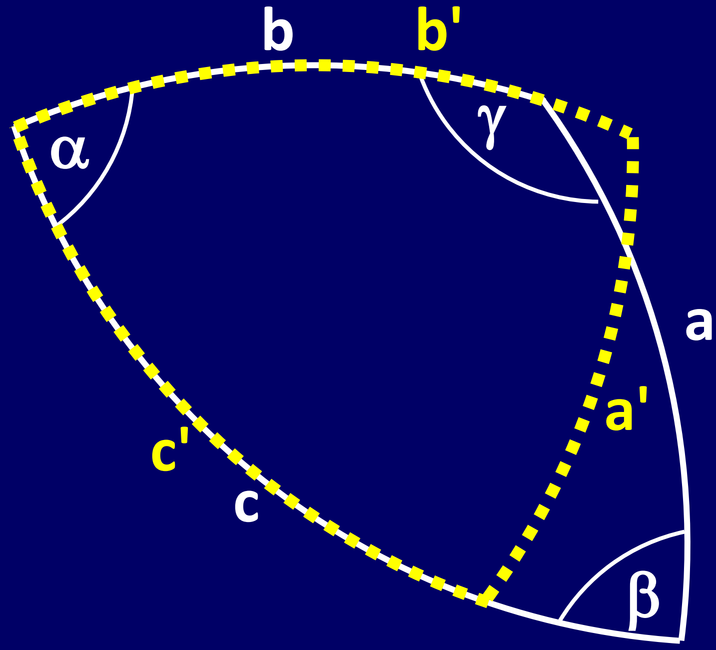
$$= R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$$

$$\boxed{F_{ABC} = R^2\varepsilon}$$ falls ε in Radiant

$$= \frac{\pi R^2}{180°}\varepsilon° = \frac{4\pi R^2}{720°}\varepsilon°$$

$$\boxed{F_{ABC} = \frac{O}{720°}\varepsilon°}$$ falls ε° in Grad

Differentialformeln (Änderung des sph. Dreiecks)



geg. z.B.:

$\mathbf{a'} = a + da$

$\mathbf{b'} = b + db$

$\mathbf{c'} = c + dc$

ges. z.B.:

$\alpha' = \alpha + d\alpha$

$\beta' = \beta + d\beta$

$\gamma' = \beta + d\gamma$

Differentialformeln

Allgemeines:
Gegeben sei Funktion mehrerer Variablen f(x,y,z) sowie kleine Änderungen dx, dy, dz

Wie groß ist die zu erwartende Änderung der Funktionswerte?

Das **totale Differential**

$$\mathrm{df} = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{dx} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}\mathrm{dy} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{z}}\mathrm{dz}$$

beschreibt die Änderung von f bei kleinen Änderungen von x, y und z.

Differentialformeln

Seitenkosinussatz:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

$$0 = \cos a - \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos \alpha \equiv f$$

Totales Differential:

$$\begin{aligned} df &= 0 = \frac{\partial f}{\partial a} da + \frac{\partial f}{\partial b} db + \frac{\partial f}{\partial c} dc + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha \\ &= -\sin a da \\ &\quad + (\boxed{\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos \alpha}) db \\ &\quad + (\boxed{\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha}) dc \\ &\quad + (\sin b \sin c \sin \alpha) d\alpha \end{aligned}$$

Mit Sinus-Kosinussatz:

$$\boxed{\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos \alpha} = \sin a \cos \gamma$$

$$\boxed{\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha} = \sin a \cos \beta$$

$$\begin{aligned} df &= 0 = -\sin a da + \sin a \cos \gamma db \\ &\quad + \sin a \cos \beta dc + \sin b \sin c \sin \alpha d\alpha \end{aligned}$$

Differentialformeln

$$df = 0 = -\sin a\,da + \sin a \cos\gamma\,db$$
$$+ \sin a \cos\beta\,dc + \sin b \sin c \sin\alpha\,d\alpha$$

Mit Sinussatz:

$$\frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\alpha}{\sin a} \Rightarrow \sin\alpha\sin b = \sin\beta\sin a$$

$$df = 0 = -\sin a\,da + \sin a \cos\gamma\,db$$
$$+ \sin a \cos\beta\,dc + \sin\beta \sin c \sin a\,d\alpha$$

Division durch sin a:

$$0 = -da + \cos\gamma\,db + \cos\beta\,dc + \sin\beta\sin c\,d\alpha$$

Umstellen nach dα:

$$d\alpha = \frac{da - \cos\gamma\,db - \cos\beta\,dc}{\sin\beta\sin c}$$

Anwendungen auf der Erdkugel
- Erdfigur -

A) **physische Erdoberfläche:**
Trennfläche zw. festem Erdkörper u. Atmosphäre
$\Rightarrow$ zu unregelmäßig für analytische Beschreibung

B) **mathematische Erdfigur:**
<u>1. Näherung:</u> **Kugel**
Radius einer Kugel mit Erdvolumen: **R = 6.371,22 km**
$\Rightarrow$ **Großkreislänge: 40.031,56 km**

<u>2. Näherung:</u> **Rotationsellipsoid**

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Äquatorradius: } & \mathbf{R_{Ä} = 6.378{,}39\ km} \\ \text{Polradius: } & \mathbf{R_P = 6.356{,}91\ km} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Abplattung:} \\ \mathbf{(R_{Ä}-R_P) / R_{Ä} = 1/297} \end{array}$$

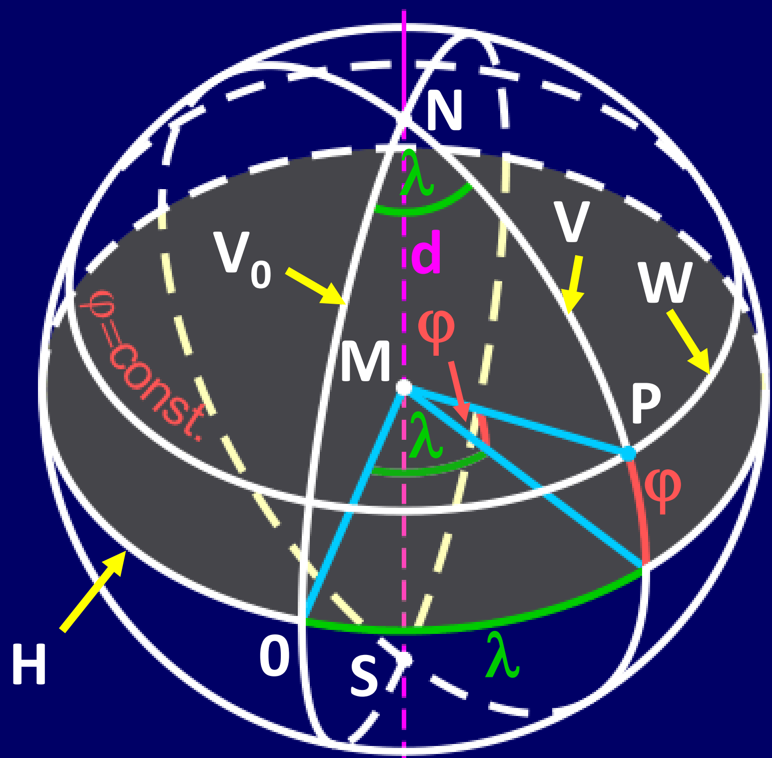
Anwendungen auf der Erdkugel
- Erdfigur -

C) **physikalische Erdfigur:**

Definition von Niveauflächen ⊥ Richtung Schwerkraft,
d.h. Flächen mit konstantem Schwerepotential
↳ **Geoid** oder **"wahre Erdfigur"**
= ruhende Meeresoberfläche

Geographische Koordinaten auf der Erdkugel

geographische Koord. = sphärische Koord. auf Erdkugel



Festlegung d. Lage von P:

Großkreise: **H ⊥ V_0**

H ⊥ V, P∈V

Kleinkreis: **W || H, P∈W**

➯ **P = P (λ, φ)**

Def. für geogr. Koordinaten:

H = Äquator (H ⊥ **d**)

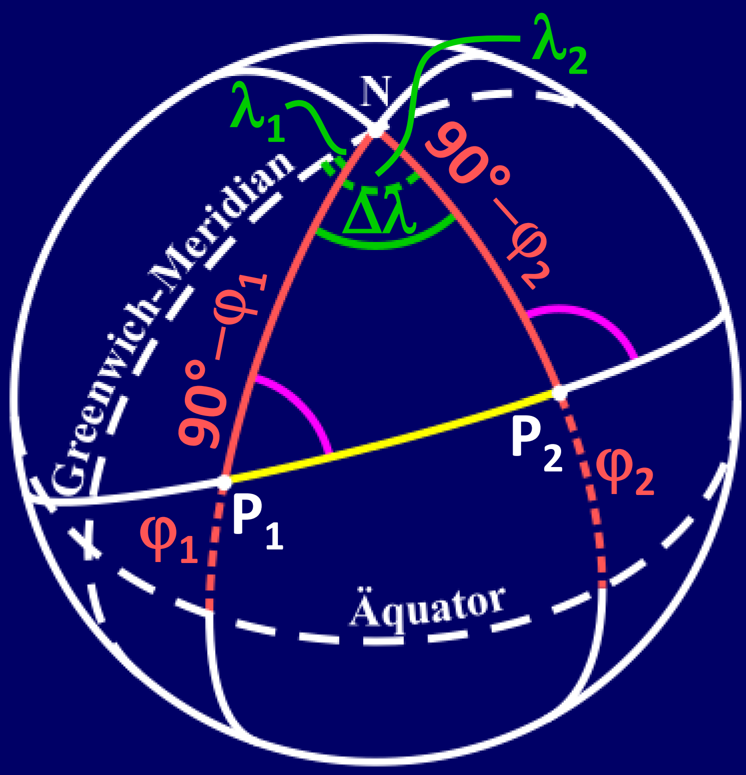
d = mittl. Rotationsachse

V_0 = Greenwich-Meridian

➯ φ = geogr. Breite (positiv: N)

λ = geogr. Länge (positiv: O)

Geographische Koordinaten auf der Erdkugel

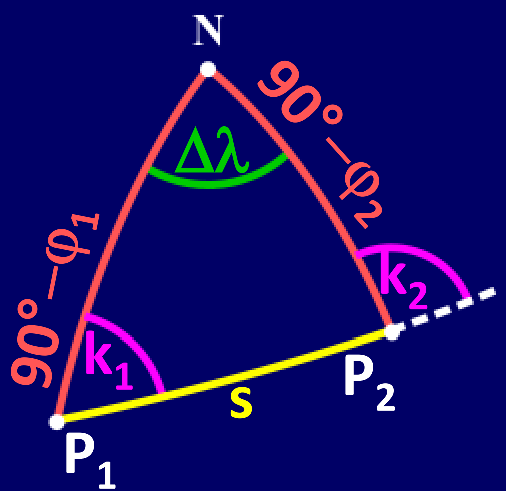


$P_1 = P_1\,(\lambda_1, \varphi_1)$

$P_2 = P_2\,(\lambda_2, \varphi_2)$

$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$

Geographische Koordinaten auf der Erdkugel



$P_1 = P_1\,(\lambda_1, \varphi_1)$
$P_2 = P_2\,(\lambda_2, \varphi_2)$

$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$

k_1, k_2 … Kurswinkel
s … Großkreisbogen

Beispiel:
geg.: $P_1\,(\lambda_1, \varphi_1)$, $P_2\,(\lambda_2, \varphi_2)$
ges.: s

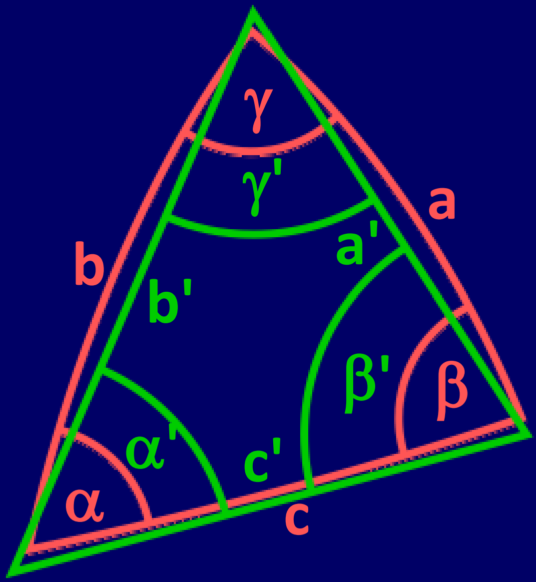
$$\cos s = \cos(90° - \varphi_1)\cos(90° - \varphi_2) + \sin(90° - \varphi_1)\sin(90° - \varphi_2)\cos\Delta\lambda$$

$$\boxed{\cos s = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\Delta\lambda}$$

Anwendungsbeispiel

Ein Flugzeug verlässt Buenos Aires (Länge 58,54°W Breite 34,82°S) unter einem Kurswinkel von 37,47°. Nach einem Flug von 11.930 km erreicht es seinen Zielflughafen. Welche Koordinaten besitzt er?

Der Satz von Legendre



Legendresches Dreieck

= kleines sph. Dreieck mit a,b,c < 1°

Plandreieck

= ebenes Dreieck mit a'=a, b'=b, c'=c

Bsp.: Erdkugel mit R = 6371 km, Seite c ≈ 60 km

$\Rightarrow$ Zentriwinkel ≈ 0,5°

➔ **Frage: Sind α', β', γ' aus α, β, γ berechenbar, d.h. ist eine Approximation eines Legendreschen Dreiecks durch ein Plandreieck möglich?**

Der Satz von Legendre

Legendre (1787):

„Jeder Winkel eines kleinen sphär. Dreieckes vom Exzess ε ist um $\varepsilon/3$ größer als der entsprechende Winkel des zugehörigen Plandreiecks.“

Behauptung: $\alpha' = \alpha - \varepsilon/3$, $\beta' = \beta - \varepsilon/3$, $\gamma' = \gamma - \varepsilon/3$

<u>Beweis:</u>

Es seien geg. a, b, c im Bogenmaß und a', b', c' als Längen

sph. Sinussatz: $$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\gamma}{\sin c} \Rightarrow \sin\gamma \sin a = \sin\alpha \sin c$$

nach Vorauss.: $$a = \frac{a'}{R},\ c = \frac{c'}{R} \Rightarrow \sin\gamma \sin\frac{a'}{R} = \sin\alpha \sin\frac{c'}{R}$$

Der Satz von Legendre

$$\sin\gamma \sin\frac{a'}{R} = \sin\alpha \sin\frac{c'}{R}$$

Entwicklung der sin-Funktion als Potenzreihe:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

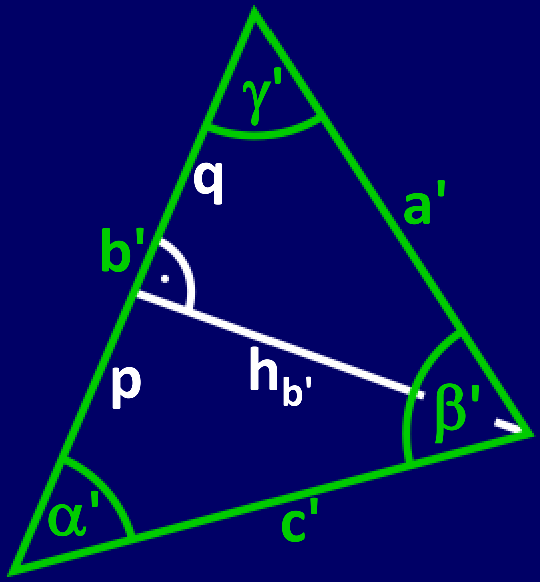
Da a, b, c und damit a', b', c' sehr klein, folgt:

$$\sin\gamma\left(\frac{a'}{R} - \frac{a'^3}{6R^3}\right) = \sin\alpha\left(\frac{c'}{R} - \frac{c'^3}{6R^3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad a'\left(\sin\gamma - \frac{a'^2 \sin\gamma}{6R^2}\right) = c'\left(\sin\alpha - \frac{c'^2 \sin\alpha}{6R^2}\right)$$

Der Satz von Legendre

$$a'\left(\sin\gamma - \frac{a'^2 \sin\gamma}{6R^2}\right) = c'\left(\sin\alpha - \frac{c'^2 \sin\alpha}{6R^2}\right)$$



aus Grafik:

$h_{b'} = a' \sin \gamma'$

$h_{b'} = c' \sin \alpha'$

In 2. Ordnung gilt sin x' = sin x

$\Rightarrow$ $h_{b'} = a' \sin \gamma$

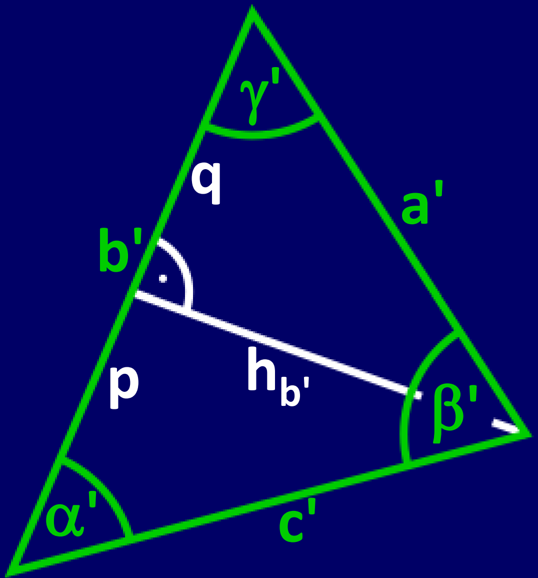
$h_{b'} = c' \sin \alpha$

Einsetzen:

$$a'\left(\sin\gamma - \frac{h_{b'}a'}{6R^2}\right) = c'\left(\sin\alpha - \frac{h_{b'}c'}{6R^2}\right)$$

Der Satz von Legendre

$$a'\left(\sin\gamma - \frac{h_{b'}a'}{6R^2}\right) = c'\left(\sin\alpha - \frac{h_{b'}c'}{6R^2}\right)$$



aus Grafik:

$b' = p + q = c' \cos\alpha' + a' \cos\gamma'$

analog durch zyklische Vertauschung

⇘ $a' = b' \cos\gamma' + c' \cos\beta'$

$c' = a' \cos\beta' + b' \cos\alpha'$

Einsetzen:

$$a'\left(\sin\gamma - \frac{h_{b'}}{6R^2}(b'\cos\gamma' + c'\cos\beta')\right)$$

$$= c'\left(\sin\alpha - \frac{h_{b'}}{6R^2}(a'\cos\beta' + b'\cos\alpha')\right)$$

Der Satz von Legendre

$$a'\left(\sin\gamma - \frac{h_{b'}}{6R^2}(b'\cos\gamma' + c'\cos\beta')\right) = c'\left(\sin\alpha - \frac{h_{b'}}{6R^2}(a'\cos\beta' + b'\cos\alpha')\right)$$

$$a'\left(\sin\gamma - \frac{h_{b'}b'\cos\gamma'}{6R^2} - \frac{h_{b'}c'\cos\beta'}{6R^2}\right) = c'\left(\sin\alpha - \frac{h_{b'}a'\cos\beta'}{6R^2} - \frac{h_{b'}b'\cos\alpha'}{6R^2}\right)$$

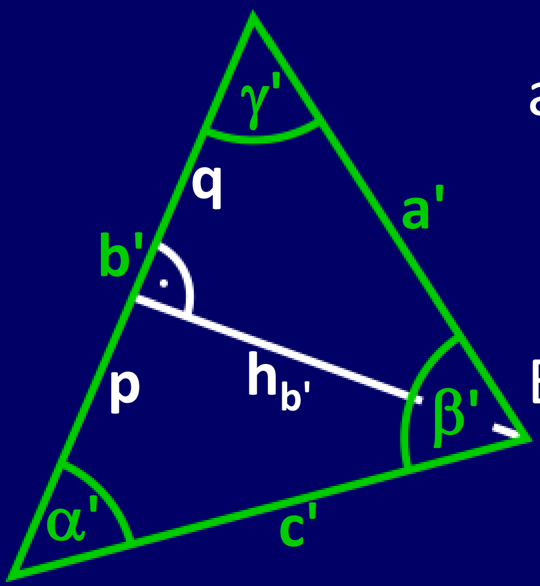
$$a'\left(\sin\gamma - \frac{h_{b'}b'\cos\gamma'}{6R^2}\right) - \cancel{\frac{a'h_{b'}c'\cos\beta'}{6R^2}} = c'\left(\sin\alpha - \frac{h_{b'}b'\cos\alpha'}{6R^2}\right) - \cancel{\frac{c'h_{b'}a'\cos\beta'}{6R^2}}$$

Der Satz von Legendre

$$a'\left(\sin\gamma - \frac{h_{b'}b'\cos\gamma'}{6R^2}\right) = c'\left(\sin\alpha - \frac{h_{b'}b'\cos\alpha'}{6R^2}\right)$$

In 2. Ordnung gilt: cos x = cos x'

$$a'\left(\sin\gamma - \frac{h_{b'}b'\cos\gamma}{6R^2}\right) = c'\left(\sin\alpha - \frac{h_{b'}b'\cos\alpha}{6R^2}\right)$$



aus Grafik:

$$F' = \frac{h_{b'}p}{2} + \frac{h_{b'}q}{2} = \frac{h_{b'}(p+q)}{2} = \frac{h_{b'}b'}{2}$$

Einsetzen:

$$a'\left(\sin\gamma - \frac{F'\cos\gamma}{3R^2}\right) = c'\left(\sin\alpha - \frac{F'\cos\alpha}{3R^2}\right)$$

Der Satz von Legendre

$$a'\left(\sin\gamma - \frac{F'\cos\gamma}{3R^2}\right) = c'\left(\sin\alpha - \frac{F'\cos\alpha}{3R^2}\right)$$

In 2. Ordnung gilt für die Flächen:

$$F' = F = R^2\varepsilon$$

Einsetzen:

$$a'\left(\sin\gamma - \frac{\varepsilon}{3}\cos\gamma\right) = c'\left(\sin\alpha - \frac{\varepsilon}{3}\cos\alpha\right)$$

Additionstheorem:

$$\sin\left(\gamma - \frac{\varepsilon}{3}\right) = \sin\gamma\cos\frac{\varepsilon}{3} - \cos\gamma\sin\frac{\varepsilon}{3}$$

weil $\varepsilon/3$ klein $\Rightarrow$ $\cos \varepsilon/3 = 1$, $\sin \varepsilon/3 = \varepsilon/3$

$$\sin\left(\gamma - \frac{\varepsilon}{3}\right) = \sin\gamma - \frac{\varepsilon}{3}\cos\gamma$$

Der Satz von Legendre

$$a'\left(\sin\gamma - \frac{\varepsilon}{3}\cos\gamma\right) = c'\left(\sin\alpha - \frac{\varepsilon}{3}\cos\alpha\right)$$

Additionstheorem:

$$\sin\left(\gamma - \frac{\varepsilon}{3}\right) = \sin\gamma - \frac{\varepsilon}{3}\cos\gamma$$

Einsetzen:

$$a'\sin\left(\gamma - \frac{\varepsilon}{3}\right) = c'\sin\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

Mit der Legendreschen Behauptung:

$$\gamma' = \gamma - \frac{\varepsilon}{3}, \alpha' = \alpha - \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow \quad a'\sin\gamma' = c'\sin\alpha'$$

Der Satz von Legendre

$$a'\sin\gamma' = c'\sin\alpha'$$

Das ist der Sinussatz der ebenen Trigonometrie

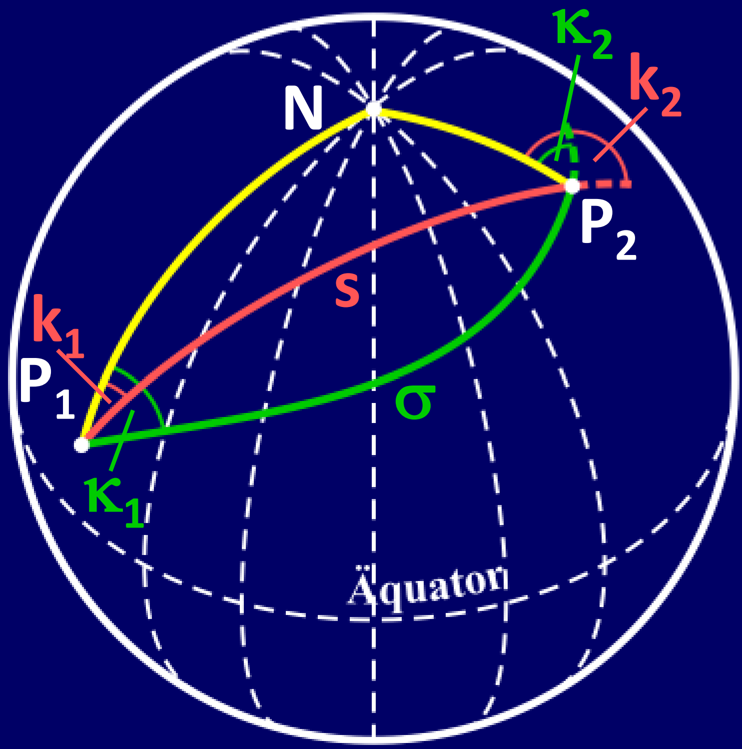
$\Rightarrow$ wahre Aussage

$\Rightarrow$ Legendres Behauptung trifft zu!

Die Winkel des Plandreiecks sind je um ein Drittel des sphärischen Exzesses kleiner als die Winkel des Legendreschen Dreiecks.

Das Plandreieck ist eine zulässige Approximation des Legendreschen Dreiecks.

Orthodrome und Loxodrome



s = **Orthodrome**

… Großkreisbogen P_1P_2 mit Kurswinkel $k_1 \neq k_2$

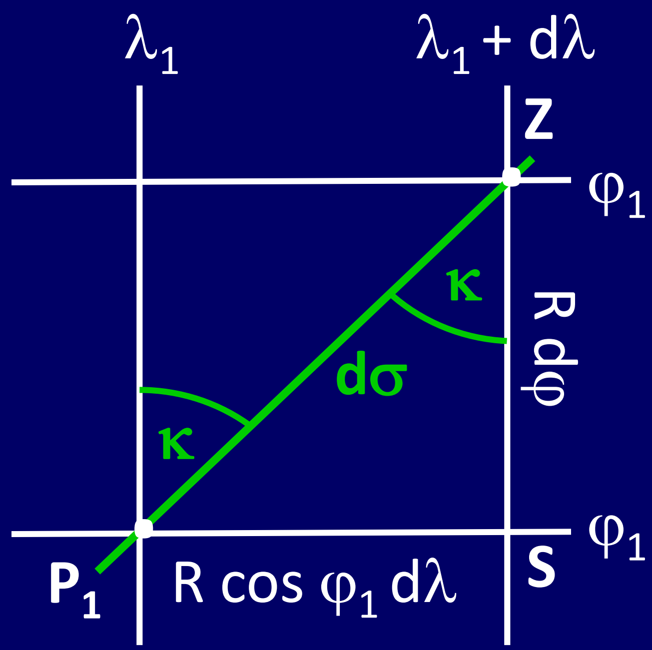
σ = **Loxodrome**

… Linie, die alle Meridiane unter gleichem Kurswinkel schneidet, d.h. $\kappa_1 = \kappa_2$ = const.

Loxodrome

„Loxodromenproblem“

Bestimmung der loxodromischen Distanz P_1P_2



Annahme: dλ, dφ sehr klein

$\Rightarrow$ $P_1ZS \approx$ ebenes Dreieck

$$\tan \kappa = \frac{P_1S}{SZ} = \frac{R \cos \varphi_1 \, d\lambda}{R \, d\varphi}$$

$$d\lambda = \frac{\tan \kappa}{\cos \varphi_1} d\varphi$$

Loxodrome

$$d\lambda = \frac{\tan\kappa}{\cos\varphi_1} d\varphi$$

Integration entlang σ von Anfangs- bis Endpunkt

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\tan\kappa}{\cos\varphi} d\varphi$$

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda = \tan\kappa \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{\cos\varphi} d\varphi$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \tan\kappa \left[\ln\tan\left(\frac{\varphi_2}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \ln\tan\left(\frac{\varphi_1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$\Delta\lambda = \tan\kappa \left[\ln\tan\left(\frac{\varphi_2}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \ln\tan\left(\frac{\varphi_1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

Loxodrome

$$\Delta\lambda = \tan\kappa\left[\ln\tan\left(\frac{\varphi_2}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\ln\tan\left(\frac{\varphi_1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Mit der Definition für die **isometrische Breite q**

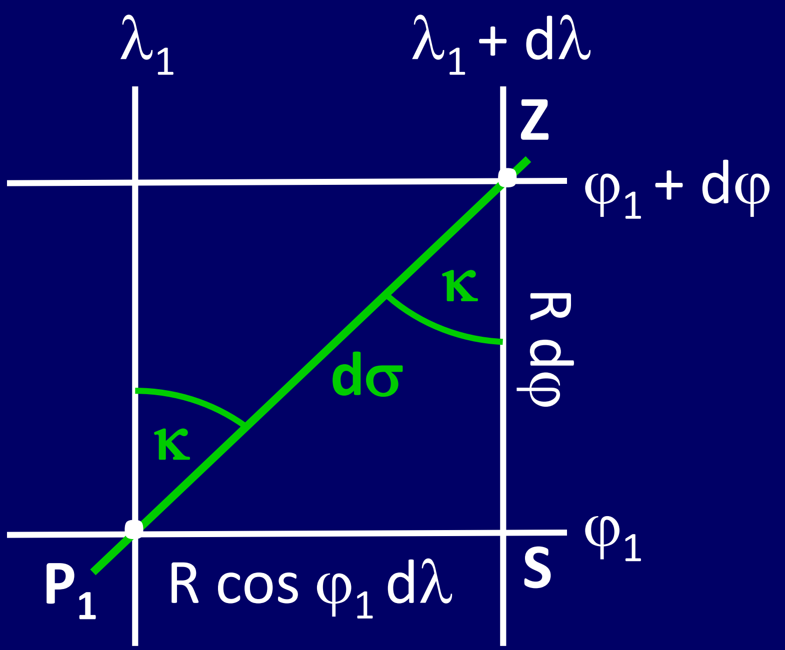
$$\Delta\lambda = \tan\kappa(q_2 - q_2)$$

$$\Delta\lambda = \tan\kappa\Delta q$$

Kurswinkel der Loxodrome

($\Delta\lambda$ im Bogenmaß)

Loxodrome



Aus Grafik:

Integration :

Länge der Loxodrome
($\Delta\varphi$ im Bogenmaß, $\kappa \neq \pi/2$, $\kappa \neq 3\pi/2$)

Loxodrome

Sonderfälle:

$\kappa = 0$

… Loxodrome fällt mit Meridian zusammen

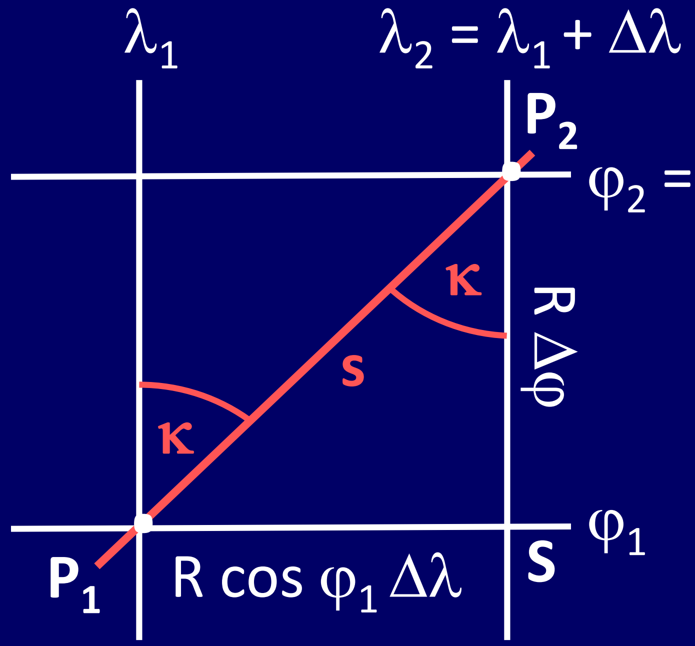
⇒ Loxodrome ist Großkreis

$\kappa = \pi/2$, $\kappa = 3\pi/2$

… Loxodrome ist Parallelkreis ($\varphi_1 = \varphi_2$) oder Äquator

… Bogenlänge gemäß Loxodromformel nicht def., sondern über Parallelkreislänge $\sigma = R\,\Delta\lambda \cos\varphi$

Entfernung auf sehr kurzen Großkreisbögen



Für sehr kleine Werte $\Delta\varphi$, $\Delta\lambda$ ist Näherung mittels Satz des Pythagoras zulässig:

$$s^2 = R^2(\Delta\varphi)^2 + R^2\cos^2\varphi_1(\Delta\lambda)^2$$

$$\boxed{s = R\sqrt{(\Delta\varphi)^2 + \cos^2\varphi_1(\Delta\lambda)^2}}$$

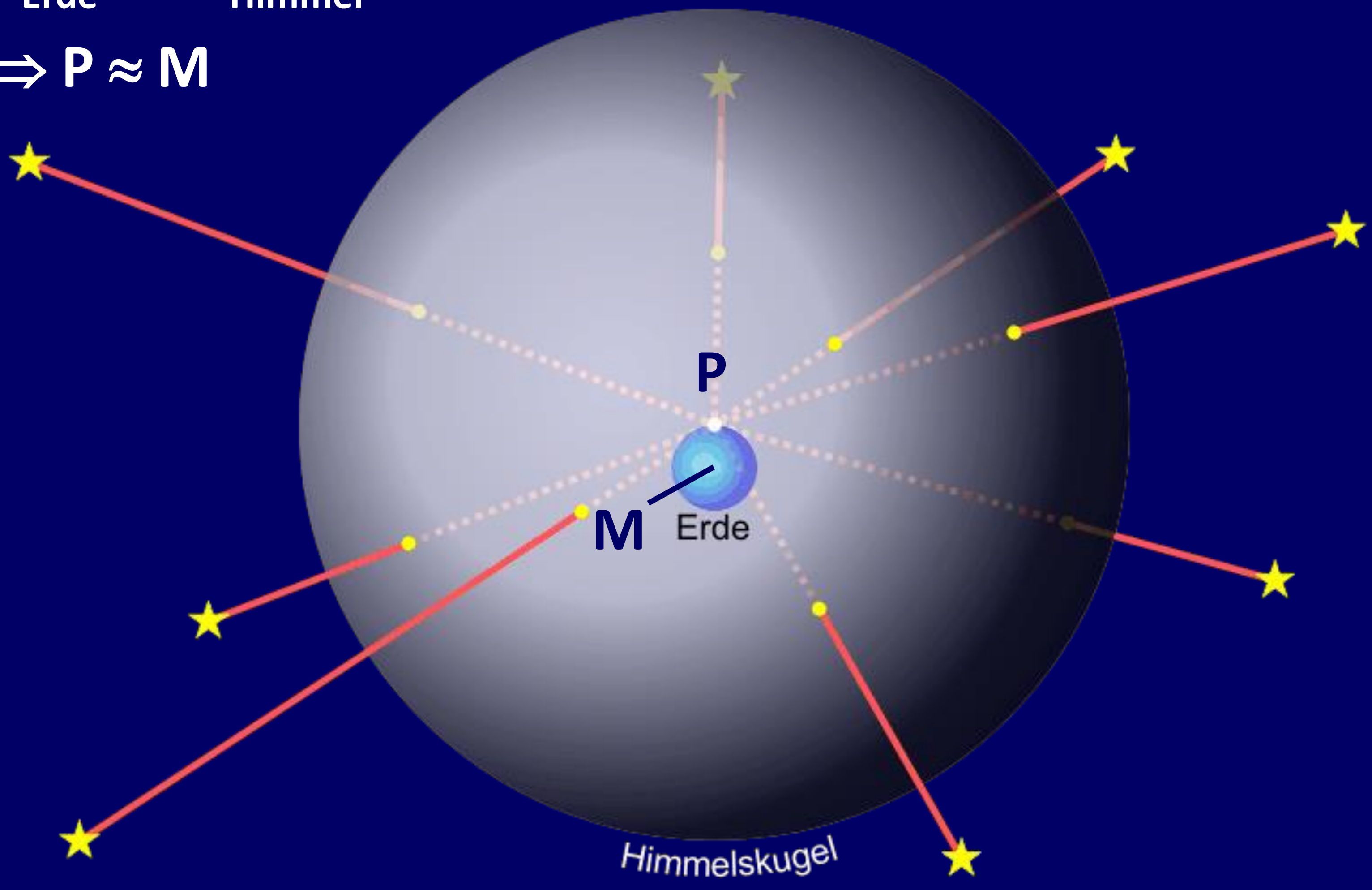
Anwendungen aus der Sphärischen Astronomie

- handelt von der **Bestimmung scheinbarer Bewegungen von Himmelskörpern** infolge täglicher Drehung der Erde durch wiederholte Positionsbeobachtung
- ist ebenso wie Himmelsmechanik (= Bestimmung der Bewegungsgesetze von Himmelskörpern) ein **Teilgebiet der mathematischen Astronomie**
- ist **Grundlage der praktischen Astronomie**, wie z.B. geodätische Astronomie und Nautik:
  Orientierung mittels Sternpositionen
  $\Rightarrow$ Orts-, Zeit-, Azimutbestimmungen
  $\Rightarrow$ mögliches Verfahren für Angaben von absoluter Lage und Richtung trigonometrischer Netze.

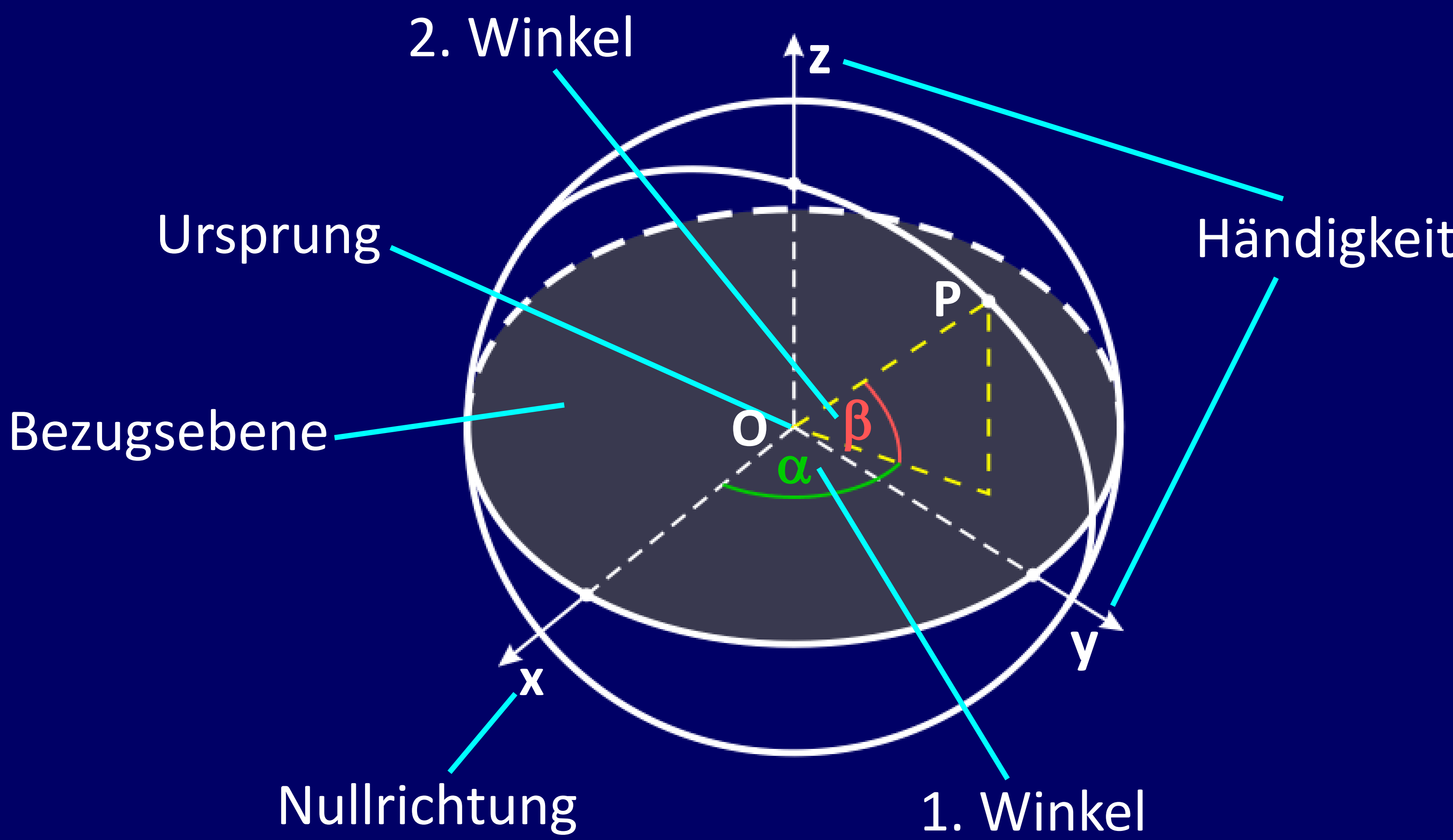
Die scheinbare Himmelskugel

$R_{Erde} << R_{Himmel}$

$\Rightarrow P \approx M$



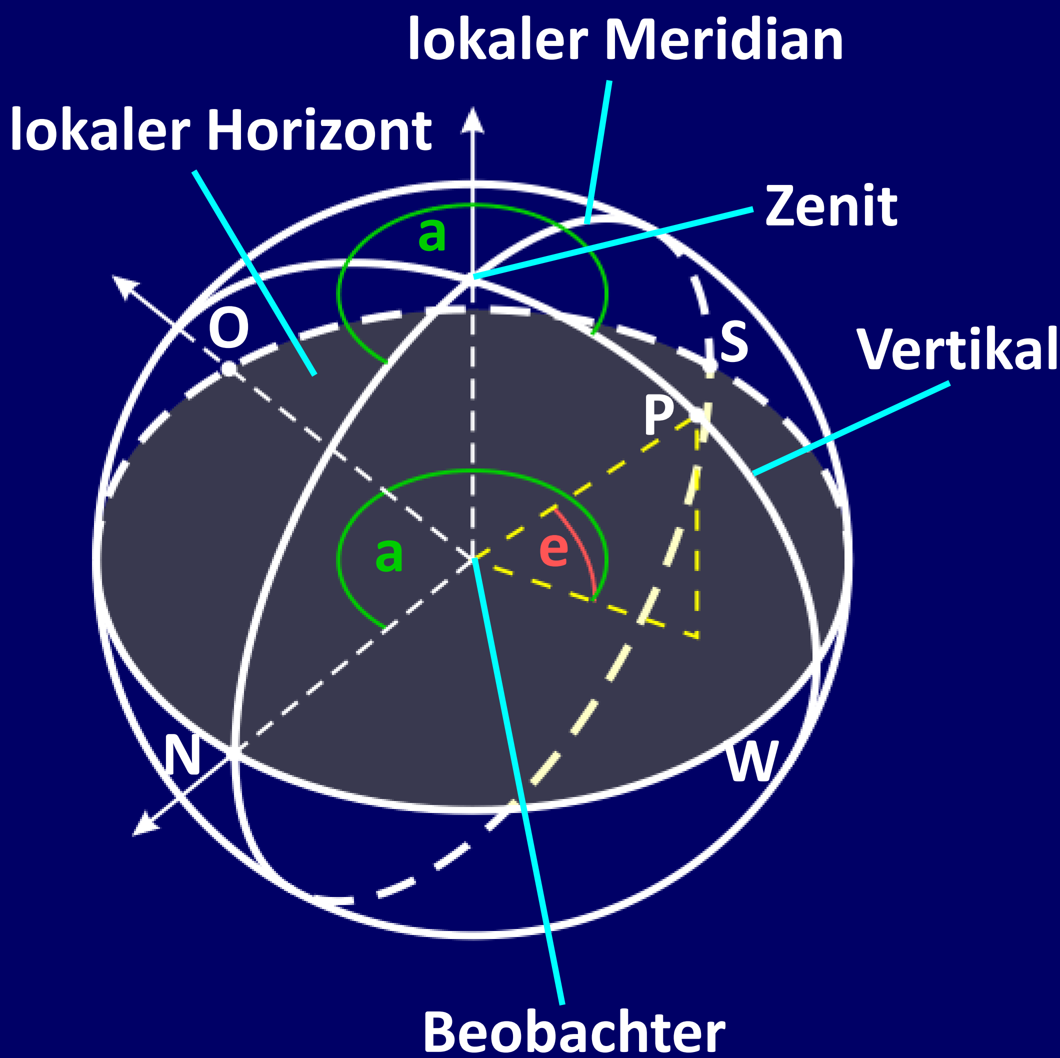
Definition von Kugelkoordinatensystemen



Astronomische Koordinatensysteme

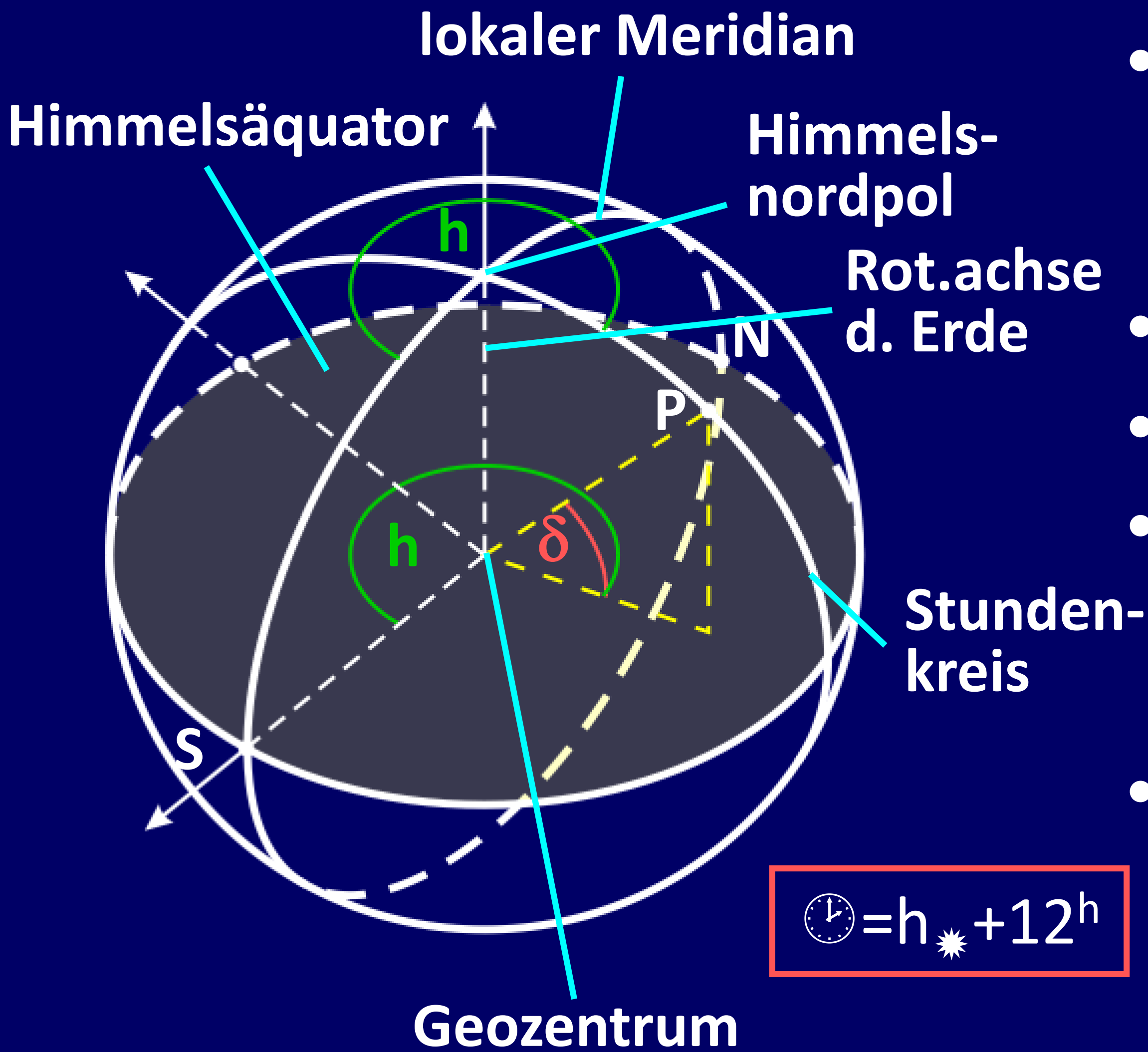
Name	**Horizontsystem**	**Äquatorsystem 1. Art**	**Äquatorsystem 2. Art**
Ursprung			
Bezugsebene			
Nullrichtung			
1. Winkel			
2. Winkel			
Händigkeit			

Horizontsystem



- System der terrestr. Beobachtungen
- Realisierung durch Horizontieren
- **a** … Azimut
- **e** … Elevation (alternativ: Zenit-distanz z = 90° - e)
- Koordinaten von Himmelskörpern orts- und zeitab-hängig wegen Erdrotation

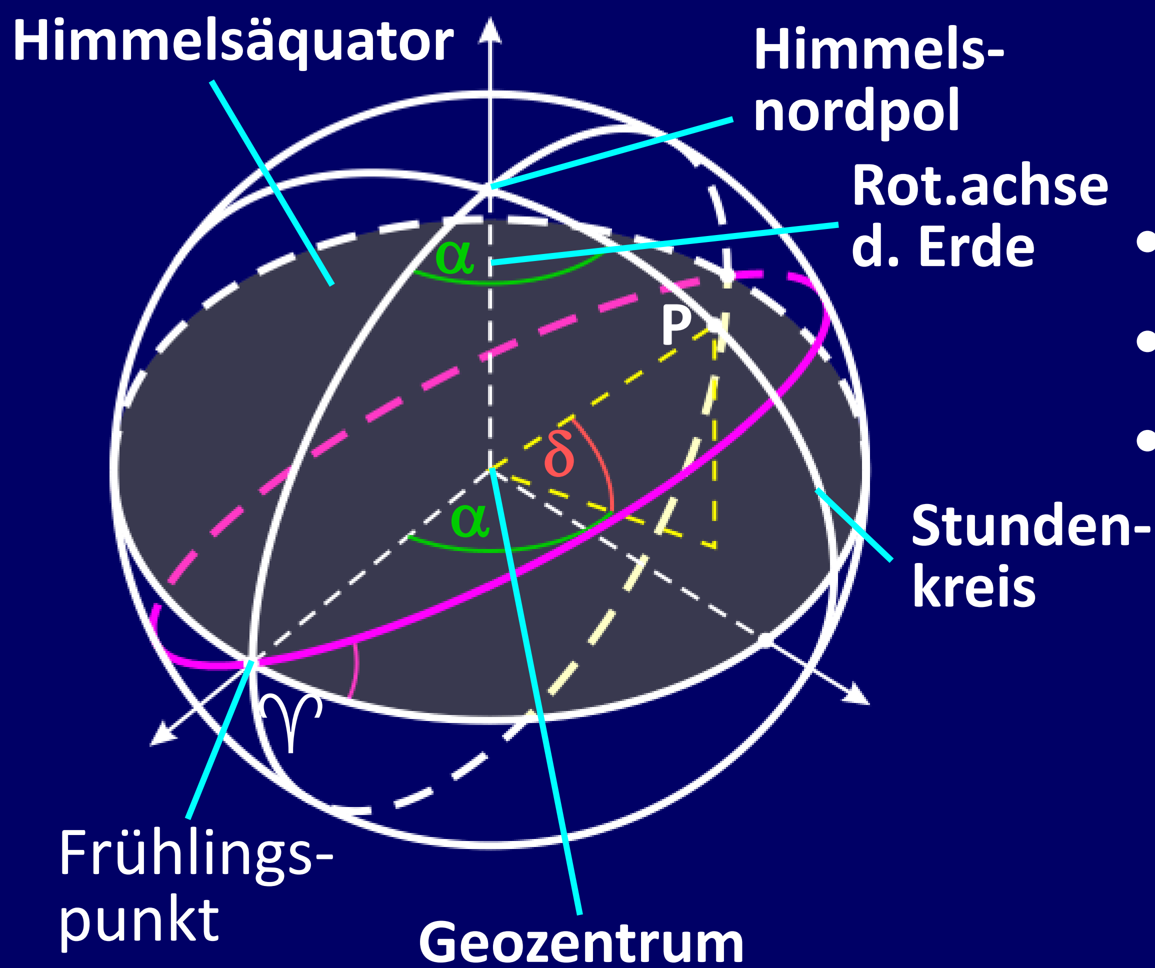
Äquatorsystem 1. Art



🕑 $= h_{\ast} + 12^{h}$

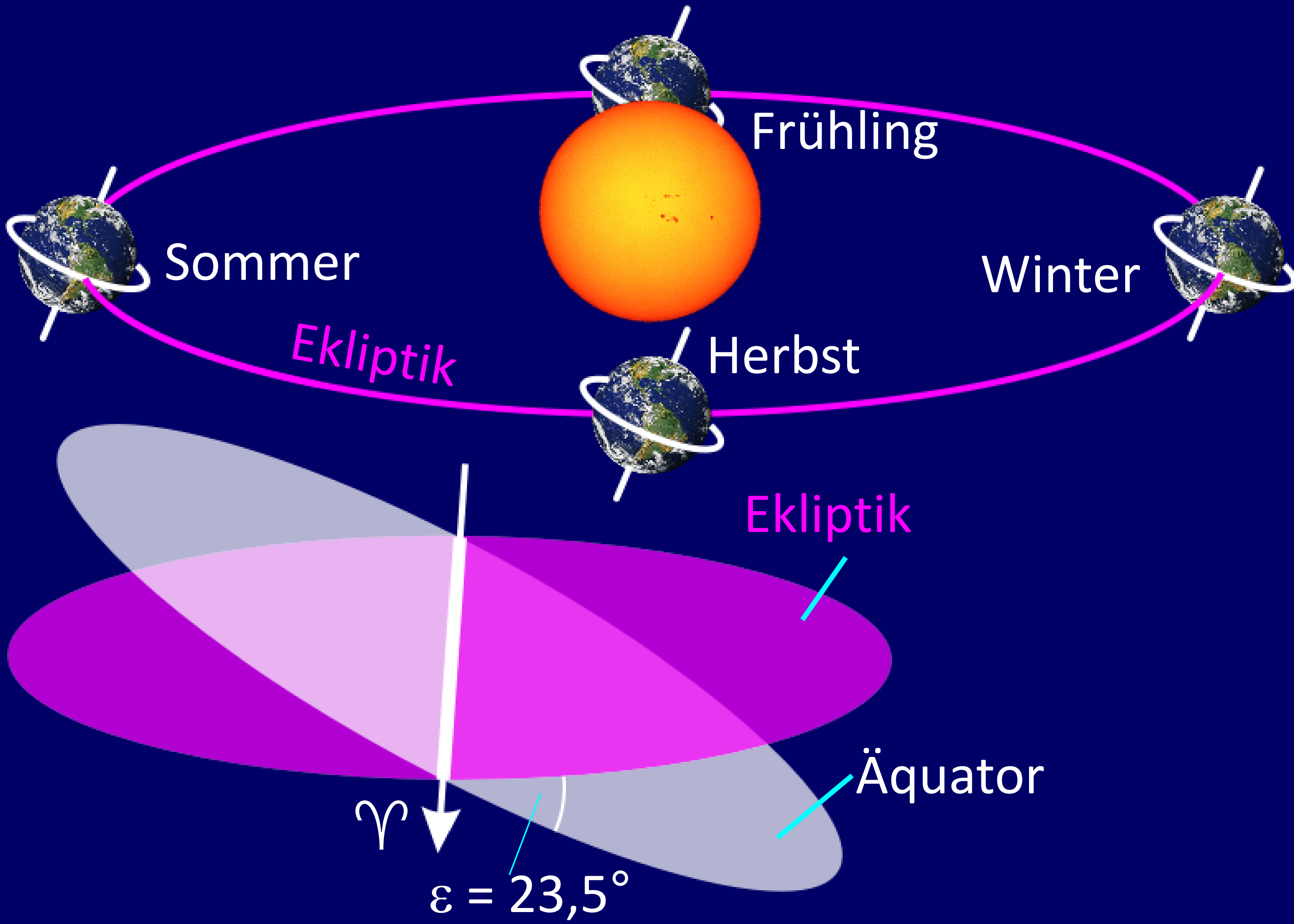
- System zur Bestimmung der lokalen Uhrzeit
- h … Stundenwinkel
- δ … Deklination
- Stundenwinkel ändert sich gleichförmig mit der Zeit
- Koordinaten von Himmelskörpern längen- und zeitabhängig

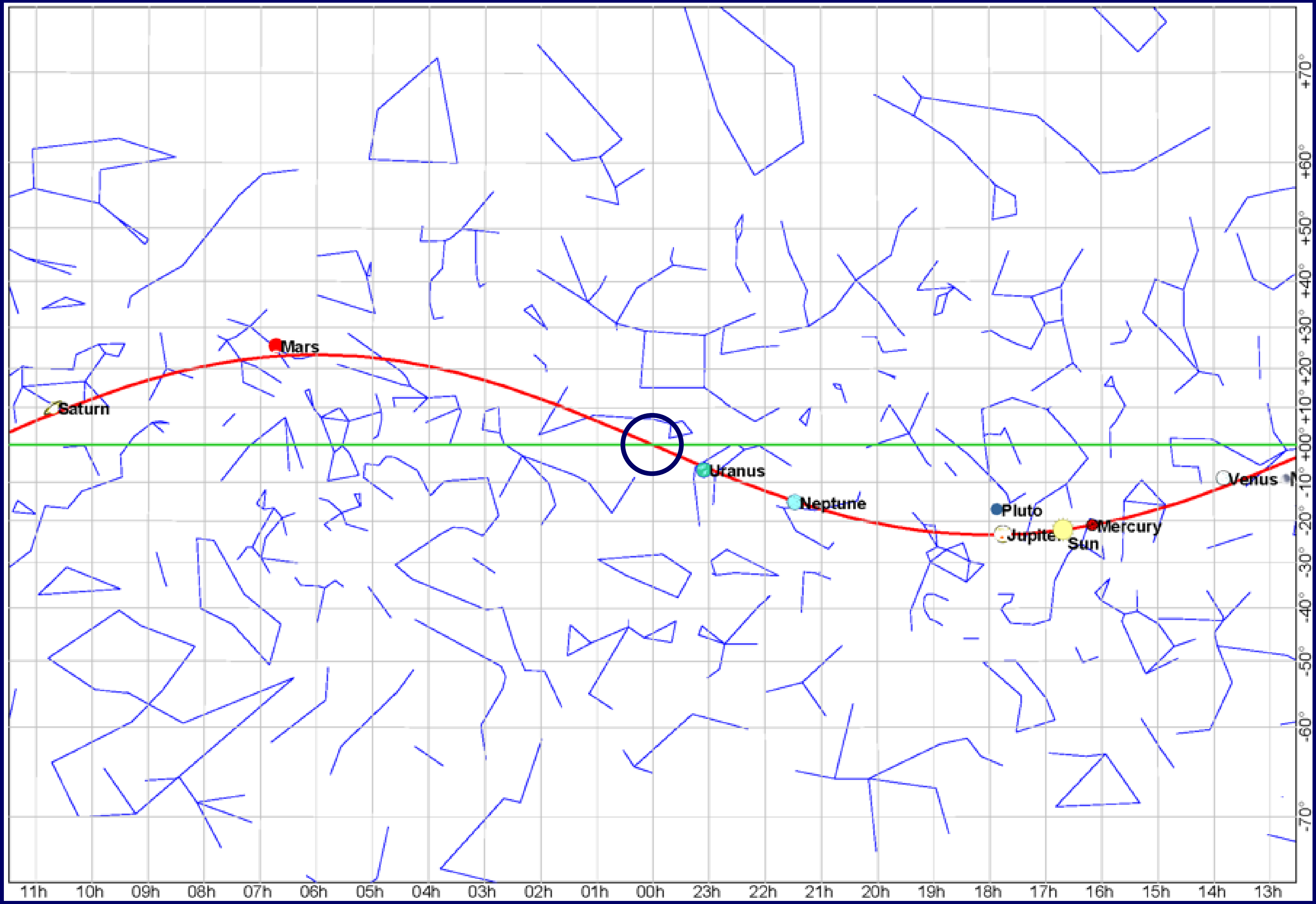
Äquatorsystem 2. Art



- System zur Katalo-gisierung von Him-melskoordinaten
- α ... Rektaszension
- δ ... Deklination
- Koordinaten von Himmelskörpern orts- und zeit-unabhängig

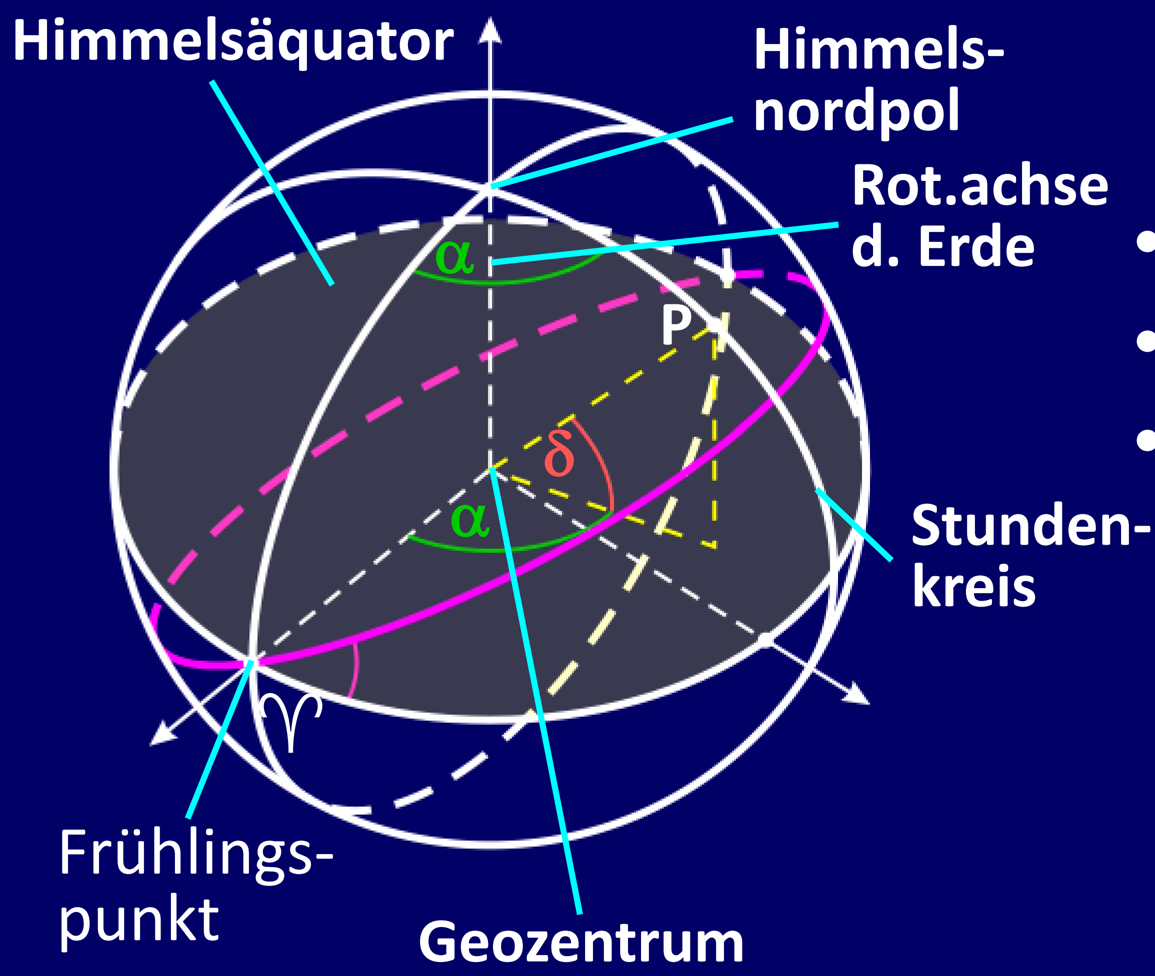
Äquator, Ekliptik, Frühlingspunkt



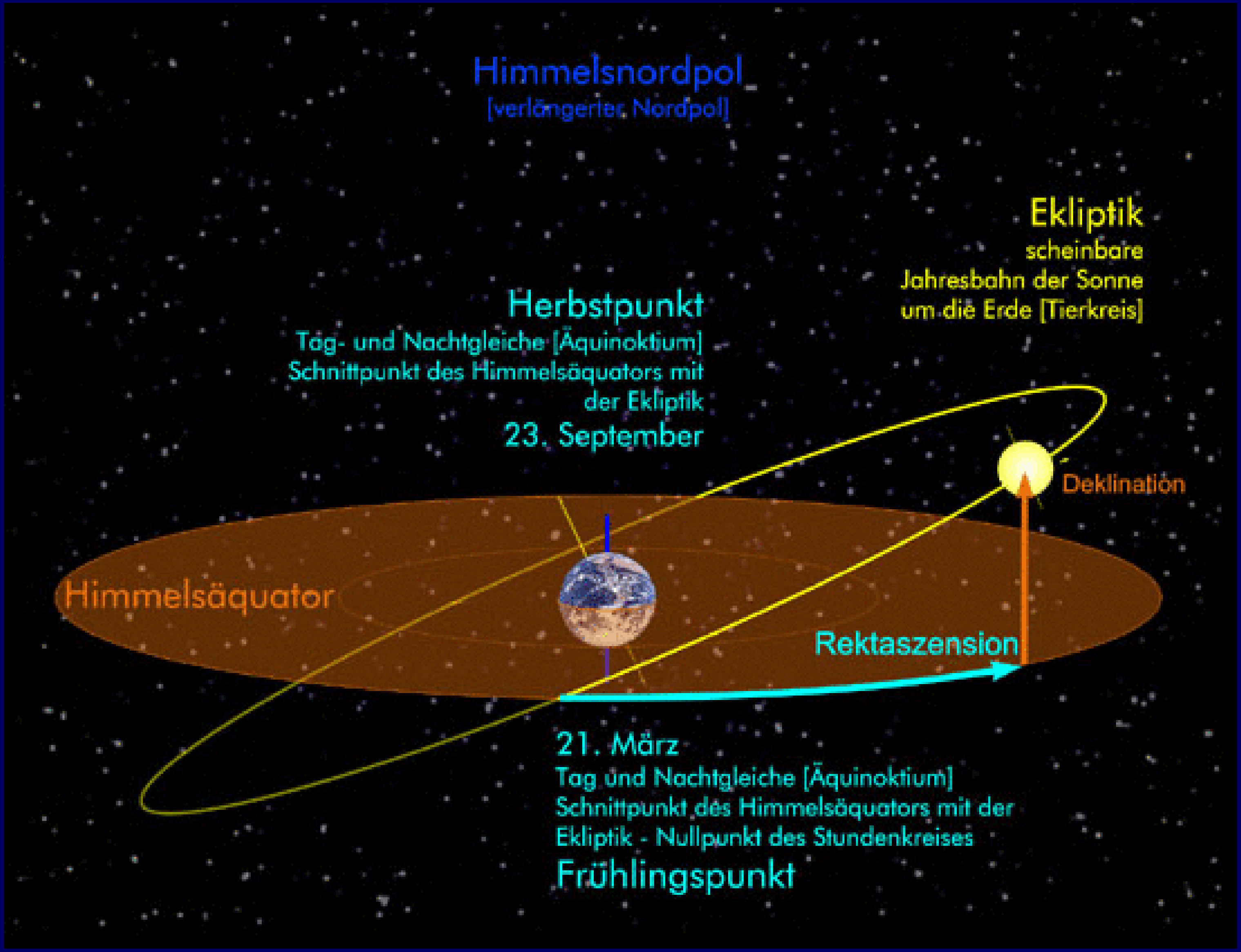


Mars
Saturn
Uranus
Neptune
Pluto
Jupiter
Sun
Mercury
Venus
+70°
+60°
+50°
+40°
+30°
+20°
+10°
+00°
-10°
-20°
-30°
-40°
-50°
-60°
-70°
11h
10h
09h
08h
07h
06h
05h
04h
03h
02h
01h
00h
23h
22h
21h
20h
19h
18h
17h
16h
15h
14h
13h

Äquatorsystem 2. Art



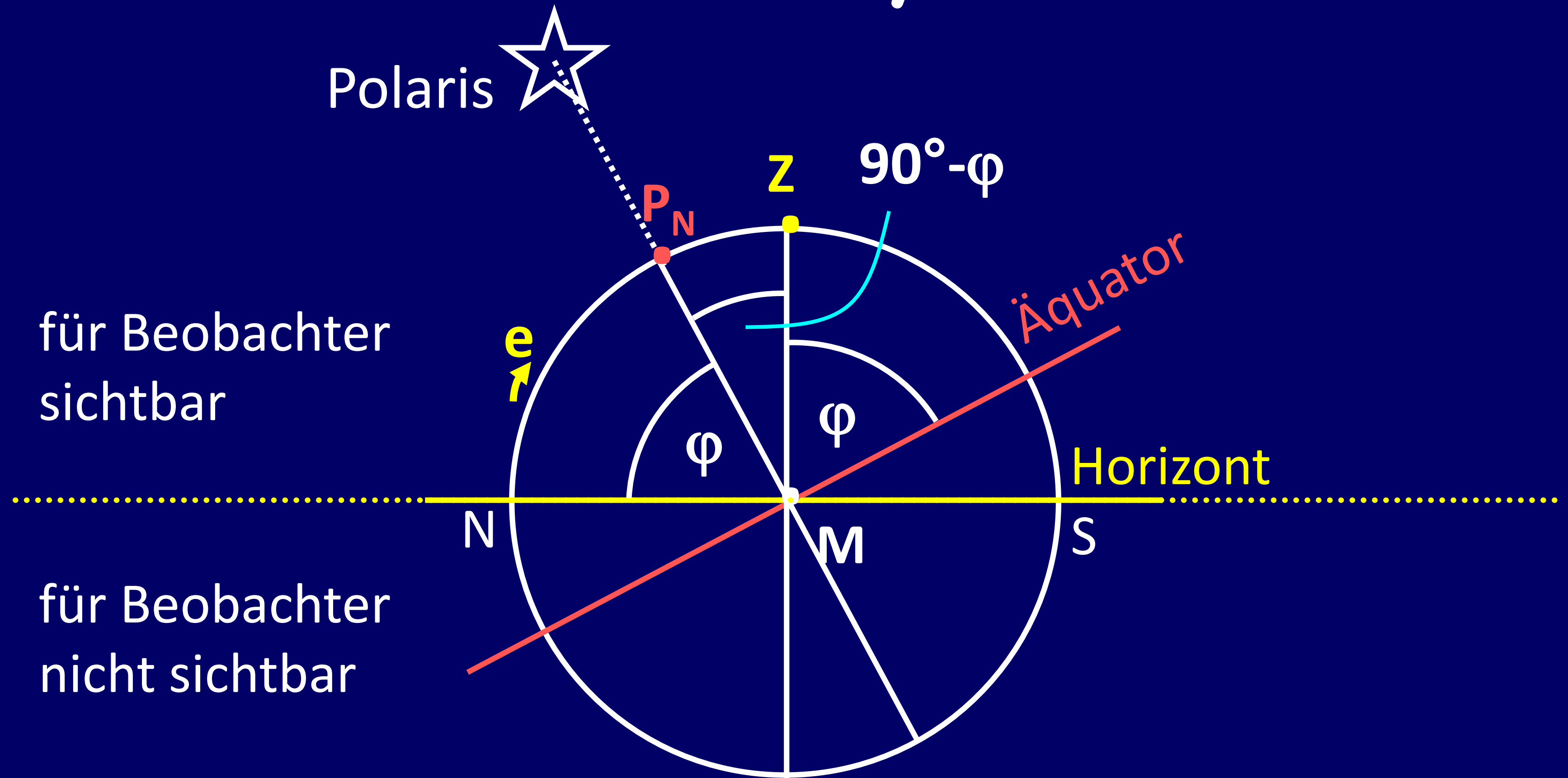
- System zur Katalogisierung von Himmelskoordinaten
- α … Rektaszension
- δ … Deklination
- Koordinaten von Himmelskörpern orts- und zeitunabhängig


Himmelsnordpol
[verlängerter Nordpol]
Ekliptik
scheinbare
Jahresbahn der Sonne
um die Erde [Tierkreis]
Herbstpunkt
Tag- und Nachtgleiche [Äquinoktium]
Schnittpunkt des Himmelsäquators mit
der Ekliptik
23. September
Deklination
Himmelsäquator
Rektaszension
21. März
Tag und Nachtgleiche [Äquinoktium]
Schnittpunkt des Himmelsäquators mit der
Ekliptik - Nullpunkt des Stundenkreises
Frühlingspunkt

Astronomische Koordinatensysteme

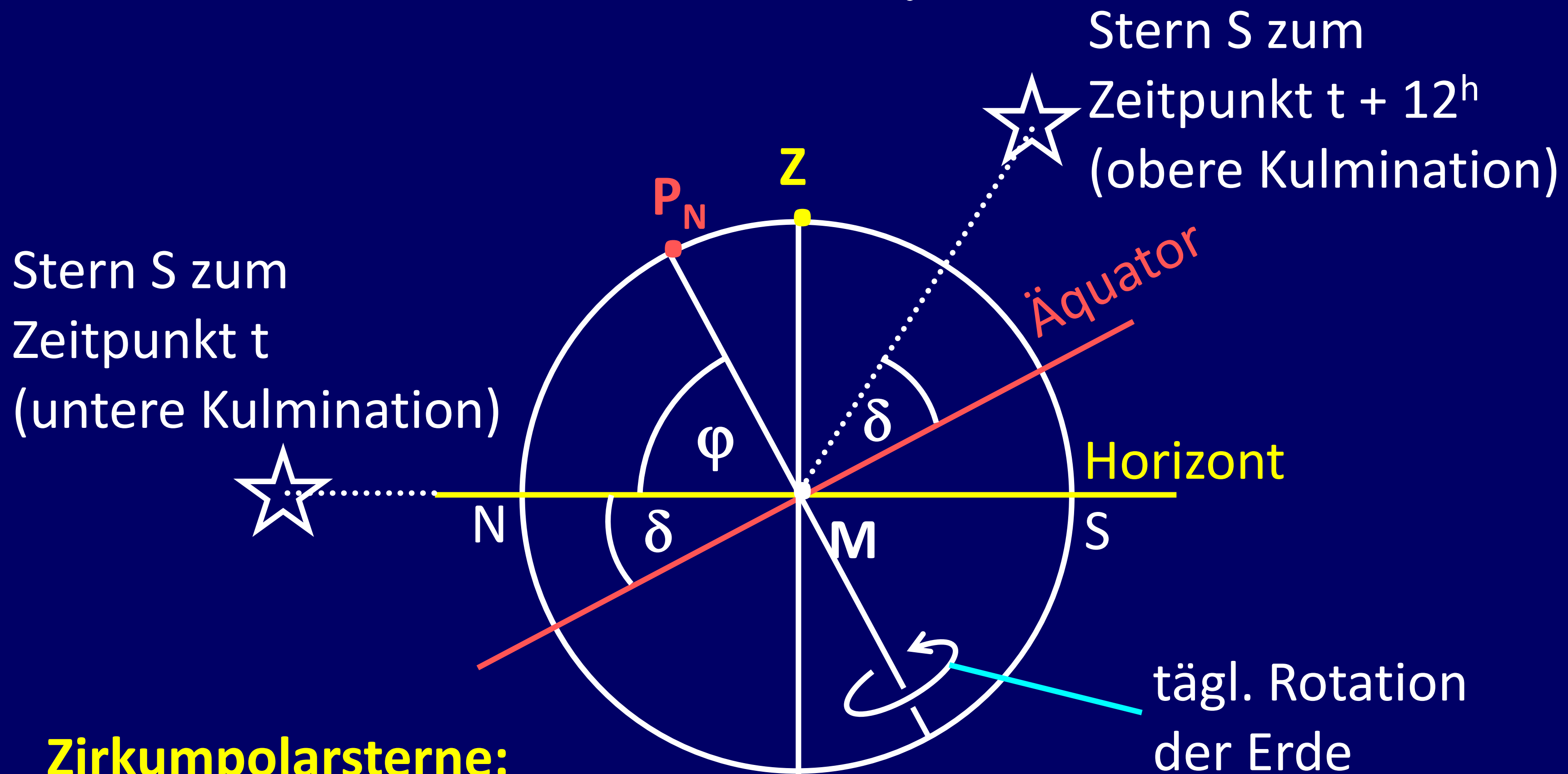
Name	**Horizontsystem**	**Äquatorsystem 1. Art**	**Äquatorsystem 2. Art**
Ursprung	Beobachter	Geozentrum	Geozentrum
Bezugsebene	lok. Horizont	Äquator	Äquator
Nullrichtung	Norden	Süden	Frühlingspunkt
1. Winkel	Azimut	Stundenwinkel	Rektaszension
2. Winkel	Elevation/Zenitd.	Deklination	Deklination
Händigkeit	links	links	rechts

Beziehungen zwischen den Koordinatensystemen



Die Elevation des Polarsterns stellt eine Näherung der geografischen Breite dar!

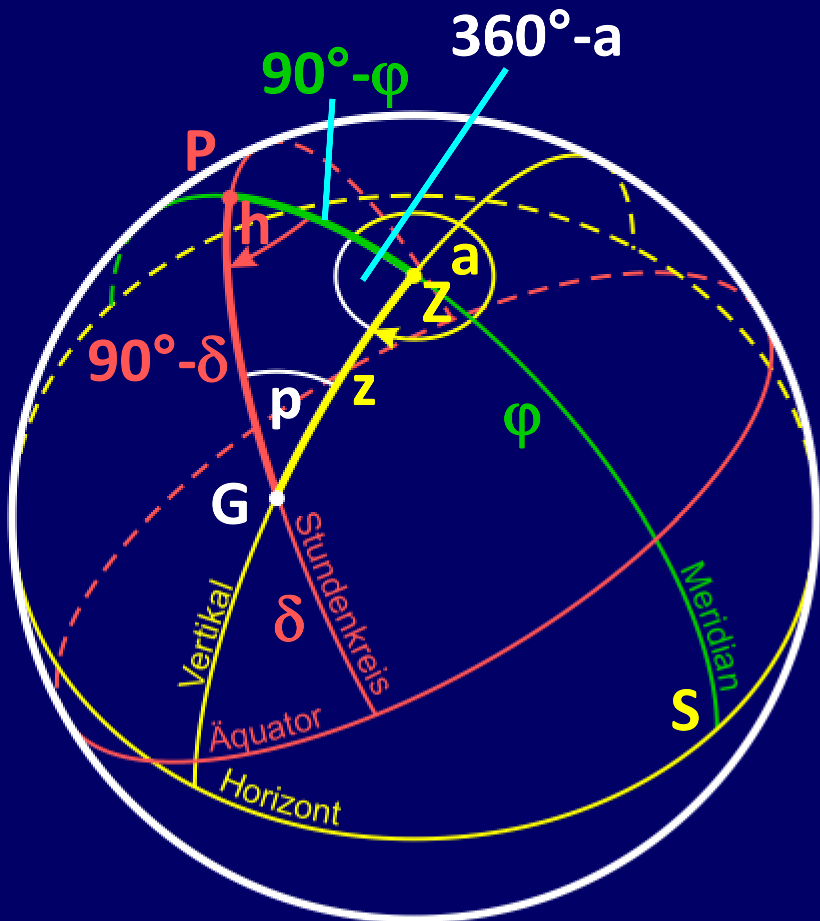
Beziehungen zwischen den Koordinatensystemen



Zirkumpolarsterne:
- **$\delta \geq 90° - \varphi$**
- **untere Kulmination oberhalb Horizont**

Beziehungen zwischen den Koordinatensystemen

- Nautisches Dreieck -

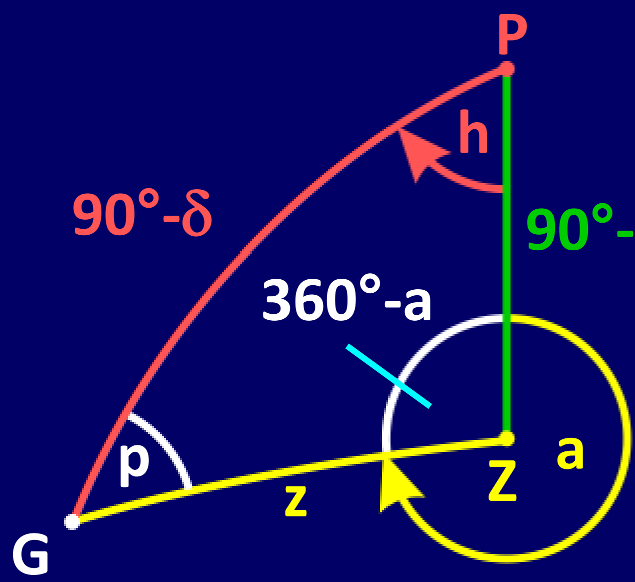


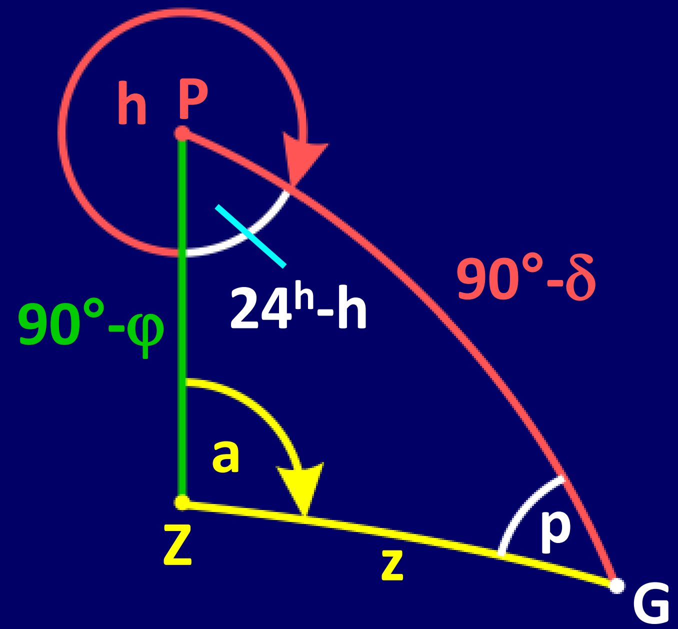
P… Nordpol
Z… Zenit des Beobachters
G… Gestirn
ΔPZG = Nautisches Dreieck

h… Stundenwinkel
a… Azimut
p… Parallaktischer Winkel
δ… Deklination d. Gestirns
z… Zenitdistanz des Gestirns
φ… geogr. Breite d. Beobachters

gelb = Elemente des Horizontsystems
rot = Elemente des Äquatorsystems
grün = gemeinsame Elemente

Beziehungen zwischen den Koordinatensystemen
- Nautisches Dreieck -

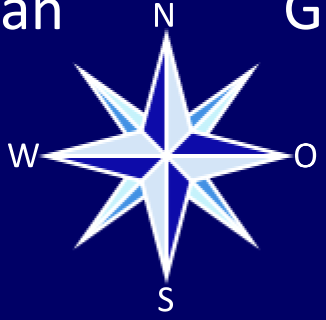




Gestirn westl. Meridian

$0^h < h < 12^h$

$180° < a < 360°$



Gestirn östl. Meridian

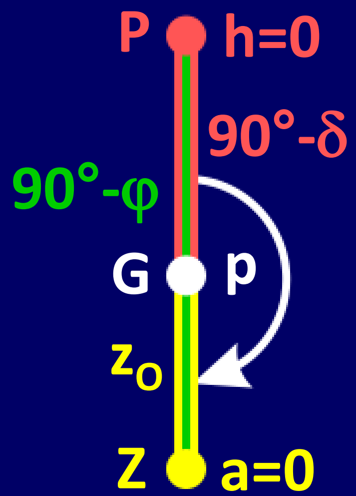
$12^h < h < 24^h$

$0° < a < 180°$

Beziehungen zwischen den Koordinatensystemen

- Nautisches Dreieck -

Sonderfälle



für $\delta > \varphi$:

$90° - \varphi = 90° - \delta + z_O$

$\delta = \varphi + z_O$

$\varphi = \delta - z_O$

obere Kulmination

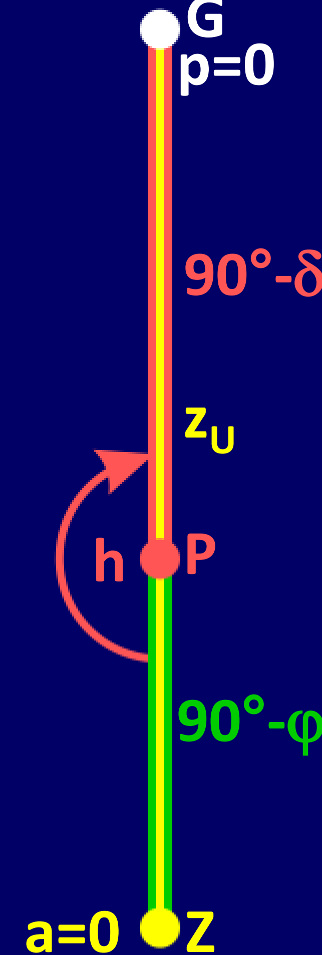
$z_U = 90° - \varphi + 90° - \delta$

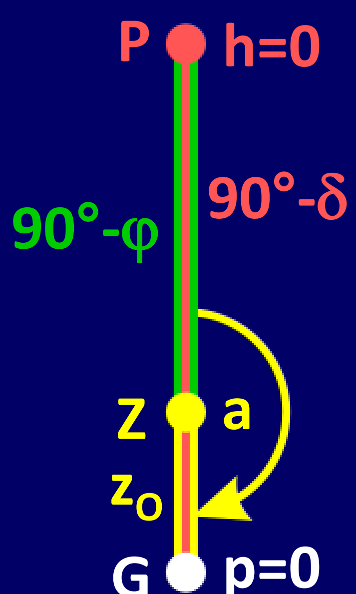
$\delta = 180° - \varphi - z_U$

$\varphi = 180° - \delta - z_U$

untere Kulmination

$z_O < z_U$





für $\delta < \varphi$:

$90° - \delta = 90° - \varphi + z_O$

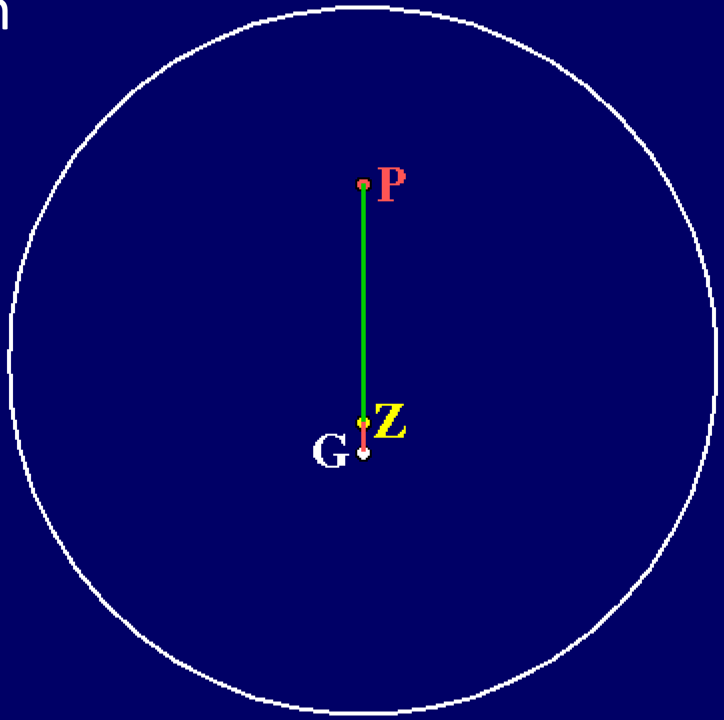
$\delta = \varphi - z_O$

$\varphi = \delta + z_O$

Beziehungen zwischen den Koordinatensystemen
- Nautisches Dreieck -

Fall: $\delta < \varphi$

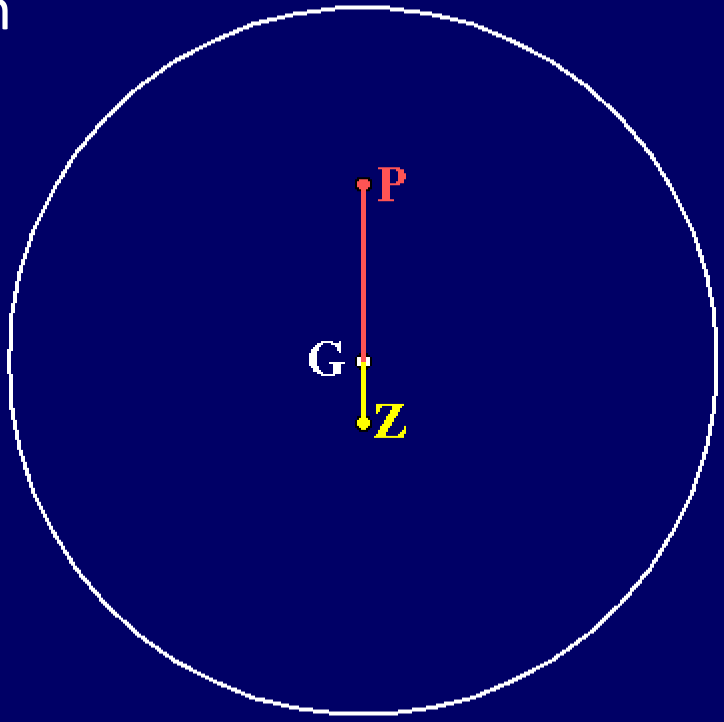
Veränderung des Nautischen
Dreiecks aufgrund
der tägl. Rotation
der Erde



Beziehungen zwischen den Koordinatensystemen
- Nautisches Dreieck -

Fall: $\delta > \varphi$

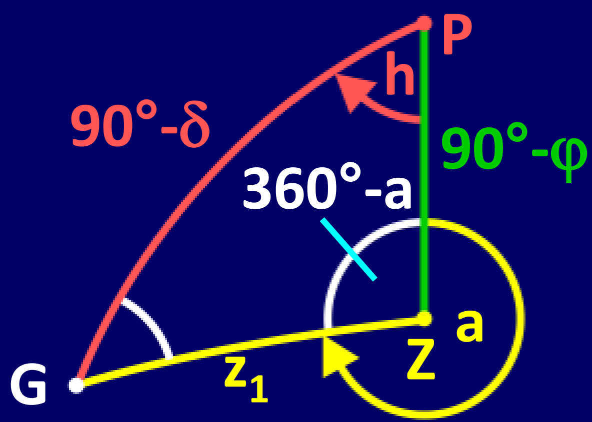
Veränderung des Nautischen Dreiecks aufgrund der tägl. Rotation der Erde



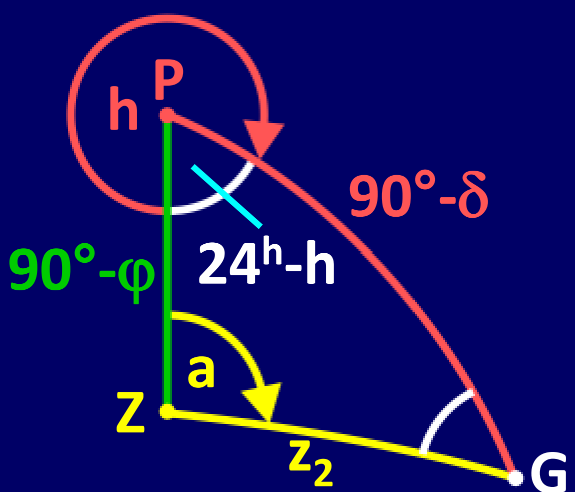
Beziehungen zwischen den Koordinatensystemen

- Nautisches Dreieck -

Äquatorsystem 1. Art (h,δ) $\rightarrow$ Horizontsystem (a,z)



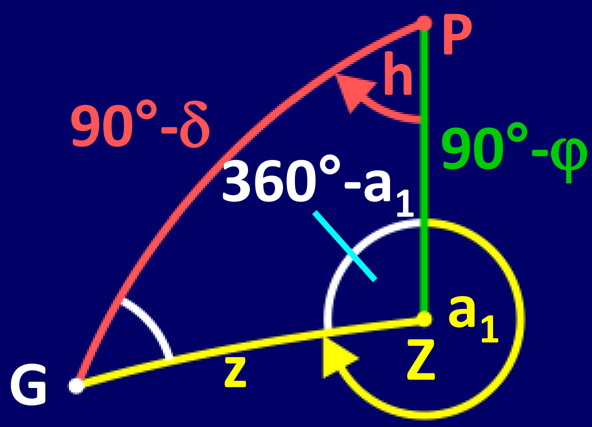
Zenitdistanz **z** aus Seitenkosinussatz:



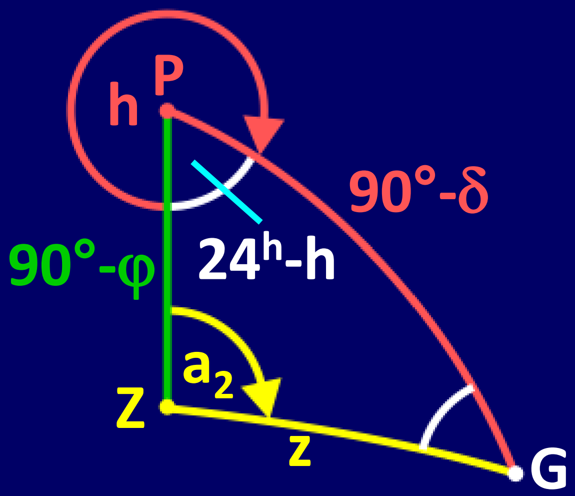
weil $\cos h = \cos(24^h - h)$

Beziehungen zwischen den Koordinatensystemen
- Nautisches Dreieck -

Äquatorsystem 1. Art (h,δ) $\rightarrow$ Horizontsystem (a,z)



Azimut **a** aus Sinus-Kosinussatz:

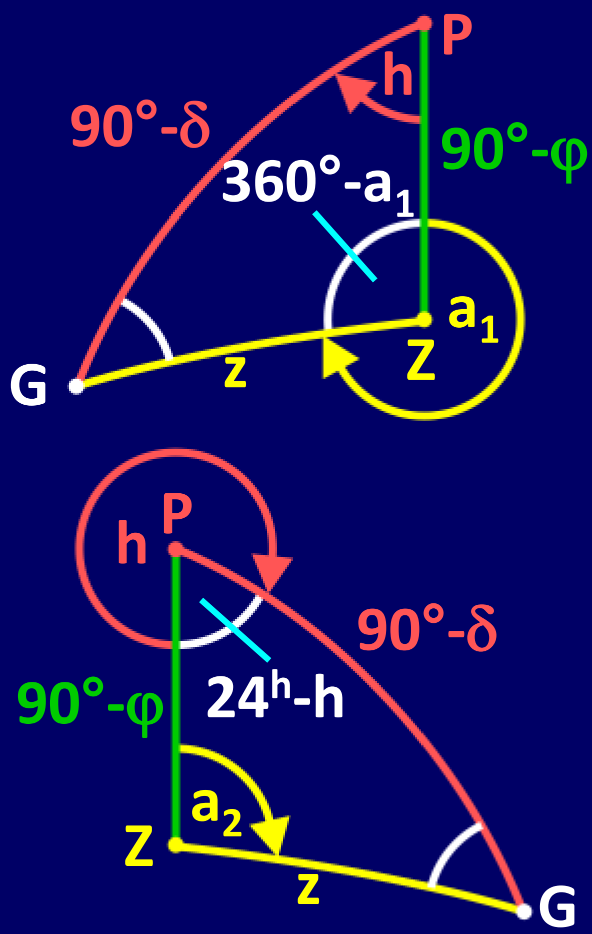


Problem: arccos liefert Winkel zwischen 0° und 180°, Azimutwinkel jedoch zwischen 0° und 360°

Beziehungen zwischen den Koordinatensystemen

- Nautisches Dreieck -

Äquatorsystem 1. Art (h,δ) → Horizontsystem (a,z)



Azimut a aus Sinus-Kosinussatz:

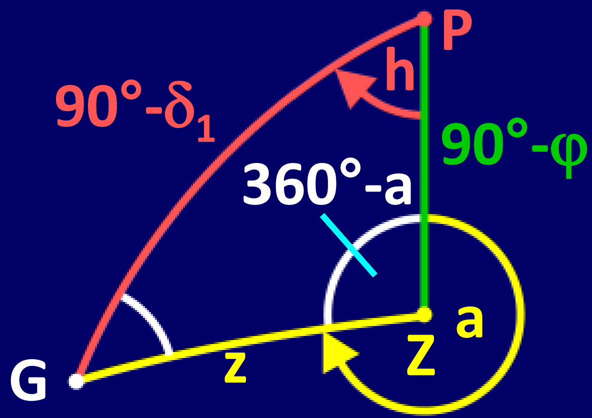
Fallunterscheidung nach Stundenwinkel:

- Gestirn westlich Meridian
  $0^h < h < 12^h \Rightarrow 180° < a < 360°$
  ↳ $a = 360° - a_0$
- Gestirn östlich Meridian
  $12^h \leq h \leq 24^h \Rightarrow 0° \leq a \leq 180°$
  ↳ $a = a_0$

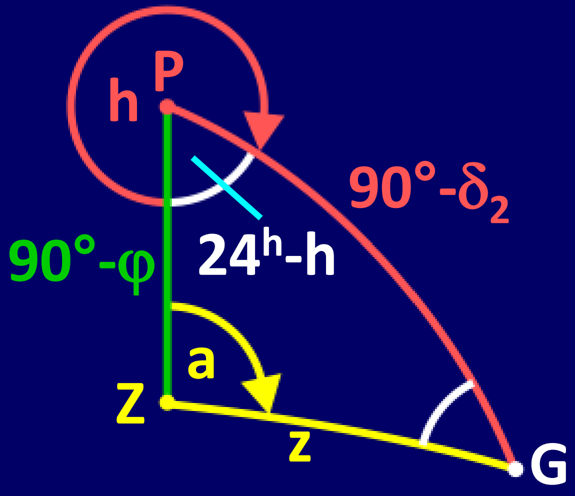
Beziehungen zwischen den Koordinatensystemen

- Nautisches Dreieck -

Horizontsystem (a,z) → Äquatorsystem 1. Art (h,δ)



Deklination δ aus Seitenkosinussatz:

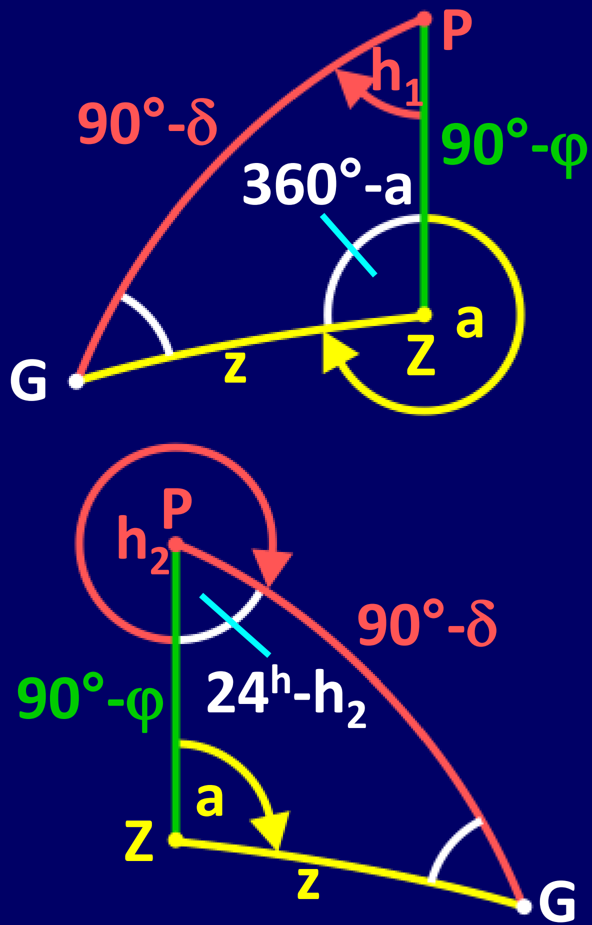


weil $\cos a = \cos(360° - a)$

Beziehungen zwischen den Koordinatensystemen

- Nautisches Dreieck -

Horizontsystem (a,z) → Äquatorsystem 1. Art (h,δ)

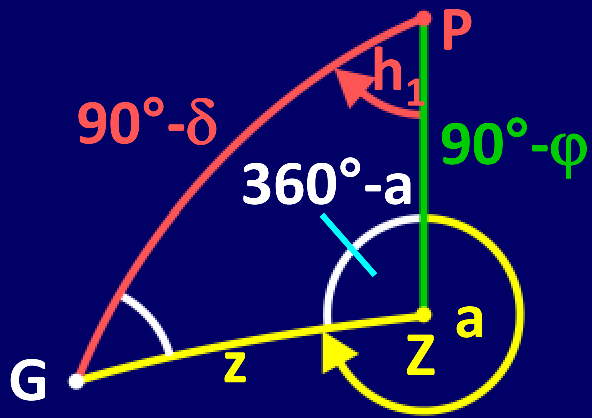


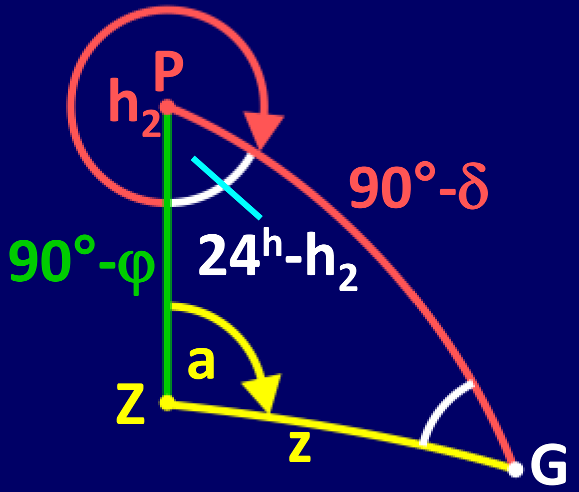
Stundenwinkel **h** aus Sinus-Kosinussatz:

Problem: arccos liefert Winkel zwischen 0^h und 12^h, Stundenwinkel jedoch zwischen 0^h und 24^h

Beziehungen zwischen den Koordinatensystemen
- Nautisches Dreieck -

Horizontsystem (a,z) → Äquatorsystem 1. Art (h,δ)





Stundenwinkel h aus Sinus-Kosinussatz:

Fallunterscheidung nach Azimut:

- Gestirn westlich Meridian
  $180° < a < 360° \Rightarrow 0^h < h < 12^h$
  ➯ $h = h_0$
- Gestirn östlich Meridian
  $0° \leq a \leq 180° \Rightarrow 12^h \leq h \leq 24^h$
  ➯ $h = 24^h - h_0$

Anwendungsbeispiel

Wieviele Stunden scheint die Sonne in Dresden (φ=51,031°) zur Sommersonnenwende am 21.06. (Deklination der Sonne: δ=23,439°)? Unter welchen Azimuten ist die Sonne an diesem Tag sichtbar?

Sonnescheindauer: 16^h19^m
Azimutbereich: 50,766° < a < 309,234°

Zeitsysteme
- Sonnenzeit -

wahre Sonnenzeit

= wahre Ortszeit, WOZ

= seit unterer Kulmination d. Sonne vergangene Zeit

↳ WOZ = $h_\odot + 12^h$, $h_\odot$ … Stundenwinkel der Sonne

wahrer Sonnentag

= Zeitdauer zwischen zwei Meridiandurchgängen der Sonne (d.h. "von Mittag zu Mittag")

Problem:

Stundenwinkel der Sonne neben Erdrotation auch durch Elliptizität der Erdbahn (Geschwindigkeitsschwankungen!) und Schiefe der Ekliptik beeinflusst.

↳ Dauer wahrer Sonnentage schwankt um bis zu 30 Sekunden!

Zeitsysteme
- Sonnenzeit -

Lösung des Problems:

mittlere Sonnenzeit

= mittlere Ortszeit, MOZ

= seit unterer Kulmination d. mittleren Sonne vergangene Zeit

↳ MOZ = $\overline{h_\odot}$ +12^h, $\overline{h_\odot}$ … Stundenwinkel der mittleren Sonne

Die mittlere Sonne ist ein fiktiver Körper mit Deklination 0, den die Erde auf einer Kreisbahn (konstante Geschwindigkeit) innerhalb eines wahren Sonnenjahres (trop. Jahr) umläuft.

↳ stabil bis auf (kleine) Schwankungen der Erdrotation

↳ zivile Zeit ist auf mittlere Sonnenzeit angepasst

Zeitsysteme
- Sonnenzeit -

Zeitgleichung

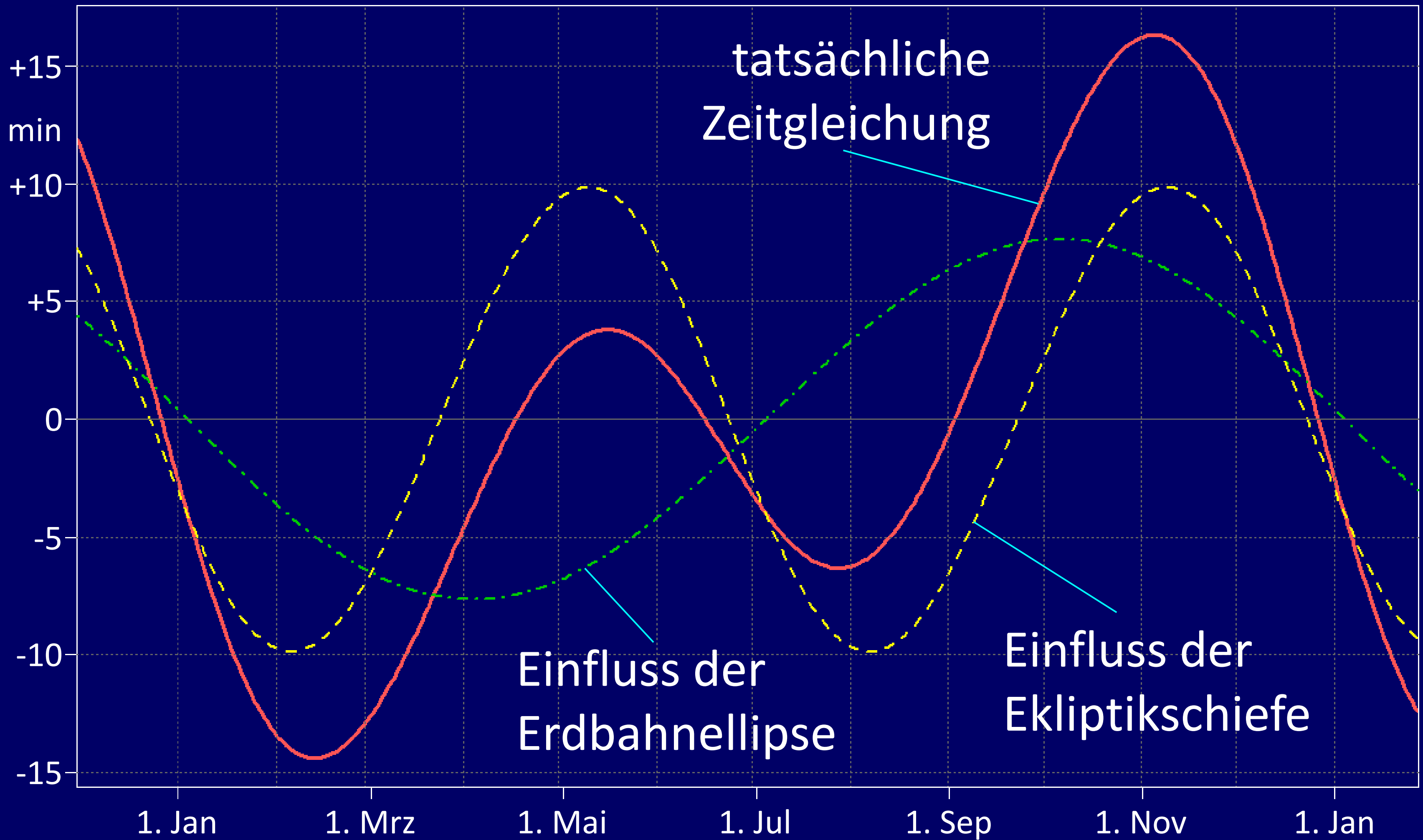
Differenz von wahrer u. mittlerer Sonnenzeit heißt
Zeitgleichung Eq.T.

$$\mathbf{Eq.T. = WOZ - MOZ}$$

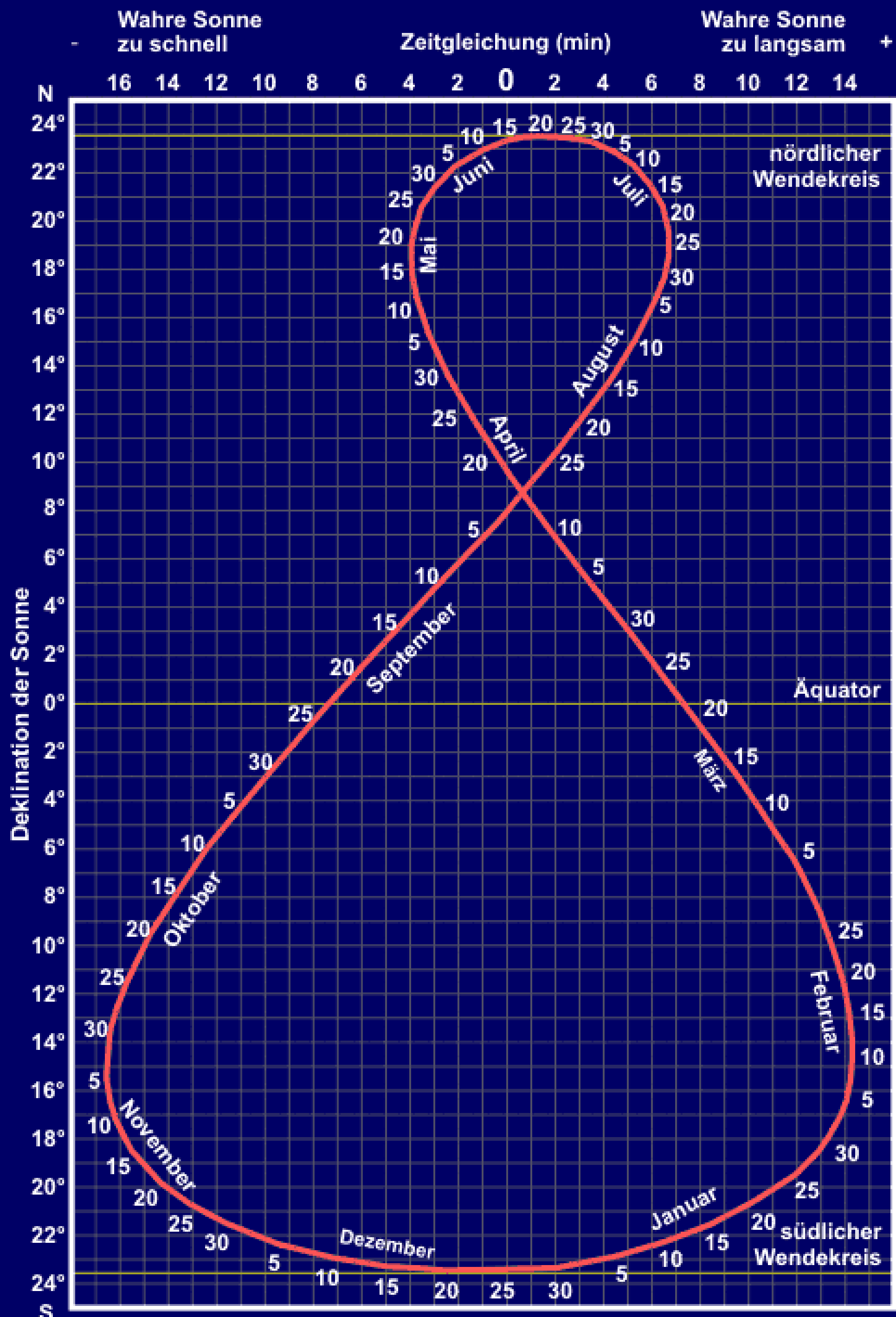
$$\begin{aligned} \mathbf{Eq.T.} &= h_\odot + 12^h - (\overline{h}_\odot + 12^h) \\ &= h_\odot - \overline{h}_\odot \end{aligned}$$

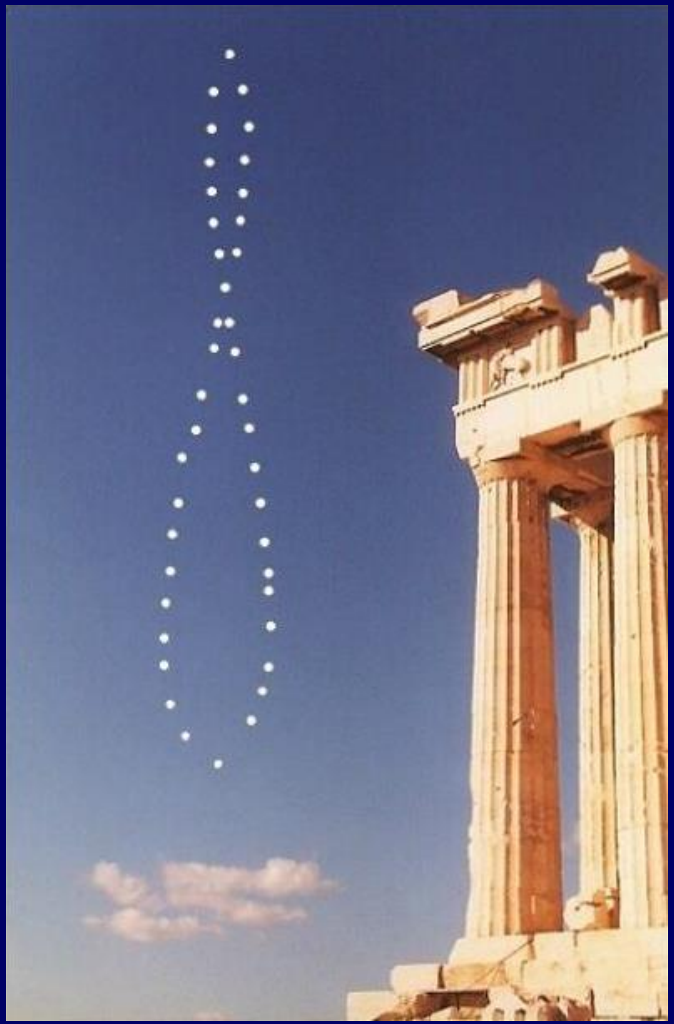
Maximalwerte für Eq.T. : ca. -15min … +15min

Zeitsysteme
- Sonnenzeit -



Das Analemma





Die Bewegung der Gestirne

***wahre* Bewegung** = Bewegung bzgl. inertialem (= raumfestem) System

***scheinbare* Bewegung** = Bewegung bzgl. eines terrestrisch fixierten Systems

- **beobachtbar ist nur die *scheinbare* Bewegung !**
  - zeitliche Fixierung der Bewegungsphasen erfordert Transformation von scheinbarer zu wahrer Bewegung

Die scheinbare tägliche Bewegung

Abhängigkeit zwischen Stundenwinkel und Zenitdistanz:

$$\cos z = \sin\varphi \, \sin\delta + \cos\varphi \, \cos\delta \, \cos h$$

weil cos h = cos (-h), ist **Bahn symmetrisch zum Meridian**

Ableitung nach der Zeit t liefert:

$$-\sin z \frac{dz}{dt} = -\cos\varphi \, \cos\delta \, \sin h \frac{dh}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dz}{dh} = \frac{\cos\varphi \, \cos\delta \, \sin h}{\sin z}}$$

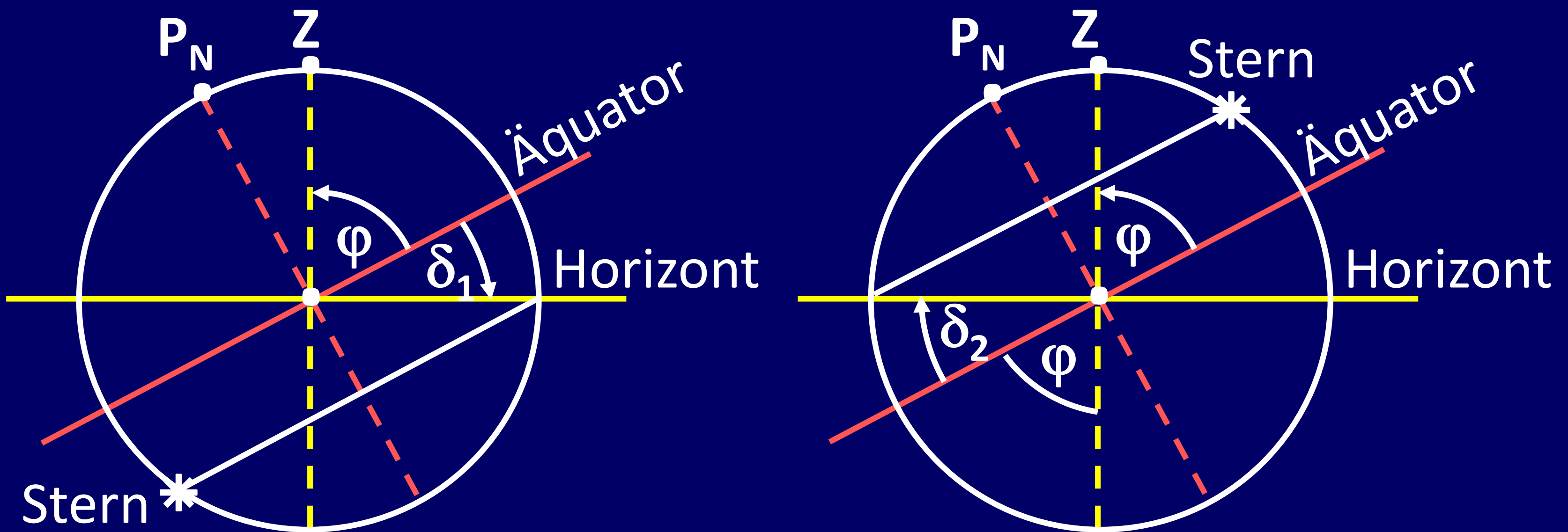
Weil $\cos\varphi \geq 0$, $\cos\delta \geq 0$ und $\sin z \geq 0$, gilt:

$0^h < h < 12^h \Rightarrow dz/dh > 0$, d.h. z wächst, Stern im Westen

$12^h < h < 24^h \Rightarrow dz/dh < 0$, d.h. z nimmt ab, Stern im Osten

$h = 0^h, 12^h \Rightarrow dz/dh = 0$, d.h. z extremal, Kulmination

Auf- und untergehende Gestirne



$\delta_1 = -(90° - \varphi) = (\varphi - 90°)$

⇩

Gestirn unsichtbar für

$\delta < (\varphi - 90°)$

$\delta_2 = (90° - \varphi)$

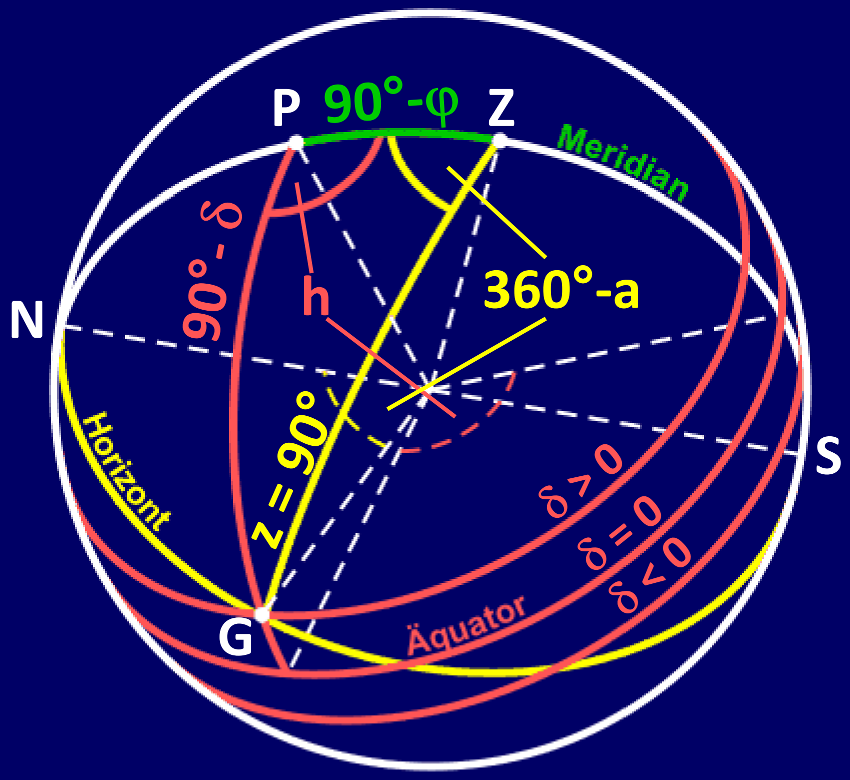
⇩

Gestirn zirkumpolar für

$\delta > (90° - \varphi)$

➯ **Gestirne mit Deklinationen im Intervall $(\varphi - 90°) < \delta < (90° - \varphi)$ gehen auf und unter**

Auf- und Untergang der Gestirne



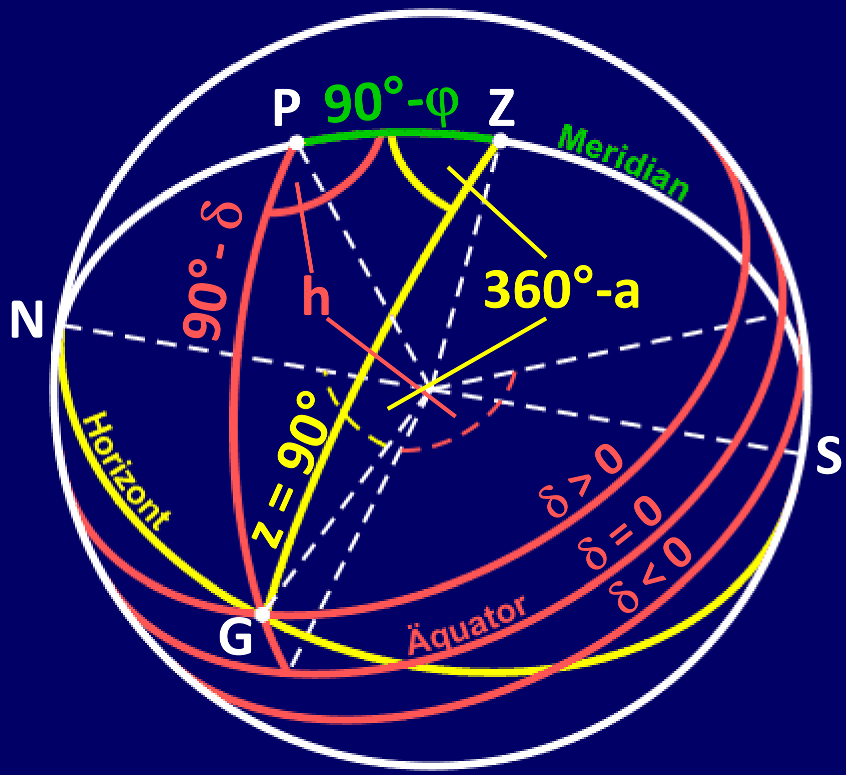
bei Auf- und Untergang jeweils **$z = 90°$**

↳ rechtseitiges nautisches Dreieck

Gesucht:

Zeit **$h_{A,U}$** und Azimut **$a_{A,U}$** des Auf- und Untergangs des Gestirns

Auf- und Untergang der Gestirne



Auf- und Untergangszeit

Seitenkosinussatz:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos h_{A,U}$$

mit cos z = cos 90° = 0:

$$-\cos\varphi \cos\delta \cos h_{A,U} = \sin\varphi \sin\delta$$

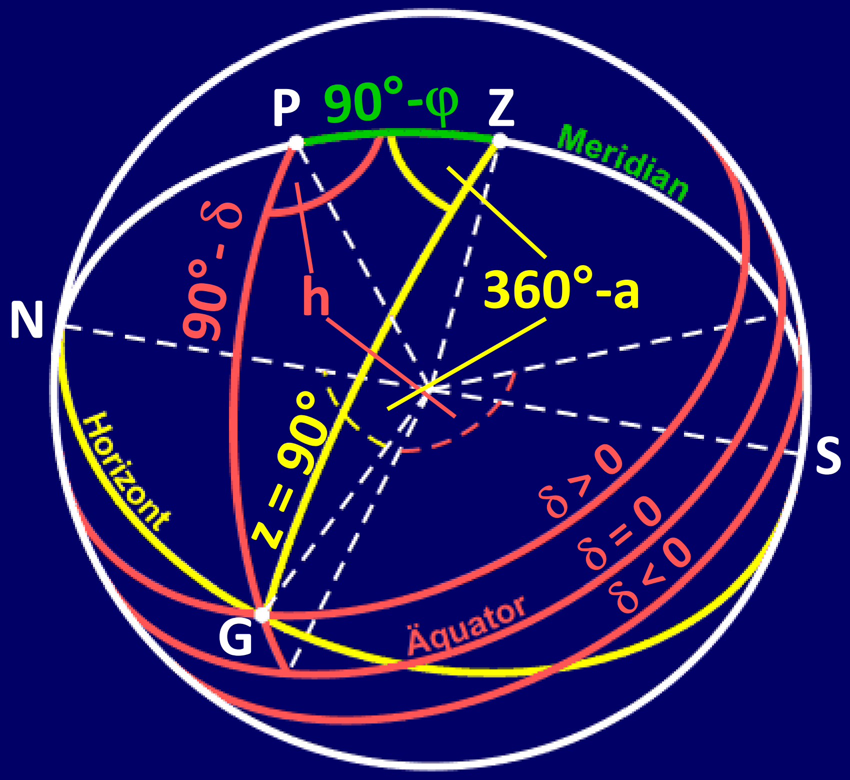
$$\boxed{\cos h_{A,U} = -\tan\varphi \tan\delta}$$

weil cos h = cos (–h)

↳doppeldeutige Lösung:

↳Auf- ***und*** Untergangszeit

Auf- und Untergang der Gestirne



h > 6h :   WOZ > 18h
h < 18h: WOZ < 6h

$$\boxed{\cos h_{A,U} = -\tan\varphi \tan\delta}$$

Bsp. I) $\varphi > 0$, $\delta > 0$

$\Rightarrow \cos h_{A,U} < 0$

d.h. $6^h < h_{A,U} < 18^h$

↳ **$h_U > 6^h$**

$h_A < 18^h$

↳ **Tagbogen > 12^h**

Bsp. II) $\varphi > 0$, $\delta < 0$

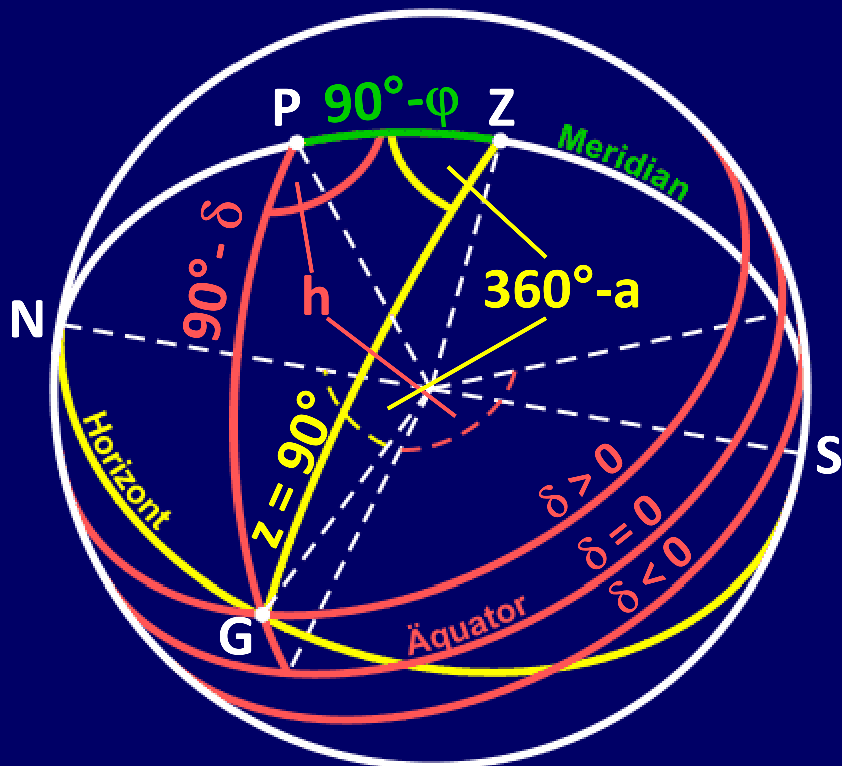
$\Rightarrow \cos h_{A,U} > 0$

↳ **$h_U < 6^h$**

$h_A > 18^h$

↳ **Tagbogen < 12^h**

Auf- und Untergang der Gestirne



Auf- und Untergangsazimut

Seitenkosinussatz:

$$\sin\delta = \sin\varphi\cos z + \cos\varphi\sin z\cos a_{A,U}$$

mit cos z = 0, sin z = 1:

$$\sin\delta = \cos\varphi\cos a_{A,U}$$

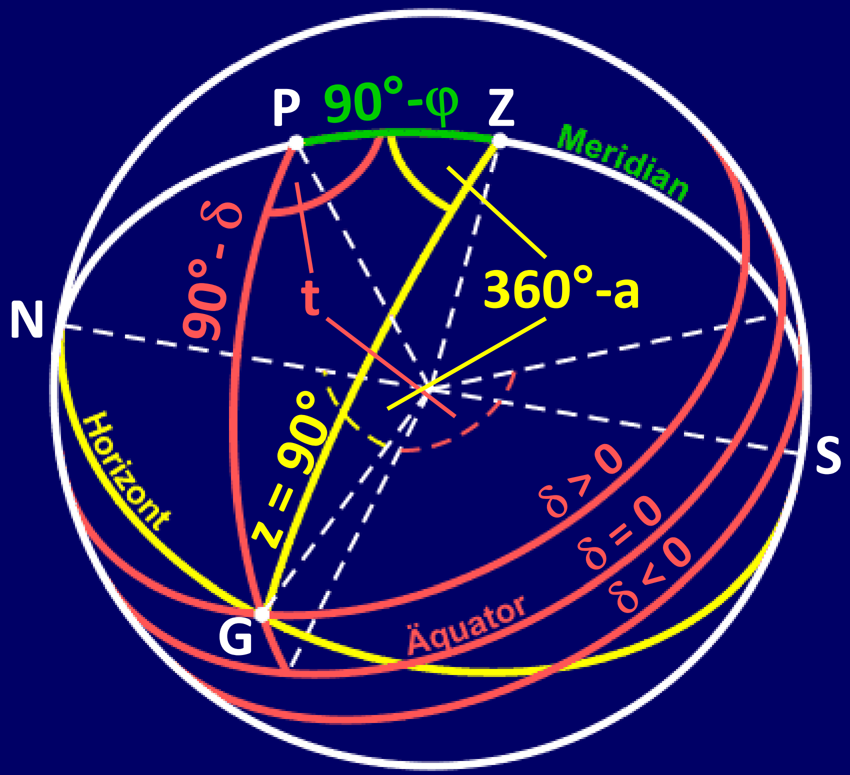
$$\boxed{\cos a_{A,U} = \frac{\sin\delta}{\cos\varphi}}$$

weil cos a = cos (– a)

doppeldeutige Lösung:

➯Auf- *und* Untergangsazimut

Auf- und Untergang der Gestirne



$$\boxed{\cos a_{A,U} = \frac{\sin\delta}{\cos\varphi}}$$

Bsp. I) **φ > 0**, **δ > 0**

$\Rightarrow \cos a_{A,U} > 0$

↳ **$0° < a_A < 90°$**
$270° < a_U < 360°$

↳ **Auf- und Untergang nach Norden verschoben**

Bsp. I) **φ > 0**, **δ < 0**

$\Rightarrow \cos a_{A,U} < 0$

↳ **$90° < a_A < 180°$**
$180° < a_U < 270°$

↳ **Südverschiebung**

Auf- und Untergang der Sonne

Sonne besitzt variable Deklination: **$-23{,}5° < \delta_S < +23{,}5°$**
wegen Neigung der Ekliptik gegen Äquatorebene
⇘ 3 Fälle für scheinbare tägliche Bewegung:

I) **$\delta_S > 0$** (21.03.-23.09.) $\rightarrow$ Nordhalbk.: Frühling, Sommer
Tagbogen > 12^h
Auf- und Untergang nach Norden verschoben

II) **$\delta_S = 0$** (21.03. und 23.09.)
Tagbogen = 12^h (daher Bezeichn. Äquinoktium)
Auf- und Untergang im Ost- bzw. Westpunkt

III) **$\delta_S < 0$** (23.09.-21.03.) $\rightarrow$ Nordhalbk.: Herbst, Winter
Tagbogen < 12^h
Auf- und Untergang nach Süden verschoben.

Auf- und Untergang der Sonne

- **Einfluss der atmosphärischen Refraktion**:
  durch Lichtbrechung in der Atmosphäre ist das Gestirn bereits bei **$z = 90°35'$** sichtbar
- **Einfluss der Ausdehnung des Gestirns**:
  Koordinaten gültig für Mittelpunkt des Gestirns
- Beispiel Sonne:
  - Als Auf- bzw.Untergang der Sonne wird angesehen, wenn ihr oberer Rand den Horizont berührt
  - scheinbarer Radius der Sonne: $r_S = 16'$

  ➯ **$z_{A,U} = 90°35' + 16' = 90°51'$**
  das ist **Beginn / Ende der Dämmerung**

Auf- und Untergang der Sonne

Betrachtung für Abenddämmerung (analog für Morgendämm.)

- Beginn der Dämmerung: **$z = 90°51'$** **h**
- Ende der **bürgerlichen** Dämmerung: **$z_b = 96°30'$** **h_b**
- Ende der **nautischen** Dämmerung: **$z_n = 102°00'$** **h_n**
- Ende der **astronomischen** Dämmerung: **$z_a = 108°00'$** **h_a**

⇨ Dauer der **bürgerlichen** Dämmerung: $D_b = h_b - h$

Dauer der **nautischen** Dämmerung: $D_n = h_n - h$

Dauer der **astronomischen** Dämmerung: $D_a = h_a - h$

Stundenwinkel aus: $\cos z_{...} = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos h_{...}$

$$\cos h_{...} = \frac{\cos z_{...} - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta}$$

Dauer der Dämmerungsphasen

Datum	Bürgerliche Dämmerung	Nautische Dämmerung	Astronomische Dämmerung
21.12. (δ_S = -23,5°)	43m	1h22m	2h03m
21.03. / 23.09. (δ_S = 0°)	36m	1h12m	1h52m
21.06. (δ_S = 23,5°)	52m	1h58m	-

gültig für Dresden (geogr. Breite 51°02')

Vorlesung Ende

Sonnenuhren

Grundprinzip:

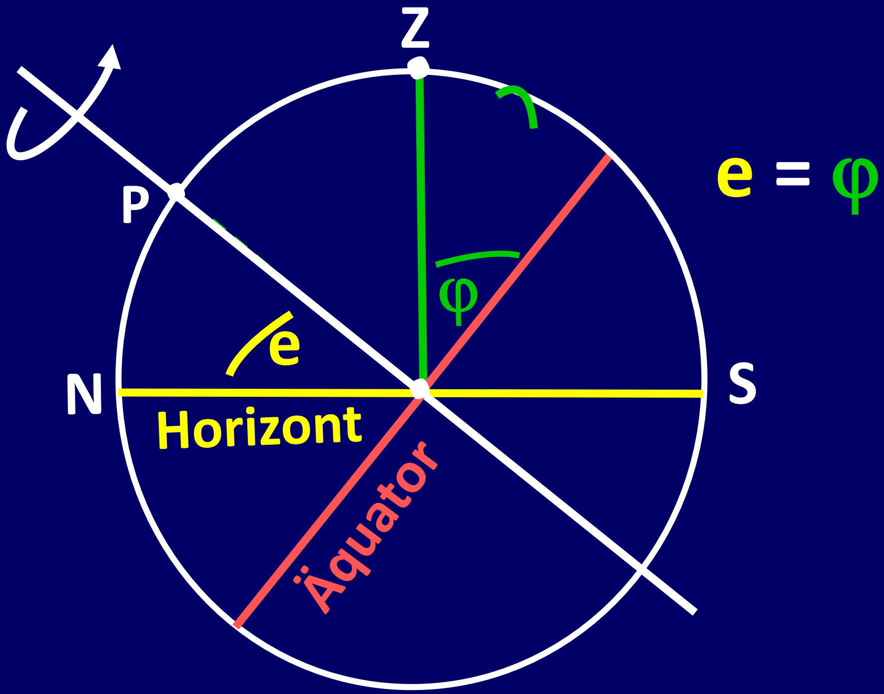
Schatten eines parallel zur Rotationsachse orientierten Stabes (Gnomon) zeigt die wahre Sonnenzeit

Einteilung nach Ausrichtung des Zifferblattes:

- **Äquatorialuhr** → Zifferblatt || Äquator
- **Horizontaluhr** → Zifferblatt || Horizont
- **Vertikaluhr** → Zifferblatt ⊥ Horizont

Äquatorialuhr

Äquatorebene d. Teilkugel parallel zum Erdäquator



wahre Sonnenzeit:

WOZ = $h_S + 12^h$

↳ • $h_S = 0 \rightarrow$ 12 Uhr, (Schatten im N-Punkt)

• $h_S = 15° \rightarrow$ 13 Uhr, ...

Äquatorialuhr

Berlin, Deutschland

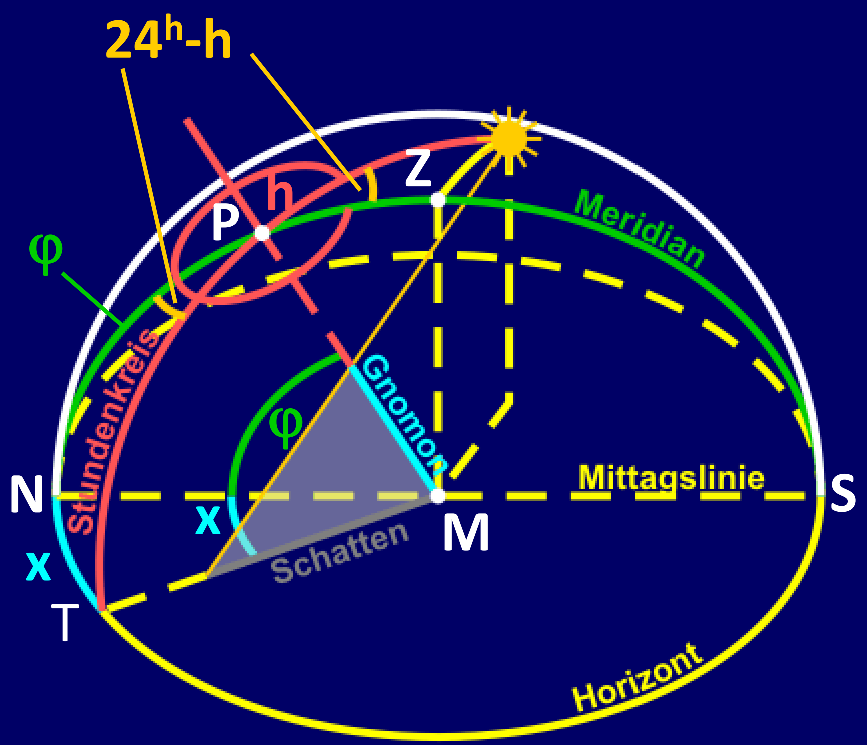
Äquatorialuhr

Montreal,
Kanada

Äquatorialuhr

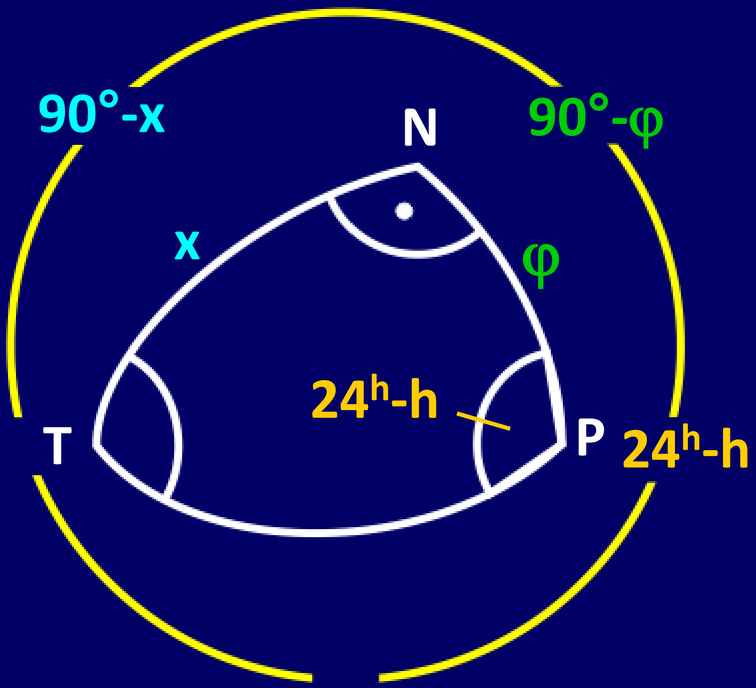
Willersbau,
TU Dresden

Horizontaluhr



- Sonne sei **24^h-h** Stunden vor oberer Kulmination
- Strecke MT ist Schattenrichtung für Zeitpunkt WOZ = 12^h + h
- Winkel **x** zwischen Schattenlinie und Mittagslinie
- sph. Dreieck NTP besitzt rechten Winkel in N

Horizontaluhr



Mit

und $\cot(12^h - \text{WOZ}) = -\cot \text{WOZ}$

↳WOZ = 7 Uhr, 8 Uhr, ... liefert x
(unabhängig von Deklination der Sonne!)

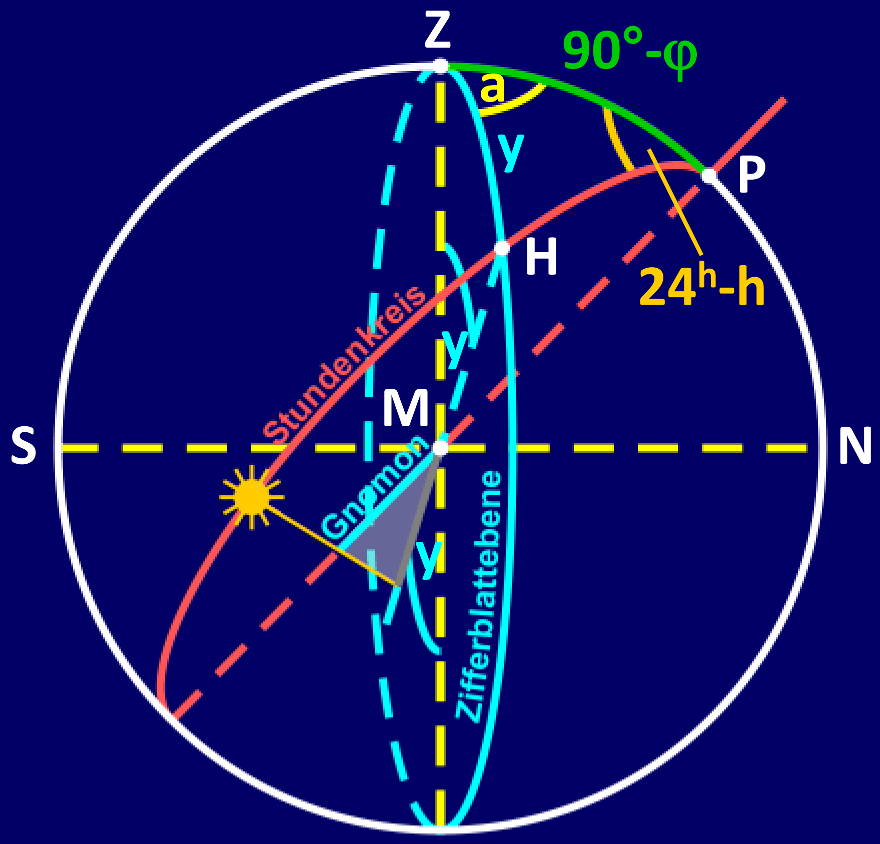
Horizontaluhr

Chapel Hill, NC, USA

Horizontaluhr

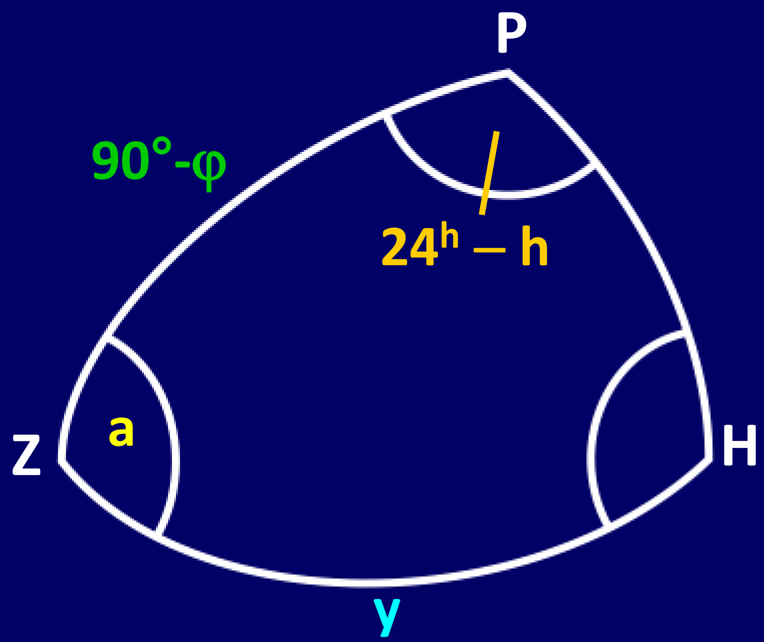
Sundial Bridge
Redding,
CA, USA

Vertikaluhr



- Sonne sei **24^h-h** Stunden vor oberer Kulmination
- Zifferblatt senkrecht zu Horizont
- Winkel **a** ist Azimut der Zifferblattebene
- Winkel **y** zwischen Vertikal und Schattenlinie für Zeitpunkt WOZ = 12^h + h

Vertikaluhr

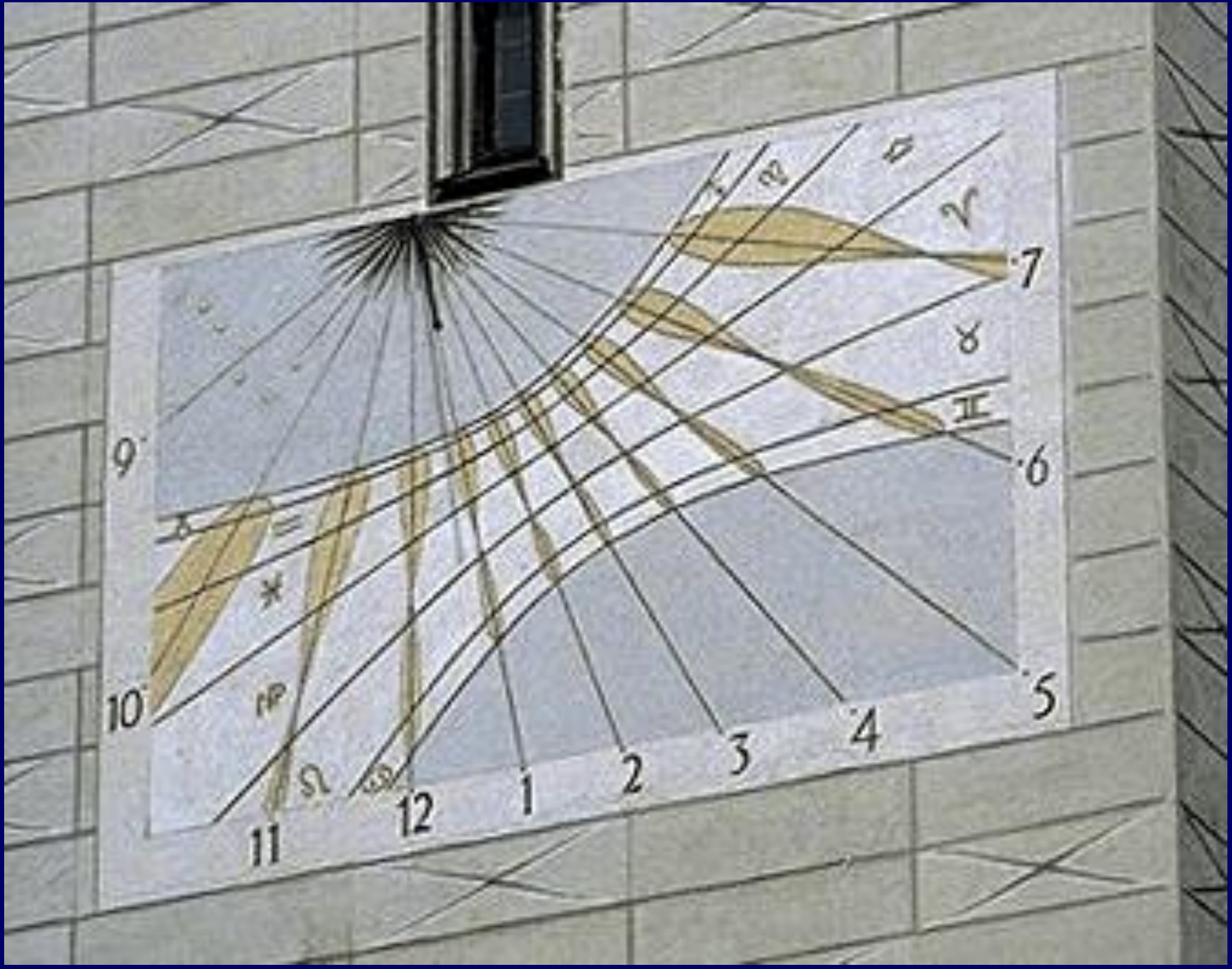


Kotangenssatz:

Mit

für Südwand mit $a_S = 90°$ gilt:

Vertikaluhr



München, altes Rathaus

Vertikaluhr

Taubenheim (Oberl.)


Prüfung
09.02.2011
3.DS ASB/28
Sphärische
Trigonometrie