

ASTRONOMISCH - GEODÄTISCHE REFERENZSYSTEME

Michael H. SOFFEL

E-Mail: michael.soffel@tu-dresden.de

Dresden, den 13.11.2007

Stand: 5. April 2016

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	1
2	Einleitung	3
2.1	Astronomisch-Geodätische Referenzsysteme	3
2.1.1	Das Problem der Zeit	3
2.1.2	Das Problem räumlicher Koordinaten	6
2.2	Anwendungen astronomisch-geodätischer Messverfahren	6
2.2.1	Navigation	7
2.2.2	Globale Geodynamik und das System Erde	7
2.2.3	Scheinbare, wahre und mittlere Örter	7
2.2.4	Hochgenaue Astrometrie und Weltbild	9
3	Zeit	13
3.1	Bestandteile einer Uhr	13
3.2	Stabilität von Oszillatoren	14
3.2.1	Bias und Drift	18
3.3	Quarz- und Atomuhren	21
3.3.1	Quarzuhren	21
3.3.2	Atomuhren	21
3.3.3	Einsatz hochgenauer Uhren	32
3.4	Relativitätstheorie und metrischer Fundamentaltensor	33
3.4.1	Bewegte Uhren in der Speziellen Relativitätstheorie	33
3.4.2	Der metrische Fundamentaltensor	34
3.4.3	Die Lorentz-Transformation	36
3.5	Die geozentrischen Zeitskalen TCG, TT, TAI und UTC	37
3.5.1	TCG	38
3.5.2	TT	40
3.5.3	TAI	40
3.5.4	Uhrentransport	42
3.5.5	UTC	43
3.5.6	Zonenzeiten	44
3.6	Das Julianische Datum	44
3.6.1	Kalenderfragen	44
3.6.2	Das Julianische Datum	44
3.7	Die baryzentrischen Zeitskalen TCB, T_{eph} und TDB	46
3.8	Die Reihe von Fairhead-Bretagnon	48

3.9	Probleme der Zeitübertragung	48
3.9.1	Zeitzeichensender, LORAN-C	48
3.9.2	Zeitübertragung mit Hilfe von Satelliten	50
3.10	Übungen	52
4	Astronomische Koordinatensysteme	57
4.1	Die scheinbare Bewegung der Sterne und der Sonne	57
4.2	Räumliche Koordinaten	64
4.2.1	Marken auf der Himmelskugel	64
4.2.2	Kartesische Koordinaten - Sphärische Koordinaten	66
4.2.3	Horizont-Koordinaten	67
4.2.4	Das Äquatorsystem der ersten Art	68
4.2.5	Das Äquatorsystem der zweiten Art	69
4.2.6	Ekliptische Koordinaten	70
4.3	Zusammenhang verschiedener Koordinatensysteme	70
4.3.1	Der Zusammenhang zwischen (z, A) und (δ, h)	70
4.3.2	Die Anwendung von Drehmatrizen	75
4.4	Differentielle Beziehungen	78
4.5	GMST, GAST and lokale Sternzeit	82
4.6	Übungen	84
5	Methoden der geodätischen Astronomie	85
5.1	Klassische Verfahren	85
5.1.1	Beobachtung von Sternörterern oder der Sonnenposition	85
5.2	Laserentfernungsmessungen zu Satelliten (SLR)	89
5.3	Laserentfernungsmessungen zum Mond (LLR)	91
5.4	VLBI	96
5.5	GPS	100
5.5.1	Raumsegment	101
5.5.2	Kontrollsegment	102
5.5.3	GPS Signale, Code und Träger	102
5.5.4	Differential GPS (DGPS)	104
5.6	GLONASS	105
5.7	DORIS	105
5.8	GALILEO	106
5.9	Ringlaserkreisel	106
6	Astrometrische Raumprojekte	109
6.1	HIPPARCOS	109
6.2	Das astrometrische Projekt GAIA	113
7	Variationen der Sternpositionen	117
7.1	Ephemeriden für die Bewegung des Sonnensystems	117
7.1.1	Die DE-Ephemeriden des JPL	117
7.1.2	Die VSOP Ephemeriden	118
7.2	Korrekturen der Sternpositionen	119
7.3	Refraktion	120
7.3.1	Das Modell von Saastamoinen	121

7.3.2	Refraktionskorrektur als Integrale	122
7.4	Parallaxe	127
7.4.1	Jährliche Parallaxe	127
7.5	Aberration	132
7.5.1	Die jährliche Aberration	133
7.5.2	Die tägliche Aberration	134
7.6	Die Eigenbewegung der Sterne	135
8	Präzession - Nutation	137
8.1	Genäherte Behandlung der Präzession	141
8.2	Astronomische Nutation	143
9	Die Polbewegung	147
10	Weltzeit UT, UT1 und Tageslängenschwankungen	153
10.1	Die Weltzeit UT	153
10.2	UT1 und UT1-Variationen	154
11	Terrestrisches und Celestäres Bezugssystem	159
11.1	Das konventionelle terrestrische Referenzsystem: ITRS	159
11.2	Das klassische celestäre Referenzsystem	160
11.2.1	Die Fundamentalkataloge FK3, FK4 und FK5	161
11.2.2	Der PPM-Katalog	162
11.2.3	GSC	162
11.2.4	USNO-A2.0	162
12	Das konventionelle Himmels-Referenzsystem: ICRS	163
12.1	Orientierung des ICRS	165
12.2	Realisierung des ICRF in anderen Wellenlängenbereichen	165
13	BCRS und GCRS	169
13.1	BCRS	169
13.1.1	Bewegungsgleichungen astronomischer Körper*	171
13.1.2	Die gravitative Lichtablenkung*	175
13.2	GCRS	177
14	Der Celestäre Intermediäre Pol (CIP)	183
14.1	Der Instantane Rotationspol (IRP)	183
14.2	Der Celestäre Ephemeridenpol (CEP)	186
14.3	Definition des CIP	187
14.4	Bewegung des CIP im GCRS	189
14.4.1	Celestial Pole Offsets	189
14.4.2	Das IAU 2000 Präzession-Nutation-Modell	190
14.4.3	Fundamentale Argumente der Nutation	193
14.4.4	Die Reihen von Capitaine et al.	195
14.4.5	Beschreibung von X und Y des CIP durch das IAU 2000 Modell	196
14.4.6	Die Bias-Matrix	197
14.5	Bewegung des CIP im ITRS	198

14.5.1	IERS Terme	198
14.5.2	Gezeitenterme	198
14.5.3	Lunisolare Terme	199
15	CIO, TIO, ERA und GST	201
15.1	Der CIO	201
15.1.1	Darstellung von s in Form einer Reihe	202
15.2	Der TIO	203
15.3	Der Erdrotationswinkel θ und GST	203
16	Transformationswege vom GCRS in das ITRS	207
16.1	Die Äquinoktium basierende Transformation	207
16.2	Die CIO basierende Transformation	208
17	Professionelle Astro-Software	209
17.1	SOFA	209
17.2	NOVAS	209
18	Astronomische Jahrbücher	211
18.1	APFS	211
18.2	Astronomical Almanac	211
	Referenzen	213
	Akronymen-Verzeichnis	217
	Fragen zum Inhalt	221
	Anhang A: Die Nutationsreihe 'IAU-1980'	225
	Anhang B: Maple-Worksheets	227
	Stichwortverzeichnis	229

Kapitel 1

Vorwort

Ein zentraler Kern dieses Werkes ist aus Vorlesungen zu diesem Thema für Studenten der Geodäsie entstanden, welche ich regelmäßig seit 1995 an der TU Dresden gehalten habe. Motiviert, die Thematik der astronomisch-geodätischen Referenzsysteme im Detail auszuarbeiten und als Lehrbuch mit entsprechenden Übungen und bereitgestellten Computerprogrammen aufzuarbeiten haben mich jedoch unzählige Diskussionen mit internationalen Experten im Rahmen von Arbeitsgruppen oder internationalen Tagungen, wie solche der Reihe 'Les Journées, systèmes de référence spatio-temporels', welche jährlich seit 1988 in Paris oder anderen europäischen Großstädten ausgerichtet werden. Es ist nicht schwer zu erkennen, dass mit immer wachsender Genauigkeit bei der Realisierung astronomisch-raumzeitlicher Referenzsysteme die Komplexität der Thematik so rapide angewachsen ist, dass sich nur noch wenige Experten weltweit wenigstens einen Überblick darüber erhalten haben. Dem Nutzer war es früher leicht möglich etwa mit Hilfe von astronomischen Jahrbüchern konkrete Probleme astronomischer Referenzsysteme zu meistern. Nun sind einige der früher bedeutsamen Jahrbücher bereits eingestellt worden und man erwartet, dass jedes bessere Observatorium die entsprechende Software zur Bewältigung praktischer Probleme bereithält. Nun gibt es jedoch keine ultra-genaue, allgemein akzeptierte Software. Etliche Aspekte hoch-präziser Koordinaten bedürfen sogar weiterer Diskussionen und internationale Festlegungen etwa durch die Internationale Astronomische Union (IAU).

Zentrales Thema astronomisch-geodätischer Referenzsysteme ist die Transformation zwischen einem celestären ('raumfesten') und einem terrestrischen Koordinatensystem. Die klassische Transformation verwendet hierzu Elemente der Translationsbewegung der Erde in Form der Ekliptik, sowie Elemente der Rotationsbewegung der Erde ('Rotationspol, Himmelsäquator'). Als intermediäre Größen spielen der 'Rotationspol', sowie der Schnittpunkt zwischen Himmelsäquator und Ekliptik (das Äquinoktium) eine entscheidende Rolle. Mit dem raschen Fortschritt der Radiointerferometrie auf großen Basislinien (VLBI) ergab sich die Möglichkeit, ein celestäres Referenzsystem (ICRS) ohne Bezug auf Translations- und Rotationsbewegung der Erde zu realisieren. Dies hat dann bei der angesprochenen Transformation zu einem Paradigmenwechsel geführt. An Stelle des klassischen 'Rotationspols' tritt ein celestäres intermediärer Pol (CIP) und das klassische Äquinoktium wird durch einen celestären intermediären Ursprung (CIO: celestial intermediate origin, der 'nicht-rotierende Ur-

sprung') ersetzt. Nach Annahme dieser neuen Paradigmen durch die Internationale Astronomische Union (IAU) ergibt sich die zwingende Notwendigkeit, diese auch in Lehrbücher detailliert zu behandeln.

Aus diesen Gründen scheint mir ein Lehrbuch zum Thema astronomisch-geodätische Referenzsysteme von größter Wichtigkeit zu sein, zumal grundlegende Werke wie das 'Supplement to the Astronomical Almanac' oder auch die 'IERS Conventions' zunehmend an Bedeutung zu verlieren scheinen. Für alle Themenkreise werden Maple-Programme angeboten, um ein Gefühl für die Modelle und Größenordnungen zu vermitteln. Hierbei ist zu bedenken, dass die Sprache Maple zwar die Vorteile der leichten Handhabung und der großartigen grafischen Möglichkeiten aufweist, diese aber nicht zur routinemäßigen Produktion großer Datenmengen konzipiert ist. Die Maple Programme sind hier im wesentlichen aus didaktischen Gründen aufgenommen worden.

Kapitel 2

Einleitung

2.1 Astronomisch-Geodätische Referenzsysteme

Dieses Skript bietet Studenten der Geodäsie eine Einführung in astronomisch-geodätischen Referenzsystemen. Diese repräsentieren eine besondere Art von raumzeitlichen Koordinatensystemen, welche insbesondere im erdnahen Raum Verwendung finden.

Das Wort Referenzsystem impliziert jedoch mehr als ein mathematisches Koordinatensystem in einer Raumzeit-Mannigfaltigkeit: es verweist auf einer Vermarkung realer raum-zeitlicher Ereignisse im erdnahen Raum, welche mit Hilfe spezielle Beobachtungs- und Messverfahren realisiert werden muss. Solche Ereignisse sollten geringe Ausdehnung in Raum (hier) und Zeit (jetzt) aufweisen. Beispiele hierfür sind etwa Phasenzentren in GPS - oder Radioantennen oder aber der Massenmittelpunkt eines Planeten zu einem gewissen Zeitpunkt.

2.1.1 Das Problem der Zeit

Was ist Zeit? Wenn mich niemand danach fragt, weiß ich's. Will ich es aber einem Fragenden erklären, weiß ich's nicht.

Dieser Satz von Augustinus beleuchtet sehr drastisch die Schwierigkeiten, denen sich eine Analyse des Zeitbegriffs oder anderer naturwissenschaftlicher Grundbegriffe wie z.B. Raum, Materie, Leben etc. gegenüber sieht. Hier wollen wir nur auf zwei Aspekte des Zeitbegriffes eingehen. Der eine ist theoretischer, der andere praktischer Natur. Auf theoretischer Seite hat Newton neben der "relativen, scheinbaren und gewöhnlichen Zeit" des Alltagslebens eine "absolute, wahre und mathematische Zeit" eingeführt, die "an sich und vermöge ihrer Natur gleichförmig und ohne Beziehung auf irgendeinen äußeren Gegenstand verfließt". Dieses theoretische Konzept wurde dann später in der Einsteinschen Gravitationstheorie aufgrund von Konflikten mit dem praktischen Aspekt zu Fall gebracht.

Der praktische Aspekt hängt direkt damit zusammen, wie man die Zeit misst. Der berühmte Physiker und Nobelpreisträger Richard Feynman sagte einmal: *Nicht was 'Zeit ist' beschäftigt die Physik, sondern wie man Sie misst.* In diesem Sinne ist die konzeptuelle Vorstellung von Zeit verknüpft mit der Kunst des Uhrenbaus.

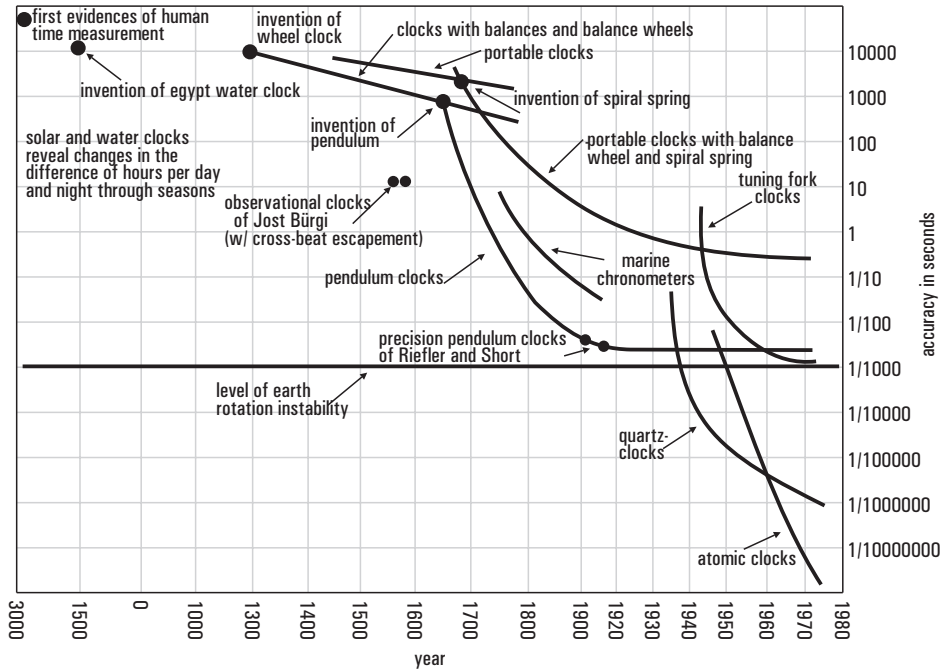


Abbildung 2.1: Die Kunst des Uhrenbaus und die damit verbundene Steigerung der Genauigkeit im Laufe der Zeit.

Eine Uhr nutzt einen physikalischen Vorgang, dessen Gesetzmäßigkeit bekannt ist und dessen Verlauf angezeigt werden kann. Es werden ausschließlich *periodische* Vorgänge gewählt, d.h. eine Zeitmessung basiert in der Regel auf einer *Frequenzmessung*.

Abb. 2.1 gibt einen Überblick über die Kunst des Uhrenbaus von 3000 v.Chr. bis heute. Man sieht, dass die Genauigkeit der Uhren in diesem Zeitraum um etwa vierzehn Größenordnungen gesteigert werden konnte. Bereits vor rund 5000 Jahren kannte man die Sonnenuhren. Man steckte einen Stab in den Boden und las aus der Schattenlänge die Uhrzeit ab. Wasseruhren hatten die Ägypter und Römer in Gebrauch. Wesentliche Fortschritte in der Genauigkeit brachte erst die Einführung des Pendels als Oszillator durch Galileo Galilei um 1600 und der Spiralfeder. Wohl bekannt ist das Längenproblem der Seefahrer, welche mit astronomischen Methoden ihre Breite leicht bestimmen konnten (Bestimmung der Höhe der Mittagssonne), nicht aber die geographische Länge. Eine Methode der Längenbestimmung auf See bestand darin, mit Hilfe eines genauen Seechronometers eine Referenzzeit, etwa die Ortszeit des Heimathafens mitzuführen. Eine Gangabweichung von nur einer Minute pro Tag dieses Chronometers hätte nach einem Monat Seereise schon einen Fehler von einer halben Stunde ergeben. In dreißig Minuten aber dreht sich die Erde um siebeneinhalb Grad – was einem Fehler von mehreren hundert Meilen bei der Navigation entspricht.

Zu Beginn des 18ten Jahrhunderts schrieb das vom englischen Parlament eingesetzte 'Board of Longitude' einen Forschungswettbewerb aus. Zwei Möglichkeiten



Abbildung 2.2: John Harrison's Seechronomter H4.

kamen in Betracht, um auf einem Schiff den Drehwinkel der Erde zu messen: das Mondstanzverfahren (der Mond steht von verschiedenen Punkten der Erde aus an verschiedenen Stellen der Himmelskugel) oder eine genau gehende Uhr, ein Marine-Chronometer. Der Preis für den Chronometer ging an den Londoner Uhrmacher John Harrison. John Harrisons über 200 Jahre altes Meisterwerk, H4 genannt, braucht einen Vergleich mit heutigen Uhren nicht zu scheuen. Das Federsystem bewirkte einen nahezu konstanten Antrieb. Und selbst Ungenauigkeiten, die durch hohe Temperaturunterschiede während der Seereise entstehen, sind ausgeschaltet. Beim offiziellen Test ging die Uhr dreimal genauer, als die Kommission gefordert hatte: nach 22-tägiger Fahrt über den Atlantik, von Portsmouth zur Insel Barbados, verglichen die Gutachter die Zeitanzeige des Marine-Chronometers mit dem Umlauf der Jupitermonde. Der Fehler betrug nicht mehr als 39 Sekunden! Damit beträgt die relative Genauigkeit des Harrison Chronometers etwa 4×10^{-7} .

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts war die Genauigkeit der Seechronometer etwa eine Zehntel Sekunde pro Tag; Pendeluhren wurden entwickelt mit einer Genauigkeit von besser als eine hundertstel Sekunde pro Tag. Einen großen Fortschritt in der Genauigkeit der Gangraten von Uhren wurde dadurch erzielt, dass man die Schwingungen eines Quarzkristalles als Oszillatorsystem anstelle von Pendel oder Feder verwendete. Noch weit genauer sind Atomuhren wie Cäsiumuhren, Wasserstoffmaser oder Springbrunnenuhren, bei denen quantenmechanische Systeme die Stabilität einer Quarzuhr deutlich verbessern. Diese klassischen Atomuhren basieren auf atomaren Übergangsfrequenzen, welche im Mikrowellenbereich liegen. Aufgrund des stochastischen Charakters dieser Uhren muss man Mittelungszeiten von Minuten bis Tagen in Kauf nehmen, um höchste Genauigkeiten zu erzielen. Inzwischen ist es gelungen, atomare Übergangsfrequenzen im Optischen für den Bau von Atomuhren zu nutzen, wobei Mittelungszeiten im Sekundenbereich liegen können. Inzwischen liegen erreichte Uhrengenauigkeiten im Bereich von 10^{-17} . Eine Zahl die mit dem Weltalter von rund 4×10^{17} Sekunden verglichen werden sollte. Eine vertiefte Behandlung vieler wichtiger



Abbildung 2.3: Eine moderne Armbanduhr: Planetarium 2000 von Christiaan van der Klaauw.

Aspekte der Zeitmessung finden Sie in Kapitel 3.

2.1.2 Das Problem räumlicher Koordinaten

Bemerkenswert ist, dass die präzisen astronomisch-geodätischen Verfahren zur Bestimmung räumlicher Koordinaten, auf hochgenauen Zeitmessungen basieren. Dies trifft auf die geodätischen Raumverfahren wie *GPS* (*GLONASS*, *GALILEO*), Lasermessungen zu Satelliten (SLR) oder zum Mond (LLR), der Radiointerferometrie auf großen Basislinien (VLBI) genauso zu, wie Radarmessungen zu Planeten oder Raumsonden. Die wichtigsten geodätischen Messverfahren werden in diesem Skript ab Kapitel 5.2 behandelt.

Historisch betrachtet war die Positionsbestimmung (Länge und Breite) eines terrestrischen Standortes mit klassischen astronomischen Verfahren von großer Bedeutung, die im GPS-Zeitalter nahezu verloren ging. Dennoch kommen die Positionsbestimmung mittels Höhenstandlinienverfahren und die Azimutbestimmung eines Zielpunktes (Mire) mit Hilfe von Sonnenbeobachtungen selbst heute noch zum Einsatz. In Kapitel 5.1 werden diese Methoden daher vertieft behandelt.

Die soeben erwähnten modernen Methoden der Positionsbestimmung haben eine beachtliche Genauigkeit erreicht: sie liegt bei VLBI bei etwa 7 mm und dies für Stationen, welche tausende Kilometer voneinander getrennt liegen. Die Entfernung zu gewissen Retroreflektoren auf der Mondoberfläche kann mittels LLR im Zentimeterbereich bestimmt werden.

2.2 Anwendungen astronomisch-geodätischer Messverfahren

Durch die heute erzielbaren Genauigkeiten von Zeit- und Positionsmessungen kann mit Hilfe astronomisch-geodätischer Referenzsysteme eine Fülle von Anwendungen realisiert werden.

2.2.1 Navigation

Die klassische Anwendung astronomisch-geodätischer Referenzsysteme ist nach wie vor die Navigation. Es kann nicht verschwiegen werden, dass das US-amerikanische satellitengestützte GPS-Navigationssystem primär zu militärischen Zwecken aufgebaut wurde und dessen Genauigkeit für den zivilen Nutzer jederzeit eingeschränkt werden kann. Aus diesem Grunde hat sich die europäische Gemeinschaft auch entschlossen, ein eigenes satellitengestütztes Navigationssystem GALILEO aufzubauen.

Für die Durchführung interplanetarer Raumfahrtmissionen ist die Verwendung von hoch-genauen astronomisch-geodätischen Referenzsystemen zwingend notwendige Voraussetzung.

2.2.2 Globale Geodynamik und das System Erde

Eine der bemerkenswertesten Aspekte moderner astronomisch-geodätischer Messverfahren liegt in ihren Beiträgen zur Informationsgewinnung über das System Erde. Das klassische astronomisch-räumliche Referenzsystem trägt sowohl die Rotationsbewegung, die z -Achse wird über den Rotationsvektor der Erde definiert, wie auch die Translationsbewegung der Erde, die x -Achse wird über den Schnittpunkt des Himmelsäquators mit der Ekliptik (dem Frühlingspunkt) definiert, in seiner Definition. Die Bewegung dieses klassischen Referenzsystems in einem quasi-Inertialsystem wird durch Präzession und Nutation zum Ausdruck gebracht (siehe Kapitel 8). Die entsprechende Bewegung im terrestrischen System ist die sogenannte Polbewegung. Sie führt zu Schwankungen der astronomischen Länge, Breite und Azimut und wird eingehender in Kapitel 9 beschrieben. Zusammen mit den Schwankungen der siderischen Tageslänge von Millisekunden pro Tag bilden die Parameter der Präzession, Nutation und Polbewegung die Erdorientierungsparameter (EOP). Die EOPs können heutzutage mit unvorstellbarer Genauigkeit vermessen werden. Genauigkeiten für die entsprechenden Winkel liegen im Bereich von einigen Mikro-Bogensekunden. Dies impliziert, dass kleinste Variationen in den verschiedenen Subsystemen der Erde nachgewiesen werden können. So können heute Phänomene wie der El Niño¹ in den EOPs nachgewiesen werden. Selbst anthropogen induzierte Klimavariationen, etwa verknüpft mit Treibhausgasen, könnten in nächster Zeit aus Analysen der EOPs abgeleitet werden.

Bei den EOPs hat man es mit globalen integralen Größen des Systems Erde, die mit Drehimpulsvariationen verknüpft sind, zu tun. Methoden wie beispielsweise SLR können aber auch bedeutende Informationen bezüglich lokaler Massentransporte liefern, was etwa für eine zukünftige Erdbebenvorhersage von Bedeutung sein könnte.

2.2.3 Scheinbare, wahre und mittlere Örter

Die astronomischen Koordinaten von Himmelskörpern (Rektaszension α und Deklination δ) unterscheiden sich je nachdem in welchem Bezugssystem sie bestimmt werden. Ein großer Teil dieses Werks widmet sich der detaillierten Beschreibung der nötigen Teilschritte, um von dem einem in ein anderes Bezugssystem zu wechseln. Um welche Effekte korrigiert werden muss, ist Thema von Kapitel 7.

¹Eine warme Meeresströmung im Pazifik hin zur Westküste Südamerikas, welche in der Regel mit einem Fischsterben vor der Peruanischen Küste verknüpft ist, da die Fischnahrung an kalte Strömungen gebunden ist.

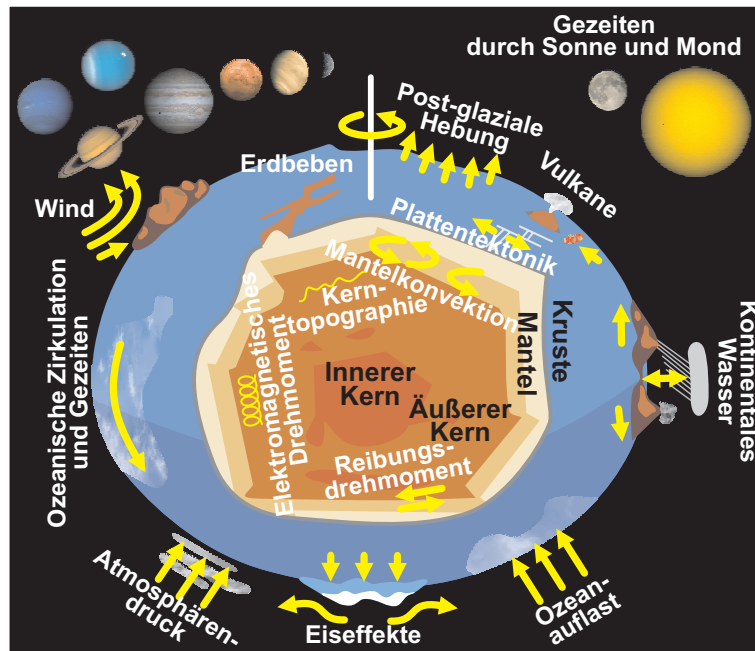


Abbildung 2.4: Verschiedene Prozesse, welche die Erdrotation beeinflussen.

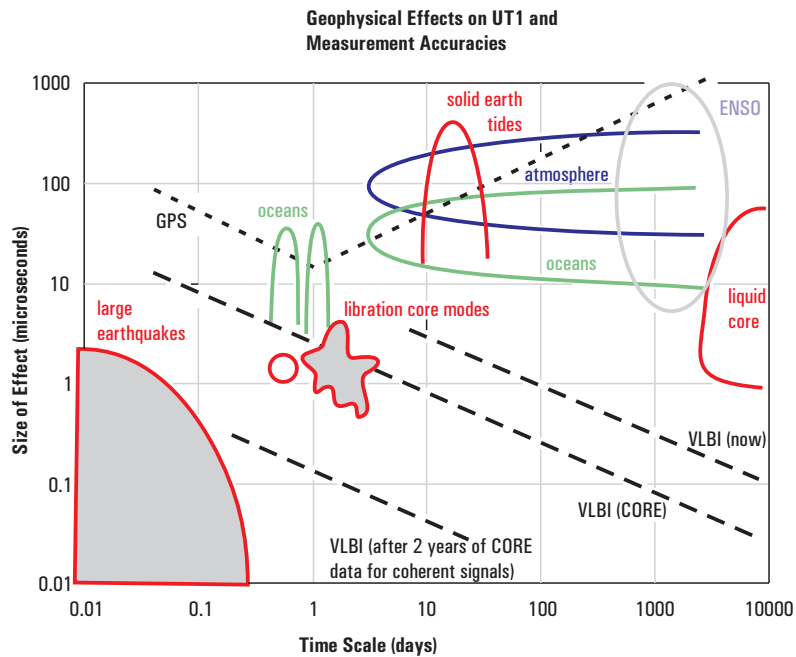


Abbildung 2.5: Verschiedene Einflüsse auf die Schwankungen der Tageslänge (UT1).

2.2.4 Hochgenaue Astrometrie und Weltbild

Schließlich sei noch der Aspekt der hochgenauen satellitengestützten Astrometrie erwähnt. Das astronomische Referenzsystem, eine Art globales quasi-Inertialsystem als notwendige Grundlage einer globalen Geodynamik, war über viele Jahrzehnte hinweg durch einen Sternkatalog (einem Fundamentalkatalog) realisiert worden. Momentan wird es durch einen Positionskatalog von Radioquellen, dem ICRF, realisiert. Wird das geplante astrometrische Projekt *Gaia* von Erfolg gekrönt sein, so wird wieder ein optischer Katalog mit Positionsangaben von einigen Mikro-Bogensekunden das astronomische quasi-Inertialsystem repräsentieren. Eine solche hochgenaue Astrometrie wird darüber hinaus helfen, bedeutende Fragen unseres kosmologischen Weltbildes zu beantworten bzw. Feinheiten unseres kosmischen Standardmodells liefern. Möglicherweise erfahren wir dadurch, ob unser All eine geschlossene, flache oder offenen Weltgeometrie aufweist und ob unser Kosmos bis in alle Ewigkeit weiter beschleunigt expandieren wird.

Das Problem der Zeit

Kapitel 3

Zeitbestimmung, Zeithaltung und Zeitverbreitung

3.1 Bestandteile einer Uhr

Der konkrete Aufbau einer Uhr kann sehr verschieden sein. Was man zur Zeitzählung benutzte, hat sich im Laufe der Menschheitsgeschichte immer wieder gewandelt und ist schon immer auch direkt mit dem wissenschaftlichen Fortschritt verknüpft gewesen. Die wesentliche Bestandteile sind aber bei jeder Uhr gleich:

- ein Oszillator, d. h. ein schwingungsfähiges System, durch welches eine Frequenz bereitgestellt wird.
- ein System, durch das der Oszillator stets in geeigneter Weise angetrieben wird und
- ein Zeitgenerator, der die Frequenzzählung und Übersetzung in eine Zeitangabe durchführt und eine Anzeige ermöglicht.

Allgemein gilt, dass eine Uhr umso genauer ist, je höher die Frequenz des benutzten Oszillators ist.

Tabelle 3.1: Beispiele für Oszillatoren

Oszillator	Art der Schwingung	Periodendauer
System Erde-Sonne	Erdumlauf um die Sonne	1 Jahr
System Erde-Mond	Mondumlauf um die Erde	1 Monat
Erde	Erdrotation	1 Tag
Kompensationspendel	Pendelschwingung	1 s
Spiralfeder-Masse-System	Drehschwingung	0.2 – 0.5 s
Stimmgabel	mechanische Schwingung	2 – 4 ms
Quarzkristall	Kristallschwingung	10 μ s – 1ns
Atom/Molekül	Atom- bzw. Molekülschwingung	0.04 – 0.7 ns

3.2 Stabilität von Oszillatoren

Im folgenden wird es von Bedeutung sein, eine genaue Vorstellung von der Güte einer Atomuhr (auch Oszillators genannt) zu besitzen. Eine solche Gütegröße kann auf statistischem Wege eingeführt werden. Üblicherweise wird hier die sogenannte *2-Punkt Allan-Varianz* verwendet, welche im Folgenden eingeführt werden soll.

Genauere Frequenzgeneratoren, wie z.B. Quarzoszillatoren oder Atomfrequenzstandards weisen Instabilitäten in der Frequenzerzeugung auf, die sowohl zufälligen als auch systematischen Charakter haben. Systematische Änderungen sind z.B.

- Frequenzdrifts, die etwa bei Quarzoszillatoren infolge von *Alterung* (Ausbilden von Fehlstellen im Gitter) auftritt
- ungewollte Frequenzmodulationen, verursacht durch die Niederfrequenz des Versorgungsstromes oder
- quasi-periodische Frequenzmodulation als Folge von Temperatur- und Druckschwankungen.

Gelegentlich treten bei diesen Oszillatoren aus bisher ungeklärten Gründen Unstetigkeiten (Sprünge) in der Frequenz auf.

Für die weiteren Betrachtungen sei t in hinreichender Genauigkeit die Newtonsche Zeitvariable. Das Ausgangssignal (z.B. Wechselspannung) eines *idealen* Oszillators sei durch

$$U(t) = U_0 \sin 2\pi f_0 t$$

gegeben. Ein *nicht-idealer* Oszillator weist zeitabhängige Amplitudenschwankungen $\epsilon(t)$ und Phasenschwankungen $\varphi(t)$ auf, d.h.

$$U(t) = (U_0 + \epsilon(t)) \times \sin(2\pi f_0 t + \varphi(t)).$$

Amplitudenschwankungen spielen jedoch für die Thematik der Zeitbestimmung nur eine untergeordnete Rolle (Phasenwinkel werden bei Nulldurchgängen des Signales bestimmt), sodass wir schreiben

$$U(t) = U_0 \sin \phi(t)$$

mit

$$\phi(t) = 2\pi f_0 t + \varphi(t).$$

Mit der momentanen Frequenz

$$f(t) = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

berechnet sich die zeitabhängigen Frequenzfluktuation $\Delta f(t)$ als

$$\Delta f(t) \equiv f(t) - f_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt}.$$

und die relativen Frequenzfluktuation mit

$$y(t) \equiv \frac{\Delta f(t)}{f_0}$$

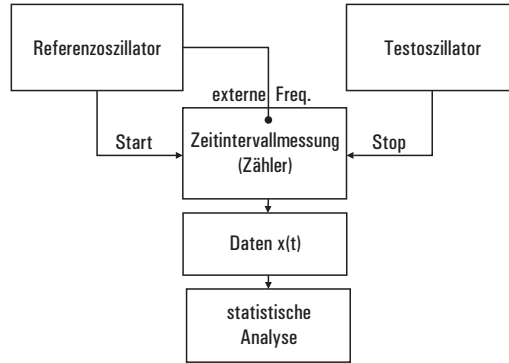


Abbildung 3.1: Einfache Messanordnung zur Bestimmung der Phasenzeit $x(t)$.

ergibt sich die *Phasenzeit* $x(t)$:

$$x(t) \equiv \int_{t_0}^t y(t) dt.$$

$x(t)$ entspricht dem *Zeitfehler*, den eine Uhr seit dem Start ($t = 0$) aufweist. Die relative Frequenzfluktuation $y(t)$ ist aus Messungen nicht direkt zu bestimmen. Man erhält diese nur als Mittelwert über ein Zeitintervall der Dauer τ aus Phasenzeitmessungen:

$$y(t_k; \tau) = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_k + \tau} y(t) dt = \frac{1}{\tau} [x(t_k + \tau) - x(t_k)].$$

Die Phasenzeit $x(t)$ eines zu prüfenden Oszillators ist bezüglich der Phase eines Referenzoszillators zu bestimmen, wie in Abb. 3.1 dargestellt. Die Instabilität des Referenzoszillators beeinflusst natürlich ebenfalls das Messergebnis. Einfache Verhältnisse liegen vor, wenn die Frequenzinstabilität des Referenzoszillators vernachlässigt werden kann. Es sind jedoch auch Verfahren entwickelt worden, wo unter gewissen Umständen der Einfluss des Referenzoszillators eliminiert, bzw. abgetrennt werden kann.

Die Phasenzeitmessung erfolgt mit Hilfe eines Zeitintervallmessgerätes (Impulszähler). Gibt beispielsweise der Referenzoszillator jede Sekunde einen genau definierten Impuls ab, ebenso der Testoszillator, so kann die Phasenzeit *zwischen den Sekundenimpulsen* durch einen Zähler festgestellt werden: der Sekundenimpuls des Referenzoszillators startet zur Zeit t den Zähler und der Sekundenimpuls des Testoszillators stoppt den Zähler. Der Zählerstand gibt dann die Phasenzeit $x(t)$ an. Der Zähler wird hierbei von der Referenzfrequenz gesteuert.

Häufig liegt der Fall vor, dass sich $y(t)$ schreiben lässt als

$$y(t) = y_r(t) + a t + y_0,$$

wenn $y_r(t)$ zufällige stochastische Schwankungen bezeichnen, a ist der Alterungskoeffizient und y_0 eine konstante *Frequenzablage*. Für die Phasenzeit $x(t)$ ergibt sich dann

$$x(t) = x_r(t) + \frac{1}{2} a t^2 + y_0 t$$

mit

$$x_r(t) = \int y_r(t) dt + x_0.$$

In der Regel gilt:

$$\int_{t_0}^t y_r(t) dt = \int_{t_0}^t x_r(t) dt = 0.$$

Wir wollen nun eine *Messreihe* $\mathcal{M}(N, \Delta t, \tau)$ für $y(t, \tau)$ definieren. Insgesamt sollen bei einer solchen Messreihe N über eine kleine Zeitspanne τ gemittelte y -Werte in regelmäßigen Zeitabständen $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ ermittelt werden. So kann man den Mittelwert

$$\langle y_i \rangle_N \equiv \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k$$

und die Varianz

$$\sigma_y^2(N, \Delta t, \tau) \equiv \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (y_k - \langle y_i \rangle_N)^2$$

bestimmen. Die Varianz hängt je nach Oszillator-Typ von der Mittelungszeit τ ab. Durch die begrenzte Anzahl N ist diese Berechnung des Mittelwertes und der Varianz nur eine Abschätzung. Den wahren Werten käme eine Abschätzung nahe, wenn sehr viele Werte ($N \rightarrow \infty$) vorlägen. Eine andere Möglichkeit besteht jedoch darin, die Messreihe $\mathcal{M}(N, \Delta t, \tau)$ sehr oft zu wiederholen.

Führt man die Berechnung der Varianz mit verschiedenen Mittelungszeiten τ durch, so ergibt sich eine Abhängigkeit der Varianz von der Mittelungszeit τ . Dies ist graphisch in Abb. 3.3 dargestellt.

Wir denken uns jetzt, dass die Messreihe M -mal durchgeführt wird. Als Maß für die Stabilität eines Oszillators können wir dann die *ALLAN-Varianz*

$$\langle \sigma_y^2(N, \Delta t, \tau) \rangle \equiv \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sigma_{y_i}^2(N, \Delta t, \tau)$$

eingeführen. Im Spezialfall $N = 2$ gewinnt man so die 2-PUNKT ALLAN-Varianz

$$\langle \sigma^2(2, \Delta t, \tau) \rangle \equiv \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sigma_i^2(2, \Delta t, \tau).$$

Es ist hierbei

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \left[\left(y_1 - \frac{y_1 + y_2}{2} \right)^2 + \left(y_2 - \frac{y_1 + y_2}{2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} (y_2 - y_1)^2 \end{aligned}$$

und damit

$$\langle \sigma^2(2, \Delta t, \tau) \rangle = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \frac{1}{2} (y_{k+1} - y_k)^2.$$

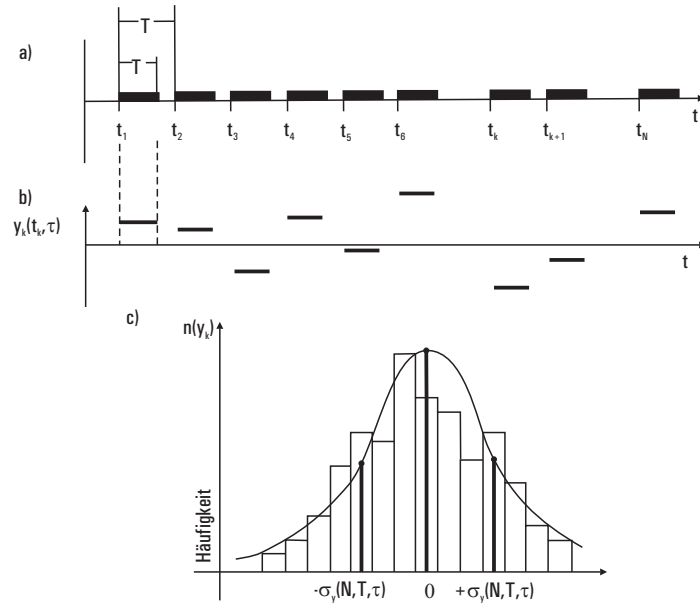


Abbildung 3.2: a) Messintervalle zur Ermittlung der relativen Frequenzfluktuation; b) Messwerte über eine Zeitspanne τ gemittelt; c) Häufigkeitsverteilung von $y_k(t_k, \tau)$.

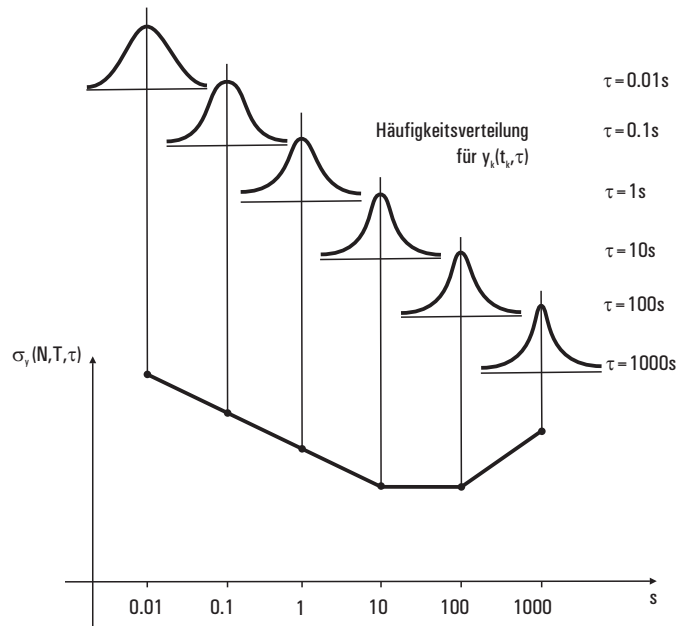


Abbildung 3.3: Schematische Darstellung der Abhängigkeit $\sigma_y(N, \Delta t, \tau)$ von der Mittelungszeit τ .

Als *Autokovarianzfunktion* des Oszillatorsignales bezeichnet man die Funktion

$$R_y(\tau) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T y(t) \cdot y(t + \tau) dt,$$

welche gemäß des Wiener-Khintchine Theorems mit der *spektralen Leistungsdichte* $S_y(f)$ des Signals verknüpft ist

$$S_y(f) = 4 \int_0^\infty R_y(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau$$

beziehungsweise

$$R_y(\tau) = \int_0^\infty S_y(f) \cos(2\pi f\tau) df.$$

I.a. lässt sich die spektrale Leistungsdichte $S_y(f)$ eines Oszillators so darstellen:

$$S_y(f) = h_{-2}f^{-2} + h_{-1}f^{-1} + h_0 + h_1f + h_2f^2$$

und man kann den einzelnen f^s Termen verschiedene Rausch-Typen zuweisen:

h_{-2} : Random Walk in y ;

h_{-1} : Flicker Rauschen in y ; entsteht z.B. durch Schwankungen in den Netzgeräten;

h_0 : Weißes Rauschen in der Frequenz entspricht Random Walk in der Phase;

h_1 : Flicker Rauschen der Phase, hervorgerufen durch elektronische Bauelemente

h_2 : Weißes Rauschen der Phase, hervorgerufen durch additives Rauschen in der Elektronik.

Schematisch ist dieses Verhalten in Abb. 3.4 dargestellt.

3.2.1 Bias und Drift

Die von einem realen Frequenznormal erzeugte Frequenz $f(t)$ zeigt neben den stochastischen Schwankungen weitere Effekte, die im gewissen Rahmen vorhersehbar sind. Ist f_0 die Nominalfrequenz eines Frequenznormals, so gilt allgemein:

$$f(t) - f_0 = \Delta f + \dot{f}(t - t_0) + f_r(t). \quad (3.1)$$

Hierbei wird Δf der *Bias* genannt und der \dot{f} -Term beschreibt den *Drift* des Oszillators (f_r beschreibt die stochastischen Fluktuationen). In Abb. 3.5 ist ein Vergleich der Anzeigen einer kommerziellen Cäsium-Uhr mit der eines ganzen Ensembles von Atomuhren des US-Naval-Observatory (USNO; Washington) zu sehen. Im mittleren Teil wurde ein linearer Trend abgezogen, im unteren Teil darüber hinaus noch ein quadratischer Anteil (Jones & Tryon, 1987).

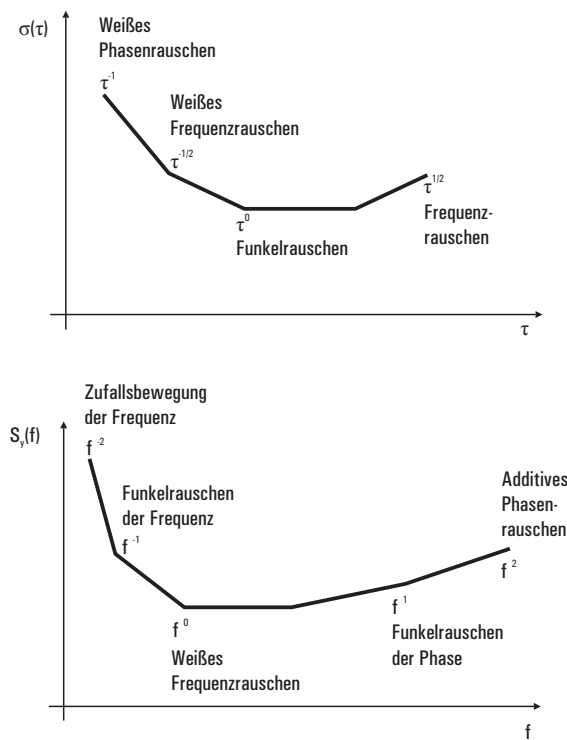


Abbildung 3.4: Verschiedene Rauschtypen im Zeit- und Frequenzbereich.

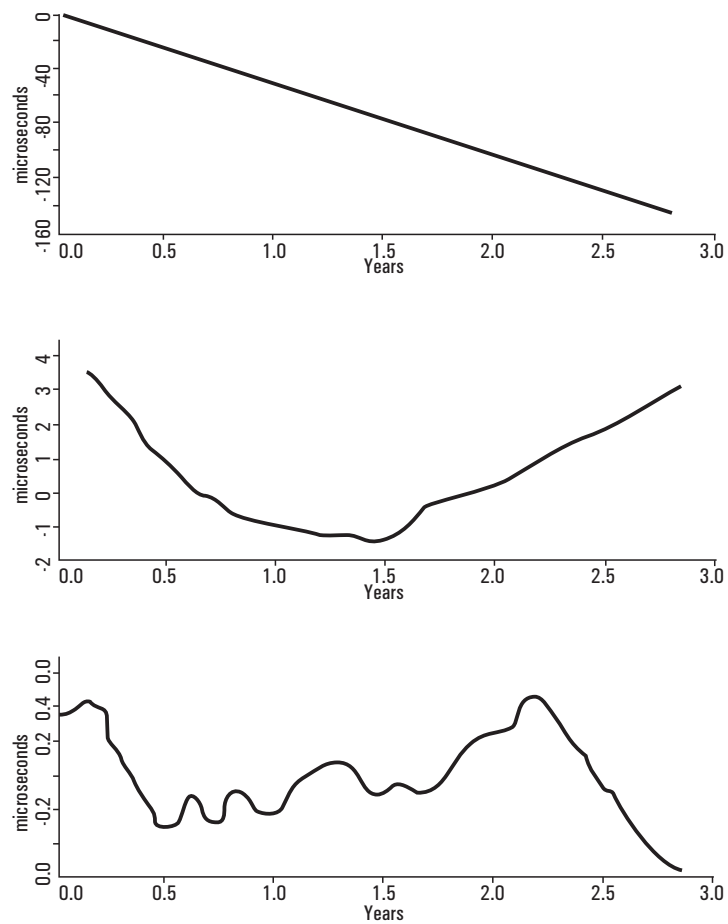


Abbildung 3.5: Vergleich einer kommerziellen Cs-Uhr mit einem Ensemble von Atomuhren. Im mittleren Teil wurde ein linearer Trend abgezogen, im unteren Teil darüber hinaus noch ein quadratischer Anteil (Jones & Tryon, 1987).

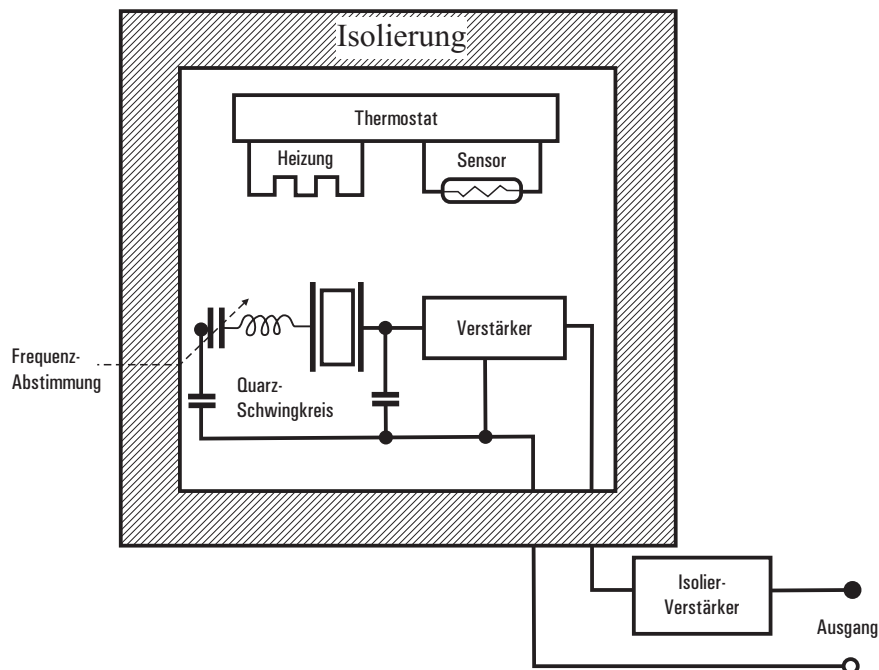


Abbildung 3.6: Blockschaltbild eines Quarzoszillators.

3.3 Quarz- und Atomuhren

3.3.1 Quarzuhren

Im Quarzoszillator nutzt man die mechanischen Schwingungen eines Quarzkristalles unter Zuhilfenahme des piezo-elektrischen Effektes aus: verformt man bestimmte Kristalle zwischen zwei Elektroden, so kann eine Spannung zwischen den Elektroden induziert werden. Legt man umgekehrt eine Spannung an die Elektroden, so wird dieser aufgrund des piezo-elektrischen Effekte deformiert. Wird der Kristall zum Schwingen angeregt, so erzeugt diese eine entsprechende Wechselfspannung, welche zur Konstruktion einer Quarzuhr verwendet werden kann. Die Frequenz hängt dabei im wesentlichen von Form und Größe des Quarzstückes ab. Die Elektroden zum Abgriff der elektrischen Ladungen werden im allgemeinen unmittelbar auf dem Kristallkörper aufgebracht. Abb. 3.6 zeigt ein typisches Blockschaltbild eines Quarzoszillators, Abb. 3.7 ein typisches Varianzverhalten kommerzieller Quarzoszillatoren.

3.3.2 Atomuhren

Bei Atomoszillatoren dienen gewisse atomare Hyperfeinstruktur-Niveaus in bestimmten Atomen, wie Wasserstoff (^1H), Rubidium (^{87}Rb) oder Cäsium (^{133}Cs) dazu, die Frequenzstabilität von Quarzoszillatoren wesentlich zu verbessern. Die Hyperfeinübergänge kommen durch magnetische Wechselwirkungen zwischen dem Spin des

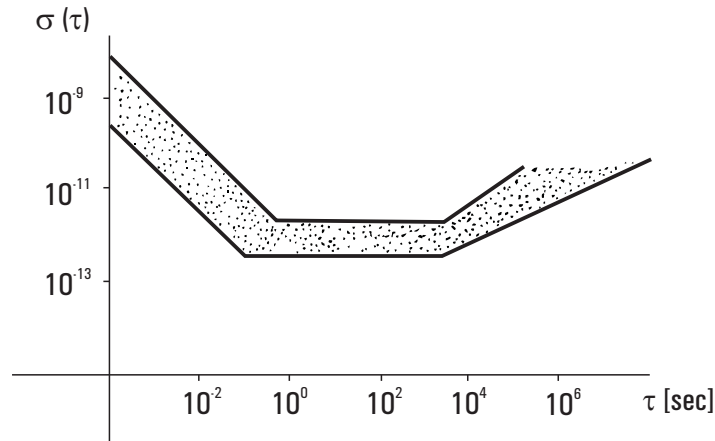


Abbildung 3.7: Typisches Varianzverhalten kommerzieller Quarzoszillatoren.

Atomkerns und dem des Valenzelektrons außerhalb gefüllter Elektronenschalen zustande. Der Abstand der einzelnen Energieniveaus ist so beschaffen, dass die Übergangsfrequenzen im Mikrowellenbereich liegen, wo entsprechende Analysetechniken zur Verfügung stehen.

Zur Charakterisierung dieser Energieniveaus dient die Quantenzahl F , die den Gesamtspin des Atoms beschreibt. Sie setzt sich aus der Spinquantenzahl des Kerns I und der des Valenzelektrons mit dem Wert $1/2$ (in Einheiten des reduzierten Planck'schen Wirkungsquantums \hbar) zusammen:

$$F = I \pm \frac{1}{2}.$$

Die beiden Vorzeichen weisen darauf hin, dass die Richtung des Elektronenspins entweder parallel oder antiparallel zu der des Kernspins sein kann.

Mit den Werten $I = 1/2, 3/2$ bzw. $7/2$ für H, Rb bzw. Cs erhält man damit folgende Möglichkeiten:

$${}^1\text{H}: F = 0 \text{ und } F = 1,$$

$${}^{87}\text{Rb}: F = 1 \text{ und } F = 2,$$

$${}^{133}\text{Cs}: F = 3 \text{ und } F = 4.$$

Legt man ein statisches Magnetfeld an, so bewirkt der sogenannte *Zeeman-Effekt* eine Verschiebung und Aufspaltung dieser Energieniveaus in magnetische Unterzustände. Diese Unterzustände werden durch die weitere Magnetquantenzahl m_F charakterisiert. Sie beschreibt die Komponente des Gesamtspins in Richtung des angelegten Magnetfeldes und kann für jedes F -Niveau folgende Werte annehmen:

$$m_F = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm F.$$

Damit spaltet jedes F -Niveau in $2F + 1$ magnetische Unterniveaus auf.

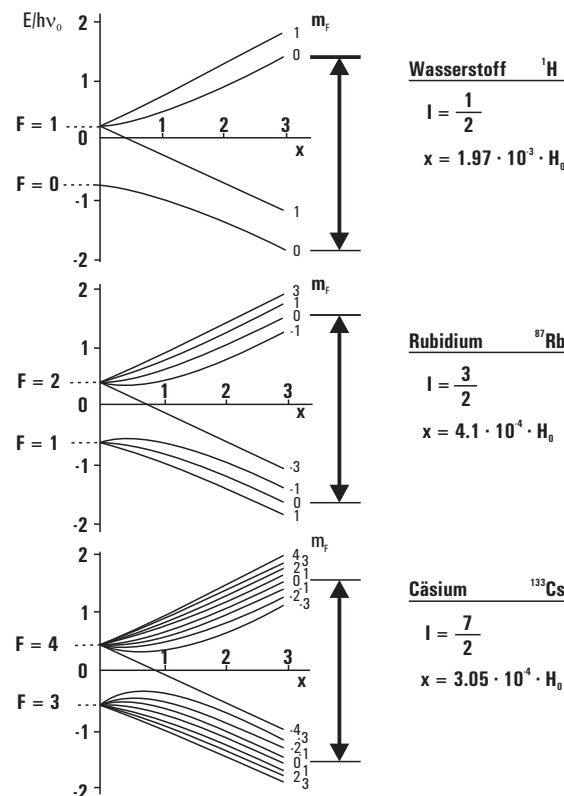


Abbildung 3.8: Im Frequenznormalbau genutzte Frequenzen der Hyperfeinstrukturübergänge von Wasserstoff-, Rubidium- und Cäsiumatomen.

Aus der Quantenmechanik ergibt sich, dass nur unter gewissen Bedingungen Übergänge möglich sind. Erlaubt sind Übergänge nur, falls $\Delta F = 0, \pm 1$ und $\Delta m_F = 0, \pm 1$. Für die Realisierung von Atomfrequenznormalen sind die durch $\Delta F = \pm 1, \Delta m_F = 0$ gekennzeichneten Übergänge am besten geeignet. Die bei den Wasserstoff-, Rubidium- und Cäsiumnormalen verwendeten Übergänge sind in Abb. 3.9. zu sehen.

Cäsium-Uhren

Eine Cäsium-Atomuhr basiert auf dem von Isador Rabi 1945 entwickelten Prinzip der magnetischen Atomstrahlresonanz. Die wesentlichen Teile eines Cäsiumoszillators sind in Abb. 3.10 zu sehen. Die Cäsium-Atomstrahlquelle erzeugt bei 100-200 °C Cäsiumdampf, der aus einer kleinen Öffnung auströmen kann. Die Cs-Atome durchlaufen nun erst ein inhomogenes Magnetfeld, welches es erlaubt, die Atome mit den interessierenden Energieniveaus ($F = 3, F = 4$) aufgrund ihres magnetischen Dipolmomentes voneinander zu trennen. Üblicherweise selektiert ein Ablenkmagnet (A) die Cs-Atome so, dass nur die Atome des höheren ($F = 4$) Energieniveaus in den Mikrowellenresonator gelangen. Im Bereich des Resonators ist das Erdmagnetfeld abgeschirmt und die

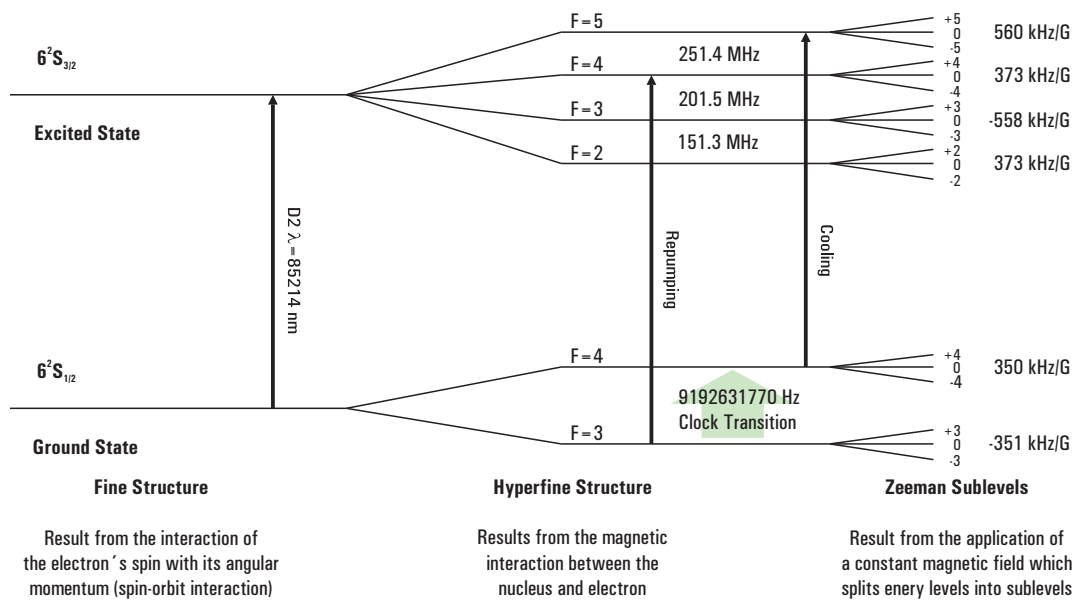


Abbildung 3.9: Aufspaltung der Energieniveaus im Cäsium-Atom. Die Feinstruktur der Linien resultiert aus der Spin-Bahnkopplung der Elektronen, die Hyperfeinstruktur aus der Wechselwirkung von Elektronen- und Kernspin. Ein schwaches Magnetfeld produziert die Zeemann-Aufspaltung.

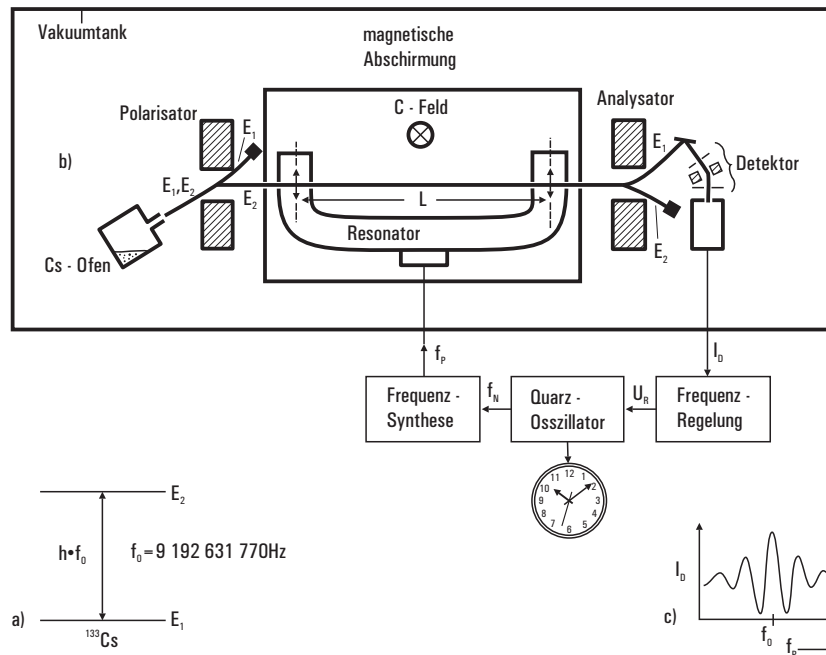


Abbildung 3.10: Schaltbild eines Cs-Frequenzgenerators.

Hyperfeinstrukturaufspaltung wird mit einem sehr konstanten Magnetfeld erzeugt. An den Endpartien des Resonators wirkt senkrecht zur Strahlrichtung – um den Doppellereffekt auszuschalten – ein hochfrequentes Wechselfeld mit etwa 9.2 GHz. Tritt die Frequenz des Wechselfeldes mit der Übergangsfrequenz in Resonanz, so findet ein induzierter Übergang statt. Ein zweiter Ablenkmagnet (B) lenkt diese Atome dann nach dem Übergang auf einen Detektor. In einem Regelkreis kann dann die Frequenz eines Hilfsoszillators durch Maximierung der Anzahl der am Detektor empfangenen Atome eingestellt werden.

Rubidium-Uhren

Der Rubidium-Frequenzgenerator ist wie der Cs-Generator ein passives System. Der schematische Aufbau einer Rb-Uhr ist in Abb. 3.13 gezeigt. Beim Übergang des ^{87}Rb -Isotopes zwischen den Zuständen ($F = 2$) und ($F = 1$) wird Strahlung der Frequenz 6.835 GHz ausgesandt.

Das Licht einer ^{87}Rb -Lampe durchläuft zunächst eine mit ^{85}Rb -Gas gefüllte Filterzelle. Anschließend regt es ^{87}Rb -Atome in einer mit Puffergas¹ gefüllten Absorptionszelle an. Die spektrale Zusammensetzung des gefilterten Lichtes macht es nun möglich durch sogenanntes *optisches Pumpen* selektiv das untere Hyperfeinstrukturniveau der ^{87}Rb -Atome zu entvölkern, wodurch diese Atome nach einiger Zeit Aufenthalt in der

¹Dieses Gasgemisch (eine Mischung leichter Edelgase) reduziert die Stöße der Atome mit der Wand der Zelle und verlängert damit die Wechselwirkungszeit T der Atome mit der Mikrowellenbestrahlung.

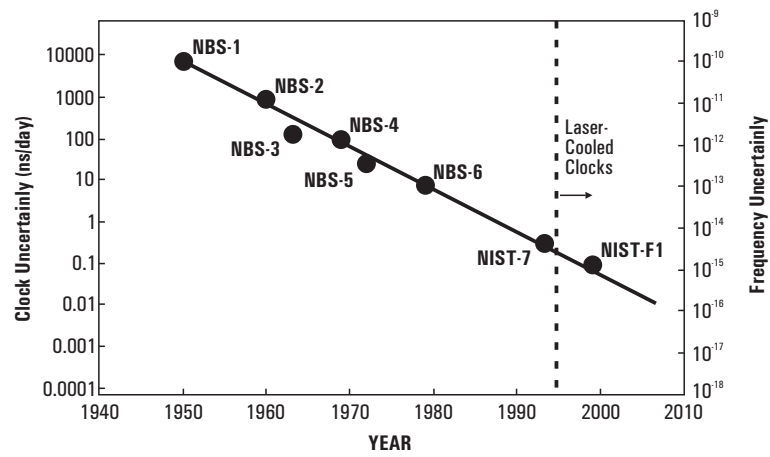


Abbildung 3.11: Frequenzstabilitäten der Atomuhren des NBS, USA.

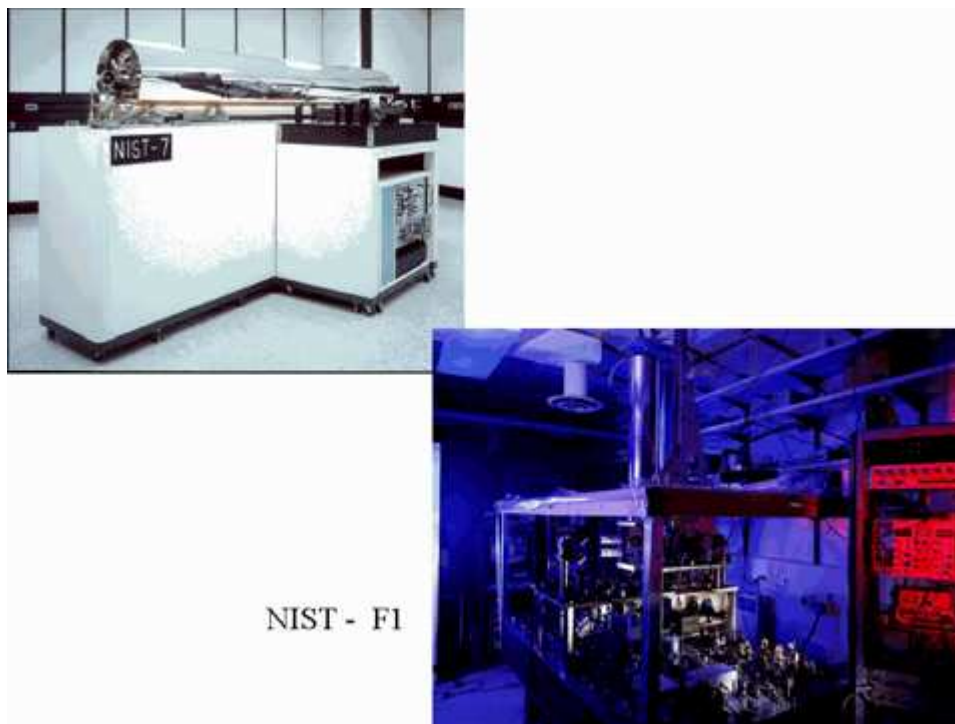


Abbildung 3.12: Das Cs-Normal NIST7 des NBS, Boulder, Colorado und die noch genauere Springbrunnenuhr NIST F1.

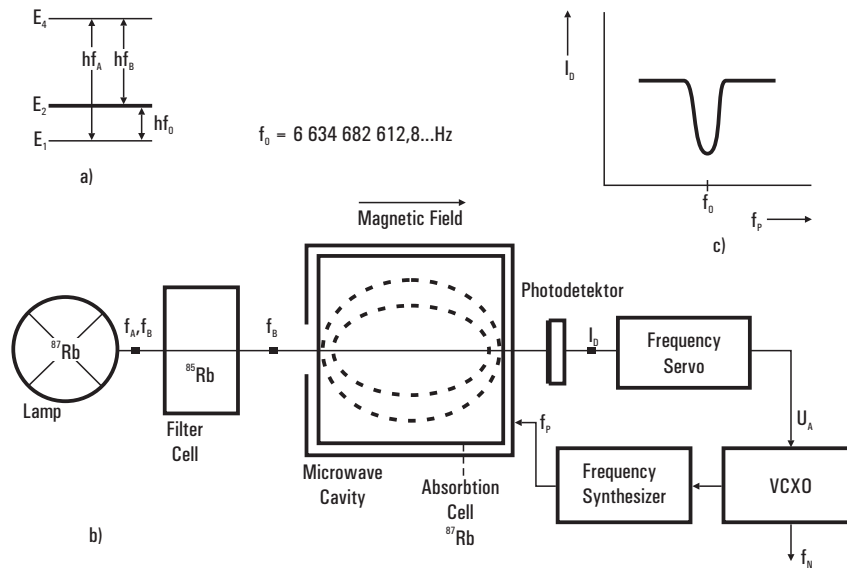


Abbildung 3.13: Funktionsprinzip einer Rb-Uhr.

Zelle kein Licht mehr absorbieren können. Das auf diese Weise weitgehend geleerte $F = 1$ Niveau wird unter Einwirkung des angelegten Hochfrequenzfeldes durch den angeregten Übergang von $F = 2$ nach $F = 1$ wieder besetzt. Das führt zu einer erneut einsetzenden Absorption des Pumplichtes. Die damit verbundene Änderung der Transparenz der Absorptionszelle wird zum Nachweis der Resonanzfrequenz über eine Photodiode genutzt und über einen Regelkreis kann wieder die Frequenz eines Quarzoszillators geregelt werden. Rubidiumnormale lassen sich wesentlich kompakter und weniger aufwendig herstellen als Cs-Normale. Entspricht die durch den Oszillator bereitgestellte Frequenz f_P genau der Resonanzfrequenz, so lässt sich in der Photodiode ein Minimum beobachten. Die Linienbreite des Resonanzsignals liegt dabei typischerweise im Bereich von 500 Hz.

Die Frequenzstabilitäten kommerzieller Rb-Frequenzgeneratoren sind in Abb. 3.14 zu sehen.

H-Maser

Mit einem Maser² ist man in der Lage, kohärente elektromagnetische Wellen zu erzeugen, welche einen Frequenzbereich von 105 Hz bis 1011 Hz umfassen. Abb. 3.15 zeigt den schematischen Aufbau eines Wasserstoffmasers. Hier wird molekularer Wasserstoff in ein Glasgefäß geleitet, in welchem eine elektrische Entladung brennt, wodurch atomarer Wasserstoff entsteht. Durch einen Ablenkmagneten werden nun die freien Atome nach ihrem Energiezustand getrennt und die angeregten Atome im höheren Energiezustand werden in das Auffanggefäß fokussiert. Das Gefäß besteht aus Quarzglas und ist mit Teflon, Paraffin oder anderen Stoffen beschichtet. Diese Beschichtung

²Maser: englische Abkürzung für **M**icrowave **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation

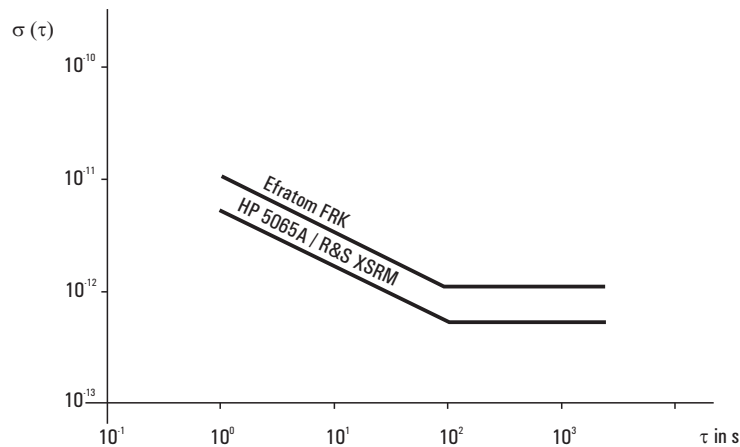


Abbildung 3.14: Frequenzstabilität kommerzieller Rb-Oszillatoren.

hat den Zweck, die Verweildauer der Atome im angeregten Zustand im Kolben zu vergrößern (bis auf etwa 1 Sekunde), um die Frequenzverbreiterung durch die Unschärferelation zu verkleinern. Das Glasgefäß ist in einen Resonator eingebettet, der zum Aufbau eines sehr konstanten homogenen Magnetfeldes mit einer Spule umgeben und gegen andere, äußere Magnetfelder abgeschirmt ist. Während der Verweildauer im Gefäß werden die Atome über den Resonator mit einem hochfrequenten Rauschfeld bestrahlt, um induzierte Emission zu bewirken. Tritt eine solche ein, so kann die Übergangsfrequenz aus dem Hohlraumresonator abgegriffen werden. Abb. 3.16 zeigt die typische Stabilität von H-Masern.

Springbrunnenuhren

Im Vergleich mit konventionellen Cäsiumuhren lässt sich die Genauigkeit und Stabilität atomarer Frequenznormale wesentlich verbessern, wenn durch Kühlung in den Sub-Kelvin-Bereich die thermische Bewegung der als Referenz dienenden Atome stark verringert wird. Neutrale Atome, insbesondere auch Cäsiumatome, können in 'optischen Fallen' durch Wechselwirkung mit Laserlicht gespeichert, gekühlt und manipuliert werden. Damit können dann beispielsweise Cäsium-Frequenznormale in der sogenannten 'Springbrunnen-Geometrie' (fountain clocks) aufgebaut werden.

Eine solche, mit Cäsium-Atomen arbeitende, Springbrunnenuhr befindet sich im Observatorium zu Paris. Hier werden die Cäsium-Atome auf ein paar Mikrokkelvin abgekühlt und etwa einen Meter nach oben geschleudert. Im Gravitationsfeld der Erde bewegen diese sich dann in ihrer parabolischen Bahn zweimal durch einen Mikrowellenresonator. Der Vorteil solcher Springbrunnenuhren liegt in der großen Zeit, welche zwischen den zwei Durchgängen verstreicht. Resonanzbreiten von weniger als einem Hz können so erreicht werden. Gegenwärtig werden Langzeitstabilitäten von rund 10^{-15} erzielt.

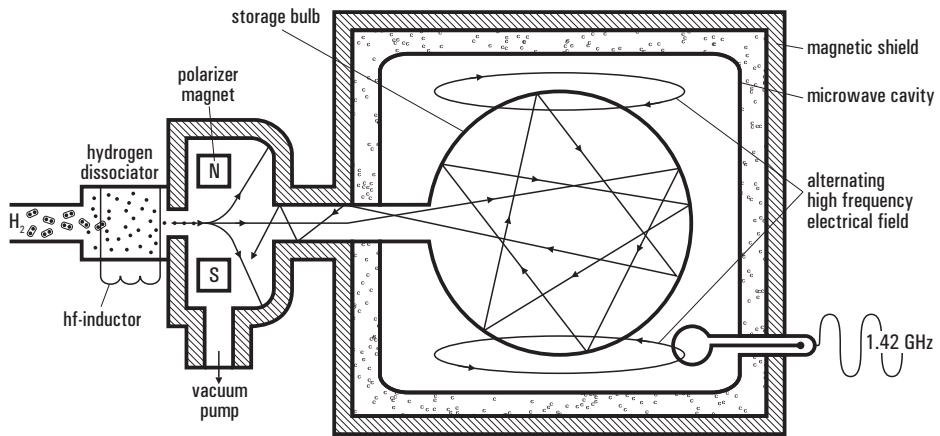


Abbildung 3.15: Schema eines Wasserstoffmasers.

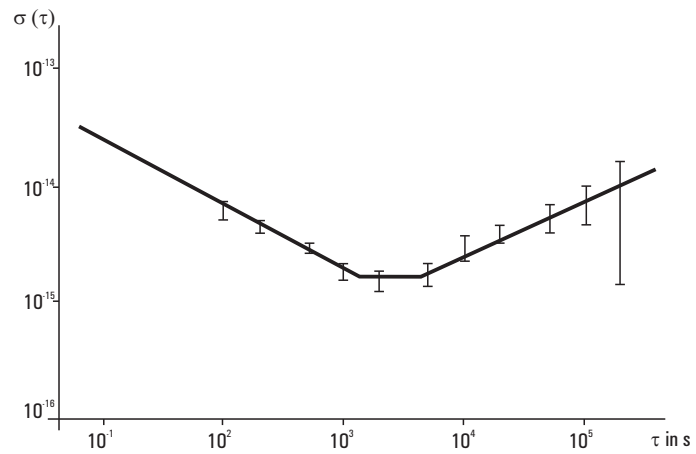


Abbildung 3.16: Typisches Stabilitätsverhalten von H-Masern.

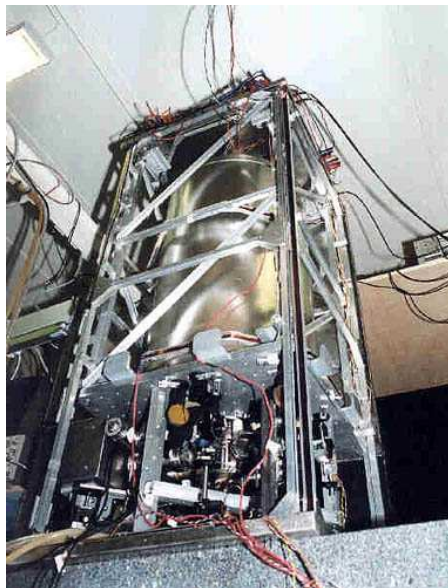


Abbildung 3.17: Springbrunnenuhr des Observatoriums zu Paris.

Optische Uhren

Obwohl Cäsium-Uhren insbesondere in der Springbrunnen-Version heutzutage eine beachtenswerte Stabilität aufweisen, so sind doch bereits jetzt ihre Grenzen erkennbar. Die Stabilität von etwa 10^{-15} ist nur nach Mittelung über eine Zeitspanne von etwa einem Tag erreichbar, was für Echtzeitanwendungen ein Problem darstellt. Nun hängt die erreichbare Stabilität einer Atomuhr von der Uhrenfrequenz ab, welche für Cäsiumuhren bei 9,2 GHz im Mikrowellenbereich liegt. Inzwischen ist es jedoch gelungen, optische Uhren mit Uhrenfrequenzen im Bereich von 10^{15} Hz zu konstruieren. Derartige Uhren können eine Stabilität von 10^{-15} nach Mittelung über nur wenige Sekunden erreichen und es sieht aus, dass in absehbarer Zukunft die optischen Uhren den Cs-Uhren überlegen sein werden.

Eine optische Uhr besteht aus drei Hauptelementen: 1. *einem optischen Uhrenübergang*, 2. *einem lokaler Oszillator* und 3. *einem Zähler*. Dazu kommen weitere Elemente wie Fallen für Atome oder Ionen, Laser zu ihrer Kühlung etc.

1. Das erste Hauptelement ist eine hochgenaue Referenzfrequenz, welche durch eine sehr enge Absorptionslinie eines Atoms oder Ions geliefert wird. Für diesen 'Uhrenübergang' hat man inzwischen eine natürliche Linienbreite von weniger als einem Hz erreicht. Verwendung fanden hierbei ^{199}Hg oder ^{171}Yt - Ionen.
2. Das zweite Element ist ein Testlaser (auch lokaler Oszillator genannt) mit einer sehr kleinen Bandbreite.
3. Drittes Element ist schließlich ein Gerät, was in der Lage ist, die extrem schnellen Oszillationen des lokalen Oszillators zu zählen.

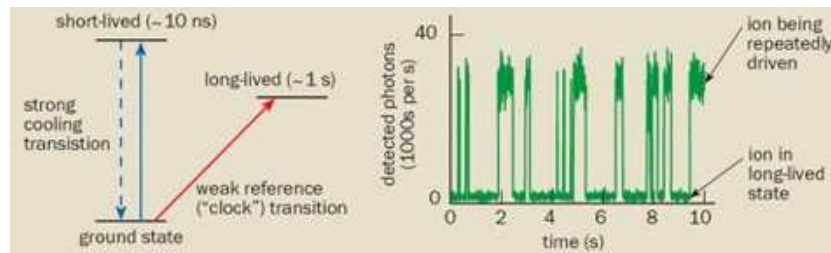


Abbildung 3.18: Energienivaus in einer optischen Uhr.

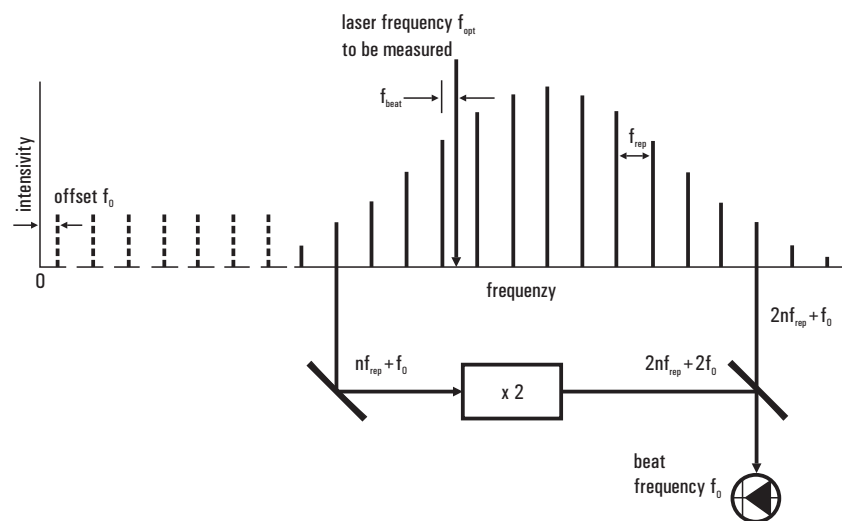


Abbildung 3.19: Der Femtosekundenkamm im Frequenzbereich.

Kritisch ist der Uhrenübergang, dessen Linienbreite so klein wie möglich sein soll. Realisiert wird er etwa durch ein einzelnes Ion, welches in einer elektromagnetischen Falle gehalten wird und mittels Laser auf weniger als 1 mK gekühlt wird. Der Uhrenübergang wird dann mit Hilfe eines extrem monochromatischen Lasers mit Linienbreiten von weniger als einem Hz ausgelotet. Wegen des sehr schmalen Uhrenüberganges ist die Absorption des Testlasers nur sehr schwach, so dass hier eine Technik des Elektronenlagerns (electron shelving) ins Spiel kommt. Die Laserkühlung des Ions geschieht über einen kurzlebigen Energiezustand (Figur (3.18)) und während einer Kühlphase wechselt der Elektronenzustand rasch zwischen diesem und dem Grundzustand hin und her, was mit der Emission von Fluoreszenzphotonen verbunden ist. Trifft der Testlaser jedoch die Uhrenfrequenz, so gelangt das Elektron in den langlebigen Uhrenzustand, was mit einer Aussetzung der Fluoreszenzstrahlung verknüpft und leicht nachzuweisen ist.

Da der lokale Oszillator mit einer Periode im Femtosekundenbereich schwingt, ist die Konstruktion eines 'Zählers' eine echte Herausforderung. Erst 1999 gelang es Ted

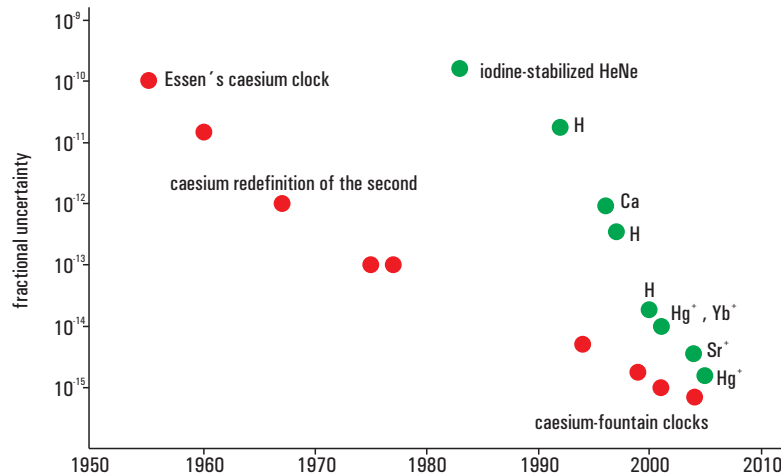


Abbildung 3.20: Vergleich der erreichten Stabilitäten von Cäsium- (rot) und optischen Uhren (grün).

Hänsch und Kollegen einen derartigen Zähler herzustellen. Der Zähler besteht dabei aus einem Femtosekunden-Laser, welcher einen ganzen Zug von Pulsen mit einer Wiederholungsfrequenz f_{rep} von einigen hundert MHz erzeugt. Im Frequenzbereich erscheint die Folge von Pulsen als eine Reihe äquidistanter Frequenzen mit Abstand f_{rep} (Abb. 3.19). Aus diesem Grunde wird ein solcher Zähler auch als Femtosekundenkamm bezeichnet. Die Frequenz einer Linie des Kammes ist durch $n f_{\text{rep}}$ plus einer Verschiebungsfrequenz f_0 gegeben. Beide Frequenzen f_{rep} und f_0 können mittels Schwebungen vermessen werden. Die Messung von f_0 ist in Abb. 3.19 angedeutet. Nun kann man den Kamm an eine Cäsiumuhr koppeln und dann die Schwebungsfrequenz zwischen der Uhrenfrequenz f_{opt} und der benachbarten Kammmode ausmessen. Inzwischen ist gezeigt worden, dass man optische Frequenzen mittels Femtosekundenkämme mit einer Genauigkeit von 10^{-19} vergleichen kann.

3.3.3 Einsatz hochgenauer Uhren

Abb. 3.21 zeigt die Anforderungen an die Frequenzstabilität bei verschiedenen modernen geodätischen Verfahren (EDM: elektromagnetische Distanzmessung; SLR: satellite laser ranging; GPS: global positioning system; LLR: lunar laser ranging; VLBI: very long baseline interferometry). Cs-Normale werden durch ihre unübertroffenen Eigenschaften im Langzeitbereich (3 Stunden bis Monate) hauptsächlich zur Zeitskalengenerierung (UTC-Zeitskala) eingesetzt. Sie finden weiterhin bei mobilen Messsystemen (mobile Laser, GPS) Anwendung. Rb-Normale werden in der Regel als Säkundärstandarts eingesetzt. Durch die gute Kurzzeitstabilität (bis zu drei Stunden) können sie für SLR, LLR, Doppler- und GPS-Messungen Verwendung finden. H-Maser werden aufgrund ihrer hervorragenden Kurzzeitstabilität und Stabilität im nahen Langzeitbereich (bis zu einigen Tagen) bei hochpräzisen Messungen, wie bei VLBI-Messungen eingesetzt.

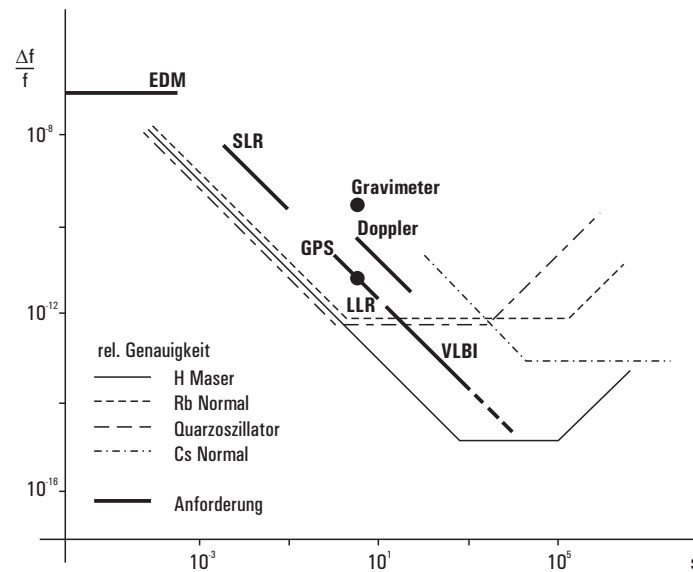


Abbildung 3.21: Anforderungen an die Frequenzstabilität bei diversen geodätischen Messverfahren.

3.4 Relativitätstheorie und metrischer Fundamentaltensor

3.4.1 Bewegte Uhren in der Speziellen Relativitätstheorie

Die Stabilitäten und Genauigkeiten gegenwärtiger Frequenznormale machen die Berücksichtigung von Effekten der Relativitätstheorie unabdingbar. Die Relativitätstheorie basiert auf einer Reihe von Prinzipien, welche experimentell mit höchster Genauigkeit Bestätigung fanden. Grundlegend ist das Prinzip von der *Konstanz der Lichtgeschwindigkeit* im Vakuum. Dieses Prinzip beinhaltet mehrere unabhängige Aspekte. Zunächst ist die Vakuumlichtgeschwindigkeit unabhängig vom Bewegungszustand der Lichtquelle, so ähnlich wie die Schallgeschwindigkeit auch nicht von der Geschwindigkeit der Schallquelle abhängt. Dann ist diese Geschwindigkeit unabhängig von Frequenz und Polarisation der Strahlung selbst. Das Vakuum ist nicht dispersiv. Es ist üblich die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum mit $c = 299\,792\,458\text{ m/s}$ zu bezeichnen. Diese wird heute zur Definition des Meters verwendet. Gemäß der 17ten Konferenz für Maße und Gewichte (1983) gilt: ein Meter ist die Strecke, welche Licht im Vakuum während eines Zeitintervalles von $1/299\,792\,458\text{ s}$ zurücklegt.

Nun ist die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum auch unabhängig vom Bewegungszustand des Beobachters, etwas was vollkommen im Gegensatz zum 'gesunden Menschenverstand' steht. Damit wird das Ablesen einer Uhr relativ, d.h. abhängig vom relativen Bewegungszustand zwischen Uhr und Beobachter, da gemessene Zeitspannen von der Ausbreitung elektromagnetischer Signale abhängen. Wir betrachten dazu eine einfache Lichtuhr, die nur aus zwei ideal reflektierenden Spiegeln mit konstantem Ab-



Abbildung 3.22: Alter Internationaler Meter-Prototyp: ein Standardbarren aus Platin-Iridium. Dies wurde genutzt als Längennormale bis 1960. Heutzutage ist das Meter über die Laufzeit von Licht im Vakuum definiert.

stand L ohne äußere Kräfte besteht, zwischen denen eine Lichtpuls hin und her läuft. In Abb. 3.23(a) möge ein Beobachter in Bezug auf diese Lichtuhr ruhen. Die Zeitspanne zwischen der Reflektion des Pulses an einem Spiegel und die Wiederankunft dort werde mit $\Delta\tau$ bezeichnet:

$$\Delta\tau = \frac{2L}{c}.$$

Diese von einem mit der Uhr mitbewegten Beobachter abgelesene Zeit wird auch *Eigenzeit* genannt.

In Abb. 3.23(b) ist die selbe Uhr von einem dazu bewegten Beobachter aus gesehen. Entscheidend ist, dass auch für diesen sich der Lichtpuls mit derselben Geschwindigkeit c ausbreitet. Weist die Uhr für diesen Beobachter die Geschwindigkeit v auf, so misst der Beobachter ein entsprechendes Zeitintervall Δt mit

$$L^2 + \left(\frac{v \cdot \Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{c \cdot \Delta t}{2}\right)^2,$$

was uns auf die Relation

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.2)$$

führt. Die beobachtete Anzeige einer Uhr hängt demnach von der Geschwindigkeit dieser Uhr in Bezug auf den Beobachter ab. Der Effekt, dass relativ zu einem Beobachter bewegte Uhren langsamer gehen, wird auch als *Zeitdilatation* bezeichnet.

3.4.2 Der metrische Fundamentaltensor

Der metrische Fundamentaltensor hat sich als äußerst zweckmäßiges theoretisches Werkzeug zur Beschreibung der Lichtausbreitung und der Uhrengänge erwiesen. Um diesen einzuführen, beschreiben wir zunächst einen gewissen Teil des Raumes zusammen mit einem Zeitabschnitt mit Hilfe von Raumzeitkoordinaten $x^\mu = (ct, x^i)$. Die Variable t bezeichnet die Zeitkoordinate, welche mit der Koordinate $x^0 = ct$ verknüpft ist.

3.4. RELATIVITÄTSTHEORIE UND METRISCHER FUNDAMENTALTENSOR 35

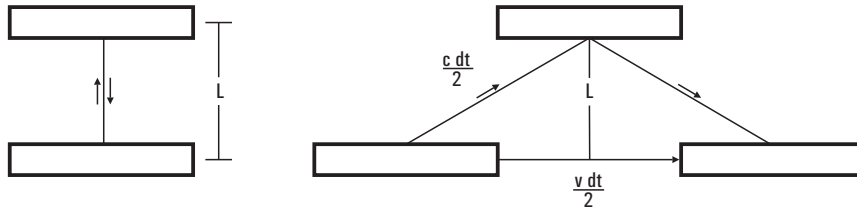


Abbildung 3.23: Eine einfache Lichtuhr in der ein Lichtpuls zwischen zwei idealen Spiegeln hin und her läuft. Links (a) ruht der Beobachter in Bezug auf die Uhr, rechts (b) besitzt die Uhr eine Geschwindigkeit v .

Wir wollen vereinbaren: ein griechischer Index wie μ stellt ein Raumzeitindex dar, der die Werte 0,1,2,3 durchläuft. Ein lateinischer Index wie i oder j stellt ein Raumindex dar und läuft nur über die Werte 1,2,3 (nicht aber über den Zeitindex!).

Mit dem Wort 'Ereignis' bezeichnet man einen Vorgang, der in Raum und Zeit beliebig wenig ausgedehnt ist. Die Zahlen x^μ bezeichnen dann die Raumzeitkoordinaten eines Ereignisses. Wir betrachten jetzt zwei infinitesimal benachbarte Ereignisse e_1 und e_2 mit Koordinaten $e_1 : x^\mu$ und $e_2 : x^\mu + dx^\mu$. Der Raumzeitabstand ds zwischen diesen Ereignissen ist dann gemäß

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.3)$$

durch den metrischen Fundamentaltensor $g_{\mu\nu}$ gegeben. In Gleichung (3.3) wurde die übliche Einsteinsche Summenkonvention angewandt. Nach ihr ist über doppelt auftauchende Indizes, hier μ und ν zu summieren, d.h., $\mu, \nu = 0,1,2,3$. Demnach ist $g_{\mu\nu}$ eine 4x4 Matrix mit Komponenten $g_{00}, g_{01}, \dots, g_{10}, g_{11}, \dots$ etc. In einem euklidischen 3-dimensionalen Raum kann man kartesischen Koordinaten $x^i = x, y, z$ lautet der metrische Fundamentaltensor einfach $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1,1,1)$ und das Längenelement ds ist gegeben durch

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

d.h., durch die infinitesimale Version des Satzes von Pythagoras.

Ohne gravitative Felder kann man kartesische Inertialkoordinaten $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$ derart einführen, dass der metrische Fundamentaltensor durch

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1,1,1,1) \quad (3.4)$$

gegeben ist. Das entsprechende Längenelement lautet

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + d\mathbf{x}^2. \quad (3.5)$$

Man beachte, dass das Längenelement in Richtung der Zeit *negativ* ist, in Raumrichtung dagegen positiv.

Mit diesem Längenelement lassen sich nun auf einfache Art und Weise die Ausbreitung von Lichtstrahlen und die Uhrgänge beschreiben. Licht breitet sich einfach längs Kurven mit

$$ds^2 = 0 \quad (\text{Lichtausbreitung}) \quad (3.6)$$

aus. Dies gewährleistet die oben beschriebene Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Betrachten wir nun eine (infinitesimale kleine idealisierte) Uhr am Koordinatenort $\mathbf{x}_c(\tau)$ zusammen mit der von ihr angezeigten Zeit τ , die ein bei dieser Uhr befindlicher Beobachter misst. Diese Zeit τ wird *Eigenzeit* der Uhr genannt und die kontinuierliche Folge von Ereignissen $(c\tau, \mathbf{x}_c(\tau))$ wird Weltlinie der idealisierten Uhr genannt. Sei ds ein infinitesimales Element dieser Weltlinie, so ist die Eigenzeit der Uhr mit gewählten Koordinaten gemäß

$$d\tau^2 = -\frac{1}{c^2}ds^2 = -\frac{1}{c^2}g_{\mu\nu}dx_c^\mu dx_c^\nu \quad (3.7)$$

verknüpft. Für eine mit Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegte Uhr erhalten wir mit Gl. (3.5)

$$d\tau^2 = dt_c^2 - \frac{1}{c^2}d\mathbf{x}_c^2 = dt_c^2 \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right) \quad (3.8)$$

im Einklang mit Relation (3.2).

3.4.3 Die Lorentz-Transformation

Wir betrachten ein Inertialsystem mit Koordinaten (ct, \mathbf{x}) und ein zweites Inertialsystem mit Koordinaten (cT, \mathbf{X}) dessen Ursprung sich mit einer Geschwindigkeit \mathbf{v} in Bezug auf den ersten Ursprung bewegt. Nach Obigem ist der metrische Fundamentaltensor im ersten System durch

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + d\mathbf{x}^2$$

und im zweiten Inertialsystem durch

$$ds^2 = -c^2 dT^2 + d\mathbf{X}^2$$

gegeben. Nun ist ds^2 ein koordinatenunabhängiges Längenelement, d.h., die rechten Seiten der letzten beiden Gleichungen müssen gleich sein. Aus dieser Invarianz des metrischen Fundamentaltensors beim Übergang von einem Inertialsystem in ein anderes ergibt sich die Form der Koordinatentransformation von $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$ nach $X^\alpha = (cT, \mathbf{X})$:

$$X^\alpha = \Lambda_\beta^\alpha x^\beta \quad (3.9)$$

mit

$$\begin{aligned} \Lambda_0^0 &= \gamma \\ \Lambda_i^0 &= \Lambda_0^i = -\gamma\beta^i \\ \Lambda_j^i &= \delta_{ij} + \frac{v^i v^j}{v^2}(\gamma - 1) \end{aligned} \quad (3.10)$$

mit

$$\gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-1/2}, \quad \beta^i = v^i/c. \quad (3.11)$$

Die Transformation (3.9) wird *Lorentz-Transformation* genannt. Ausgeschrieben haben wir

$$cT = \Lambda_\beta^0 x^\beta = \Lambda_0^0 ct + \Lambda_i^0 x^i$$

bzw.

$$T = \gamma \left(t - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}}{c^2} \right). \quad (3.12)$$

Die räumlichen Koordinaten transformieren sich gemäß

$$X^i = \Lambda_{\beta}^i x^{\beta} = \Lambda_0^i ct + \Lambda_j^i x^j$$

bzw.

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} - \gamma \mathbf{v} t + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x})}{v^2}. \quad (3.13)$$

Im Spezialfall, dass die Geschwindigkeit \mathbf{v} in x -Richtung weist hat man

$$\begin{aligned} T &= \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \\ X &= \gamma(x - vt) \end{aligned} \quad (3.14)$$

und $Y = y, Z = z$. In Übung 3.5 soll gezeigt werden, dass in der Tat die Lorentz-Transformation zur oben angegebenen Invarianz des Längenelementes führt.

Von Interesse ist eine Entwicklung von γ nach Potenzen von $1/c$. Mit

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \mathcal{O}(\beta^6)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} T &= t \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 \right) - \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 \right) \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}}{c^2} + \mathcal{O}(c^{-5}), \\ \mathbf{X} &= \mathbf{x} - \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 \right) \mathbf{v} t + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x})}{c^2} + \mathcal{O}(c^{-4}). \end{aligned} \quad (3.15)$$

3.5 Die geozentrischen Zeitskalen TCG, TT, TAI und UTC

Die in Kapitel 3.3 beschriebenen Frequenznormale generieren hochstabile Schwingungen, die über einen Zeitgenerator, gezählt in Stunden, Minuten und Sekunden, umgesetzt und angezeigt werden. Die Güte einer Uhr hängt dabei wesentlich von zwei Größen ab:

- 1.) von der oben diskutierten Stabilität des entsprechenden Oszillators und
- 2.) von der realisierten Frequenzgenauigkeit.

Die Stabilität deutet nur auf die Fähigkeit hin, ein gewisses Frequenzverhältnis zwischen dem angezeigten Zeitintervall und einem Normintervall wie der SI-Sekunde zu gewährleisten. Dabei ist die Einheit der Sekunde im internationalen Einheitensystem (SI) definiert über die Dauer von 9 192 631 779 Perioden der Strahlung, welche das Cäsium-Atom bei dem oben beschriebenen Hyperfeinstruktur-Übergang aussendet. Die Frequenzgenauigkeit gibt dagegen an, wie genau das theoretische Normintervall auch tatsächlich angezeigt wird.

3.5.1 TCG

Eine einzelne Uhr liefert zunächst eine freie Zeitskala. Ein Bezug zwischen zwei Zeitskalen, bzw. zwischen zwei Uhren kann in einfacher Weise hergestellt werden, wenn die Uhren unmittelbar benachbart aufgestellt sind. Die Uhren werden hierzu "gleichzeitig" abgelesen. Der Begriff der "Gleichzeitigkeit" ist jedoch bei räumlich getrennten Uhren zunächst leer, d.h. er beruht auf nichttrivialer Konvention. Einstein hat den Begriff der Gleichzeitigkeit entfernter Ereignisse für quasi-Inertialsysteme definiert und damit Synchronisationsvorschriften durch elektromagnetische Signale oder Uhrentransport festgelegt (z.B. dadurch, dass man von der räumliche Mitte zwischen zwei Uhren zwei Lichtblitze gleichzeitig zu diesen abschickt, welche dann per Definition gleichzeitig dort eintreffen). Eine Uhrensynchronisation im Sinne von Einstein ist jedoch auf der rotierenden und gravitierenden Erde nicht möglich. Diesen Punkt wollen wir jetzt etwas ausführlicher behandeln.

Wir starten mit geozentrischen, kartesischen quasi-Inertialkoordinaten (T, X^a) (die Beschleunigung des Geozentrums spielt im weiteren keine Rolle). Die geozentrische Koordinatenzeit T trägt auch den Namen

$$T = \text{TCG}.$$

Umrechnung TCG - Eigenzeit

Reale Uhren im erdnahen Raum zeigen *nicht* die Zeit $T = \text{TCG}$ an, sondern, wie oben ausgeführt, ihre sogenannte *Eigenzeit* τ . τ hängt mit $T = \text{TCG}$ so zusammen:

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right) c^2 dT^2 - d\mathbf{X}^2. \quad (3.16)$$

U ist in dieser Gleichung das Newtonsche Gravitationspotential. Unter Verwendung von Relation (3.7) können wir diese Relation auch so interpretieren, dass in geozentrischen quasi-Inertialsystem der metrische Fundamentaltensor durch

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right) c^2 dT^2 + d\mathbf{X}^2 \quad (3.17)$$

gegeben ist (abgesehen mit Termen höherer Ordnung in $(1/c)$). Wir lösen die letzte Gleichung nach $d\tau/dT$ auf:

$$\begin{aligned} c^2 d\tau^2 &= c^2 dT^2 \left[1 - \frac{2U}{c^2} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\mathbf{X}}{dT}\right)^2\right] \\ &= c^2 dT^2 \left[1 - \frac{2U}{c^2} - \frac{\mathbf{V}^2}{c^2}\right] \end{aligned}$$

bzw.

$$\frac{d\tau}{dT} = \left[1 - \frac{2U}{c^2} - \frac{\mathbf{V}^2}{c^2}\right]^{1/2}.$$

Eine Taylorreihenentwicklung gemäß $(1-x)^{1/2} = 1 - x/2 + \dots$ liefert schließlich

$$\frac{d\tau}{dT} \simeq 1 - \frac{U}{c^2} - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{V}^2}{c^2}.$$

Der U -Term in dieser Gleichung resultiert von der gravitativen Rotverschiebung. Er sagt aus, dass Uhren im Gravitationsfeld langsamer gehen als ohne G-Feld. Der V^2 -Term resultiert aus dem quadratischen Doppler-Effekt. Er besagt, dass schnell bewegte Uhren im Vergleich scheinbar langsamer gehen. Diese Aussage ist jedoch *relativ*. Vom Standpunkt der 'bewegten Uhr' geht die 'ruhende Uhr' langsamer.

Uhren auf der rotierenden Erde

Wir wollen nun von unseren quasi-Inertialkoordinaten zu Koordinaten $\bar{\mathbf{X}}$ übergehen, welche mit der Erde mitrotieren. Mit

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\Omega} \times \bar{\mathbf{X}} + \bar{\mathbf{V}},$$

wobei $\bar{\mathbf{V}}$ die Geschwindigkeit der Uhr relativ zum rotierenden System bezeichnet haben wir

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dT^2 \left[1 - \frac{2U_{\text{geo}}}{c^2} - 2(\boldsymbol{\Omega} \times \bar{\mathbf{X}}) \cdot \frac{\bar{\mathbf{V}}}{c^2} - \frac{\bar{\mathbf{V}}^2}{c^2} \right]$$

mit

$$U_{\text{geo}} = U + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega} \times \bar{\mathbf{X}})^2,$$

dem Geopotential als Potential der Erdschwere. Hier ist $\boldsymbol{\Omega}$ die Winkelgeschwindigkeit der Erde, der zweite Term im Geopotential ist das Zentrifugalpotential (das Potential der Zentrifugalkraft) und $\bar{\mathbf{V}} = d\bar{\mathbf{X}}/dT$ ist die Uhrgeschwindigkeit bzgl. der Erdoberfläche. Für erdgebundene Uhren mit $d\bar{\mathbf{X}} = 0 = \bar{\mathbf{V}}$ ist also

$$\frac{d\tau}{dT} = 1 - \frac{U_{\text{geo}}}{c^2} = 1 - \frac{U_0}{c^2} + \frac{g(\psi) \cdot h}{c^2} + \dots$$

Hier sei $U_0 = U_{\text{geo}}(\text{Geoid}) = \text{const.}$ das Geopotential auf dem Geoid, ψ die geographische Breite der Uhr und $g(\psi)$ die Schwerebeschleunigung auf dem Geoid:

$$g(\psi) = (9.78027 + 0.05192 \sin^2 \psi) \times 10^2 \text{ cm/s}^2.$$

h in dieser Taylorentwicklung um das Geoid bezeichnet die Höhe der Uhr über dem Geoid. Für zwei erdgebundene Uhren 1 und 2 hat man damit:

$$\begin{aligned} \frac{(d\tau)_1}{(d\tau)_2} &= \frac{f_2}{f_1} = \frac{(1 - U_{\text{geo}}/c^2)_1}{(1 - U_{\text{geo}}/c^2)_2} = \frac{(1 - U_0/c^2 + g(\psi) \cdot h/c^2)_1}{(1 - U_0/c^2 + g(\psi) \cdot h/c^2)_2} \\ &\simeq \frac{(1 + g(\psi) \cdot h/c^2)_1}{(1 + g(\psi) \cdot h/c^2)_2}. \end{aligned}$$

Als Beispiel betrachten wir die Uhren der PTB (Physikalisch Technische Bundesanstalt) in Braunschweig mit $h = 73 \text{ m}$ und $gh/c^2 = 8 \cdot 10^{-15}$ und solche des NBS (National Bureau of Standards) mit $h = 1634 \text{ m}$ und $gh/c^2 = 2 \cdot 10^{-13}$. Die Gangabweichungen zwischen diesen Uhren ergeben sich aus

$$f_{\text{PTB}} \simeq (1 + 2 \cdot 10^{-13}) f_{\text{NBS}}.$$

Dies führt zu einem Unterschied von 5.4 Mikrosekunden pro Jahr in der angezeigten Zeit. Dies ist für hochgenaue Uhren eine *relativ große Zeitspanne*.

3.5.2 TT

Wir schauen jetzt etwas genauer auf die Sekunde im internationalen Einheitensystem (SI): Die (SI) Sekunde entspricht der Dauer von 9 192 631 770 Perioden der Strahlung, die den zwei Hyperfeinniveaus im Grundzustand des Atoms ^{133}Cs entspricht. Nach dem Gesagten ist klar, dass die SI-Sekunde eine lokale Einheit darstellt und ein Vergleich zweier lokaler SI-Sekunden von Ort und Geschwindigkeit der Uhren abhängt. Dies heißt, dass jede Uhr ihre eigene (private) SI-Sekunde mit sich führt. Dies impliziert, dass die SI-Sekunde zur Definition einer für alle Uhren im Erdraum gültigen, gemeinsamen Zeitskala *nicht* benutzt werden kann. Aus diesem Grunde hat man die allgemeineren Zeitskalen TT (die frühere Zeitskala TDT), die terrestrische Zeit und die Internationale Atomzeit TAI eingeführt:

TT sei eine Zeitskala, welche sich von $T = \text{TCG}$ nur durch eine konstante Gangrate unterscheidet. Die Einheit (Sekunde) sei dabei so gewählt, dass diese mit der SI-Sekunde auf dem Geoid übereinstimmt.

Wir wollen diese Definition in Formeln umsetzen. Für erdgebundene Uhren galt

$$\frac{d\tau}{dT} \simeq 1 - \frac{U_0}{c^2} + \frac{g(\psi) \cdot h}{c^2}.$$

Auf dem Geoid mit $h = 0$ haben wir also

$$d\tau = \left(1 - \frac{U_0}{c^2}\right) dT = k_E dT \equiv d(TT)$$

mit

$$k_E = 1 - \frac{U_0}{c^2} = 1 - 6.97 \times 10^{-10}.$$

Damit gilt der Zusammenhang

$$TT = k_E T = k_E \text{TCG}.$$

3.5.3 TAI

Im Jahre 1971 kam es zur Definition der Internationalen Atomzeitskala, die mit *TAI* (Temps Atomique Internationale) abgekürzt wird. Als Skalenmaß diente dabei die SI-Sekunde, wie sie von Uhren auf Meereshöhe realisiert werden kann. (Konzeptuell hat die Verknüpfung von TAI bzw. TT mit dem Geoid zu Schwierigkeiten geführt. So könnte es beispielsweise sein, dass in Zukunft irgendwann einmal der Gang einer Präzisionsuhr zur Definition des Geoids dient. Aus diesem Grunde hat man die Konstante, welche TCG mit TT verknüpft inzwischen als definierende Größe eingeführt.)

Reale Uhren zeigen aufgrund ihrer stochastischen Eigenschaften und aufgrund von Fehlereinflüssen nicht genau die idealisierte Eigenzeit τ an. Die internationale Atomzeit TAI ist daher als Mittelwert über die Anzeige verschiedener Uhren (i) definiert. Wir schreiben

$$\frac{d\tau}{dT} \simeq 1 - \frac{1}{c^2} (U_0 + U_R)$$

mit

$$U_R = -g(\psi) \cdot h + \dots$$

Dann ist TAI definiert über

$$\text{TAI} = \text{Mittelwert}_i(\tau_i + S_R/c^2)$$

mit

$$S_R = \int_{T_0}^T U_R dT'.$$

Der zweite Term in der Definition von TAI bedeutet einfach, dass man die abgelesene Zeit zunächst auf das Geoid umrechnen muss, bevor man die Anzeigen der diversen Uhren mitteln kann.

Gegenwärtig (2011) tragen die Anzeigen von insgesamt 400 Uhren in 68 Laboratorien zur TAI-Realisierung bei. Die dabei verwendeten Uhren sind:

- Standard Cs-Uhren mit Stabilitäten von 5×10^{-14} für eine Mittelungsdauer von rund 5 Tagen und Genauigkeiten von 10^{-12} ,
- Hochgenaue Cs-Standards mit Stabilitäten von 1×10^{-14} für eine Mittelungsdauer von rund 5 Tagen und Genauigkeiten von 5×10^{-13} , sowie
- H-Maser mit Genauigkeiten von besser als 2×10^{-16} bei einer Mittelungsdauer von einem Tag.

Diese Atomuhren definieren zunächst eine freie Zeitskala EAL (Echelle Atomique Libre). Die Frequenz von TAI wird danach von wenigen Primärnormalen (PFS = Primary Frequency Standards) festgelegt. Der Nullpunkt von TAI wurde über $\text{TAI} = \text{UT1}$ für 0^h 1. Januar 1958 festgelegt.

Die gegenwärtigen PFS sind (BNM: Bureau National de Metrologie, Paris; NICT: National Institute of Information and Communication Technology, Tokyo ; IEN: Istituto Elettrotecnico Nazionale, Torino; NIST: National Institute of Standards and Technology, Boulder (Colorado); NPL: National Physical Laboratory, Middlesex, GB ; PTB: Physikalisch Technische Bundesanstalt, Braunschweig)

- 1. BNM-SYRTE-FO2 (Cs/Rb-Springbrunnen),
- 2. BNM-SYRTE-FOM (Cs-Springbrunnen),
- 3. BNM-SYRTE-JPO (optisch gepumpter Cs-Strahl),
- 4. NICT-O1 (optisch gepumpter Cs-Strahl),
- 5. IEN-CSF1 (Cs-Springbrunnen),
- 6. NIST-F1 (Cs-Springbrunnen),
- 7. NPL-CSF1 (Cs-Springbrunnen),
- 8. PTB-CS1 (Cs-Strahl),
- 9. PTB-CS2 (Cs-Strahl), sowie
- 10. PTB-CSF1 (Cs-Springbrunnen),

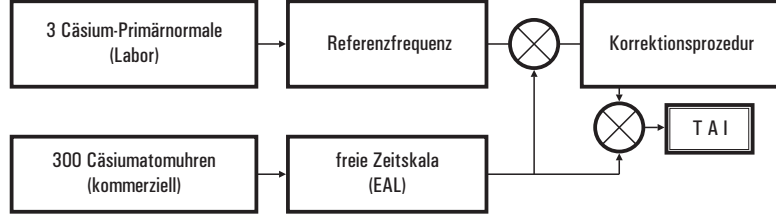


Abbildung 3.24: Berechnungsschema der Atomzeitskala TAI.

3.5.4 Uhrentransport

Wir wollen nun auf das Problem der Uhrensynchronisation zurückkommen. Man definiert: zwei Uhren mit Eigenzeiten τ_1 und τ_2 heißen synchron (bezüglich der Koordinatenzeit), falls die entsprechenden T -Werte gleich sind, d.h. falls $T_1 = T_2$. Diese Art der Synchronisation von Uhren verwendet also die Koordinatenzeit $T = \text{TCG}$. Sie wird daher auch Koordinatenzeit-Synchronisation genannt. Nach Obigem gilt

$$d\tau \simeq dT \left[1 - \frac{U_{\text{geo}}}{c^2} - \frac{1}{2} \frac{\bar{\mathbf{V}}^2}{c^2} - \frac{(\boldsymbol{\Omega} \times \bar{\mathbf{X}}) \cdot \bar{\mathbf{V}}}{c^2} \right]$$

bzw. mit $(1+x)^{-1} = 1 - x + \dots$

$$\Delta T \simeq \int d\tau \left[1 + \frac{U_{\text{geo}}}{c^2} + \frac{1}{2} \frac{\bar{\mathbf{V}}^2}{c^2} + \frac{(\boldsymbol{\Omega} \times \bar{\mathbf{X}}) \cdot \bar{\mathbf{V}}}{c^2} \right].$$

Die Synchronisation erdnaher Uhren kann z.B. durch realisiert werden. Bei einem langsamen ($\bar{\mathbf{V}}^2 \sim 0$ und niedrigen ($h \sim 0$) Transport ist dann

$$\begin{aligned} \Delta(\text{TT}) &= \left(1 - \frac{U_0}{c^2} \right) \Delta T \simeq \int d\tau \left[1 + (\boldsymbol{\Omega} \times \bar{\mathbf{X}}) \frac{\bar{\mathbf{V}}}{c^2} \right] \\ &\simeq \Delta\tau + \frac{\Omega R_{\oplus}}{c^2} \int d\tau v_{\text{ost}} \cos \psi \end{aligned}$$

v_{ost} ist die östliche Komponente von \mathbf{V} . Bei einem Transport längs eines Längengrades mit $v_{\text{ost}} = 0$ ist einfach $\Delta(\text{TT}) = \Delta\tau$. Bei einem Transport längs eines Breitengrades ist

$$\Delta(\text{TT}) \simeq \Delta\tau + \frac{\Omega R_{\oplus}}{c^2} L_{\text{ost}} \cos \psi,$$

wenn L_{ost} der nach Osten zurückgelegte Weg ist. Bei einem Transport um den Äquator weicht die langsam transportierte Uhr nach einer vollen Erdumrundung von einer Stationsuhr um rund 207 Nanosekunden ab.

Aus praktischen Gründen wird auch TT aus der Atomzeit TAI abgeleitet. Die IAU hat festgelegt

$$\text{TT} = \text{TAI} + 32.184 \text{ s.}$$

Die Konstante 32.184 s ist hier reine Konvention.

Tabelle 3.2: Zeitpunkte an denen Schaltsekunden eingeführt wurden.

Zeitpunkt	Julian. Datum	Zeitpunkt	Julian. Datum
1972 Jan 1	JD 2441317.5	1983 Jul 1	JD 2445516.5
1972 Jul 1	JD 2441499.5	1985 Jul 1	JD 2446247.5
1973 Jan 1	JD 2441683.5	1988 Jan 1	JD 2447161.5
1974 Jan 1	JD 2442048.5	1990 Jan 1	JD 2447892.5
1975 Jan 1	JD 2442413.5	1991 Jan 1	JD 2448257.5
1976 Jan 1	JD 2442778.5	1992 Jul 1	JD 2448804.5
1977 Jan 1	JD 2443144.5	1993 Jul 1	JD 2449169.5
1978 Jan 1	JD 2443509.5	1994 Jul 1	JD 2449534.5
1979 Jan 1	JD 2443874.5	1996 Jan 1	JD 2450083.5
1980 Jan 1	JD 2444239.5	1997 Jul 1	JD 2450639.5
1981 Jul 1	JD 2444786.5	1999 Jan 1	JD 2451179.5
1982 Jul 1	JD 2445151.5	2006 Jan 1	JD 2453736.5

3.5.5 UTC

Wir kommen nun noch zur wichtigen Definition der *koordinierten Weltzeit* UTC. Sie ist primär eine Atomzeitskala, also durch TAI bestimmt. Weiter unten werden sogenannte Erdzeitskalen eingeführt, die strenggenommen keine physikalischen Zeit, sondern Winkel darstellen, welche die Orientierung der Erde im Raum beschreiben. UT1 ist eine solche Erdzeitskala. UTC wird nun so definiert, dass diese sich von TAI nur um ganze Sekunden unterscheidet, d.h.,

$$\text{TAI} = \text{UTC} + N \text{ s},$$

wenn N eine ganze positive Zahl bedeutet. Seit dem 1. Januar 1972 wird UTC durch Einführung von Skalensprüngen von genau einer Sekunde (Schaltsekunde) an die Erdzeitskala UT1 angeglichen, wobei man die Differenz $\text{UTC} - \text{UT1}$ kleiner als 0.9 s,

$$\text{UTC} - \text{UT1} < 0.9 \text{ s},$$

halten will. Dies hat den Vorteil, dass auch über sehr lange Zeitspannen hinweg UTC für den Alltag, der durch die Stellung der Erde zur Sonne mitbestimmt wird, brauchbar bleibt.

Seit dem 1. Januar 1972 werden ganze Schaltsekunden nur zum 1. Januar oder zum 1. Juli jeweils 0 Uhr eingefügt. Tabelle (3.5.4) zeigt diese Zeitpunkte, wobei auch das Julianische Datum (JD), welches weiter unten eingeführt wird, angegeben ist. Das MAPLE-Programm `leap-sec.mws` berechnet TAI und UTC zu vorgegebenem Wert für TT.

Für hochgenaue Anwendungen müssen diese Schaltsekunden Berücksichtigung finden. Vom praktischen Standpunkt aus gesehen ist die Einführung von Schaltsekunden nicht nur mit einem erheblichen (auch finanziellen) Aufwand verbunden. Aus diesem Grunde ist die Diskussion um die Schaltsekunden neu entfacht und es kann sein, dass man in Zukunft in größeren zeitlichen Abständen etwa Schaltstunden einführt.

3.5.6 Zonenzeiten

Die nationalen Zeitskalen und auch Sommerzeitskalen beruhen auf *UTC*. So ist z.B. die Mitteleuropäische Zeit (*MEZ*) gegeben durch

$$MEZ = UTC + 1^h$$

und die entsprechende Sommerzeit

$$MESZ = UTC + 2^h.$$

Andere nationale Zeitskalen unterscheiden sich ebenfalls von *UTC* nur durch eine ganze Zahl von Stunden gemäß einer Einteilung in Zeitzonen. Diese sind in Abb. 3.25 zu sehen.

3.6 Das Julianische Datum

Es hat sich eingebürgert, dass ein bestimmter Zeitpunkt durch das sogenannte 'Julianischen Datum' (*JD*) festgelegt wird. Die weiter unten angegebene Definition ist so allgemein gehalten, dass sie auf jede kontinuierliche Zeitskala wie TCG oder TT angewendet werden kann. Streng genommen muss man also bei einem Julianischen Datum noch angeben auf welche Zeitskala es sich bezieht. Man muss also JD_{TT} von JD_{TCG} usw. unterscheiden. Die Definition von *JD* hängt mit dem verwendeten Kalender zusammen. Auf diesen wird zunächst eingegangen.

3.6.1 Kalenderfragen

Der *Julianische Kalender* wurde von den Römern um das Jahr 46 v.Chr. eingeführt. Er basiert auf einem Jahr von meistens 365 Tagen, aber jedes 4te, durch die Zahl 4 teilbare, Jahr hat einen zusätzlichen Schalttag. Die mittlere Jahreslänge beträgt im Julianischen Kalender somit 365,25 Tage.

Im Jahre 1582 schlug Clavius Papst Gregor einen neuen Kalender mit einer mittleren Jahreslänge von 365,2425 Tagen vor, der nur 97 Schaltjahre in 400 Jahren enthält. Die durch 100 teilbaren Jahre sind hier keine Schaltjahre, außer sie sind durch 400 teilbar. So waren die Jahre 1800 und 1900 keine Schaltjahre, 2000 ist dagegen eines. Im Laufe der Zeit haben alle Länder, welche den Julianischen Kalender verwendet hatten, den Gregorianischen Kalender eingeführt.

3.6.2 Das Julianische Datum

Für viele Anwendungen spielt das Julianische Datum (*JD*) eine wichtige Rolle. Das Julianische Datum ist eine fortlaufende Zählung von Tagen und deren Bruchteilen vom Beginn des Jahres -4712 an. Traditionell beginnt der Julianische Tag zum mittleren Mittag in Greenwich, das ist um 12^h Weltzeit (UT). Sei Y das Jahr, M die Monatszahl (1 für Januar, 2 für Februar usw.) und D der Tag des Monats, eventuell mit Dezimalen, des gegebenen Kalenderdatums. Im unten beschriebenen Programm ist die Gregorianische Kalenderreform berücksichtigt. Der dem 4. Oktober 1582 (Julianischer Kalender) folgende Tag ist der 15. Oktober 1582 (Gregorianischer Kalender).

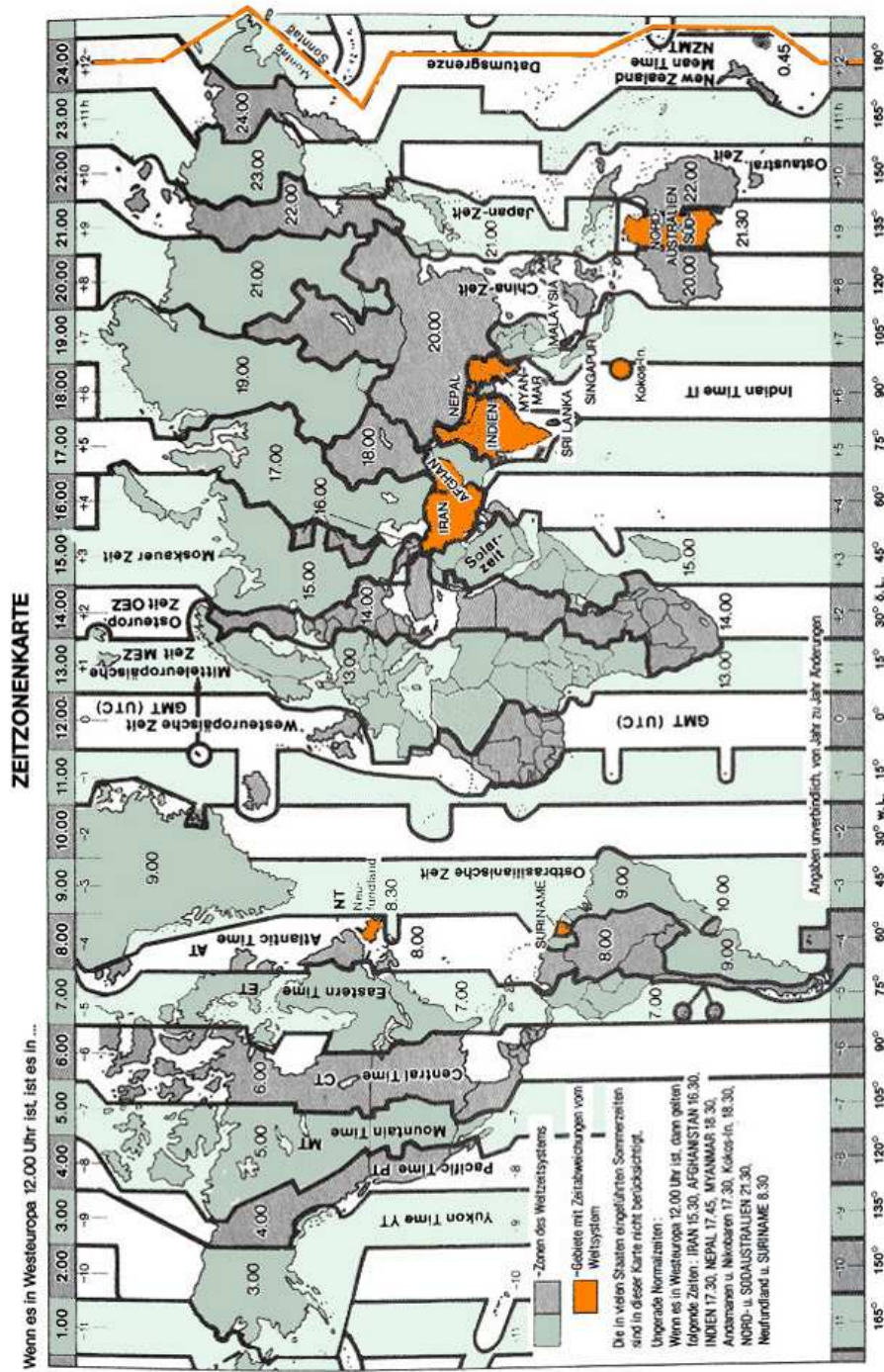


Abbildung 3.25: Die Einteilung der Erde in Zeitzonen.

1. Ist $M > 2$, lasse man Y und M unverändert. Ist $M = 1$ oder 2 , ersetze man Y durch $Y - 1$ und M durch $M + 12$. Mit anderen Worten: liegt das Datum im Januar oder Februar, wird das als 13. oder 14. Monat des Vorjahres betrachtet.
2. Im Gregorianischen Kalender berechne man

$$A = \text{INT}(Y/100); \quad B = 2 - A + \text{INT}(A/4).$$

Im Julianischen Kalender setze man $B = 0$.

3. Das gesuchte Julianische Datum ist dann

$$\begin{aligned} JD &= \text{INT}(365,25 \cdot (Y + 4716)) + \text{INT}(30,6001 \cdot (M + 1)) \\ &\quad + D + B - 1524,5. \end{aligned}$$

Von großer Bedeutung ist das Datum J2000.0. Es gilt:

$$J2000.0 = 2000 \text{ Jan } 1,5 = JD \ 2\ 451\ 545,0.$$

Man bemerke, dass zwischen dem 1.3.1900 und dem 28.2.2100 $B = -13$ gilt.

Ein Programm zur Berechnung von JD findet man im Internet beispielsweise unter <http://habicht.bauw.unibw-muenchen.de/ex-scherer/astro.html>. Oft findet man in der Literatur auch das *modifizierte Julianische Datum* (MJD), welches über

$$MJD = JD - 2\ 400\ 000,5$$

definiert ist. $MJD = 0$ entspricht damit dem 17. November 1858, 0^h.

Das MAPLE-Programm `jdate.mws` liefert für einen Kalendertag (Da: Tag, Mo: Monat, Y:Jahr) das Julianische Datum JD und das modifizierte Julianische Datum MJD. Hierbei wird der genaue Zeitpunkt durch eine entsprechend genaue Angabe des Tages mit entsprechenden Stellen hinter dem Komma festgelegt.

3.7 Die baryzentrischen Zeitskalen TCB, T_{eph} und TDB

Die im letzten Abschnitt eingeführten Zeitskalen sind alle mit dem Geozentrum verknüpft: Sie sind geozentrische Zeitskalen und finden ihre Anwendung im erdnahen Raum. Für gewisse Anwendungen wie etwa ein Studium der Bewegung von Sonne und Planeten oder interplanetare Raumfahrtmissionen sind diese geozentrischen Zeitskalen ungeeignet. Aus diesem Grunde führt man baryzentrische Zeitskalen ein. Das Baryzentrum ist dabei der Massenmittelpunkt des Sonnensystems. Zentrale baryzentrische Zeitskala ist die baryzentrische Koordinatenzeit TCB.

Zu ihrer Definition betrachten wir eine fiktive Uhr im Geozentrum *ohne* den Einfluss des Gravitationsfeldes der Erde. Analog zum oben diskutierten Zusammenhang zwischen TCG und der Eigenzeit τ einer (idealisierten) Uhr lautet der Zusammenhang zwischen TCB und TCG in diesem Falle

$$\frac{d(\text{TCG})}{d(\text{TCB})} \simeq 1 - \frac{U_{\text{ext}}(\mathbf{z}_E)}{c^2} - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{v}_E^2}{c^2}$$

bzw.

$$\Delta(\text{TCG}) \simeq \Delta(\text{TCB}) - \frac{1}{c^2} \left[\int \left(U_{\text{ext}}(\mathbf{z}_E) + \frac{1}{2} \mathbf{v}_E \right) dt \right]$$

gegeben. Hier bezeichnet $t = \text{TCB}$, U_{ext} das Gravitationspotential von Sonne und Planeten *ausgenommen* dasjenige der Erde und $\mathbf{z}_E, \mathbf{v}_E$ die baryzentrische Koordinatenposition und Geschwindigkeit des Geozentrums. Für einen Punkt \mathbf{x} , der vom Geozentrum nicht allzu weit weg liegt lautet dieser Zusammenhang

$$\text{TCB} - \text{TCG} = c^{-2} \left[\int_{t_0}^t \left(U_{\text{ext}}(\mathbf{z}_E) + \frac{1}{2} \mathbf{v}_E^2 \right) dt' + \mathbf{v}_E \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{z}_E) \right]. \quad (3.18)$$

Der zweite Term auf der rechten Seite resultiert daher, dass zwei Ereignisse die baryzentrisch (d.h., bzgl. TCB) gleichzeitig sind in einem geozentrischen System (d.h., bzgl. TCG) im allgemeinen dies *nicht* sind. Der Zeitpunkt t_0 an dem im Geozentrum $\text{TCB} = \text{TCG}$ gilt ist durch

$$t_0 = 2443144,5 \text{ JD}$$

festgelegt worden, wenn JD das Julianische Datum bezeichnet. Man bemerke, dass sich die Zeitskalen TCB und TCG nicht nur durch periodische Terme sondern auch durch einen säkularen Drift, gegeben durch

$$(\text{TCB} - \text{TCG})_{\text{sec}} = L_C (\text{JD} - t_0) \times 86400 \text{ sec}$$

mit

$$L_C = 1,480827 \times 10^{-8}.$$

Historisch hat sich ergeben, dass die derzeit bestehenden Ephemeriden des Sonnensystems, die DE-Reihe des Jet Propulsion Laboratory (JPL), *nicht* TCB als Zeitvariable verwenden. Die Idee war eine Zeitskala zu verwenden, die sich von TT praktisch nur durch periodische Terme unterscheidet. Eine solche ist jedoch wegen der in der Bewegung des Sonnensystems enthaltenen beliebig langen Perioden nicht in aller Strenge realisierbar. Die in konkreten (baryzentrischen) Ephemeriden verwendeten Zeitskalen T_{eph} weisen denn auch eine geringfügig von der Ephemeride abhängigen Zusammenhang zu TCB oder TCG auf. Bei den DE-Ephemeriden des Sonnensystems wurde die Reihe von Fairhead-Bretagnon (s.u.) verwendet, um T_{eph} aus TT abzuleiten.

Gegenwärtig schlägt eine Arbeitsgruppe der IAU eine Definition der baryzentrischen Zeitskala TDB vor. Danach ist TDB definiert über

$$\text{TDB} = \text{TCB} - L_B \times (\text{JD}_{\text{TCB}} - T_0) \times 86400 \text{ sec} + \text{TDB}_0, \quad (3.19)$$

mit $T_0 = 2443144.5003725$,

$$L_B = 1,550519768 \cdot 10^{-8}, \quad \text{TDB}_0 = -6.55 \times 10^{-5} \text{ s}.$$

Hier ist JD_{TCB} das Julianische Datum bezüglich TCB. Sein Wert beträgt T_0 für ein Ereignis am Geozentrum zum Zeitpunkt Januar 1, 0^h TAI und wächst um Eins für jeweils 86400 s TCB. Der Wert von L_B wurde so gewählt, dass für die Ephemeride DE405 der lineare Drift zwischen TDB und TT praktisch eliminiert wird. Die Differenz zwischen TDB und TT beträgt auf der Erdoberfläche weniger als 2 ms für die kommenden Jahrhunderte.

i	A_i (μs)	ω_{ai} (rd/1000y)	ϕ_{ai} (rd)	Periode (Jahre)
1	1656.674564	6283.075943033	6.240054195	1.0000
2	22.417471	5753.384970095	4.296977442	1.0921
3	13.839792	12566.151886066	6.196904410	0.5000
4	4.779986	529.690965095	0.444401603	11.8620
5	4.676740	6069.776754553	4.021195093	1.0352
6	2.256707	213.299095438	5.543113262	29.4572
7	1.694205	-3.523118349	5.025132748	1783.4159
8	1.554905	77713.772618729	5.198467090	0.0809
9	1.276839	7860.419392439	5.988822341	0.7993
10	1.193379	5223.693919802	3.649823739	1.2028

3.8 Die Reihe von Fairhead-Bretagnon

Analytische Näherungen für $T_{\text{eph}} - \text{TT}$ basieren auf (semi-) analytischen Ephemeriden des Sonnensystems. Die bekannte Reihe von Fairhead-Bretagnon (1990) basiert auf der Planetentheorie VSOP82 (Bretagnon 1982) und der Mondtheorie ELP2000 (Chapront-Touze & Chapront 1983). Diese Reihe findet man in der Form

$$\begin{aligned} \Delta T = & C_0 \text{TT}^2 + & (3.20) \\ & + \sum_i A_i \sin(\omega_{ai} \text{TT} + \phi_{ai}) + \text{TT} \sum_i B_i \sin(\omega_{bi} \text{TT} + \phi_{bi}) \\ & + \text{TT}^2 \sum_i C_i \sin(\omega_{ci} \text{TT} + \phi_{ci}) + \text{TT}^3 \sum_i D_i \sin(\omega_{di} \text{TT} + \phi_{di}). \end{aligned}$$

Hier zählt TT in Jahrtausenden ab J2000.0, $\Delta T \equiv T_{\text{eph}} - \text{TT}$ in Mikrosekunden. Die ersten 10 Koeffizienten in (3.20) sind in folgender Tabelle angegeben. Die ganze Reihe mit insgesamt 127 Koeffizienten findet man im Programm tt2tb.mws.

3.9 Probleme der Zeitübertragung

3.9.1 Zeitzeichensender, LORAN-C

Früher wurden Uhren gelegentlich durch Uhrentransport synchronisiert. Dies ist jedoch ein aufwendiges Verfahren, welches durch den Austausch elektromagnetischer Signale weitgehendst verdrängt worden ist. Ein solcher Austausch von Signalen zwecks Uhrenvergleich geschieht in den verschiedensten Frequenzbändern.

Die Unterscheidung nach Frequenzbereichen gliedert sich in

- Zeitübertragung mittels Längstwellen, die eine weltweite Zeitübertragung erlaubt (OMEGA, VLF),
- Zeitübertragung mittels Langwellen (DCF77, HBG, MSF), die eine regionale Überdeckung bis zu etwa 2000 km erreicht, oder wie bei LORAN-C, durch Senderketten, nahezu globale Verfügbarkeit bietet,

- Zeitübertragung mittels VHS/SHF (Fernsehzeitvergleiche), die nur wenige 100 km Reichweite liefert,
- Zeitübertragung über VHF/UHF bzw. Mikrowellen (L-Band), wie sie von Satelliten ausgesendet werden. Im Falle eines geostationären Satelliten wird eine Hemisphäre überdeckt, im Falle tiefer fliegender Satelliten (TRANSIT, GPS) sind globale Zeitvergleiche möglich.

Eine einfache Methode der Zeitübertragung bietet die ständige Aussendung von Zeitmarken über Zeitzeichensender. In Europa gibt es vier derartige Sender, die im Bereich von 50 kHz bis 77.5 kHz Zeitzeichen aussenden. Es sind die Sender DCF 77 (Mainflingen, D), HBG 75 (Prangins, Ch), MSF 60 (Rugby, U.K.) und OMA 50 (Podbray/Prag, Tschechien). Von der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt (PTB), Braunschweig, werden z.B. über den Sender DCF 77 Zeitmarken, bezogen auf MEZ ausgesandt, die bei guten Bedingungen im Umkreis von ca. 2000 km empfangen werden können. Für die Erzeugung der abgestrahlten Zeitsignale ist die PTB verantwortlich, während die Telekom für den Betrieb der Sende- und Antenneneinrichtungen zuständig ist. Als Sendeantenne wird eine 150 m oder 200 m hohe vertikale Rundstrahlungsantenne mit einer Sendeleistung von 50 kW verwendet. Die DCF77-Zeitsignale werden am Sendeort Mainflingen bei Frankfurt am Main von Atomuhren der PTB abgeleitet und von der PTB Braunschweig aus kontrolliert. Die Trägerfrequenz 77,5 kHz von DCF77 stellt eine hochstabile Normalfrequenz dar. Bei diesem Verfahren können nicht nur die Sekundenimpulse zur Zeitübertragung herangezogen werden, sondern auch noch die Phase, was zu Synchronisationsgenauigkeiten von einigen Mikrosekunden führt. Diese Sender senden kontinuierlich kodierte Zeitmarken aus, die von einer Cs-Uhr abgeleitet werden. Ein am Vergleichsort aufgestellter Empfänger registriert die Zeitzeichensignale, dekodiert die Sekundenmarken und liefert für Vergleichszwecke die benötigten Sekundenpulse. Die zeitliche *Ablage* zwischen den empfangenen Sekundenpulsen und denjenigen der Vergleichsuhr kann mit Hilfe eines Zählers ermittelt werden, wobei man in der Regel den Startpuls von der Vergleichsuhr und den Stopppuls vom Empfänger bezieht. Die gemessene zeitliche Ablage setzt sich zusammen aus der Uhrenablage und der totalen Laufzeitverzögerung des Radiosignals, welche die Verzögerungszeiten in den Sende- und Empfangsanlagen und in der Signalausbreitung vom Sender zum Empfänger einschließt.

LORAN-C (Long Range Navigation) ist ein Navigationssystem zur Standortbestimmung von Schiffen und teilweise auch von Flugzeugen. Es ist eine Weiterentwicklung von *LORAN-A*, das während des zweiten Weltkrieges am MIT entwickelt wurde. Von der U.S. Coast Guard wurde *LORAN-C* nahezu weltweit ausgebaut und betrieben. Es dient sowohl zivilen als auch militärischen Zwecken. Es war lange Zeit *das* Standardverfahren zu weltweitem Zeitvergleich mit einer Genauigkeit von etwa einer Mikrosekunde. In der Praxis ist die Zeitübertragung mittels *LORAN-C* weitestgehend von der mit dem Global Positioning System (GPS) abgelöst worden. Für spezielle Anwendungen kann auch die Methode der Radiointerferometrie auf langen Basislinien, die VLBI, der Zeitübertragung dienen, wobei sehr hohe Genauigkeiten im Nanosekundenbereich erreicht werden können. Diese beiden Methoden, GPS und VLBI, werden weiter unten ausführlich behandelt werden.

3.9.2 Zeitübertragung mit Hilfe von Satelliten

Mit dem Einsatz künstlicher Erdsatelliten eröffnen sich für die Durchführung von Zeitvergleichen Möglichkeiten, die sich in höheren Genauigkeiten, größeren Reichweiten (globale Überdeckung) und einer schnelleren Verfügbarkeit auswirken. Bei den Satellitenverfahren unterscheidet man zwischen Einweg- und Zweiweg-Verfahren. Beim aktiven Einweg-Verfahren hat der Satellit eine hochstabile Uhr an Bord, welche regelmäßig justiert und bei der Aussendung von Zeitsignalen herangezogen wird. Kennt man die genaue Satellitenbahn, so ist die Signallaufzeit zur Bodenstation sehr genau berechenbar und die Satellitenzeit kann mit der Zeit einer Stationsuhr verglichen werden. Unsicherheiten resultieren im wesentlichen aus dem Fehlen genauer Positionsdaten, der Stabilität der Satellitenuhr und Refraktionsproblemen. Beim passiven Einweg-Verfahren werden Zeitsignale von einer Zentraluhr am Boden zum Satellit gesendet, welcher die Information lediglich verteilt. Bei den Zweiwege-Verfahren wird der Zeitvergleich zwischen zwei Stationsuhren mit Hilfe eines Satelliten durchgeführt. Dazu benötigen beide Stationen Sende- und Empfangsanlagen und der Satellit muss über einen sogenannten Transponder, der die instantane Reflektion des Signals bewirkt, verfügen.

Von immer größerer Bedeutung für die Zeitübertragung ist das GPS. Man kann damit weltweit die Zeit mit einer Genauigkeit von etwa 1 ns übertragen. Derzeit befinden sich 29 GPS Satelliten in Umlaufbahnen mit 12 Stunden Umlaufzeit in 20 183 km Höhe. Das Zeitübertragungsverfahren beruht auf der Pseudostreckenmessung vom Sa-

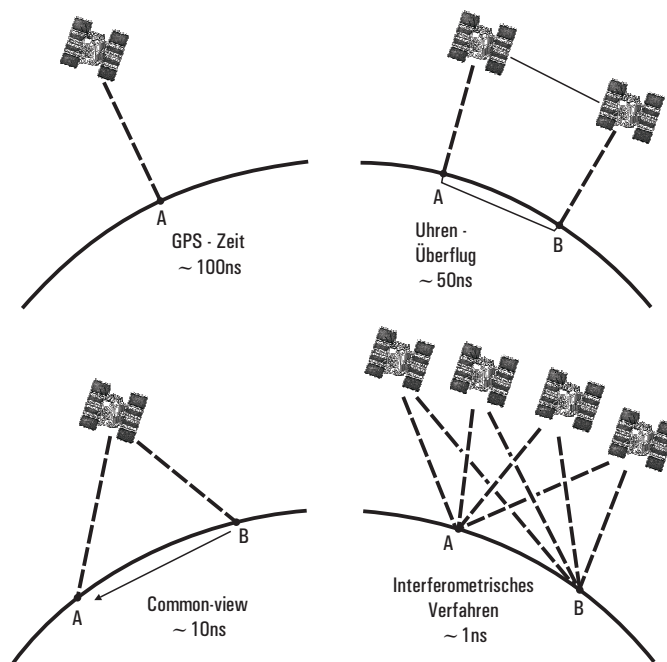


Abbildung 3.26: Verschiedene Verfahren der Zeitübertragung mittels GPS.

tellenort zum Empfangsort. Ein GPS-Satellit sendet kontinuierlich Signale aus, die mit einem Pseudo-Zufallsrauschen moduliert sind. Dieses Signal enthält Informationen über den Standort des Satelliten, Zeitmarken, sowie weitere Information über Refraktionskorrekturen etc. Der GPS-Empfänger am Boden erzeugt intern ein identisches Pseudorausch-Signal, das von der Bodenuhr abgeleitet wird. Durch Korrelation der beiden Signale kann dann eine Pseudostrecke, sowie die Zeitinformation abgeleitet werden.

Man unterscheidet verschiedene Methoden, mit GPS Zeitvergleiche durchzuführen:

- Anmessen eines GPS-Satelliten beim Überflug über eine Bodenstation und Vergleich der Bodenuhr mit der GPS-Systemzeit (± 100 ns)
- Überflug eines GPS-Satelliten über zwei Bodenstationen (A und B) und Austausch der Messergebnisse zur Bestimmung der Zeitablage zwischen A und B (± 50 ns)
- simultanes Anmessen eines GPS-Satelliten von zwei Bodenstationen A und B ("common view") und Austausch der Messergebnisse (± 10 ns)
- simultanes Anmessen mehrerer GPS-Satelliten von zwei Bodenstationen aus und Korrelation der Signale (± 1 ns).

3.10 Übungen

Übung 3.1 Von einer Quarzuhr wird einmal pro Tag der Fehler dieser Uhr im Vergleich zu einer hochgenauen Referenzuhr bestimmt. Die Messwerte sind in Tabelle 3.3 gegeben. Berechnen Sie für diesen Mittelungszeitraum ($\tau = 1d$) die 2-Punkt-Allan-Varianz.

Tabelle 3.3: Uhrenfehler einer Quarzuhr in Millisekunden. Die Messungen erfolgen einmal pro Tag.

Nummer	Uhrenfehler [ms]
0	325
1	350
2	377
3	401
4	430
5	461
6	494
7	529
8	566
9	601
10	636
11	673
12	710
13	749
14	790
15	835

Übung 3.2 Bestimmen Sie die 2-Punkt-Allan-Varianz für die Quarzuhr in Ihrem Computer als Funktion der Mittelungszeit τ .

Übung 3.3 Bill, ein 6-jähriger Junge spielt in einem Zug mit seinem Tennisball. Er wirft den Ball sehr hart senkrecht auf den Boden, so dass dieser am Dach des Wagens abprallt und vertikal wieder nach unten fällt. Der Vater von Bill, Ernesto, ist ein Physik-Professor an der Stanford-Universität. Er denkt folgendes über den Ball: sei L die Höhe des Wagens. Dann braucht der Ball für die Bewegung vom Boden zur Decke und zurück eine Zeit von $\Delta\tau = 2L/v_B$, wobei v_B die Geschwindigkeit des Balles ist. Wie stellt sich die Bewegung des Balles für einen Beobachter auf dem Bahnsteig dar, an welchem der Zug mit einer konstanten Geschwindigkeit v_Z vorbei fährt? Zeigen Sie, dass solch ein Beobachter das gleiche Zeitintervall Δt misst, wie der Vater, d. h. dass gilt $\Delta t = \Delta\tau$.

Übung 3.4 Das Koordinatenzeitintervall Δt_c betrage 1 Sekunde, die Geschwindigkeit einer Uhr 30 km/s. Wie groß ist die Differenz zwischen Eigenzeit- und Koordinatenzeitintervall?

Übung 3.5 In einem (ruhenden) Inertialsystem mit Koordinaten $x^\mu \equiv (ct, \mathbf{x})$ sei der metrische Fundamentaltensor durch $ds^2 = -c^2 dt^2 + d\mathbf{x}^2$ gegeben. Ein zweites Inertialsystem mit Koordinaten $X^\alpha \equiv (cT, \mathbf{X})$ bewege sich in x -Richtung mit konstanter Geschwindigkeit v . Die bewegten Koordinaten mögen über eine Lorentz-Transformation (3.14) mit den ruhenden zusammenhängen. Man zeige dann: $-c^2 dT^2 + dX^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 = ds^2$.

Übung 3.6 Man berechne das Julianische Datum JD und das modifizierte Julianische Datum MJD für folgende Zeitpunkte: 1.2.1977, 21.4.1937 und 20.5.2006 jeweils für $0^h TT$.

Das Problem Räumlicher Koordinaten

Teil I: Äquinoktium-basierende
Koordinaten

Kapitel 4

Astronomische Koordinatensysteme

4.1 Die scheinbare Bewegung der Sterne und der Sonne



Abbildung 4.1: Eine Langzeitaufnahme der Sternenhimmels. Alle Sterne bewegen sich scheinbar um einen der Himmelspole.

Bisher hatten wir ausführlich das Problem der Zeitkoordinate behandelt und wollen uns jetzt dem Problem der räumlichen, astronomischen Koordinaten zuwenden. Wir gehen dazu von einem erdfesten Beobachter aus und beginnen mit einigen elementaren Tatsachen über die scheinbaren Bewegungen der Sterne und der Sonne um die Erde. Abb. 4.1 zeigt eine Langzeitaufnahme des Nachthimmels, auf der die einzelnen Sterne kreisförmige Spuren hinterlassen haben. Alle Sterne bewegen sich um einen

fiktiven Punkt am Sternenhimmel, den sogenannten (nördlichen) Himmelspol. Diese scheinbare Bewegung resultiert einfach aus der täglichen Rotation der Erde im Raum. Der Himmelspol ist einfach durch die Stellung der Rotationsachse (Winkelgeschwindigkeitsachse) im Raum gegeben. Astronomische Richtungen werden wir oft durch Punkte auf einer Einheitskugel darstellen, welche wir Richtungs- oder Himmelskugel nennen. Die zwei "Durchstoßpunkte" der Erdrotationsachse auf der Himmelskugel definieren dann den nördlichen und den südlichen Himmelspol.

Die Position des nördlichen Himmelspol am Himmel bestimmt sich zunächst einmal aus der Breite des Beobachters (Abb. 4.2). Am Nordpol der Erde steht der nördliche Himmelspol praktisch im Zenit und die Sterne bewegen sich parallel zum Horizont, der in diesem Fall praktisch mit dem Himmelsäquator zusammenfällt (Teilbild oben). Befindet sich dagegen der Beobachter am Äquator (mittleres Teilbild), so gehen die Sterne im Osten senkrecht zur Horizontebene auf, erreichen ihren höchsten Punkt (sie kulminieren) im Meridian, welcher durch den Zenit des Beobachters und den nördlichen Himmelspol läuft, und gehen dann im Westen wieder senkrecht zur Horizontebene unter. In einer gemäßigten Breite (unteres Teilbild) erscheint der nördliche Himmelspol unter einem Winkel zum Horizont, welcher der Breite des Beobachters entspricht. Die Sterne bewegen sich entsprechend um den Himmelspol. Sie gehen im Osten auf, kulminieren im Meridian und gehen im Westen unter.

Als nächstes wollen wir die scheinbare Bahn der Sonne auf der Himmelskugel betrachten (Abb. 4.4). Diese ergibt sich aus der Bewegung der Erde um die Sonne und die Stellung der Erdfigur im Raum. Die Bahnebene der Erde um die Sonne wird mit *Ekliptik* bezeichnet. Entsprechend bewegt sich die Sonne im Laufe eines Jahres entlang der Ekliptik auf der Himmelskugel. Diese ist um etwa $23\frac{1}{2}$ Grad gegen den Himmelsäquator geneigt, welcher senkrecht auf der Richtung zu den Himmelspolen steht und durch den Erdmittelpunkt geht. Dies bedeutet nichts anderes, als dass die Rotationsachse der Erde gegen die Ekliptiknormale um $23\frac{1}{2}$ Grad verkippt ist. Dieser Winkel heißt auch *Schiefe der Ekliptik*. Die Jahreszeiten resultieren im wesentlichen aus der Schiefe der Ekliptik. Betrachtet man die Punkte auf denen die Sonne während eines Jahres im Zenit steht, so bewegt sich die Sonne vom südlichen Wendekreis über den Äquator zum nördlichen Wendekreis und zurück. Genau an zwei Zeitpunkten im Jahr steht die Sonne im Äquator im Zenit. Dies geschieht um den 21. März und um den 21. September. Dies sind die Äquinoktien oder Tag- und Nachtgleichen, welche den Beginn des Frühlings und des Herbstes markieren. Um den 21. März beginnt auf der Nordhalbkugel der Frühling und die Sonne wandert dann weiter bis zum nördlichen Wendekreis nach Norden (Abb. 4.5). Entscheidend für die Jahreszeiten ist die Menge an Strahlungsenergie die pro Fläche auf die Erdoberfläche trifft. Diese wiederum hängt davon ab, wie schräg die Sonnenstrahlen auf die Fläche treffen. Am 21. Juni beginnt auf der Nordhalbkugel der Sommer, auf der Südhalbkugel dagegen der Winter. Für einen festen Beobachter auf der Erde bewegt sich die Sonne wie in Abb. 4.6 gezeigt: bei den Frühlings- und Herbstäquinoktien geht die Sonne fast exakt im Osten auf und im Westen unter. Nach dem 21. März bewegt sich die Sonne in nördliche Richtung, d.h. sie geht im Nordosten auf und im Nordwesten unter. Im Herbst und Winter dagegen steht sie mehr südlich. Bei der Sommersonnenwende erreicht sie ihre nördlichste, bei der Wintersonnenwende ihre südlichste Position. Abb. 4.7 zeigt das Entstehen der Mondphasen beim monatlichen Umlauf des Mondes um die Erde. Bei Neumond steht der Mond in Richtung der Sonne, bei Vollmond in entgegengesetzter

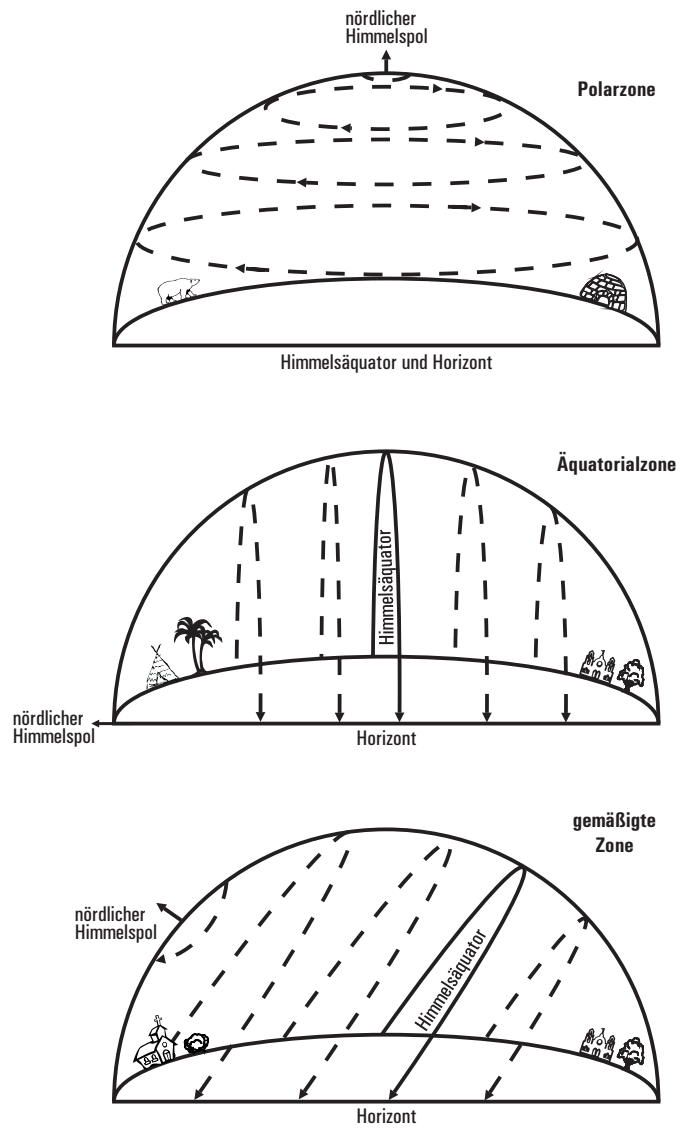


Abbildung 4.2: Scheinbare Bewegung der Sterne in Abhängigkeit von der Breite des Beobachters; Beobachter am Nordpol: Teilbild oben, am Äquator: mittleres Teilbild und in den gemäßigten Zonen: unteres Bild.

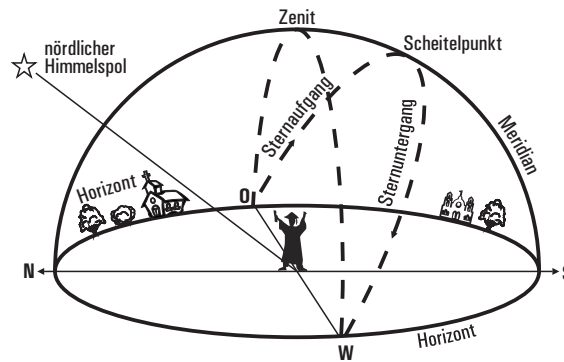


Abbildung 4.3: Für den Beobachter am Boden lässt sich die Himmelskugel mit wenigen einfachen Koordinaten beschreiben. Neben dem nördlichen Himmelspol ist der Zenit, definiert durch die Lotrichtung, eine wichtige Marke auf der Himmelskugel. Mond, Sonne und Sterne gehen im Osten auf, erreichen den Scheitelpunkt dort, wo sie den Meridian kreuzen, und gehen im Westen wieder unter.

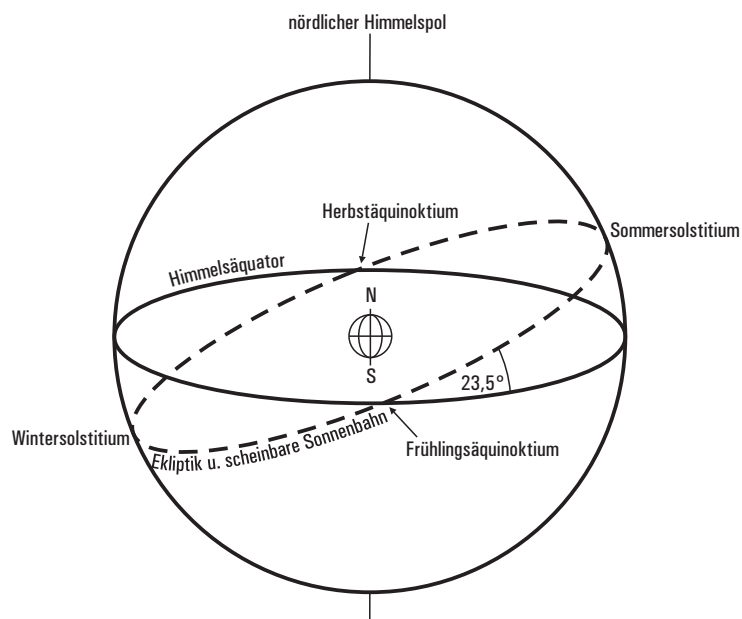


Abbildung 4.4: Die Erdachse ist gegen ihre Bahnebene um die Sonne, die Ekliptik, um $23,5$ Grad gekippt. Auf der Himmelskugel schneidet die Ekliptik den Himmelsäquator in zwei Punkten: dem Frühlings- und dem Herbst-Äquinoktium (Tag- und Nachtgleiche).

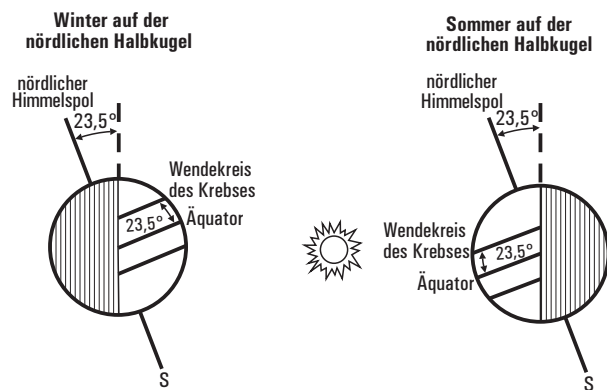


Abbildung 4.5: Die Neigung der Erdatmosphäre gegen die Ekliptiknormale ist Hauptursache für die Jahreszeiten. Beim Lauf um die Sonne zeigt die Erdatmosphäre genähert in dieselbe Richtung; so wird es auf der Nordhalbkugel Sommer, wenn die Sonnenstrahlen auf die Globushälfte über dem Äquator auftreffen, und Winter, wenn die Strahlen schräger einfallen.

Richtung, so dass eine volle Hälfte von der Sonne beschienen werden kann. Bei Sonnenfinsternissen steht der Mond direkt in der Verbindungslinie zur Sonne, so dass das Bild der Sonne verfinstert. Bei Mondfinsternissen wirft die Erde ihren Schatten auf den Mond. Für das Entstehen von Sonnenfinsternissen ist die Stellung der Mondbahn im Raum von Bedeutung. Diese ist um etwa $5,2^\circ$ gegen die Ekliptik geneigt und die Schnittlinie von Mondbahn und Ekliptik, die sogenannte Knotenlinie, bewegt sich innerhalb von 18,6 Jahren einmal um 360° herum. Diese Bewegung des Mondknotens hat Auswirkungen für das Auftreten von Sonnenfinsternissen.

Wie Abb. 4.8 zeigt, sind die Bedingungen für eine Sonnenfinsternis schlecht, wenn der Mond sich nicht in der Nähe des Mondknotens befindet und dieser nicht in Richtung der Sonne weist. Ohne die Bewegung des Mondknotens wäre dies genau zweimal während eines Jahres der Fall. Durch die retrograden Drehung der Mondbahn im Raum beträgt die Länge eines Finsternisjahres dagegen nur 346,6 Tage. 19 Finsternisjahre ergeben daher eine Zeitspanne von 6585,8 Tage, vergleichbar mit der Dauer von 223 Monaten zu je 29,5 Tagen. Dies bedeutet, dass sich alle 18 Jahre und 11 Tagen die Geometrie von Sonne, Erde und Mond wiederholt. Diese Zeitspanne wird Saros-Zyklus genannt und war bereits den alten Chaldäern bekannt. Eine Sonnenfinsternis wird sich praktisch immer nach einem Saros-Zyklus wiederholen. Schließlich müssen wir erwähnen, dass die Position des nördlichen Himmelspols auf der Himmelskugel sich langsam mit der Zeit verändert. Die Erde stellt aufgrund ihrer Rotation nämlich einen Kreisel dar, der aufgrund ihrer Abplattung und der Einflüsse von Mond und Sonne eine Kreiselbewegung, die sogenannte Präzessionsbewegung, ausführt. Aufgrund dieser Präzessionsbewegung bewegt sich die Rotationsachse der Erde innerhalb von etwa 26000 Jahren (Platonisches Jahr) einmal ganz um die Ekliptiknormale. Die Erdrotationsachse, die heute in Richtung des Polarsternes weist, wandert so im Laufe der Zeit durch die Sternbilder. Vor etwa 3000 v.Chr. war Thuban der Polstern, 14000 n.Chr. wird die Vega in der Leier zum Polstern werden.

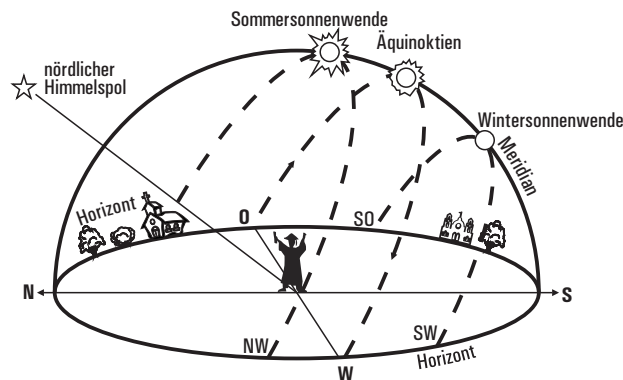


Abbildung 4.6: Die Position eines Sonnenauf- oder -unterganges ändert sich im Laufe eines Jahres. Bei der Sommersonnenwende geht die Sonne an ihrem nördlichsten Punkt des östlichen Horizonts auf, und geht an ihrem nördlichsten Punkt im Westen unter. Bei der Wintersonnenwende geht die Sonne tief im Südosten auf, bleibt mittags tief am Südhimmel und geht am westlichen Horizont extrem weit südlich unter. Bei den Frühlings- und Herbstäquinoktien geht die Sonne fast exakt im Osten auf und im Westen unter.

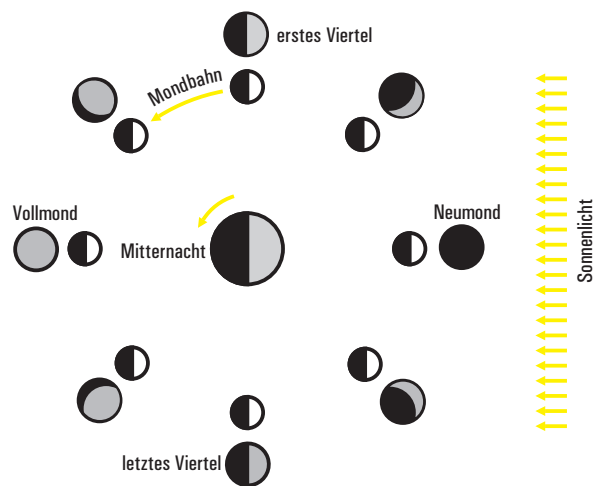


Abbildung 4.7: Die Phasen des Mondes.

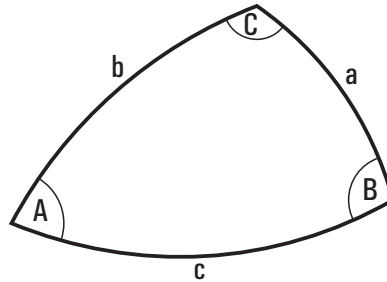


Abbildung 4.10: Notation im sphärischen Dreieck.

4.2 Räumliche Koordinaten

Astronomisch festgelegte terrestrische räumliche Bezugssysteme sind über Richtungen zu ausgewählten astronomischen Körpern definiert. Oft spielen hierbei in der Tat nur die Richtungswinkel eine Rolle (Ausnahmen: Laserdistanzmessverfahren wie bei LLR) und nicht die Distanz. In diesem Fall denkt man sich die Position auf einen Punkt unserer imaginären Himmelskugel abgebildet.

4.2.1 Marken auf der Himmelskugel

Marken definiert durch Lot und Rotation der Erde

Wir denken uns einen Beobachter auf der Erdoberfläche, welcher Sternbeobachtungen am Nachthimmel ausführt. Als Referenzrichtungen stehen ihm in der Regel die *Lotrichtung* und über die scheinbare Bewegung der Sterne die Rotationsachse der Erde zur Verfügung. Die Lotrichtung wird in der Praxis durch ein physikalisches Lot, eine Libelle, ein Quecksilberspiegel oder eine Pendelvorrichtung realisiert und das Beobachtungsinstrument entsprechend aufgestellt.

Die verlängert gedachte Rotationsachse durchstößt die Himmelskugel am *nördlichen* und *südlichen Himmelspol* (Abb. 4.11). Die Ebene senkrecht zur Rotationsachse durch das Geozentrum ist der *Himmelsäquator*. Ein Großkreis durch die Pole heißt *Stundenkreis*. Ein Kleinkreis parallel zum Himmelsäquator heißt *Himmelsparallele*.

Die fortgesetzte Lotrichtung schneidet die Himmelskugel im *Zenit* (oben) und *Nadir* (unten). Die Ebene senkrecht zur Lotrichtung durch den Beobachter (bzw. durch das Geozentrum) heißt *Himmels-Horizont*. Eine Ebene senkrecht zur Horizontebene heißt *Vertikal-Ebene*. Kleinkreise parallel zum Himmelshorizont sind *Almukantarate*.

Diejenige Vertikalebene, welche die Pole enthält, heißt *Himmels-Meridian*. Der Himmels-Meridian enthält den Stundenkreis durch den Zenit. Diejenigen Punkte auf der Himmelskugel, wo der Himmels-Meridian den Himmels-Horizont schneidet, heißen *Nord-* und *Süd-Punkte*. Diejenige Vertikalebene, welche senkrecht auf dem Meridian steht, heißt *Erste Vertikalebene*. Die Schnittpunkte der Ersten Vertikalebene mit dem Himmels-Horizont heißen *Ost-* und *West-Punkt*. Sie bilden die beiden Schnittpunkte von Horizontebene mit dem Himmelsäquator. Sei S ein beliebiger Punkt auf der Himmelskugel, an dem sich beispielsweise ein Stern befindet. Der Meridian, der Stundenkreis und der Vertikalkreis durch S definieren ein sphärisches Dreieck: das *astro-*

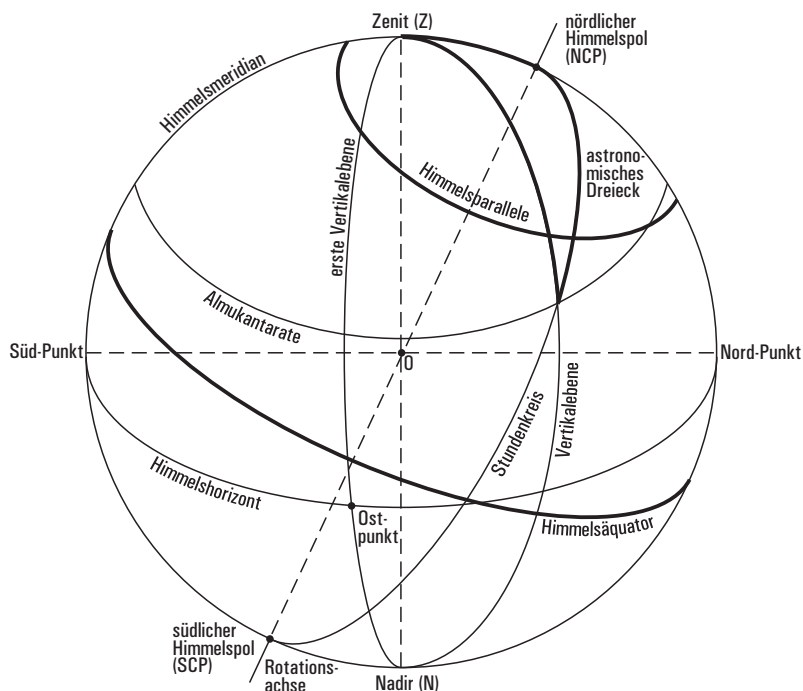


Abbildung 4.11: Lot- und Erdrotations-Marken auf der Himmelskugel.

nomische oder *nautische Dreieck* (Abb. 4.10) von S . Die Vertizes des astronomischen Dreiecks sind: der Zenit (Z) des Beobachters, der nördliche Himmelspol (NCP) und der Punkt (S).

Marken, definiert durch die Bewegung der Erde um die Sonne

Die Ebene der *Ekliptik* ist definiert über das Heliozentrum und den Orts- und Geschwindigkeitsvektor des Baryzentrums des Erde-Mond Systems, nachdem für periodische Störungen durch Venus und Jupiter "korrigiert" wurde. Sie liegt stets innerhalb von $2''$ vom scheinbaren Weg der Sonne um die Erde. Die Gerade senkrecht zur Ekliptik durch das Geozentrum durchstößt die Himmelskugel in den beiden *ekliptischen Polen* (siehe Abb. 4.12). Eine Ebene parallel zur Ekliptik schneidet die Himmelskugel in den *ekliptischen Parallelen*. Senkrecht zur Ekliptik durch den ekliptischen Pol und den Punkt S verläuft der *ekliptische Meridian* von S . Die Ekliptik schneidet den Himmelsäquator in einer Linie, welche die beiden Äquinoktien (Tag- und Nacht-Gleiche) verbindet. Einer der Äquinoktien, der Frühlingspunkt, hat eine herausragende Bedeutung in der Astronomie. Er repräsentiert die astronomische x-Achsenrichtung. Der Stundenkreis durch diesen heißt Äquinoktialkolor. Der Winkel zwischen Himmelsäquator und Ekliptik heißt Ekliptikschiefe. Die zwei entgegengesetzten Punkte in der Ekliptik, 90° von den Äquinoktien entfernt sind die Solstitien (Sonnenwendpunkte).

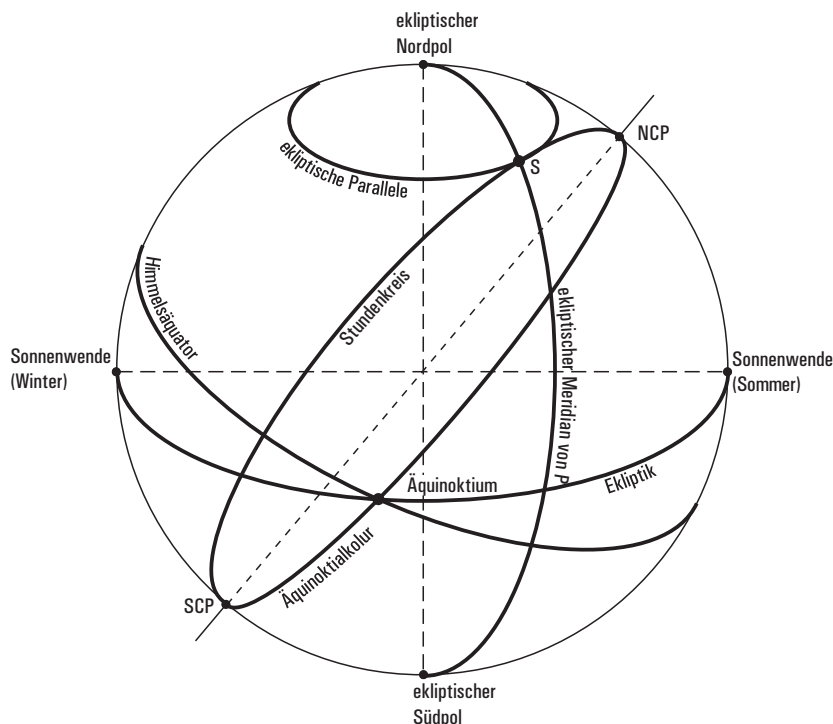


Abbildung 4.12: Ekliptische Marken auf der Himmelskugel.

4.2.2 Kartesische Koordinaten - Sphärische Koordinaten

Wir werden im Folgenden die astronomischen Standardkoordinaten einführen. Bei jedem dieser Systeme handelt es sich um räumliche kartesische Koordinaten (x, y, z) . Diese weisen zunächst einen Koordinatenursprung ($\mathbf{x} = 0$) auf. Für die *Horizontkoordinaten* ist dieser Ursprung primär durch den Standort des Beobachters (das Topozentrum) gegeben, der Ursprung der Äquatorkoordinaten liegt im Geozentrum. Wenn wir jedoch die Koordinatensysteme miteinander verknüpfen, so legen wir auch den Ursprung des Horizontsystems ins Geozentrum, was nicht immer explizit ausgesagt werden wird. Das ekliptische Koordinatensystem hat seinen Ursprung primär im Massenmittelpunkt des Sonnensystems (Baryzentrum). Für Koordinatenvergleiche wird der Ursprung aber auch hier ins Geozentrum verschoben.

Neben einem Ursprung hat ein kartesisches Koordinatensystem auch eine *Händigkeit*. Kann man mit Daumen, Zeige- und Mittelfinger der *rechten* Hand die Lage von x, y - und z -Achse nachbilden, so handelt es sich um ein *rechtshändiges* Koordinatensystem, andernfalls um ein *linkshändiges*.

Die z -Achse eines kartesischen Koordinatensystems wird oft mit *Pol* bezeichnet, die xy -Ebene mit *Äquator* oder *primärer Referenzebene*. Die xz -Ebene wird auch als *sekundäre Referenzebene* bezeichnet.

Die Position eines Sternes auf der Himmelskugel wird in der Regel durch zwei Winkel, sagen wir (μ, ν) angegeben. Einer der zwei (ν) wird dabei von der *primären*

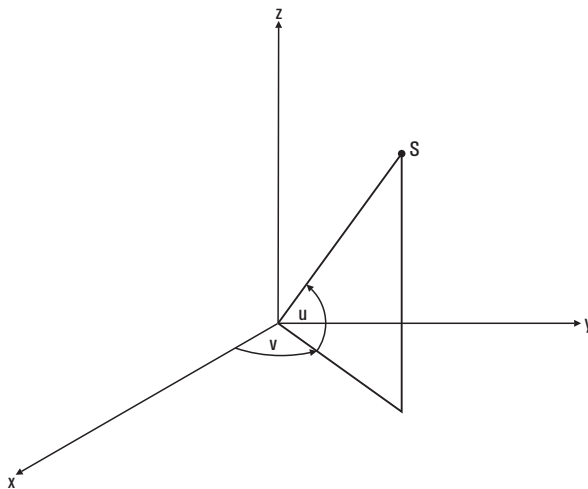


Abbildung 4.13: Ein rechtshändiges Koordinatensystem und assoziierte sphärische Winkel.

Referenzebene senkrecht zu dieser gemessen, der zweite (μ) bezüglich der *sekundären Referenzebene*, gemessen in der primären Ebene. Diese zwei Winkel sind einfach die sphärischen Winkel des kartesischen Systems (Abb. 4.13). Für einen Punkt auf der Einheitskugel gilt im Falle eines rechtshändigen Systems: Dann sind die kartesischen Koordinaten eines Punktes auf der Einheitskugel (die sogenannten Richtungskosinuse) gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \nu \cos \mu \\ \cos \nu \sin \mu \\ \sin \nu \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

4.2.3 Horizont-Koordinaten

Bei den sogenannten Horizont-Koordinaten ist der Pol durch die topozenrische Lotrichtung, die primäre Referenzebene also durch den Himmels-Horizont gegeben, wie in Abb. 4.14 gezeigt. Die sekundäre Ebene ist durch den Meridian des Beobachters festgelegt. Man beachte, dass in vielen Fällen dies die natürlichen Referenzflächen eines Beobachters sind. In der Praxis wird die Lotrichtung z.B. über Libellen operativ realisiert. Der Meridian wird durch die Lotrichtung (Zenit) und die Bewegung der Sterne (S) realisiert.

Die beiden Winkel des Horizontsystems heißen *Höhe* a und *Azimat* A . Die Höhe a über dem Horizont von S ist in Abb. 4.14 gleich dem Winkel ROS in der Vertikalebene, gezählt vom Himmelshorizont. Die Zählung ist positiv (negativ) für Positionen über (unter) dem Horizont. Anstelle der Höhe benutzt man oft auch den komplementären Winkel, die *Zenitdistanz* z :

$$z = 90^\circ - a. \quad (4.2)$$

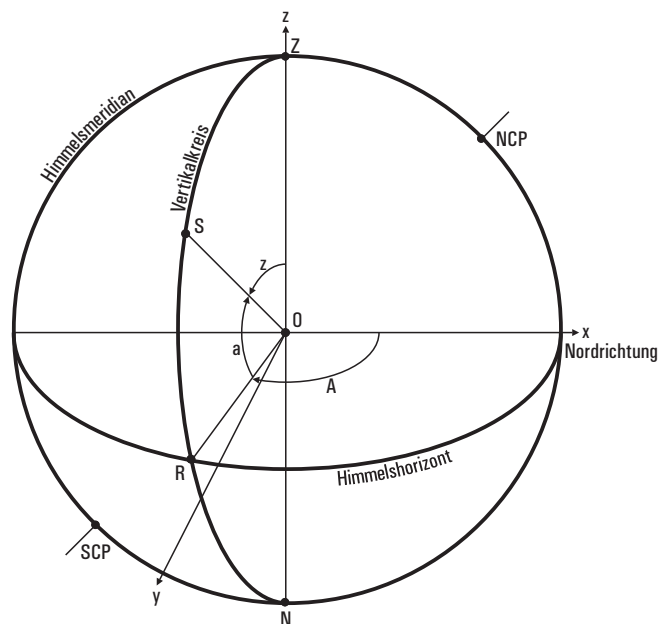


Abbildung 4.14: Horizontkoordinaten

Das Azimut A ist der Winkel in der Horizontebene, gezählt von der Nordrichtung, d.h. vom Meridian, in östliche Richtung. Es ist in manchen Fällen auch nützlich, sich das Azimut als Winkel am Zenit zu denken.

Beim entsprechenden kartesischen Koordinatensystem liegt die z -Achse in Richtung zum Zenit, die x -Achse in Richtung auf den Nordpunkt in der Horizontebene. Die Lage der y -Achse weist in die Richtung von $A = +90^\circ$, d.h. zum Ostpunkt. Bei den Horizontkoordinaten handelt es sich um ein linkshändiges System.

4.2.4 Das Äquatorsystem der ersten Art

Beim Äquatorsystem der ersten Art ist die Primärebene der Himmels-Äquator, die Sekundärebene der Himmels-Meridian des Beobachters. Die beiden Winkel heißen *Deklination* δ und *Stundenwinkel* h wie in Abb. 4.15 gezeigt. Die Deklination wird dabei vom Äquator positiv nach Norden gezählt (so wie die geographische Breite auf der Erde). Der Stundenwinkel h zählt vom Südpunkt in der Äquatorebene (definiert durch den Meridian) nach Westen, d.h. in Richtung der Sternbewegung aufgrund ihrer scheinbaren täglichen Bewegung. Üblicherweise zählt man den Stundenwinkel in formalen Stunden, Minuten und Sekunden, wobei per definitionem 24 Stunden einem Winkel von 360° entsprechen, d.h.

$$\begin{aligned} 24^{\text{h}} &= 360^\circ & 1^{\text{h}} &= 15^\circ \\ 1^{\text{m}} &= 15' & 1^{\text{s}} &= 15'' \end{aligned}$$

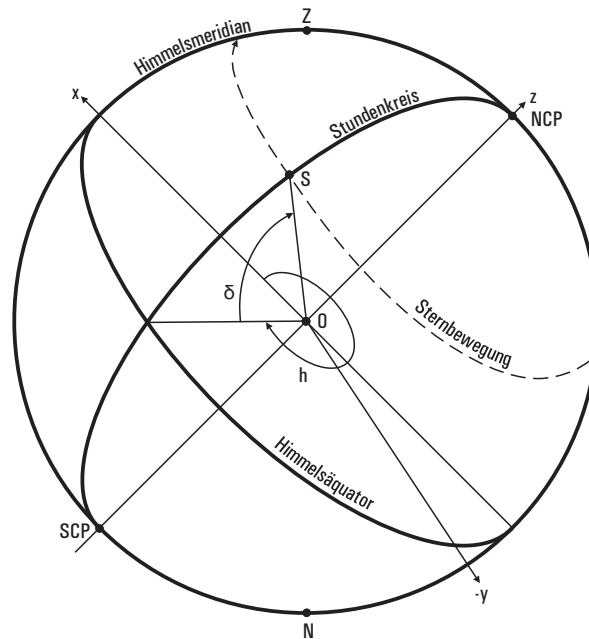


Abbildung 4.15: Das Äquatorsystem der ersten Art.

Hier ist es nützlich, sich den Stundenwinkel als Winkel am nördlichen Himmelspol zu denken (das Azimut dagegen am Zenit).

Die z -Achse des Äquatorsystems der ersten Art weist zum nördlichen Himmelspol, die x -Achse zum Südpunkt in der Äquatorebene und die y -Achse zum Westpunkt. Das System ist daher linkshändig.

4.2.5 Das Äquatorsystem der zweiten Art

Wir denken uns jetzt mit dem Problem konfrontiert, einen Katalog mit Sternpositionen anfertigen zu müssen. Die Sternpositionen des Kataloges sollten dabei vom Standort des Beobachters unabhängig sein. Nun erfüllt zwar die Deklination eines Sternes diese Bedingung, nicht aber der Stundenwinkel h , der ja vom Meridian des Beobachters aus gezählt wird und für einen Stern sich mit der Zeit aufgrund der Erddrehung verändert. Aus diesem Grunde führt man neben der Deklination δ eine zweite Koordinate so ein, dass diese unabhängig vom Beobachterstandort und der täglichen Erddrehung wird. Im Äquatorsystem der zweiten Art ist die primäre Referenzebene wieder der Himmelsäquator, die sekundäre Ebene dagegen die Äquinoktialkolor (siehe Abb. 4.16). Neben die Deklination tritt hier die *Rektaszension* α . Diese wird in der Äquatorebene vom Frühlingspunkt in östliche Richtung gezählt. Auch die Rektaszension wird üblicherweise in Stunden, Minuten und Sekunden angegeben.

Die z -Achse dieses Äquatorsystems ist wieder durch den nördlichen Himmelspol gegeben, die x -Achse durch den Frühlingspunkt und die y -Achse vervollständigt dieses zu einem rechtshändigen System.

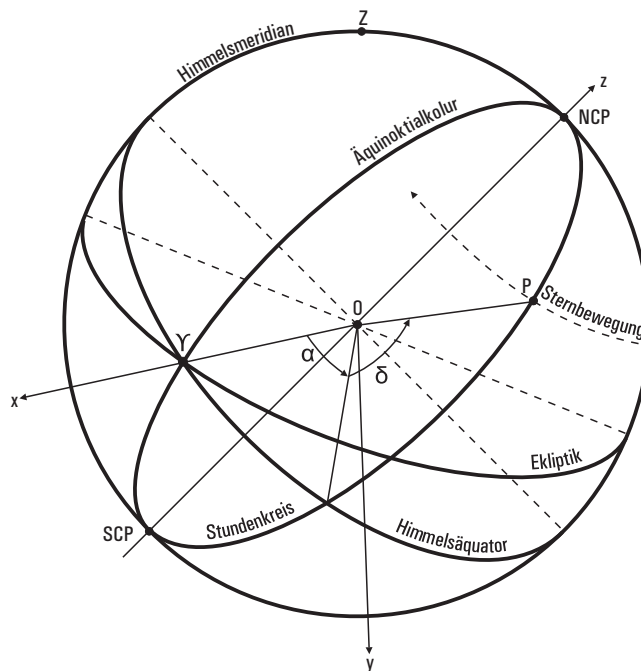


Abbildung 4.16: Das Äquatorsystem der zweiten Art.

4.2.6 Ekliptische Koordinaten

Die ekliptischen Koordinaten der ekliptikalen Länge λ und ekliptikalen Breite β sind analog zu den Äquatorkoordinaten der zweiten Art konstruiert. Die primäre Referenzebene ist hier die Ekliptik, die sekundäre die ekliptische Meridianebene durch den Frühlingspunkt (vgl. Abb. 4.21). Bei diesem rechtshändigen System weist also die z -Achse zum Ekliptikpol und die x -Achse in Richtung des Frühlingspunktes.

4.3 Zusammenhang verschiedener Koordinatensysteme

Eine Übersicht der diversen, soeben eingeführten Koordinatensysteme findet sich noch einmal in Tabelle 4.1. Um den Zusammenhang zwischen den Koordinatensystemen abzuleiten, kann man sich verschiedener Methoden bedienen. Wir wollen im Folgenden die Methoden der sphärischen Trigonometrie und der Rotationsmatrizen diskutieren. Wir beginnen mit der ersten Methode.

4.3.1 Der Zusammenhang zwischen (z, A) und (δ, h)

Wir betrachten das astronomische Dreieck eines Himmelspunktes S . Wir hatten oben bereits bemerkt, dass das Azimut in diesem Dreieck am Zenit erscheint, der Stun-

System	Reference Plane		Parameters Measured from the Reference Plane	
	Primary	Secondary	Primary	Secondary
Horizon	Celestial horizon	Celestial meridian (half containing north pole)	Altitude $-90^\circ \leq a \leq +90^\circ$ (+toward zenith)	Azimuth $0^\circ \leq A \leq 360^\circ$ (+east)
Hour angle	Celestial equator	Hour circle of observer's zenith (half containing zenith)	Declination $-90^\circ \leq \delta \leq +90^\circ$ (+north)	Hour angle $0^h \leq h \leq 24^h$ $0^\circ \leq h \leq 360^\circ$ (+west)
Right ascension	Celestial equator	Equinoctial colure (half containing vernal equinox)	Declination $-90^\circ \leq \delta \leq +90^\circ$ (+north)	Right ascension $0^h \leq \alpha \leq 24^h$ $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ (+east)
Ecliptic	Ecliptic	Ecliptic meridian of the equinox (half containing vernal equinox)	(Ecliptic) Latitude $-90^\circ \leq \beta \leq +90^\circ$ (+north)	(Ecliptic) Longitude $0^\circ \leq \lambda \leq 360^\circ$ (+east)

Tabelle 4.1: Übersicht über die diversen Koordinatensysteme der astronomischen Geodäsie.

denwinkel dagegen am nördlichen Himmelpol. Nun zählt das Azimut von der Nordrichtung nach Osten, der Stundenwinkel dagegen von der Südrichtung nach Westen. Die Winkel im nautischen Dreieck bei Z und NCP hängen dann davon ab, ob sich der Stern S westlich oder östlich vom Meridian des Beobachters befindet. Steht der Stern *westlich* vom Meridian, so lauten die Innenwinkel: Stundenwinkel h bei NCP , $360^\circ - A$ bei Z und der sogenannte parallaktische Winkel p bei S . Steht S dagegen östlich vom Meridian so lauten sie: $24^h - h$ bei NCP , A bei Z und p bei S .

Wir kommen jetzt zu den Seiten des astronomischen Dreiecks. Die astronomische Breite Φ zählt vom Himmelsäquator längs eines Stundenkreises zum Zenit des Beobachters, d.h. die Seite zwischen NCP und Z ist gleich: $90^\circ - \Phi$. Die Deklination eines Sternes zählt vom Himmelsäquator zu S längs eines Stundenkreises, d.h. die Seite zwischen NCP und S ist gleich $90^\circ - \delta$. Schließlich ist die Seite zwischen Z und S gleich der Zenitdistanz z .

Wir wollen jetzt einen Stern westlich des Meridians betrachten. Aus dem Sinussatz der sphärischen Trigonometrie

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}$$

folgt dann

$$\frac{\sin(360^\circ - A)}{\sin h} = \frac{\sin(90^\circ - \delta)}{\sin z}$$

oder wegen $\sin(360^\circ - A) = -\sin A$ und $\sin(90^\circ - \delta) = \cos \delta$

$$\sin z \sin A = -\cos \delta \sin h. \quad (4.3)$$

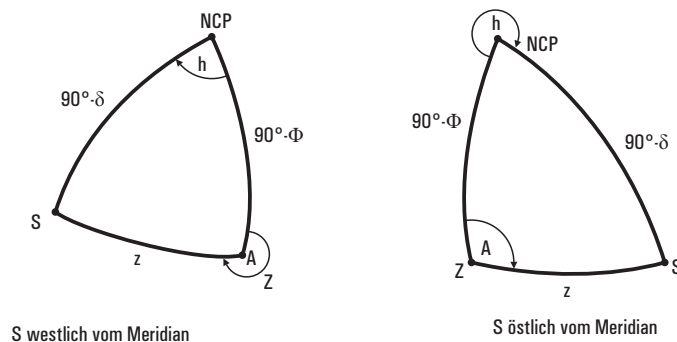


Abbildung 4.18: Das astronomische Dreieck.

Die Anwendung des Kosinussatz

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

ergibt

$$\cos z = \cos(90^\circ - \Phi) \cos(90^\circ - \delta) + \sin(90^\circ - \Phi) \sin(90^\circ - \delta) \cos h$$

oder

$$\cos z = \sin \Phi \sin \delta + \cos \Phi \cos \delta \cos h. \quad (4.4)$$

Aus dem Sinus-Kosinussatz

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

folgt

$$\begin{aligned} \sin z \cos(360^\circ - A) &= \cos(90^\circ - \delta) \sin(90^\circ - \Phi) \\ &\quad - \sin(90^\circ - \delta) \cos(90^\circ - \Phi) \cos h \end{aligned}$$

oder

$$\sin z \cos A = \sin \delta \cos \Phi - \cos \delta \cos h \sin \Phi. \quad (4.5)$$

Die Breite Φ wird als bekannt angenommen. Die Formeln 4.3-4.5 liefern dann die Umrechnung von (h, δ) nach (A, z) . Gleichung 4.4 ergibt die Zenitdistanz z und das Azimut folgt aus 4.3 und 4.5 gemäß

$$\tan A = \frac{-\cos \delta \sin h}{\sin \delta \cos \Phi - \cos \delta \sin \Phi \cos h}. \quad (4.6)$$

Für die inverse Abbildung schreiben wir 4.3 in der Form

$$\cos \delta \sin h = -\sin z \sin A. \quad (4.7)$$

Multipliziert man 4.4 mit $\sin \Phi$ und 4.5 mit $\cos \Phi$ und addiert so gewinnt man:

$$\begin{aligned} \cos z \sin \Phi + \sin z \cos A \cos \Phi &= \sin^2 \Phi \sin \delta + \sin \Phi \cos \Phi \cos \delta \cos h \\ &\quad + \cos^2 \Phi \sin \delta - \sin \Phi \cos \Phi \cos \delta \cos h \\ &= \sin \delta, \end{aligned}$$

d.h.

$$\sin \delta = \cos z \sin \Phi + \sin z \cos A \cos \Phi . \quad (4.8)$$

Die Gleichung 4.4 $\times \cos \Phi - 4.5 \times \sin \Phi$ liefert schließlich

$$\begin{aligned} \cos z \cos \Phi - \sin z \cos A \sin \Phi = & \sin \Phi \cos \Phi \sin \delta + \cos^2 \Phi \cos \delta \cos h \\ & - \sin \Phi \cos \Phi \sin \delta + \sin^2 \Phi \cos \delta \cos h \end{aligned}$$

oder

$$\cos \delta \cos h = \cos z \cos \Phi - \sin z \cos A \sin \Phi . \quad (4.9)$$

Aus Gleichungen 4.7 - 4.9 gewinnt man (δ, h) , wenn (A, z) gegeben ist.

Aus diesen Gleichungen kann man eine ganze Menge über die scheinbare Bewegung der Sterne im Laufe eines Tages lernen. Durch die Rotationsbewegung der Erde bewegen sich alle Sterne scheinbar von Ost nach West. Die Zenitdistanz oder Höhe über dem Horizont hängt dabei für festes δ und Φ gemäß der Beziehung 4.4 vom Stundenwinkel h ab. Die Bahn ist dabei symmetrisch zum Meridian, für den $h = 0$ gilt. Differentiation von 4.4 nach h liefert

$$-\sin z \frac{dz}{dh} = -\cos \Phi \cos \delta \sin h$$

bzw.

$$\frac{dz}{dh} = \frac{\cos \Phi \cos \delta \sin h}{\sin z} . \quad (4.10)$$

Nun sind $\cos \Phi$, $\cos \delta$ und $\sin z$ stets positiv. Für beliebige Beobachtungsorte auf der Erde und Sternpositionen gilt daher:

$h < 180^\circ = 12^h$: Zenitdistanz wächst

$h > 180^\circ = 12^h$: Zenitdistanz nimmt ab.

Im ersten Fall steht der Stern auf der West- oder Untergangsseite, im zweiten Fall auf der Ost- oder Aufgangsseite. Für $h = 0$, d.h. wenn der Stern im Meridian steht, erreicht er seine größte Höhe über dem Horizont. Man redet dann von seiner oberen Kulmination. Für Meridiandurchgänge ($h = 0$) gilt

$$\cos z = \sin \Phi \sin \delta + \cos \Phi \cos \delta = \cos(\Phi - \delta)$$

oder

$$z = \Phi - \delta, \quad (4.11)$$

wenn der Stern südlich des Zenit kulminiert. Kulminiert er nördlich, so gilt

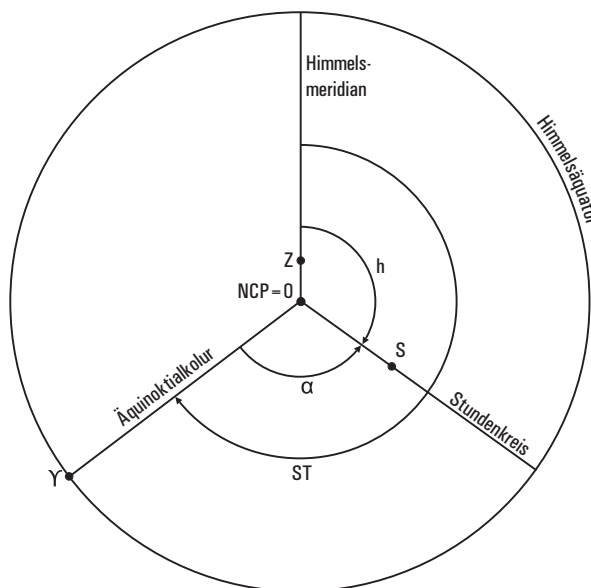
$$z = \delta - \Phi . \quad (4.12)$$

Der Zusammenhang zwischen (h, δ) und (α, δ)

Der Winkel zwischen dem Himmelsmeridian des Beobachters und der Äquinoktialkolar (Richtung zum Frühlingspunkt, vom NCP aus gesehen) heißt *lokale siderische Zeit* ST . Aus (Abb. 4.19) sieht man:

$$\boxed{\alpha = ST - h.} \quad (4.13)$$

Diese Beziehung liefert den Zusammenhang zwischen dem Äquatorsystem der ersten und zweiten Art.

Abbildung 4.19: Die lokale siderische Zeit ST .

4.3.2 Die Anwendung von Drehmatrizen

Zur Umwandlung verschiedener räumlicher *kartesischer* Koordinaten mit dem selben Koordinatenursprung und der *gleichen Händigkeit* benutzt man zweckmäßigerweise sogenannte *Drehmatrizen*. Wir wollen nun zwei rechtshändige Systeme mit gemeinsamen Ursprung betrachten. Wir wollen anfänglich annehmen, dass die beiden z -Achsen Übereinstimmen. Diese Situation ist in Abb. 4.20 dargestellt.

Eine positive Drehung um die z -Achse erfolgt entgegen des Uhrzeigersinnes, wenn man von positiven z -Werten auf den Koordinatenursprung blickt. In Abb. 4.20a ist die Situation für einen Punkt auf der x -Achse dargestellt. Für einen derartigen Punkt gilt: $\cos \theta = x'/x$ und $\sin \theta = -y'/x$, also

$$x' = \cos \theta x; \quad y' = -\sin \theta x.$$

Für einen Punkt auf der y -Achse ist die Situation in Abb. 4.20b dargestellt. Man erkennt, dass hierfür $\sin \theta = x'/y$ und $\cos \theta = y'/y$ gilt, also

$$x' = \sin \theta y; \quad y' = \cos \theta y.$$

Im allgemeinen Fall ergibt sich hieraus:

$$\begin{aligned} x' &= \cos \theta x + \sin \theta y \\ y' &= -\sin \theta x + \cos \theta y. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Bei einer Drehung um die gemeinsame z -Achse ist freilich

$$z' = z,$$

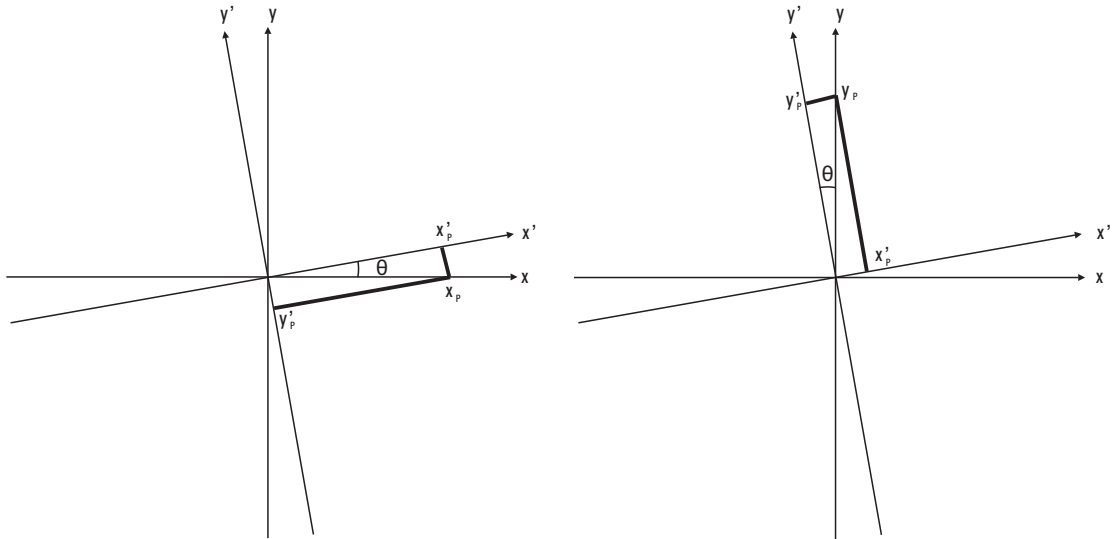


Abbildung 4.20: Positive Drehung um den Winkel θ um die z -Achse. a: ein Punkt befindet sich auf der x -Achse; b: ein Punkt befindet sich auf der y -Achse.

sodass wir die 3-dimensionale Drehung um die z -Achse mit der *Drehmatrix*

$$\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

über

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R}_z(\theta) \mathbf{x} \quad (4.16)$$

beschreiben können. Die entsprechenden Drehmatrizen um die x - und die y -Achse lauten:

$$\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

und

$$\mathbf{R}_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Oft schreiben wir $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3$ für $\mathbf{R}_x, \mathbf{R}_y, \mathbf{R}_z$. Wie man Matrizen in MAPLE definiert wird aus dem Programm rotmat.mws ersichtlich.

Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen $(a = 90^\circ - z, A)$ und (h, δ) mit Hilfe von Rotationsmatrizen ableiten. Dazu gehen wir vom (a, A) System aus. Hier weist die z -Achse zum Zenit des Beobachters und die x -Achse nach Nord. Dreht man diese Koordinaten um die z -Achse mit $+180^\circ$, so weist die neue x -Achse nach Süden, von wo aus der Stundenwinkel h gezählt wird. Dreht man dann noch um die neue y -Achse so, dass die z -Achse zum nördlichen Himmelspol weist, so hat man das kartesische Koordinatensystem von (h, δ) erreicht. Dazu muss um den Winkel $-(90^\circ - \Phi)$ gedreht werden, d.h.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{h,\delta} = \mathbf{R}_2(\Phi - 90^\circ) \mathbf{R}_3(180^\circ) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{a,A}. \quad (4.19)$$

Man bemerke, dass bei einer Folge von Matrizen die rechts stehende *zuerst* operiert. Wir wollen nun noch die Richtigkeit dieser Beziehung überprüfen. Ausgeschrieben ergibt sich

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos \delta \cos h \\ \cos \delta \sin h \\ \sin \delta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sin \Phi & 0 & \cos \Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \Phi & 0 & \sin \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos a \cos A \\ \cos a \sin A \\ \sin a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin \Phi & 0 & \cos \Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \Phi & 0 & \sin \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos a \cos A \\ -\cos a \sin A \\ \sin a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos a \sin \Phi \cos A + \sin a \cos \Phi \\ -\cos a \sin A \\ +\cos a \cos \Phi \cos A + \sin a \sin \Phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos z \cos \Phi - \sin z \sin \Phi \cos A \\ -\sin z \sin A \\ \cos z \sin \Phi + \sin z \cos \Phi \cos A \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.20)$$

in Übereinstimmung mit den Gleichungen (4.3 - 4.5).

Will man von (h, δ) -System zum (α, δ) -System übergehen, so kann man zunächst das linkshändige (h, δ) -System mittels Spiegelung der y -Achse, d.h. $y \rightarrow -y$, in ein Rechtssystem umwandeln. Eine Drehung um die z -Achse mit $\theta = -ST$ liefert dann das gewünschte Ergebnis, d.h.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\alpha,\delta} = \mathbf{R}_3(-ST) \begin{pmatrix} x \\ -y \\ z \end{pmatrix}_{h,\delta}. \quad (4.21)$$

Der Zusammenhang zwischen (α, δ) und (λ, β)

Um die ekliptischen Koordinaten (λ, β) aus (α, δ) zu erhalten, muss man nur um die x -Achse mit $\theta = \epsilon$ (Schiefe der Ekliptik) drehen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\lambda,\beta} = \mathbf{R}_1(\epsilon) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\alpha,\delta}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \beta \sin \lambda \\ \sin \beta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon & \sin \epsilon \\ 0 & -\sin \epsilon & \cos \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \cos \epsilon + \sin \delta \sin \epsilon \\ -\cos \delta \sin \alpha \sin \epsilon + \sin \delta \cos \epsilon \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Die inverse Transformation dazu lautet:

$$\begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \beta \sin \lambda \cos \epsilon - \sin \beta \sin \epsilon \\ \cos \beta \sin \lambda \sin \epsilon + \sin \beta \cos \epsilon \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Nach einer derartigen Transformation erhält man die neuen Winkel (hier β und λ) aus

$$\begin{aligned} \lambda &= \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ \beta &= \tan^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin^{-1} z. \end{aligned} \quad (4.24)$$

4.4 Differentielle Beziehungen

Für diverse Zwecke sind differentielle Beziehungen zwischen den Koordinaten von Bedeutung. Einerseits kann mit ihnen ein Gesamtmessfehler abgeschätzt werden, wenn Messfehler für gewisse Observable (Zeit, Zenitdistanz etc.) bekannt sind. Andererseits können Bedingungen für die Minimierung der Auswirkung gewisser Fehler auf den Gesamtfehler einer zu bestimmenden Größe (etwa Länge und Breite des Beobachters) daraus abgeleitet werden.

Derartige differentielle Relationen basieren auf dem Differenzial einer Funktion. Das vollständige Differenzial df der Funktion $f = f(x, y, z)$ ist definiert über

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) dz \quad (4.25)$$

und analog für eine von beliebig vielen unabhängigen Koordinaten abhängige Funktion.

Für die Herleitung derartiger differentielle Beziehungen wollen wir den parallaktischen Winkel p , der im astronomischen Dreieck als Innenwinkel beim Stern S auftritt, verwenden. Wir nehmen an, ein Stern S stehe westlich des Himmelsmeridians. Dann ist der Innenwinkel beim Zenit $360^\circ - A$ und beim NCP der Stundenwinkel h . Aus dem Sinussatz ergibt sich dann:

$$\frac{\sin p}{\sin(90^\circ - \Phi)} = \frac{\sin(360^\circ - A)}{\sin(90^\circ - \delta)}$$

oder

$$\frac{\sin p}{\cos \Phi} = -\frac{\sin A}{\cos \delta}.$$

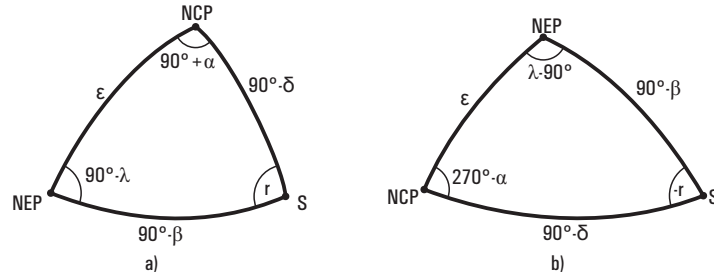


Abbildung 4.21: Das ekliptische Dreieck. a: S westlich vom ekliptischen Meridian; b: S östlich vom ekliptischen Meridian.

Für den Fall $0^h < h < 12^h$ gilt also

$$\sin p = -\sin A \cos \Phi \sec \delta, \quad (4.26)$$

mit $\sec = 1/\cos$. Weiter oben hatten wir jedoch gefunden, dass

$$\sin A \sin z = -\cos \delta \sin h.$$

Damit folgt dann:

$$\sin p = \mp \sin A \cos \Phi \sec \delta = \pm \sin h \operatorname{cosec} z \cos \Phi, \quad (4.27)$$

wobei das obere (untere) Vorzeichen für $0^h < h < 12^h$ ($12^h < h < 24^h$) gilt. Für den Kosinus des parallaktischen Winkels findet man ($\operatorname{cosec} = 1/\sin$):

$$\cos p = \sin \Phi \operatorname{cosec} z \sec \delta - \tan \delta \cot z. \quad (4.28)$$

Im ekliptischen Dreieck werden wir den zum parallaktischen Winkel analogen Winkel r betrachten (Abb. 4.21). Hierfür gilt:

$$\begin{aligned} \sin r &= \cos \lambda \sec \delta \sin \epsilon = \cos \alpha \sec \beta \sin \epsilon \\ \cos r &= \sec \delta \sec \beta \cos \epsilon - \tan \delta \tan \beta. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Wir wollen nun zeigen, wie man differentielle Relationen ableiten kann. Eine dieser Relationen lautet:

$$dz = -\sin A \cos \Phi dh - \cos p d\delta - \cos A d\Phi. \quad (4.30)$$

Hierin bezeichnen dz , dh und $d\Phi$ die Differentiale der Zenitdistanz, des Stundenwinkels und der astronomischen Breite. Wir gehen von den Relationen für den parallaktischen Winkel 4.27 und 4.28 aus, sowie von den Relationen 4.3 - 4.5

$$\begin{aligned} \sin z \sin A &= -\cos \delta \sin h \\ \cos z &= \sin \Phi \sin \delta + \cos \Phi \cos \delta \cos h \\ \sin z \cos A &= \sin \delta \cos \Phi - \cos \delta \cos h \sin \Phi. \end{aligned}$$

Differentiation von 4.4 liefert:

$$\begin{aligned} -\sin z dz = & +(\cos \Phi \sin \delta - \sin \Phi \cos \delta \cos h) d\Phi \\ & +(\sin \Phi \cos \delta - \cos \Phi \sin \delta \cos h) d\delta \\ & - \cos \Phi \cos \delta \sin h dh, \end{aligned}$$

d.h. dz ist gleich $-\operatorname{cosec} z$ mal der rechten Seite dieser Gleichung. Wir betrachten nun die Vorfaktoren vor den Differentialen dh , $d\delta$ und $d\Phi$. Der Vorfaktor vor dh lautet ($\operatorname{cosec} = 1/\sin$)

$$+(\sin h \operatorname{cosec} z \cos \Phi) \cos \delta = -\sin A \cos \Phi,$$

wenn man Relation 4.27 beachtet. Dies ist aber genau der Vorfaktor vor dh in Relation 4.30. Der Vorfaktor vor $d\delta$ lautet

$$\begin{aligned} & -\operatorname{cosec} z(\sin \Phi \cos \delta - \cos \Phi \sin \delta \cos h) \\ = & -\operatorname{cosec} z \sin \Phi \cos \delta + \operatorname{cosec} z \tan \delta(\cos \Phi \cos \delta \cos h). \end{aligned}$$

Der Ausdruck in der rechten Klammer kann nun mit Hilfe von 4.4 umgeformt werden und liefert

$$\cos z - \sin \Phi \sin \delta.$$

Für den Vorfaktor vor $d\delta$ findet man daher:

$$\tan \delta \cot z - \sin \Phi \operatorname{cosec} z \sec \delta(\cos^2 \delta + \sin^2 \delta) = -\cos p,$$

gemäß Relation 4.30. Schließlich liefert die Formel 4.5 direkt das richtige Resultat für den Vorfaktor von $d\Phi$:

$$-\operatorname{cosec} z(\cos \Phi \sin \delta - \sin \Phi \cos \delta \cos h) = -\cos A.$$

Auf diese Art und Weise lassen sich viele derartige differentielle Relationen ableiten. Einige davon lauten:

$$\begin{aligned} dA &= (\cos p \cos \delta dh + \cos \Phi \sin h \operatorname{cosec} z d\delta \\ &+ \cos z \sin A d\Phi) \operatorname{cosec} z \\ dz &= -\sin A \cos \Phi dh - \cos p d\delta - \cos A d\Phi. \\ \\ dh &= (\cos p \sin z dA + \cos \Phi \sin h \operatorname{cosec} z dz \\ &+ \sin \delta \sin h d\Phi) \sec \delta \\ d\delta &= \cos \Phi \sin h dA - \cos p dz + \cos h d\Phi. \end{aligned}$$

Für die Bestimmung der astronomischen Breite Φ sind folgende Relationen von Interesse:

$$\boxed{d\Phi = -\frac{1}{\cos A} dz - \cos \Phi \tan A dh - \frac{\cos p}{\cos A} d\delta} \quad (4.31)$$

$$d\Phi = \frac{\tan z}{\sin A} dA + \frac{\cos \delta \cos p}{\cos z \sin A} dh + \frac{\cos \Phi}{\cos z \cos \delta} d\delta \quad (4.32)$$

Diese beiden Relationen haben in der Vergangenheit für die astronomische Bestimmung der Breite eine wichtige Rolle gespielt und wir wollen sie daher im Folgenden etwas eingehender diskutieren. Wir nehmen an, dass das Beobachtungsinstrument mit einem Fadenkreuz versehen ist, welches nach dem Beobachterhorizont ausgerichtet ist, d.h. der Beobachter studiert Sterndurchgänge durch Horizontal- oder Vertikalfäden. Formel 4.31 findet Anwendung, wenn man die astronomische Breite aus Messung von Zenitdistanz, Stundenwinkel und Deklination bestimmen möchte. Die Messfehler für z, h und δ sind dann durch dz, dh und $d\delta$ beschrieben. Da die Messung von h eine *Zeitmessung* darstellt, beschreibt dh den *Zeitfehler*. In der Praxis werden die Deklinationen δ der Sterne mit hoher Genauigkeit vorliegen, d.h. wir setzen $d\delta = 0$. Wir messen dann also nur Zenitdistanzen und Zeiten zur Bestimmung von h . Zenitdistanzen werden durch Horizontalfaden-Durchgänge gemessen. Aus Relation 4.31 erkennt man, dass sich ein Fehler in z am wenigstens auswirkt, wenn $\cos A = 1$ ist. Dann ist nämlich der Vorfaktor bei dz minimal. Dies ist aber genau im Meridian mit $A = 0$ der Fall. Dort ist aber auch $\tan A = 0$, d.h. der Zeitmessfehler spielt im Meridian in erster Ordnung *keine Rolle*, da dort der Stern kulminiert und sich seine Zenitdistanz mit der Zeit nur wenig ändert. Man kann also die differentielle Relation 4.31 in dem Sinne verstehen, dass zur Bestimmung der astronomischen Breite aus der Messung von Zenitdistanzen und Zeiten die Messungen zweckmäßigerweise im Meridian durchgeführt werden sollten.

Bei der zweiten Relation 4.32 soll die Bestimmung der astronomischen Breite durch Messung von Azimuten und Zeiten erfolgen. Die Azimutmessungen laufen hierbei auf das Ausmessen von Vertikalfaden-Durchgängen hinaus. Jetzt taucht hier der Sinus von A im Nenner vor dA auf. Um den Einfluss des Azimutfehlers zu minimieren, sollte $\sin A = 1$ sein, d.h. diese Messungen sollten in der Nähe des ersten Vertikals ausgeführt werden. Aufgrund des Zeitmessfehlers sollte bei möglichst kleinen z -Werten gearbeitet werden. Man kann hier aber auch zwei Sterne symmetrisch zum Meridian in der Nähe des ersten Vertikals messen. In der Summe fällt dann der Zeitfehler in guter Näherung heraus.

Will man den Stundenwinkel durch Beobachtungen bestimmen, so sind folgende Relationen von Interesse (wir haben jetzt $d\delta = 0$ gesetzt):

$$dh = -\frac{1}{\sin A \cos \Phi} dz - \frac{1}{\cos \Phi \tan A} d\Phi \quad (4.33)$$

$$dh = -\frac{\tan p \cos z}{\cos \Phi} d\Phi - \frac{1}{\sin \Phi + \cos \Phi \cot z \cos A} dA. \quad (4.34)$$

Beobachtet man hier Zenitdistanzen, so ergibt sich aus Relation 4.33, dass man günstigerweise in der Nähe des ersten Vertikals misst. Misst man jedoch Azimutwerte, so sollte man in der Nähe des Meridians messen.

Schließlich ist für die Bestimmung von Azimuten folgende Relation nützlich ($d\delta = 0$):

$$dA = \frac{\sin A}{\tan z} d\Phi - \frac{\cos \delta \cos p}{\sin z} dh. \quad (4.35)$$

Um den Zeitfehler hier möglichst klein zu halten, sollten polnahe Sterne mit $\delta \sim 90^\circ$ wie etwa α -Polaris vermessen werden. Andererseits sollten die Zenitdistanzen möglichst groß gewählt werden.

4.5 GMST, GAST and lokale Sternzeit

Für viele praktische Probleme spielt der Stundenwinkel h , bzw. die lokale siderische Zeit ST eine bedeutende Rolle. Prinzipiell ist die Bestimmung dieser Größen mit einer physikalischen Zeitmessung verknüpft. Die gemessene Zonen-Zeit, etwa die MEZ, hat man zunächst in UTC (koordinierte Weltzeit) umzurechnen. Die Sternzeit von Greenwich, auch GAST (Greenwich Apparent Siderial Time) genannt, erhält man dann aus

$$ST_{\text{Green}} = UTC + ST_{\text{Green}}(0^h UTC) + 236,555^s \left(\frac{UTC[\text{Std.}]}{24} \right) + \Delta UT1. \quad (4.36)$$

Die siderische Zeit von Greenwich für Null Uhr UTC , $ST_{\text{Green}}(0^h UTC)$, kann einem Jahrbuch wie den 'Apparent Places of Fundamental Stars' (Astronomisches Recheninstitut, Heidelberg) entnommen werden. Der dritte Term auf der rechten Seite von (4.36) resultiert aus der Tatsache, dass die siderische Tageslänge vom UTC -Tag um 236,555 Sekunden abweicht. Schließlich resultiert der $\Delta UT1$ Term aus den Schwankungen der Tageslänge. Die Werte hierfür werden vom Internationalen Erdrotationsdienst (IERS) verbreitet. Die lokale Sternzeit ST unterscheidet sich schließlich von $ST_{\text{Green}} = \text{GAST}$ durch die Länge des Beobachters Λ :

$$ST = ST_{\text{Green}} + \Lambda. \quad (4.37)$$

Für eine numerische Berechnung von GAST geht man von von einer mittleren Sternzeit für Greenwich GMST (Greenwich Mean Siderial Time) aus. GMST (in Grad) bestimmt sich näherungsweise mit Hilfe von

$$\begin{aligned} \text{GMST} = & 280.46061837 + 360.98564736629 \times (\text{JD} - \text{JD}_0) \\ & + 0.000387933t^2 - t^3/38710000. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Hier ist JD das Julianische Datum für welches die Sternzeit berechnet werden soll, JD_0 das Julianische Datum für J2000.0 ($\text{JD}_0 = 2451545.0$) und $t = (\text{JD} - \text{JD}_0)/36525$. Nun ist GMST gegeben durch den Stundenwinkel des mittleren Frühlingspunktes bezogen

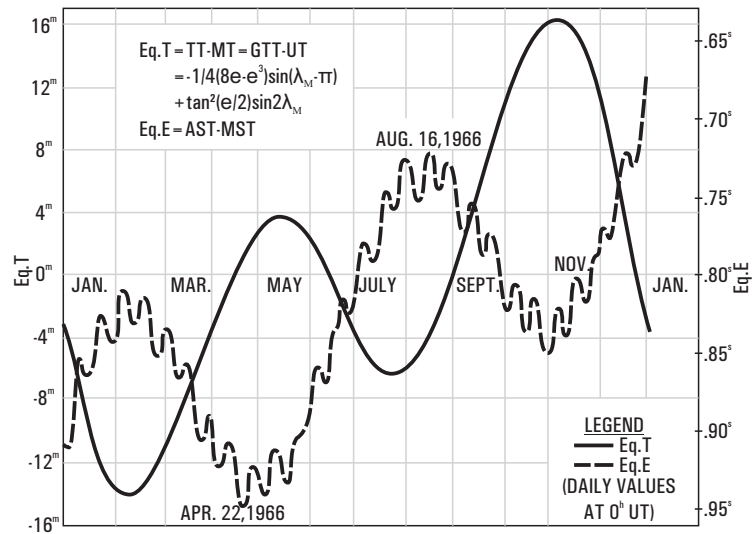


Abbildung 4.22: Die Gleichung des Äquinoktiums (Eq.E.; gestrichelte Linie) für das Jahr 1966.

auf den Greenwich Meridian, GAST dagegen durch den entsprechenden Stundenwinkel des wahren Frühlingspunktes. Der Unterschied zwischen GAST und GMST wird Gleichung des Äquinoktiums (EQE) genannt

$$EQE = GAST - GMST . \quad (4.39)$$

Die Gleichung des Äquinoktiums (Fig.4.22) resultiert aus der Nutationsbewegung der Erde. Es ist

$$EQE = \Delta\psi \cdot \cos \epsilon . \quad (4.40)$$

Hier ist $\Delta\psi$ die Nutation in der Länge, welche in der Ekliptik definiert ist und der Faktor $\cos \epsilon$ projiziert diesen Nutationswinkel in den Himmelsäquator. Die wahre (oder scheinbare) Sternzeit in Greenwich ist dann durch

$$GAST = GMST + EQE \quad (4.41)$$

gegeben. Das Programm ST.mws berechnet die lokale Sternzeit für einen Beobachter auf der Erde. Die Gleichung des Äquinoktiums, EQE, kann dabei mit Hilfe des Programmes nut1980.mws berechnet werden.

4.6 Übungen

Übung 4.1 *Gesucht sind die Koordinaten der unten stehenden Sterne in den verschiedenen astronomischen Koordinatensystemen. Als Ort benutzen Sie bitte Dresden ($\phi \approx 50^\circ$) und nehmen an, dass sich der Frühlingspunkt (Υ) genau im Meridian befindet. Berechnen Sie dabei nur die Koordinaten, welche im Kopf gerechnet werden können!*

1. Stern steht genau im Süden und 20° über dem Horizont
2. Stern steht genau im Westen und 20° über dem Horizont
3. Stern steht genau im Westen und 0° über dem Horizont

Stern	A	B	C
Horizontkoordinaten	$A = \dots, z = \dots$	$A = \dots, z = \dots$	$A = \dots, z = \dots$
Äquatorkoordinaten 1.Art	$\alpha = \dots, h = \dots$	$\alpha = \dots, h = \dots$	$\alpha = \dots, h = \dots$
Äquatorkoordinaten 2.Art	$\alpha = \dots, \delta = \dots$	$\alpha = \dots, \delta = \dots$	$\alpha = \dots, \delta = \dots$

Übung 4.2 *Man berechne die drei Rotationsmatrizen $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ und \mathbf{R}_3 für den Winkel $\theta = 2,7$.*

Übung 4.3 *Man überprüfe den in Gleichung (4.20) gegebenen Zusammenhang mit Hilfe des Programmes `rotmat2.mws`.*

Kapitel 5

Methoden der geodätischen Astronomie

5.1 Klassische Verfahren

Wir wollen in diesem Kapitel die diversen Methoden der geodätischen Astronomie behandeln. Die *klassischen Verfahren* dienen dabei der Standortbestimmung auf der Erdoberfläche und der Bestimmung der Erdrotationsparameter. Diese sind heute weitestgehend durch die *modernen Raumverfahren* abgelöst worden. Zu diesen gehören: GPS, Laserentfernungsmessungen zu Satelliten (SLR) und zu Retroreflektoren auf dem Mond (LLR), sowie die Radiointerferometrie auf langen Basislinien (VLBI). Da die klassischen Verfahren an die Lotrichtung anschließen (Libellen, Quecksilberhorizont, Pendel) haben diese auch heute noch für die Bestimmung des Geoides und der Lotabweichungen auf kleinen Längenskalen Bedeutung. Außer mit der Ortsbestimmung befasst sich die klassische geodätische Astronomie auch mit der Bestimmung von Azimuten. Dies spielt u.a. bei der Ausrichtung von Gebäuden in der Architektur eine Rolle.

5.1.1 Beobachtung von Sternörtertern oder der Sonnenposition

Die klassischen Methoden der astronomischen Geodäsie basieren auf Beobachtungen der Position von Sternen oder der Sonne, wobei oft noch eine Zeitmessung hinzukommt. Wir wollen hier nur einige dieser klassischen Verfahren etwas ausführlicher behandeln.

Längenbestimmung mittels Passageinstrument

Für zwei Orte 1 und 2 auf der Erde gilt für die Differenz der Längen:

$$\Delta\Lambda = \Lambda_2 - \Lambda_1 = ST_2 - ST_1,$$

d.h. $\Delta\Lambda$ ist durch die Differenz der lokalen siderischen Zeiten gegeben. Die Länge eines Ortes ist durch

$$\Lambda = ST - ST_{\text{Green}}$$

gegeben, wobei ST_{Green} die lokale siderische Zeit von Greenwich bezeichnet. Hieraus ergibt sich die Längenzählung von Greenwich positiv nach Osten, negativ nach Westen.

Das Problem ist also, wie man die lokale siderische Zeit ST bestimmt. Dies gelingt, indem man die Durchgänge eines Sternes durch den lokalen astronomischen Meridian mittels Passageinstrument (s. weiter unten) bestimmt. Mit einem derartigen Messinstrument können Vertikalfadendurchgänge auf etwa 5 Millisekunden genau bestimmt werden. Aus Gleichung (4.13) wissen wir

$$h = ST - \alpha.$$

Bei einem Meridiandurchgang ist daher der Stundenwinkel $h = 0$. Also gilt

$$ST = \alpha.$$

Daraus ergibt sich für die astronomische Länge des Beobachtungsortes

$$\Lambda = \alpha - ST_{\text{Green}}.$$

Simultanbestimmung von Länge und Breite eines Standortes mit Hilfe des Höhenstandlinienverfahrens

Beim Höhenstandlinienverfahren werden Zenitdistanzen und Zeiten für eine gewisse Anzahl von Sternen gemessen. Es galt

$$\cos z = \sin \Phi \sin \delta + \cos \Phi \cos \delta \cos h.$$

Der Stundenwinkel h ist dabei durch die lokale Sternzeit ST des Beobachters gegeben:

$$h = ST - \alpha$$

und

$$ST = ST_{\text{Green}} + \Lambda.$$

Die siderische Zeit von Greenwich hatten wir weiter oben besprochen. Wir nehmen jetzt die Sternkoordinaten (α, δ) als bekannt an. Gesucht sind Länge und Breite, (λ, Φ) , des Beobachtungsortes. Wir betrachten zunächst nur einen Stern. Zur Zeit t_1 steht dieser Stern *irgendwo* auf der Erde im Zenit. Die Menge aller Orte, wo dieser Stern zu diesem Zeitpunkt unter einer Zenitdistanz z_1 erscheint definiert einen Kreis. Betrachtet man einen weiteren Stern, der zu einem weiteren Zeitpunkt unter einer Zenitdistanz z_2 erscheint, so ergibt sich ein weiterer Kreis, der mit dem ersten in der Regel zwei Schnittpunkte aufweisen wird. Bei idealisierten Messbedingungen ergibt sich durch die Messung von (z, t) bei einem dritten Stern ein dritter Kreis, der die beiden ersten in genau einem Schnittpunkt schneidet. Dieser, allen drei Kreisen gemeinsame Schnittpunkt definiert dann die Position (Λ, Φ) des Beobachters auf der Erdoberfläche.

Heutzutage wird man in der Regel die Lösung durch Iteration gewinnen. Man startet mit Näherungswerte (Λ_0, Φ_0) für Länge und Breite. Aus der obigen Formel ergibt sich hieraus ein gerechneter Wert $z_0 = z_0(\lambda_0, \Phi_0)$. Wir haben dann

$$\Lambda = \Lambda_0 + \delta\Lambda; \quad \Phi = \Phi_0 + \delta\Phi; \quad z = z_0 + \delta z.$$

Hier ist z der gemessene z -Wert und z_0 der errechnete. Setzt man diesen Ansatz in die Gleichungen ein und berücksichtigt man noch den sogenannten Nullpunktfehler δi der Zenitdistanzmessung, so kann man folgende Gleichung herleiten:

$$\delta\Phi \cos A_i - \delta\Lambda \cos\Phi \sin A_i + \delta i = \delta z_i.$$

δi ist neben $\delta\Phi$ und $\delta\Lambda$ eine dritte Unbekannte, welche einen durch das Beobachtungsinstrument bedingten konstanten Zenitdistanzfehler enthält. Bei Beobachtung von 3 Sternen ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar. Werden mehr als 3 Sterne beobachtet, liegt also eine Überbestimmung vor, so sind die Gleichungen mit den Unbekannten als Verbesserungsgleichungen zu betrachten:

$$\delta\Phi \cos A_i - \delta\Lambda \cos\Phi \sin A_i + \delta i = \delta z_i + V_i.$$

Mit Hilfe der Ausgleichsrechnung ist das Gleichungssystem unter Beachtung der Forderung $\sum_i (V_i V_i) = \text{Minimum}$ zu lösen.

Der Name des Verfahrens wird aus folgendem graphischen Verfahren zur Bestimmung von (Λ, Φ) klar: von dem Punkt $P_0(\Lambda_0, \Phi_0)$ trägt man die Azimute A_i der beobachteten Sterne auf und in diese Richtungen die entsprechenden δz_i -Werte (in einem gewählten Maßstab; $\delta z < 0$ in Richtung zum Stern, $\delta z > 0$ entgegen der Richtung zum Stern. Senkrecht zu diesen Richtungen zu den Sternen werden im Abstand δz von P_0 aus die *Standlinien* (Tangenten an die oben erwähnten Kreise konstanter Zenitdistanz) gezeichnet. Die y -Achse wählt man zweckmäßigerweise nach Nord, die x -Achse nach Ost, wie in Abb. 5.1 zu sehen ist. Ohne Fehlereinflüsse würden sich die Standlinien in einem Punkt schneiden, der dann auf der x -Achse die Korrektur von $\Delta\Lambda \cos\Phi_0$ angibt und auf der y -Achse die Korrektur $\Delta\Phi$. Wegen der Fehlereinflüsse werden sich die Standlinien jedoch nicht in einem Punkt schneiden. Der Mittelpunkt des Inkreises der durch die Standlinien gebildeten Figur ergibt in diesem Fall eine gute Näherung für die gesuchten Korrekturen.

Azimuthbestimmung einer Mire

Unter einem Azimut einer Mire (Zielpunkt) ist der Horizontalwinkel zwischen der Meridianebene und der Vertikalebene, welche durch den Zenit des Standpunktes und des Zielpunktes geht, zu verstehen. Wird der Horizontalwinkel θ zwischen dem Zielpunkt und einem bekannten Gestirn zu einer bestimmten Zeit gemessen, so lässt sich leicht das Azimut A_m der Mire ableiten:

$$A_m = A_s - \theta.$$

Bei bekanntem Standort (Λ, Φ) ergibt sich mit den Gestirnskoordinaten (α, δ) und der gemessenen Zeit (MEZ) das Gestirnazimut A_s aus Gleichung (4.6)

$$\tan A_s = \frac{\sin h_s}{\sin\Phi \cos h_s - \cos\Phi \tan\delta},$$

wobei $h_s = ST_{\text{Green}} + \Lambda - \alpha$.

Besonders geeignet für diese Messungen ist der Polarstern, da seine maximale azimutale Bewegung derzeit nur $0,31''$ pro Zeitsekunde beträgt ($\Phi = 50^\circ$, $\delta = 89^\circ 15'$). Ungenauer sind in der Regel die Azimutbestimmungen unter Verwendung der Sonne.

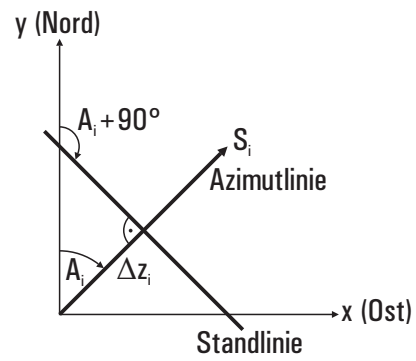


Abbildung 5.1: Konstruktion der Höhenstandlinie.

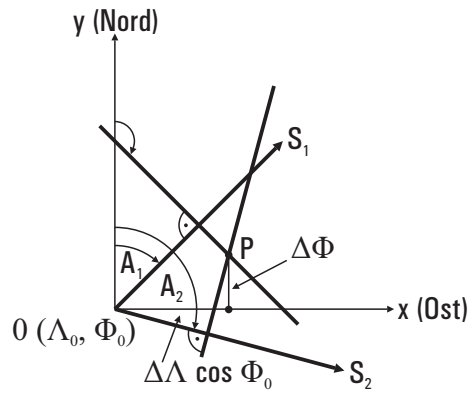


Abbildung 5.2: Korrekturen der Beobachtungsposition im Höhenstandlinienverfahren.

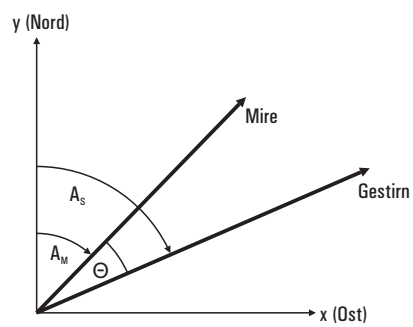


Abbildung 5.3: Azimutbestimmung einer Mire.



Abbildung 5.4: Der lasergeodynamische Satellit LAGEOS.

Die Sonnenkoordinaten sind für deren Mittelpunkt gegeben. Der Mittelpunkt lässt sich aber nicht problemlos anzielen und man muss auf den Rand ausweichen. Nachteilig ist hier auch die Strahlung der Sonne auf das Beobachtungsinstrument.

5.2 Laserentfernungsmessungen zu Satelliten (SLR)

Bei der Laserentfernungsmessung zu Satelliten bestimmt man die Entfernung zu gewissen Satelliten mit Hilfe von Laser-Pulsen, deren Laufzeit vom Beobachter zum Satellit und zurück registriert wird. Es handelt sich somit um ein Zweiwegemessverfahren. Mit der Aussendung des Laserimpulses wird ein Zeitintervall-Zähler gestartet. Der vom Satellit reflektierte Impuls wird von der Bodenstation wieder empfangen, verstärkt und dient als Stoppsignal für den Zähler. Mit der somit erhaltenen Laufzeit des Laserimpulses (Δt) und der Lichtgeschwindigkeit (c) ist die Entfernung (d) zwischen Bodenstation und Satellit:

$$d = \frac{\Delta t}{2} c.$$

Die Genauigkeit der so abgeleiteten Entfernung ist proportional zur Genauigkeit der Zeitmessung. Neben der genauen Zeitmessung ist es notwendig, dass die Laserleistung recht hoch, das Laserlicht stark gebündelt und die Empfangsvorrichtung sehr empfindlich ist. Günstig für die Messung wirkt sich auch eine hohe Laserimpulsrate aus.



Abbildung 5.5: Laserretroreflektoren oder Tripelprismen.



Abbildung 5.6: Die SLR Lasereinrichtung des GFZ Potsdam.

Aufgrund der Erd- und Satellitenbewegung muss die Sende- und Empfangsvorrichtung kontinuierlich dem Satelliten nachgeführt werden, was wiederum voraussetzt, dass die Satellitenbahn in hinreichender Näherung bekannt ist.

Der bekannteste dieser Laser-Satelliten ist der LAsEr GEODynamische Satellit LAGEOS (Abb. 5.4), der am 4.5.1976 in eine retrograde Bahn geschickt wurde. Er ist ein vollständig passiver Satellit von 60 cm Durchmesser mit einer äußeren Hülle aus Aluminium und einem Kern aus Beryllium-Kupfer. Seine sphärische Oberfläche ist mit 426 Laser Retroreflektoren bedeckt. Die LAGEOS-Bahn ist nahezu kreisförmig ($e \sim 0.004$) mit einer Halbachse, die etwa dem Zweifachen des Erdradius entspricht. Für SLR Messungen benutzt man typischerweise Nd-Laser mit Leistungen von etwa einem Gigawatt und Pulslängen von etwa 100 Pikosekunden (3cm Pulslänge) bei einer Rate von ein paar Pulsen pro Sekunde, zusammen mit einem Computer-gesteuerten optischen Führungssystem. Gegenwärtig kann die LAGEOS-Bahn auf etwa einen Zentimeter genau bestimmt werden. Diese hohe Genauigkeit wird nicht nur durch die hohe Pulsrate und scharfes Filtern im Zeit ($1\mu\text{sec}$), Raum- ($5''$) und Spektralbereich (0.1nm) erzielt, sondern auch durch genaue Kontrolle des Teleskopes auf der Basis hochgenauer Ephemeridenprogramme. Als ein weiteres Beispiel für einen für SLR

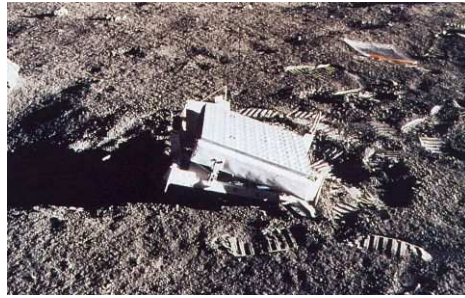


Abbildung 5.7: Der Laserretroreflektor der Apollo-14 Mission auf der Mondoberfläche. Er besteht aus einer Anordnung von insgesamt 100 Tripelprismen von jeweils 4 cm Größe, welche auf einen Aluminiumrahmen montiert sind.

genutzten Satelliten sei an dieser Stelle STARLETTE genannt.

Die geodätischen Arbeiten mit künstlichen Satelliten begannen 1961/62 in den USA. 1965 gelangen die ersten Laserdistanzmessungen mit einer Genauigkeit von wenigen Metern. Die Messgenauigkeit wurde in der Folgezeit auf wenige Zentimeter gesteigert. An vielen Orten der Welt wurden Lasermesssysteme (Abb. 5.8) positioniert. SLR dient hauptsächlich der genauen Positionsbestimmung der Beobachtungsstationen, der Basislinien und ihrer zeitlichen Änderungen (Krustenbewegung).

5.3 Laserentfernungsmessungen zum Mond (LLR)

Bei Laserentfernungsmessungen zum Mond (Lunar Laser Ranging, LLR) misst man den Abstand zwischen Erde und Mond. Dieser Abstand beträgt im zeitlichen Mittel rund 384 400 km. Er schwankt aufgrund der elliptischen Bahn des Mondes um rund 21 000 km im Laufe eines Monats und die Gravitationswirkung der Sonne verursacht Abweichungen von der idealen elliptischen Bahn bis zu etwa 3 700 km. Diesen stark veränderlichen Abstand können wir nun mit einer Genauigkeit von nur wenigen Zentimetern experimentell bestimmen. Dies geschieht mit Hilfe von Laufzeitmessungen von Laserpulsen von der Erde zum Mond und zurück.

Derartige Messungen sind im Zeitalter der modernen Raumfahrt möglich geworden: im Juli 1969 haben Apollo 11 Astronauten den ersten Laser-Retroreflektor auf der Mondoberfläche im Mare Transquillitatis plaziert, welcher in der Lage ist, ankommendes Laserlicht genau in dieselbe Richtung wieder zurückzuwerfen von woher die Strahlung kam. Zwei weitere derartige Reflektoren wurden 1971 von den Apollo 14 (Abb. 5.7) und 15 Missionen in der Fra-Mauro Region und an der Hadley-Rille installiert. Im Jahre 1973 schließlich wurde ein französischer Reflektor auf der sowjetischen Raumfähre LUNA21 in der Nähe des Kraters Le Monnier plaziert (ein weiterer Reflektor, der schon 1970 während der sowjetischen Luna 17 Mission abgesetzt wurde, verstaubte offenbar beim Rückstart der unbemannten Raumsonde und wurde dadurch unbrauchbar). Die amerikanischen Reflektoren bestehen aus 100 (Apollo 11 und 14) bzw. 300 (Apollo 15) Tripelprismen von jeweils 4 cm Durchmesser, welche auf einen Aluminium-Rahmen montiert sind.

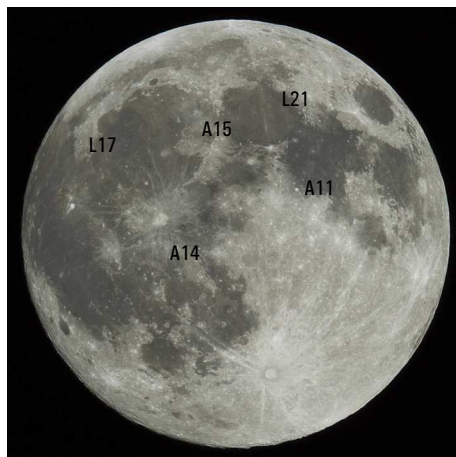


Abbildung 5.8: Die Positionen der LLR-Retroreflektoren auf dem Mond.

Innerhalb weniger Wochen nach Absetzen des ersten Laser-Retroreflektors durch Apollo 11 gelang es am McDonald Observatorium in der Nähe von Fort Davis, Texas, die Rückkehr von Photonen zu beobachten, welche von dort zum Mond gesandt worden waren. Anfänglich war das McDonald Observatorium die einzige Mondlaserstation auf der Erde bevor im Jahre 1984 zwei weitere Stationen in Betrieb genommen wurden: eine auf dem Mt. Haleakala auf der Insel Maui (Hawaii) und eine weitere Station des CERGA in Grasse, Frankreich. Die Mondlaseraktivitäten auf dem Mt. Haleakala wurden im Jahre 1990 wieder eingestellt. 1985 wurden die LLR-Messungen am 2.5 m Teleskop des McDonald Observatoriums beendet und am McDonald "Laser Ranging System", einem speziell dafür vorgesehenen 75 cm Teleskop, weitergeführt. LLR-Messungen wurden gelegentlich auch auf der geodätischen Fundamentalstation Wettzell im Bayerischen Wald und der australischen Station Orroral ausgeführt. Im Juli 2005 hat das neue APOLLO (Apache Point Observatory Lunar Laser-ranging Operation) System im südlichen Teil des Staates New Mexico der USA seinen LLR-Betrieb aufgenommen.

Im April 2010 verkündete das APOLLO-Team, dass mit Hilfe von Fotos des *Lunar Reconnaissance Orbiter* der lang vermisste Lunochod-1-Rover wiedergefunden und vom dort platzierten Retroreflektor auch Signale empfangen wurden. Im Herbst 2010 war die Position des Rovers dann mit einer Genauigkeit von 1 cm bestimmt. Durch die Lage der Reflektor am Rand der Mondscheibe sowie der Möglichkeit der Anmessung selbst bei Sonnenlicht ist diese Station für LLR-Messungen und den daraus abgeleiteten Parametern des Erde-Mond-Systems besonders wichtig (Murphy et al. 2010). Abbildung 5.8 gibt eine Übersicht aller bisher auf dem Mond platzierter Retroreflektoren.

Dass derartige Messungen überhaupt durchgeführt werden können ist schon eine sehr bemerkenswerte Angelegenheit. Man arbeitet mit gepulstem Laserlicht, wobei ein einzelner Puls eine Zeitdauer von etwa 150 Picosekunden aufweist. Man kann also sagen, dass einzelne Strahlungsscheiben von etwa 5 cm Dicke zum Mond gesandt wer-

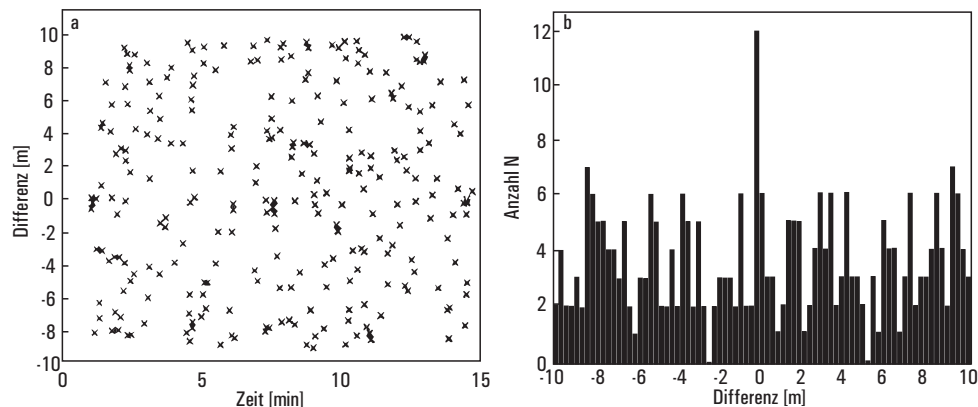


Abbildung 5.9: a: Differenz der Erde-Mond-Distanz: "vorausberechnet minus gemessen". Das Bild resultiert aus einem Beobachtungsblock von 15 Minuten Dauer. b: Histogramm der Differenzen. Angegeben ist diejenige Zahl N von Photonen, die in ein bestimmtes Intervall fallen. Bei idealem Modell und idealer Messung wären alle Werte im Intervall um Null zu finden.

den. Bei einer Pulsleistung von etwa einem Gigawatt und typischen Laserfrequenzen enthält eine solche Strahlungsscheibe etwa 10^{19} Photonen, welche auf der Mondoberfläche eine rund 20 km^2 große Fläche beleuchten. Einige der Photonen treffen dann auf einen der Retroreflektoren und nur etwa ein einziges Photon in etwa zehn Pulsen findet seinen Weg schließlich nach rund 2,5 Sekunden in die Empfangsoptik der Messstation.

Nun hat man das Problem, dieses eine Photon aus einer Menge von Störphotonen herauszufinden. Dieses geschieht indem man im Frequenz- und Zeitbereich Fenster setzt, in denen das richtige Photon sich aufhalten sollte. In Abb. 5.9a sieht man Entfernungsdifferenzen für einzelne Beobachtungen, "vorausberechnet minus gemessen", aufgetragen über der Zeitachse. Nur detektierte Ereignisse mit einer Differenz von weniger als 10 Meter zur vorausgerechneten Distanz finden hier Berücksichtigung. Das Bild zeigt zunächst kein Muster, das irgendwie aussagekräftig erscheint. Besser sieht die Sache glücklicherweise im Histogramm von Abb. 5.9b aus, wo diejenige Anzahl von Ereignissen aufgetragen ist, die in ein bestimmtes kleines Intervall dieser Differenzen fallen. Bei einem idealen Modell und idealer Messung ohne Störphotonen wären hier alle Werte im Intervall um Null zu finden. Dies ist hier freilich nicht der Fall, man erkennt aber immerhin einen großen Peak in der Nähe der Null-Marke. Nach statistischen Gesichtspunkten fasst man bis zu etwa 100 Photonen, die in einem Beobachtungsblock von circa 15 Minuten liegen, zu einem *Normalpunkt* zusammen, der in einem gewissen Sinne eine Pulsankunftszeit repräsentiert. Gegenwärtig stehen rund 11500 Normalpunkte zur Verfügung. Davon stammen etwa 700 von der Haleakala-Station, der Rest zu etwa gleichen Teilen von den McDonald und Grasse-Stationen. Abb. 5.10 zeigt die gewichteten mittleren (rms) Residuen (Beobachtung minus Modell) als Funktion der Zeit. Man sieht die beträchtliche Genauigkeitssteigerung in den 80er Jahren. Gegenwärtig liegt die Genauigkeit der LLR-Messungen bei einigen Zen-

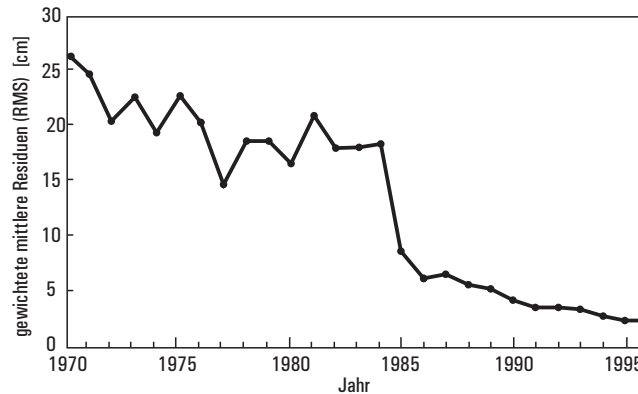


Abbildung 5.10: Gewichtete mittlere Residuen (Beobachtungen minus aus einem Modell berechneter Erde-Mond-Distanzen) als Funktion der Zeit. Man beachte die Genauigkeitssteigerung in den achtziger Jahren.

timetern in der Erde-Mond Distanz. Auch dies ist recht erstaunlich in Hinblick auf die mittlere Entfernung des Mondes und ihrer großen Variationen.

Die Analyse der Normalpunkte gelingt mit Hilfe umfangreicher Programmpakete. Diese enthalten einen *Ephemeridenteil* für die Bewegung der astronomischen Körper einerseits und einen Teil, welcher der *Parameterschätzung* dient. Derartige Computerprogramme sind von verschiedenen Forschergruppen in den USA und Europa entwickelt worden, eines davon bei der Forschungseinrichtung Satellitengeodäsie (FESG) an der TU München in Zusammenarbeit mit der Universität Tübingen.

Was den Ephemeridenteil betrifft, so werden in der Regel die relativistischen Bewegungsgleichungen für sphärische Körper ("Punktmassen"), die sogenannten Einstein-Infeld-Hoffmann Gleichungen, für Sonne, Erde, Mond, alle Planeten und einige ausgewählte Asteroiden wie Ceres, Pallas, oder Vesta numerisch in der Zeit integriert. Abweichungen von der Kugelgestalt werden für Erde und Mond in Newtonscher-Näherung im Rahmen einer Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen berücksichtigt, wobei man sich auf Glieder bis zur Ordnung 4 beschränkt. Die Rotationsbewegung des Mondes wird durch numerische Integration der Eulerschen Kreiselgleichungen mitgerechnet. Daraus ergeben sich die sogenannten Librationswinkel des Mondes, welche die Orientierung der Mondfigur im Raum beschreiben. Die Rotationsbewegung der Erde wird dagegen in die Anteile Tageslänge (Rotationsperiode), Präzessions- und Nutationsbewegung der Drehachse im Raum und die Polbewegung (Lage der Drehachse in Bezug auf den Erdkörper) aufgespalten. Die Nutationsbewegung wird im Rahmen eines üblichen Reihenansatzes beschrieben. Schließlich werden elastische Effekte des Mondes und die Gezeitendissipation im Erde-Mond-System mit Hilfe von heuristischen Parametern beschrieben.

Im Parameterbestimmungsprogramm der TU München wird die Menge aller zu schätzenden Parameter in drei Klassen eingeteilt. Die erste beinhaltet globale Parameter des Erde-Mond Systems, die zweite die Erdrotationsparameter und die dritte solche, die der Überprüfung von Grundannahmen der Gravitationsphysik dienen.

Lasermessungen zum Mond haben wesentliche Informationen zu verschiedenen Aspekten des Erde-Mond Systems geliefert. Unter den Schätzparametern der ersten Klasse befinden sich geozentrische Stationskoordinaten, welche auf wenige Zentimeter genau bestimmt werden können. Die diversen Laserstationen befinden sich auf unterschiedlichen Kontinentalplatten, deren Driftraten mit einer Genauigkeit von rund 0,4 cm pro Jahr geschätzt werden können.

Es liegt auf der Hand, dass die gemessenen Distanzen von der genauen Orientierung von Erde und Mond im Raum abhängen. Was die Stellung des Mondes angeht, so können die Librationswinkel zu einer Anfangsepoche t_0 bestimmt werden. Mitbestimmt werden ebenfalls baryzentrische Positionen und Geschwindigkeiten des Mondes und der Erde.

Der große Einfluss der Sonne auf die Mondbahn erlaubt eine präzise Bestimmung des Massenverhältnisses $m_S/(m_E + m_M) = 328900.560 \pm 0.002$ mit einer Genauigkeit von 10^{-8} entsprechend dem Verhältnis von (LLR-Genauigkeit)/(Störung der Mondbahn durch die Sonne) $\sim (3 \text{ cm})/(3000 \text{ km})$.

Neben den selenozentrischen Reflektorkoordinaten liefern LLR-Daten wichtige Informationen zum Gravitationsfeld des Mondes, wie etwa gewisse Kombinationen der lunaren Trägheitsmomente und Massenmultipolmomente bis Grad und Ordnung drei. Zusammen mit Doppler-Daten von Mond-Satelliten ergibt sich daraus eine genaue Bestimmung des polaren Trägheitsmomentes, welches wiederum eine wichtige Kenngröße für den inneren Aufbau des Mondes darstellt.

Die Gezeitendeformation des Mondes wird mit Hilfe einer Proportionalitätskonstanten, der lunaren Love-Zahl, beschrieben, welche ebenfalls aus LLR-Daten abgeleitet werden kann. Der Gezeitendissipation wird auf verschiedene Art und Weise Rechnung getragen. Zunächst gehört ein Dissipationsparameter zur Menge der Fitparameter. Aufgrund der Gezeitenreibung wird die Rotation der Erde abgebremst, d.h. die Tageslänge wächst allmählich mit der Zeit. Da aber der Drehimpuls im Erde-Mond System erhalten bleibt, entfernt sich dadurch der Mond von der Erde. Dies klingt zunächst erstaunlich, fallen doch künstliche Erdsatelliten aufgrund der atmosphärischen Reibung zur Erde herunter. Aufgrund des relativ großen Gravitationsfeldes des Mondes induziert dieser zwei Gezeitenwülste auf der Erde, welche durch die Erddrehung infolge der Reibung aus der Verbindungslinie Erde-Mond herausbewegt werden. Diese "Flutberge" wiederum bewirken eine Beschleunigung des Mondes, welcher sich dadurch von der Erde entfernt. Gemäß des dritten Keplerschen Gesetzes verringert sich dadurch die mittlere Winkelgeschwindigkeit, \dot{n}_M , des Mondes um die Erde. Aus LLR-Daten ergibt sich für \dot{n}_M ein Zahlenwert von rund $-26''/(\text{Jhd.})^2$. Daraus folgt, dass sich gegenwärtig der Mond um 3,8 cm pro Jahr von der Erde entfernt.

Schließlich kann man mit Hilfe von LLR-Daten die Präzessionskonstante und die Nutationskoeffizienten zur fundamentalen 18,6 Jahresperiode, welche mit der Drehung der Knotenlinie der Mondbahn im Raum verknüpft ist, ableiten.

Dass auch die Stellung der Erde im Raum die gemessenen Distanzen mitbedingt haben wir bereits weiter oben erwähnt. Dies impliziert, dass sich diverse Erdrotationsparameter mit der LLR-Technik bestimmen lassen. Dazu gehört etwa ein Winkel, der die Orientierung der Erde um ihre Rotationsachse beschreibt. Diese, UT0 genannte Rotationsphase kann auf besser als 0.1 Millisekunde bestimmt werden und aus ihr ergeben sich die Schwankungen der Tageslänge. Die Polbewegung der Rotationsachse bezüglich der Erdoberfläche bewirkt Schwankungen der geographischen Breite

der Beobachtungsstationen, welche mit einer Genauigkeit von besser als einer Millibogensekunde bestimmt werden können. Schließlich lassen sich mit dieser Technik noch langfristige zeitliche Veränderungen der Erdrotationsparameter erfassen.

5.4 VLBI

Die Technik der Radiointerferometrie mit langen Basislinien (Very Long Baseline Interferometry = VLBI) ist erst durch hochgenaue Atomuhren möglich geworden. Abb. 5.11 zeigt ein Funktionsschema eines 2-komponentigen VLBI-Systems wobei die Entfernung der Radioantennen einige tausend Kilometer betragen kann. Bei geodätischen Messungen kommen die Radiosignale von sogenannten Quasaren (quasi stellar radio sources). Dies sind sehr weit entfernte intrinsisch sehr helle Radioquellen. Die meisten Quasare weisen große kosmische Rotverschiebungen ihrer Spektrallinien auf, d.h. sie entfernen sich mit enormer Geschwindigkeit von der Erde. Ist

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

die gemessene Rotverschiebung eines Quasars, so ergibt sich eine Fluchtgeschwindigkeit von etwa ($v \ll c$)

$$v \simeq z \cdot c$$

wobei c wieder die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. Die mit Hilfe des Hubble-Gesetzes

$$v = H_0 d$$

abgeleitete Entfernung (H_0 : Hubble Konstante; $H_0 = 50 - 100$ km/(s Mpc)) der Quasare beträgt etwa 5 bis 10 Milliarden Lichtjahre.

Radiosignale von Quasaren werden nun von mindestens zwei Radioantennen empfangen. Heute ist eine große Zahl von VLBI-Stationen im Einsatz. Im Februar 1999 wurde der 'VLBI Service for Geodesy and Astrometry' (IVS) gegründet. Die globale Verteilung der IVS-Stationen ist in Abb. 5.13 zu sehen. Typische Wellenlängen liegen im Zentimeter-, typische Frequenzen im Gigahertz-Bereich. In der Regel arbeitet man im X-Band (8,2 GHz) und S-Band (2,3 GHz). Da die Antennen keine direkte Verbindung miteinander haben dienen Atomuhren zur Produktion von Zeitmarken, welche der Phasenreferenz dienen. Das Signal wird in den Megahertz Bereich transformiert und mit der Zeitinformation auf Videoband gespeichert. Die Videobänder der verschiedenen Stationen werden zusammengebracht und in einem sogenannten Korrelator wird die Kreuzkorrelationsfunktion z.B. zweier Signale gebildet. Da hier die Phase des Signals eine entscheidende Rolle spielt kann man jedes Signal durch eine komplexe Funktion $S(t)$ beschreiben. Die Kreuzkorrelation ist dann proportional zu

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} S_1(t) S_2^*(t - \tau) dt$$

und aufgrund des stochastischen Charakters des Signals im wesentlichen nur dann von Null verschieden, wenn τ gleich der geometrischen Laufzeitverzögerung ist. Diese Laufzeitverzögerung ist die Zeit, die zwischen den Ankunftszeiten des Signals an beiden Antennen verstreicht.

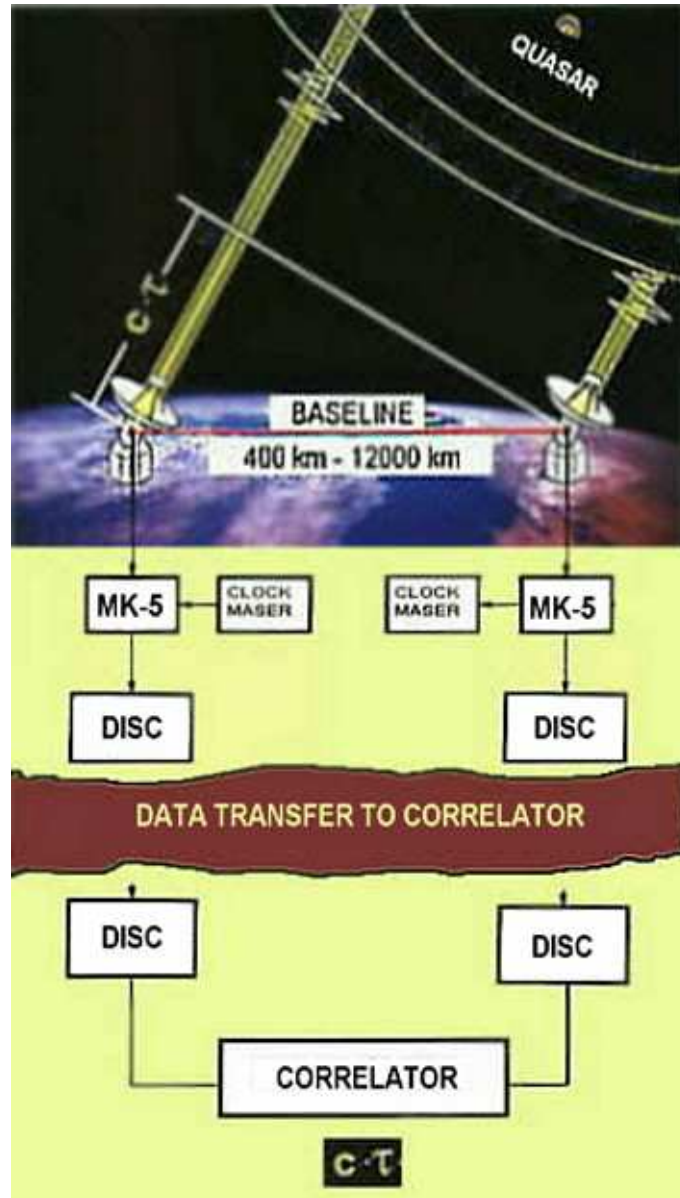


Abbildung 5.11: Schema eines 2-komponentigen VLBI-Systems.



Abbildung 5.12: VLBI-Radioantenne der geodätischen Fundamentalstation Wettzell.

Die *Genauigkeit* mit der die Laufzeitverzögerung hier gemessen werden ist durch

$$\sigma_r = \frac{1}{2\pi (SNR) B_s}$$

gegeben. Hier ist B_s die synthetisierte Bandbreite. Die Idee, eine durch die Magnetbandregistrierung eingeschränkte Bandbreite B_0 zu vergrößern, indem einzelne Registrierkanäle auf das wesentlich größere Bandfenster des Empfangsystems verteilt werden, bedeutete hier einen wesentlichen Fortschritt. Derzeit wird die von den Empfängern erfasste Bandbreite von 360 MHz voll ausgenutzt. SNR ist das Signal zu Rauschverhältnis (signal-to-noise ratio). Es hängt von der empfangenen Flussdichte S der beobachteten Radioquelle, von Antennendurchmesser, der Systemtemperatur T_S , der Bandbreite B der ausgewerteten Signale von der Radioquelle und der Integrationszeit T der Signale am Korrelator ab. Die empfangenen Flussdichten werden dabei in Jansky ($1 \text{ Jy} = 10^{-26} \text{ W m}^{-2}\text{Hz}^{-1}$) angegeben. Für die geodätische VLBI-Antenne der Fundamentalstation in Wettzell gelten etwa folgende Zahlen:

- X-Band (8,4 GHz): 8 Kanäle a 2 MHz; $T = 300 \text{ s}$;
- Antennendurchmesser: 20 m; 50% Effektivität;
- Systemtemperatur: 160°K (ungekühlt).

Für wurden Zahlen für das Mark III Korrelatorsystem zugrunde gelegt. Für eine korrelierte Flussdichte von einem Jy erhält man ein SNR von etwa 18. Mit einer synthetisierten Bandbreite von 360 MHz erhält man

$$\sigma_r = 0,025 \text{ ns}$$

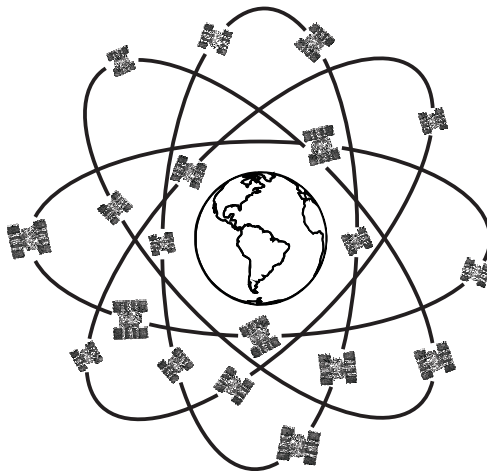


Abbildung 5.14: Konstellation der Satelliten im GPS System.

oder einen Streckenfehler von ± 7 mm. Gegenwärtig arbeitet man mit gekühlten Empfängern, sodass das SNR etwa drei mal größer ist und eine Laufzeitmessgenauigkeit von etwa 10 Picosekunden erreicht wird. Dies entspricht einem Streckenfehler von etwa einem halben Zentimeter.

Die VLBI dient heute hauptsächlich der Messung von Basislinien und deren zeitliche Änderungen sowie der Erdrotationsparameter.

5.5 GPS

Das NAVSTAR GPS (NAVigation System with Time And Ranging Global Positioning System) ist ein satellitengestütztes Navigationssystem, das für entsprechend ausgerüstete Nutzer genaue dreidimensionale Positions- und Navigations- sowie Zeitinformation in Echtzeit bereitstellt¹. Die Anordnung der insgesamt 24 Satelliten in etwa 20200 km Bahnhöhe ist so gestaltet, dass an jeder Stelle der Erdoberfläche jederzeit mindestens 4 Satelliten über dem Horizont stehen (Abb. 5.14). GPS ist primär ein militärisches Navigationssystem und wurde nicht für geodätische Aufgaben entwickelt. Das grundlegende Navigationsprinzip beruht auf der Messung sogenannten *Pseudoentfernungen* zwischen dem Nutzer und vier Satelliten (Abb. 5.15). Die Bestimmung der Distanz 'Empfangsantenne-Satellit' erfolgt durch Korrelation des Satellitensignals (Code) mit einer im Empfänger erzeugten Kopie des Codes. Konkret werden Aussendezeitpunkt des Signals am Satelliten und der Empfangszeitpunkt im Nutzerempfänger miteinander verglichen. Da die Uhren im Satelliten und im Empfänger nicht miteinander synchronisiert sind, enthält die aus der Signallaufzeit abgeleitete Distanz noch einen systematischen Fehler (Uhrfehler). Dieser Synchronisationsfehler ist der Grund für die Bezeichnung Pseudoentfernung. Ausgehend von bekannten Satel-

¹Dieser Teil basiert auf dem online-Artikel 'Methodik der GPS- und DGPS-Messung' von G. Seeber und M. Schmitz (<http://gio.uni-muenster.de>)

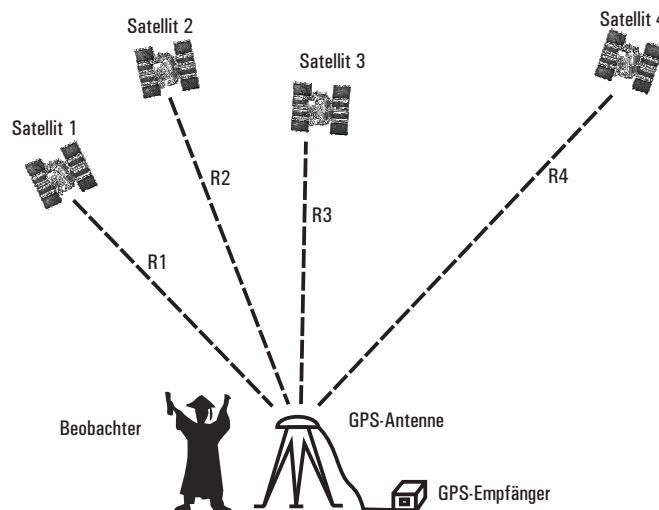


Abbildung 5.15: Grundprinzip der Positionsbestimmung und Navigation mit GPS.

litenkoordinaten in einem geeigneten geozentrischen Bezugssystem können dann die Koordinaten der Nutzerantenne abgeleitet werden. Da neben den drei Standpunktkoordinaten jeweils noch der Uhrfehler mitbestimmt werden muss, erfolgt die Positionsbestimmung im Grundsatz durch simultane Messung von Pseudoentfernungen zu vier Satelliten. Moderne Empfänger, auch einfache Handgeräte, führen die Positionsberechnung praktisch in Echtzeit durch, so dass bei einer Taktrate von beispielsweise 1 Hertz zu jeder Sekunde eine Position zur Verfügung steht. Die grundlegende Beobachtungsgleichung lautet einfach

$$PR_i = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_B| + c \Delta t_u .$$

Hierin bezeichnet \mathbf{x}_i den Ortsvektor des Satelliten i , \mathbf{x}_B die Position des Beobachters und Δt_u den Uhrensynchronisationsfehler. Die Annahme einer grundlegenden Minimumkonfiguration von vier Satelliten hat für viele Jahre die Nutzung des GPS Systems geprägt und dazu geführt, dass sich die ersten Empfängerentwicklungen auf die Messung von jeweils vier Satelliten beschränkten. Moderne GPS Empfangsanlagen bieten die Möglichkeit, die Signale aller gleichzeitig sichtbaren Satelliten zu nutzen und besitzen entsprechend viele Empfangskanäle.

5.5.1 Raumsegment

Die Gesamtheit der verfügbaren Satelliten bilden das sogenannte *Raumsegment*. Zur Zeit besteht es aus 24 Satelliten vom Typ Block-II bzw. Block-IIa. Der erste Block-II Satellit wurde 1989 gestartet. Mit dem Start des 24. Satelliten im März 1994 wurde das System offiziell für voll operabel erklärt. Wegen der hohen Robustheit der Satelliten musste bislang keiner der verfügbaren Reservesatelliten in Umlauf gebracht werden. Nach 1996 hat man mit dem Start von Nachfolgesatelliten vom Block-IIR begonnen. Für die Zeit nach 2001 ist eine weitere Generation von GPS Satelliten,

Block-IIF, bereits in Auftrag gegeben. GPS wird damit für die nächsten 15 bis 20 Jahre der Geodäsie zur Verfügung stehen. Bei mindestens 24 Satelliten sind je nach geographischer Position des Beobachters in der Regel 6 bis 8 Satelliten gleichzeitig über dem Horizont sichtbar. Da es sich bei GPS Beobachtungen im wesentlichen um Zeitmessungen handelt, sind die GPS Satelliten mit hochpräzisen Oszillatoren ausgestattet. Die Block-II Satelliten tragen Rubidium- und Cäsium-Atomuhren. Für die Block-IIR Satelliten sind noch genauere Wasserstoff-Maser vorgesehen.

5.5.2 Kontrollsegment

Die Aufgaben des *Kontrollsegmentes* sind die

- Kontrolle des Satellitensystems
- Bestimmung der GPS Systemzeit
- Vorausberechnung der Satellitenbahndaten (Broadcast Ephemeriden) und der Satellitenzeit
- Einspeisung der Bahn- und Zeitinformation in den Datenspeicher jedes Satelliten.

Dies geschieht über ein globales Netz von 5 Überwachungsstationen. Die Hauptkontrollstation befindet sich in Colorado in den USA. Da GPS ein militärisches System ist, unterliegt es schließlich der Verantwortung und Kontrolle des US Verteidigungsministeriums (US Department of Defense DoD). Um auch zivilen Nutzern Informationen verfügbar zu machen, entstehen überall in der Welt kommerzielle, wissenschaftliche oder öffentliche Informationsdienste. Beispiele hierfür sind der *GIBS* Dienst des Institutes für Angewandte Geodäsie in Frankfurt, der *International GPS Geodynamics Service (IGS)* oder die Referenzstationsnetze der Landesvermessungsverwaltungen.

5.5.3 GPS Signale, Code und Träger

Bei GPS-Beobachtungen hat man es mit drei Typen von Signalen zu tun, den Träger-, Code- und Datensignalen. Ausgehend von der Grundfrequenz von 10,23 MHz des Satellitenoszillators werden zwei Trägersignale im L-Band, L1 und L2 mit einer Wellenlänge von etwa 20 cm abgeleitet. Den Trägern sind zwei Codesignale überlagert (Abb. 5.16), der präzise P-Code auf L1 und L2 und der grobere C/A-Code ausschließlich auf L1. Bei den Codes handelt es sich um sogenannte PRN Codes (*Pseudo Random Noise*), einer Folge von +1 und -1 mit zufallsähnlichem Charakter. Zusätzlich ist noch das Datensignal mit einer Frequenz von 50 Bits pro Sekunde und einer Zykluslänge von 30 Sekunden aufmoduliert. Tab.5.1 verdeutlicht die Zusammenhänge.

Die eigentliche Navigation erfolgt in der Regel mit Hilfe der Codemessung, da hier durch die Korrelationstechnik eindeutige Pseudoentfernungen in Echtzeit bestimmt werden können. Die Messgenauigkeit beträgt aufgrund des Coderauschens einige Dezimeter bis Meter. Es ist offensichtlich, dass für präzise Anwendungen die Nutzung der Trägerwellen unabdingbar ist. Bei der Trägerphasenmessung kann heute das Wellenreststück auf Bruchteile eines Millimeters aufgelöst werden. Wenn es gelingt, das *Mehrdeutigkeitsproblem* zu lösen, d.h. die genaue Gesamtzahl von Wellenzyklen in der

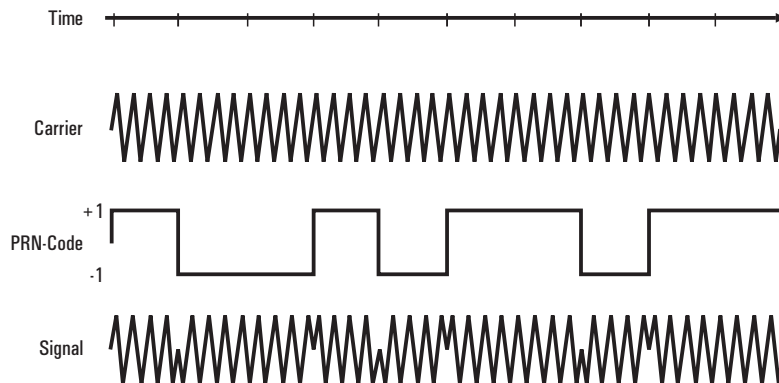


Abbildung 5.16: Träger- und Codesignal bei GPS.

	Code	Träger
Wellenlänge	P-Code 29,3 m	L1: 19,05 cm
	C/A-Code 293,0 m	L2: 24,45 cm
Messrauschen	P-Code 0,6 - 1 m	1 - 3 mm
	klassische Empfänger C/A-Code 5 - 10 m	
	moderne Entwicklungen dm	< 0,2 mm
Ausbreitungseffekte	ionosphärische Verzögerung	ionosphärische Beschleunigung
Mehrdeutigkeit	eindeutig	mehrdeutig

Tabelle 5.1: Wichtige Eigenschaften von Code- und Trägerphasen.

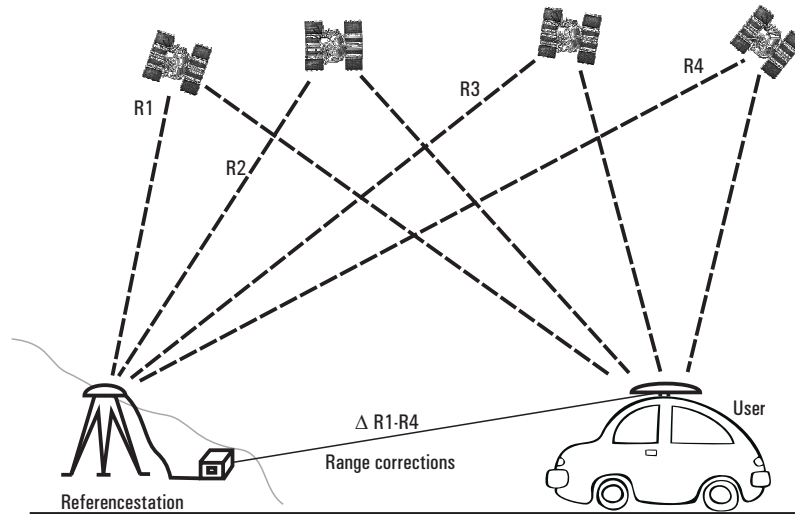


Abbildung 5.17: DGPS mit Streckenkorrekturen.

Entfernung Satellit-Beobachter zu bestimmen, dann kann das hohe Genauigkeitspotential von GPS ausgeschöpft werden.

Um Trägerphasenmessungen durchführen zu können, muss das Trägersignal zunächst rekonstruiert werden. Dies geschieht am einfachsten und ohne Verlust an Signalqualität durch Subtraktion des Codes vom empfangenen Signal. Da auf L2 lediglich der P-Code, nicht aber der C/A-Code aufmoduliert ist, muss der P-Code bekannt sein, um die Trägerwelle auf L2 zu rekonstruieren. Im Zuge der Aktivierung von Sicherungsmaßnahmen ist der P-Code allerdings in der Regel verschlüsselt und zivilen Nutzern nicht zugänglich. Es müssen deshalb andere Techniken verwendet werden, um auf L2 Trägerphasenmessungen durchführen zu können. Eine einfache Methode besteht darin, das L2 Signal zu quadrieren und damit das Codesignal, da es aus einer Folge von +1 und -1 besteht, zu eliminieren. Hierbei halbiert sich jedoch die Wellenlänge, und das Messrauschen wird erheblich erhöht. Eine Folge davon ist, dass bei Empfängern mit Quadriertechnik die Signale auf L2 wegen zu großer Störungen häufig nicht nutzbar sind. Alle führenden Hersteller von präzisen GPS Empfängern haben deshalb neue Techniken entwickelt, die auch bei aktivierter Codeverschlüsselung die volle Wellenlänge auf L2 mit ausreichender Signalqualität bereitstellen. Die GPS Empfänger werden auch als *Nutzersegment* bezeichnet.

5.5.4 Differential GPS (DGPS)

Aufgrund der durch die Sicherungsmaßnahmen stark eingeschränkte Genauigkeit bei der Bestimmung absoluter Positionen wird GPS im allgemeinen als *relatives* Verfahren eingesetzt, d.h. es werden Koordinatendifferenzen zwischen zwei oder mehr Stationen bestimmt. Durch die Differenzbildung wird ein Großteil der wirksamen Fehlereinflüsse eliminiert. Eine oder mehrere Stationen werden als *Referenzstation* mit bekannten Koordinaten betrachtet. Im Prinzip werden durch die Beobachtungen Koordinaten

von Referenzstationen auf neu zu bestimmende Empfängerpunkte übertragen. Dieses Verfahren wird mit *Differential GPS (DGPS)* bezeichnet. Werden DGPS Messungen mit Hilfe von Trägerphasen durchgeführt, können Genauigkeiten im Millimeterbereich erzielt werden.

5.6 GLONASS

GLONASS (GLOBAL NAVIGATION SATELLITE SYSTEM) ist eine russische Version des GPS. Das GLONASS-System wird von den russischen Weltraum-Streitkräften - als Systemoperator - für die Regierung der russischen Föderation betrieben und bietet auch für den zivilen Nutzer aufgrund seiner Anwendungsbreite bedeutende Vorzüge. Das GLONASS-System besitzt zwei verschiedene Navigationssignale: – das normalpräzise Navigationssignal (SP) und – das hochgenaue Signal (HP). Die Dienste der SP-Positions- und Zeitbestimmung sind allen zivilen GLONASS-Nutzern ständig und weltweit zugänglich und bieten die Möglichkeit, horizontale Lagegenauigkeiten von 57-70 Metern zu erzielen, vertikale Lagegenauigkeiten von 70 Metern, Komponenten des Geschwindigkeitsvektors mit einer Genauigkeit von 15 cm/s und einer Zeitgenauigkeit von 1 μ s. Diese Eigenschaften können bei Verwendung des differentiellen Navigationsmodus deutlich verbessert werden. Das SP-Signal L1 hat Frequenzteilung mit multiplexem Zugriff im L-Band: $L1 = 1602 \text{ MHz} + n \times 0.5625 \text{ MHz}$, wobei 'n' die Nummer des Frequenzkanals ist ($n = 0, 1, 2, \dots$). Das bedeutet, dass jeder Satellit Signale seiner eigenen Frequenz ausstrahlt, die sich von der anderer Satelliten unterscheiden kann. Die GLONASS-Satelliten sind mit Cäsiumuhren ausgestattet, deren tägliche Schwankungen 5×10^{-13} nicht überschreitet. Auf der Basis einer zentralen Synchronisationszeit, welche mit hochstabilen H-Masern ($\sigma \simeq 5 \times 10^{-14}$) auf dem Boden generiert wird, erzeugen diese die GLONASS-Systemzeit GLONASST. GLONASST ist auf einfache Art und Weise mit UTC verknüpft: wenn UTC um Schaltsekunden erweitert wird, so ist dies auch bei GLONASST der Fall: Es gilt:

$$\text{GLONASST} = \text{UTC} + 3^{\text{h}}.00.$$

Mehr Information dazu findet man etwa unter <http://gibs.leipzig.ifag.de>.

5.7 DORIS

Das Messverfahren DORIS (Doppler Orbitography by Radiopositioning Integrated on Satellite) ist ein 2-Frequenz Doppler System, welches auf diversen Raumfähren zum Einsatz kommt (Spot2, Spot3, Spot4, Topex/Poseidon). Beim DORIS System stehen die Radiosender auf der Erde, der Empfänger auf der Raumfähre. 1990 wurde mit dem Einsatz von DORIS begonnen. DORIS-Stationen befinden sich auf allen großen tektonischen Platten der Erde. Gegenwärtig erreicht man mit DORIS eine Positionierungsgenauigkeit von etwa 2 cm und die Bestimmung der Polbewegung erfolgt mit einer Genauigkeit von 1-2 mas. Das Koordinationszentrum von DORIS ist das IGN (Institut Geographique National) in Champ-sur-Marne, Frankreich (<http://lareg.ensg.ign.fr>).

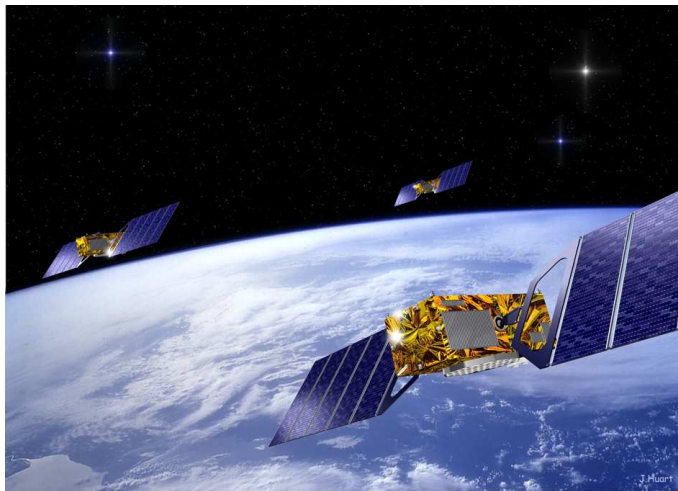


Abbildung 5.18: Das geplante europäische Navigationssystem GALILEO.

5.8 GALILEO

Um europäische Unabhängigkeit von den militärisch kontrollierten Navigationssystemen GPS (USA) und GLONASS (Russland) zu erreichen, hat man mit dem Aufbau des europäischen Systems GALILEO begonnen. Dieses System, bei dem insgesamt 30 Satelliten (27 operative und drei in Reserve) die Erde in drei Ebenen und einer Höhe von 23616 km umkreisen, soll etwa im Jahre 2010 fertig gestellt sein. Der erste Testsatellit 'Giove A' hat im Dezember 2005 seinen Betrieb aufgenommen. Der Probebetrieb mit vier Satelliten ist für 2008 vorgesehen. Zusammen mit einem terrestrischen Kontrollsegment soll eine globale Überdeckung realisiert werden. Ein kostenloser Dienst (Open Service, OS) von allgemeinem Interesse zu Ortungs-, Navigations- und Zeit-synchronisationszwecke ist vorgesehen. Der OS wird eine Positionsbestimmung auf wenige Meter genau ermöglichen, die Uhrzeit wird mit der Genauigkeit einer Atomuhr zur Verfügung gestellt werden. Weitere kostenpflichtige Dienste wie der Kommerzielle Dienst (Commercial Service) zur Steigerung der Positionsgenauigkeit, der Safety-of-Life-Dienst für den Luft- und Schienenverkehr, der Staatliche Dienst für Polizei, Küstenwache oder Geheimdienst oder der Such- und Rettungsdienst sollen mit GALILEO realisiert werden.

Galileo ist das erste von der Europäischen Union (EU) und der Europäischen Weltraumorganisation (ESA) gemeinsam durchgeführte Projekt und wird von beiden Organisationen zu gleichen Teilen finanziert. Beteiligt sind aber auch andere Staaten wie China, Indien und andere.

5.9 Ringlaserkreisel

Seit einigen Jahren ist sehr erfolgreich mit dem Aufbau großer Ringlaserkreisel für Erdrotationsmessungen begonnen worden. Ein Ringlaser ist ein Drehgeschwindigkeits-

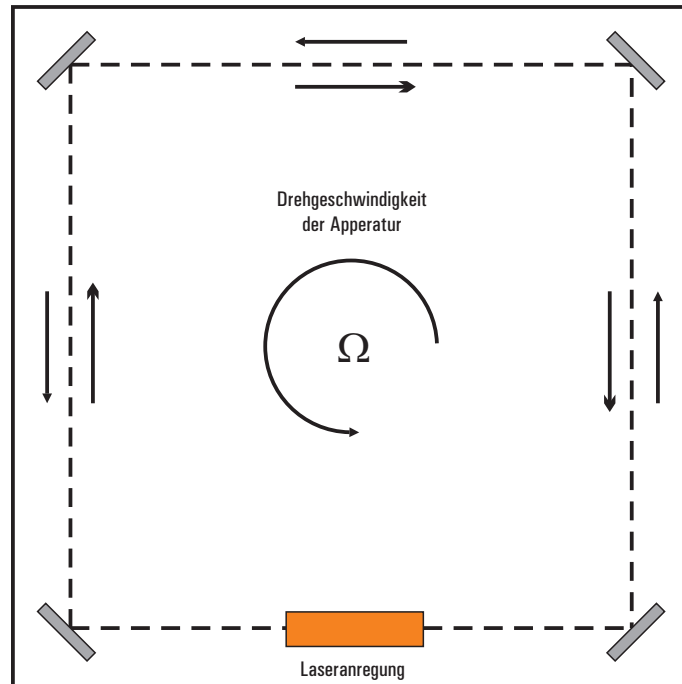


Abbildung 5.19: Schematischer Aufbau eines quadratischen Ringlasers.

sensor, der unter Ausnutzung des Sagnac-Effektes Rotationen lokal und praktisch in Echtzeit erfassen kann (www.wettzell.ifag.de). Er besteht aus einer Anordnung von Spiegeln auf einer 'starrten Plattform', zwischen denen ein Laserstrahl auf einem geschlossenen Pfad eine Fläche umschreibt. Der mit einem Helium/Neon Gasgemisch gefüllte Ringresonator wird an einer Stelle zur Lasertätigkeit angeregt. Es ergeben sich zwei gleichberechtigte, gegenläufige Ausbreitungsrichtungen. Rotiert der Sensor bezüglich lokal träger Achsen, so tritt eine Frequenzverschiebung zwischen den beiden umlaufenden Strahlen auf. Diese Sagnac'sche Frequenzdifferenz Δf_{Sagnac} ist gegeben durch

$$\Delta f_{\text{Sagnac}} = \frac{4\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\Omega}}{\lambda P}, \quad (5.1)$$

wobei \mathbf{A} den orientierten effektiven Ringlaserflächenvektor bezeichnet, $\boldsymbol{\Omega}$ die Winkelgeschwindigkeit der Plattform bzgl. lokaler inertialer Achsen, λ die Wellenlänge des Laserlichtes und P den vom Licht beschriebenen Umfang. Mit Hilfe eines halbdurchlässigen Spiegels kann das durch die beiden gegeneinander laufenden Interferenzmuster außerhalb der Laserfläche vermessen werden. Eine Änderung der Sagnac-Frequenz induziert dann eine Verschiebung der Interferenzstreifen, welche nachgewiesen werden kann. Angestrebte Genauigkeiten eines solchen Ringlasers liegen im Bereich von 10^{-9} der Erddrehung (entsprechend 6 Nanorad/Tag). Die Realisierung einer solchen Genauigkeit stellt enorme technische Anforderungen an den Ringlaser. Die Stabilität der geometrischen Größen Umfang und Fläche muss in einer Größenord-

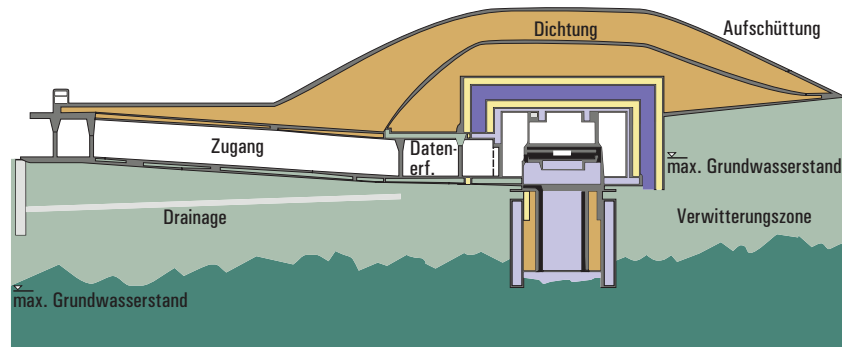


Abbildung 5.20: Ein Querschnitt durch das Tiefenlabor, in dem sich der Ringlasers befindet, auf der Fundamentalstation in Wettzell.

nung von weniger als 1 nm gewährleistet sein, da sich eine Änderung dieser Größen unmittelbar in der Sagnac-Frequenz niederschlägt. Die Umlenkspiegel müssen von höchster Güte sein, da sich die Lichtstrahlen beider Umlaufsinne durch Rückstreuung gegenseitig beeinflussen und dadurch Einrasteffekte ('Lock-In') auftreten. Diese Lock-In-Effekte hängen stark vom Abstand der Spiegel ab, die also sehr stabil auf einer Grundplatte mit extrem kleiner thermischer Ausdehnung aufgebaut sein müssen.

Der bislang größte Ringlaser der Welt befindet sich auf der deutschen Fundamentalstation zu Wettzell. Als Grundplatte dient eine kreisförmige Scheibe aus Zerodur mit einem Durchmesser von 4,25 m, einer Dicke von 25 cm und einem Gewicht von 9 Tonnen. Die gesamte Laserplattform befindet sich einem temperaturstabilisierten Tiefenlabor, dessen Querschnitt in Fig. 5.20 zu sehen ist. Mit diesem Ringlaser ist beispielsweise die Messung der täglichen Polbewegung gelungen.

Kapitel 6

Astrometrische Raumprojekte

6.1 HIPPARCOS

Neben den bisher erwähnten Verfahren der geodätischen Astronomie spielt insbesondere für die Astrometrie und zur Etablierung astronomischer Referenzsysteme die *HIPPARCOS*-Mission eine ganz bedeutende Rolle.

Das Prinzip von *HIPPARCOS* (= HIgh Precision PARallax Collecting Satellite) wurde 1966 von Lacroute eingeführt. Zusammen mit Bacchus, Høg, Lindegren und anderen Mitgliedern des ESA-Teams wurde das ursprüngliche Konzept wesentlich verbessert und u.a. das Tycho-Experiment mit hinzugenommen. Am 8. August 1989 wurde der Satellit in eine sehr exzentrische Bahn gebracht. Eigentlich sollte *HIPPARCOS* in eine geostationäre Bahn gebracht werden. Dies mislang jedoch, so dass *HIPPARCOS* im Transferorbit blieb. Für diese gilt: Perigäumshöhe 500 km, Apogäumshöhe 36500 km, Bahnperiode $10^{\text{h}}40^{\text{m}}$. Die Kommunikation wurde durch drei Bodenstationen realisiert: Odenwald als Leitstation in Deutschland, Perth (Australien) und Golstone in den USA. In der Nähe des Perigäums ging der Satellit durch den Strahlungsgürtel und es konnte während etwa 30 bis 35% der Umlaufzeit nicht gemessen werden. Die Strahlung zerstörte allmählich Teile des Satelliten, so dass im März 1993 schließlich alle Beobachtungen eingestellt werden mussten.

HIPPARCOS war ein Gerät der globalen Astrometrie. Mit Hilfe zweier zusammengeklebter Spiegelhälften konnten Lichtstrahlen, die unter einem Winkel $\Delta\varphi_0 = 58^{\circ}31.''25$ einfielen in die Fokalebene eines Teleskopes abgebildet werden (Abb. 6.1). Der genaue Winkelabstand zweier Sterne mit $\Delta\varphi \simeq \Delta\varphi_0$ konnte mit Hilfe einer Gittertechnik sehr genau vermessen werden. Die geometrische Gestalt des Satelliten ist in Abb. 6.2 zu sehen. Drei große Sonnensegel lieferten die Energie. Durch zwei Öffnungen fiel das Licht auf einen Strahl-Vereiniger (beam-combiner). Dieser besteht aus einem 29 cm großen Spiegel, der in zwei Hälften geschnitten und unter einem Winkel von 29° wieder zusammengeklebt wurde. Die Optik ist in Abb. 6.3 dargestellt. In der Fokalebene befinden sich mehrere Gitter. Im Zentrum befindet sich das Hauptgitter, welches 2688 Schlitze aufweist. An zwei Seiten des Hauptgitters befindet sich jeweils ein sogenannter "Stern-Kartierer" (Star-mapper) (Abb. 6.4); einer von beiden liefert redundante Information. Ein Stern-Kartierer besteht aus vier vertikalen Schlitzen und, in einem separaten Teil, vier weiteren Schlitzen unter einem Winkel von 45° .

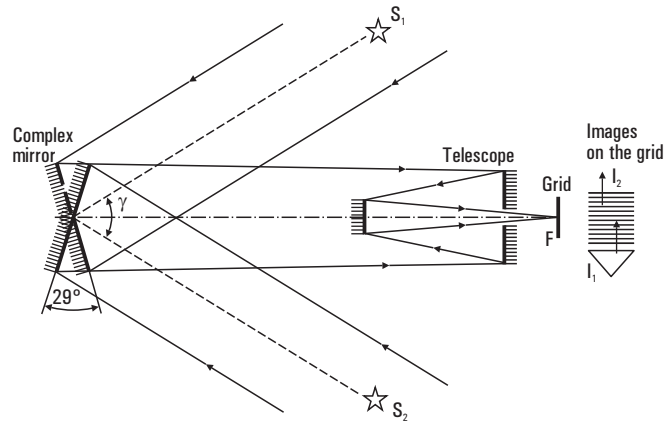


Abbildung 6.1: Funktionsprinzip von *HIPPARCOS*: das Licht zweier Sterne S_1 und S_2 aus zwei unterschiedlichen Gesichtsfeldern ergeben die Bilder I_1 und I_2 in der Fokalebene. Dort moduliert ein Gitter die Lichtintensität durch die Drehung des Satelliten um eine Achse, senkrecht zur Zeichenebene.

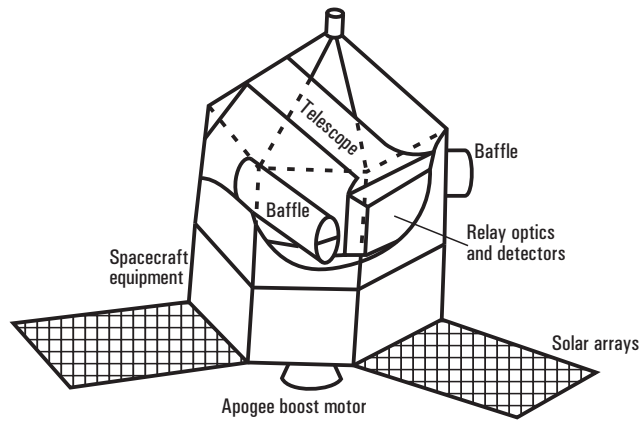
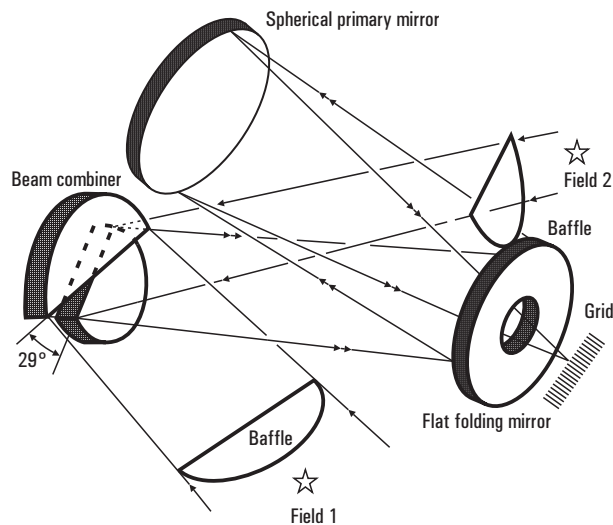


Abbildung 6.2: Der generelle Aufbau des *HIPPARCOS*-Satelliten.

Abbildung 6.3: Konfiguration der *HIPPARCOS*-Optik.

Das Licht wird von den Stern-Kartierern moduliert, dann in zwei Wellenlängenbereichen ($\sim B$ und V) getrennt und zu zwei Photomultiplier geschickt. Das Licht vom Hauptgitter wird separat ausgewertet. Hier ist es notwendig, die Sternpositionen bereits gut zu kennen, d.h. man arbeitet mit einem INPUT CATALOGUE. Ein solcher ist mit Hilfe vieler Leute unter der Leitung von C.Turon zusammengestellt worden. Er trägt den Namen *Hipparcos Input Catalogue*. Er enthält Positionen, Helligkeiten, Eigenbewegungen, Parallaxen etc. von

- 118322 Sternen
- 48 Kleinplaneten
- 3 Monde (Europa, Titan, Iapetus)
- 1 Quasar (3C 273).

Der Satellit rotierte um seine sogenannte Vertikalachse und durchmustert so den ganzen Himmel derart, dass alle in Frage kommenden Sterne möglichst oft beobachtet wurden. Als Zwangsbedingung kam hinzu, dass der Winkel zwischen Gesichtsfeld und der Sonne größer 45° sein sollte, um Streulicht zu vermeiden. Der Satellit rotierte gegen die Sterne mit einer Periode von 2 Stunden und 8 Minuten, so dass ein Stern das Hauptgitter innerhalb von etwa 19 Sekunden überstrich. Die Rotationsachse des Satelliten bewegte sich in 57 Tagen einmal um die Sonne unter einem Winkel von 43° gegen die Sonne. Während der gesamten Mission wurde jeder Stern 30 bis 150 mal beobachtet.

Dieses Scannen des Himmels erfolgte unter präziser Kontrolle der Lage des Satelliten. Dazu müssen diverse Drehmomente (resultierend aus Strahlungsdrücken, magnetischen Kräften, Reibung etc.) auf die Spinachse berücksichtigt werden und mit 6 Steerdüsen wurde die Lage im Raum fortlaufend geregelt.

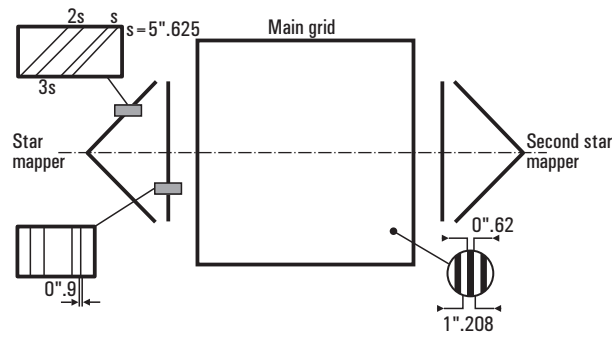
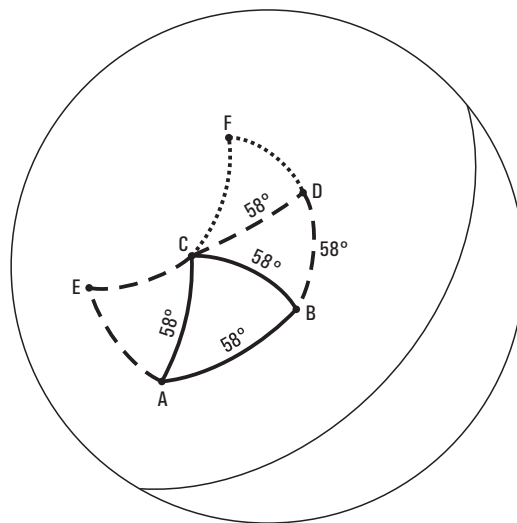


Abbildung 6.4: Anordnung des Hauptgitters und der Sternkartierer.

Abbildung 6.5: *HIPPARCOS* überzieht den Himmel mit einem System von 58° Bögen.

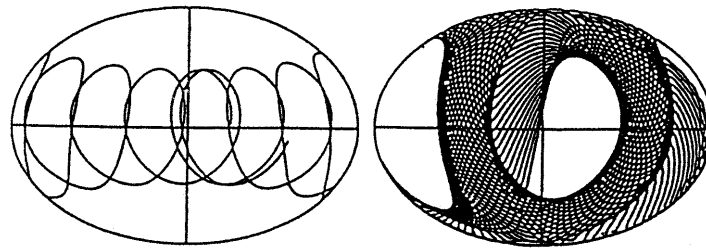


Abbildung 6.6: Die Rotationsbewegung von *HIPPARCOS*, dargestellt in ekliptischen Koordinaten. Links: die Bewegung der Satellitenachse im Laufe eines Jahres; rechts: derjenige Teil des Himmels, der innerhalb von 70 Tagen gescannt wurde.

Auf diese Art und Weise wurde der ganze Himmel mit einem System von 58° Bögen überzogen (Abb. 6.5). Aus diesem ging dann das interne *HIPPARCOS*-System (realisiert durch einen Katalog mit Sternpositionen und Eigenbewegungen) hervor. Schließlich muss das *HIPPARCOS*-System noch mit einem extragalaktischen Bezugssystem verknüpft werden. Zunächst hatte man daran gedacht, das H-System an den Fundamentalkatalog FK5 (siehe weiter unten) anzuschließen. Dies scheiterte jedoch an Probleme mit dem FK5. Inzwischen ist das *HIPPARCOS*-System an das ICRS (International Celestial Reference System), definiert durch einen Radiokatalog für Quasar-Positionen, angeschlossen worden. Man kann sagen, dass der *HIPPARCOS*-Katalog die Realisierung des ICRS im Optischen darstellt.

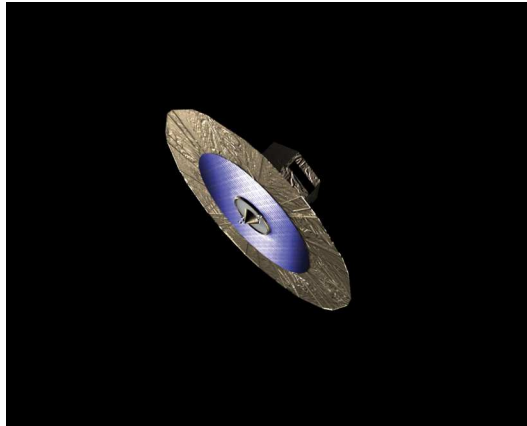
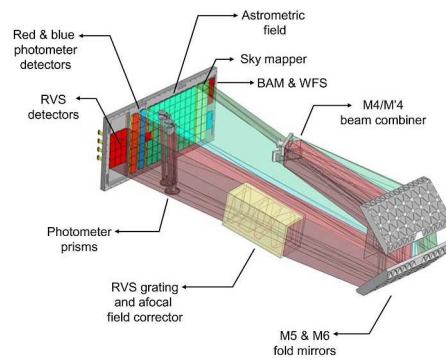
Nach einem Vorschlag von Høg wurde die Information aus den Stern-Kartierern zu sogenannten Tycho-Experiment genutzt. Da die Lage des Satelliten gut bekannt war, lieferten die Kartierer auch die Position der Sterne.

Die Daten wurden zu den Stationen auf der Erde gesandt, analysiert und mit Hilfe verschiedener Gremien wurden die *HIPPARCOS*- und Tycho-Kataloge erstellt. Der *HIPPARCOS*-Katalog umfasst rund 118000 Sterne, deren Positionen auf etwa eine Millibogensekunde (1 mas) genau bestimmt wurden. Die Grenzgröße lag bei $V = 12.4$ mag, er ist komplett bis $V = 7.3 - 9.0$ mag. Eigenbewegungen der Sterne konnten mit einer Genauigkeit von etwa 1-2 mas/Jahr gemessen werden. Der Tycho-Katalog enthält rund eine Million Sternpositionen mit einer Genauigkeit von etwa 25 mas. Die *HIPPARCOS*- und Tycho-Kataloge stehen seit 1997 (CD-ROM) jedem Nutzer zur Verfügung.

6.2 Das astrometrische Projekt GAIA

Nach Abschalten des Satelliten *HIPPARCOS* im Jahre 1993 wurde der ESA ein neues, verbessertes astrometrisches Satellitenprojekt mit dem Namen *GAIA* vorgeschlagen. *GAIA* wurde ein Jahr später in das Langzeitprojekt der ESA, Horizon 2000+, aufgenommen.

Im Vergleich zu *HIPPARCOS* soll der neue Satellit nur halb so groß, die Messge-

Abbildung 6.7: Die geplante Raumsonde *GAIA*.Abbildung 6.8: Die Optik der Sonde *GAIA*.

nauigkeit dagegen rund hundert mal besser sein. Das bedeutet, dass *GAIA* mit einer Genauigkeit von bis zu 10 Mikrobogensekunden arbeiten soll. Ein weiteres Ziel ist die Steigerung der Anzahl der vermessenen Sterne von 118000 auf über eine Milliarde mit einer Grenzhelligkeit von 20 mag, anstelle von 12,2 mag bei *HIPPARCOS*. Geplant ist ein Start von *GAIA* im Jahre 2012. Nach 5-jähriger Mess- und 3-jähriger Auswertzeit sollten erste Ergebnisse vorliegen.

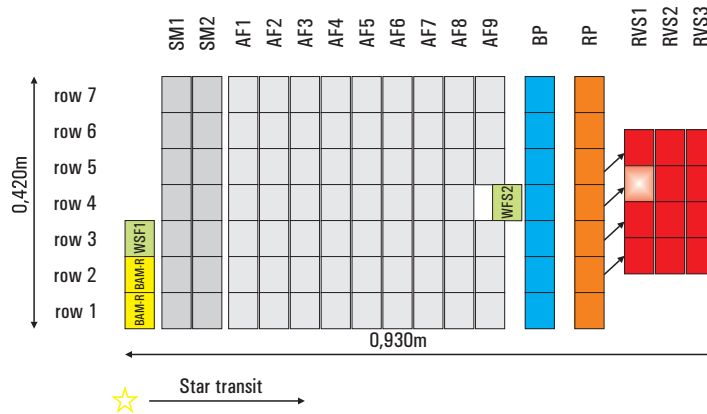


Abbildung 6.9: CCDs in der Fokalebene von GAIA.

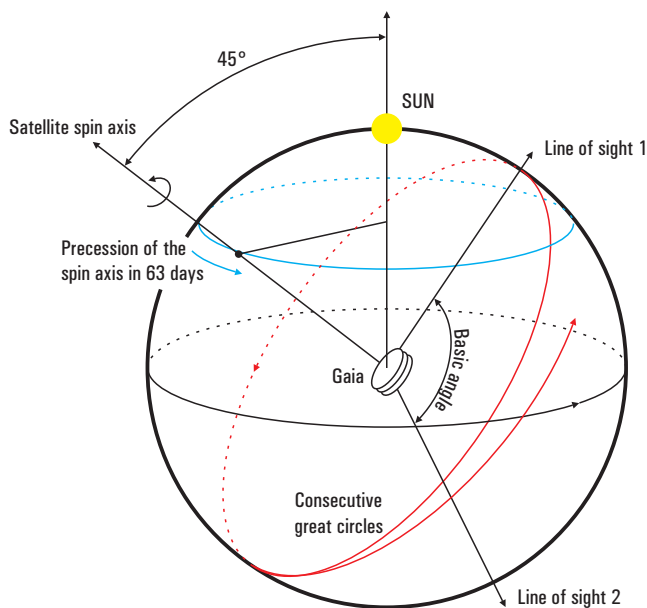


Abbildung 6.10: Die Himmelsdurchmusterung im Projekt GAIA.

Kapitel 7

Variationen der Sternpositionen

Wir wollen uns nun näher dem Problem der Bestimmung von Sternpositionen zuwenden. Die Sternpositionen sollen durch die astronomischen Äquatorkoordinaten (α, δ) gegeben sein. Hier ist zu bedenken, dass diese Koordinaten, wenn sie auf der Erde gemessen werden, von der Stellung und der Bewegung der Erde im Raum abhängen. Konkret hängt die sogenannte *Parallaxe* von der Position des Geozentrums und die *Aberration* von der Geschwindigkeit des Geozentrums in einem baryzentrischen Koordinatensystem ab. Die Berechnung von Parallaxe und Aberration erfordern aus diesem Grunde eine Ephemeride der Erde.

7.1 Ephemeriden für die Bewegung des Sonnensystems

7.1.1 Die DE-Ephemeriden des JPL

Das Wort Ephemeride stammt aus dem griechischen (ephemeros steht 'für einen Tag') und bedeutet Liste oder Tabelle, welche Positionen und Geschwindigkeiten von Körpern des Sonnensystems enthalten. Derartige Ephemeriden werden mit entsprechenden Computerprogrammen generiert. Bislang ohne Konkurrenz sind die DE-Ephemeriden des Jet Propulsion Laboratory (JPL), Pasadena, USA. Diese Ephemeriden sind durch numerische Integration von Bewegungsgleichungen mit Anpassen von Konstanten und Anfangsbedingungen entstanden. Integriert werden die Bewegungsgleichungen für Sonne, Erde, Mond und neun Planeten als 'Punktmassen' mit relativistischen Korrekturen der Einstein-Infeld-Hoffmann Gleichungen. Figureneffekte von Erde und Mond werden betrachtet: zonale Harmonische der Erde bis zur 4. Ordnung wechselwirken mit den Punktmassen Sonne und Mond, zonale Harmonische des Mondes bis zur 4. Ordnung sowie entsprechende tesserale bis zur 3. Ordnung wechselwirken mit den Punktmassen Erde und Sonne. Die Gezeitenwirkung im Erde-Mond System wird mit Hilfe eines Parameters heuristisch mit in Betracht gezogen. Die Rotation des Mondes wird durch numerische Integration der Eulerschen Kreisel-

gleichungen behandelt. Schließlich wird noch die gravitative Wirkung einer ganzen Reihe von Asteroiden mitgenommen.

Zur Anpassung der Konstanten, wie etwa der Massen, wurden umfangreiche Daten einbezogen:

- optische Transitmessungen der Sonne und der 9 Planeten, welche zwar mit großen systematischen Fehlern behaftet sind, aber für die äußeren Planeten wichtige Dienste leisten.
- Radarmessungen zu gewissen Planeten (seit ca. 1960)
- Spacecraft ranging zu den Viking Sonden
- Lunar Laser Ranging seit den 70er Jahren

Weiterhin flossen ein: VLBI Daten zu Raumflugkörpern, Radio Beobachtungen, sowie Messungen, welches das dynamische Referenzsystem der Ephemeride mit dem ICRS verknüpfen.

Im Laufe der Zeit ist eine ganze Serie von DE-Ephemeriden entstanden, die sich in Genauigkeit und betrachtete Zeitspanne unterscheiden. Bei der aktuellen 400er Reihe überdeckt DE403 die Zeit von 1410 v.Chr. bis 3000 n.Chr., DE404 hingegen die Zeit zwischen 300 v.Chr. und 3000 n.Chr. Für die gegenwärtige Epoche wurden DE405 bzw. DE406 entwickelt. Diese Ephemeriden sind entweder auf CD-ROM erhältlich oder können direkt über das Internet abgefragt werden. Gegenwärtig kommt man über <http://ssd.jpl.nasa.gov> zu einem Web-Interface mit dem Namen *Horizons*.

7.1.2 Die VSOP Ephemeriden

Von Bretagnon und Francou wurden theoretische Reihen mit dem Namen VSOP (Variations Seculaire des Orbites Planetaires) für die Bewegung der Planeten abgeleitet. Die Konstanten der Theorie und Anfangsbedingungen wurden aus der DE200 Ephemeride abgeleitet. Die ursprüngliche 1982 entwickelte Theorie VSOP82 lieferte nur die elliptischen Elemente der Planetenbahnen, so dass diese Theorie 1987 erweitert wurde. Diese erweiterte Theorie VSOP87 ermöglicht neben der Berechnung der elliptischen Bahnelemente auch die Bestimmung von heliozentrischen und baryzentrischen Positions- und Geschwindigkeitsvektoren bzgl. verschiedener Epochen und Bezugssysteme. Verschiedene Versionen der VSOP-Theorie liefern

VSOP87: elliptische Bahnelemente, Äquinoktium J2000.0 und dynamische Ekliptik

VSOP87A: kartesische heliozentrische Koordinaten, Äquinoktium J2000.0 und dynamische Ekliptik

VSOP87B: sphärische heliozentrische Koordinaten, Äquinoktium J2000.0 und dynamische Ekliptik

VSOP87C: kartesische heliozentrische Koordinaten, mittleres Äquinoktium und Ekliptik des Datums

Name of the catalog	Date	Approximate number of stars	precision of position (arcsec)	precision of proper motions (arcsec per year)	maximal stellar magnitude	average star density per square degree
Fk4	1964	1 500	0.05	0.003	6	1/27
SAO	1966	260 000	1.50	..	9	6.3
AGK3	1975	183 000	0.21	0.010	9	8.8
Fk5	1988	1 500	0.05	0.002	6	1/27
Fk5 Sup	1991	3 000	0.08	0.003	9	1/8.5
IRS	1990	36 000	0.22	0.005	9	0.9
ACRS	1992	320 000	0.22	0.006	8	10.5
PPM	1991	380 000	0.29	0.006	9	11
GSC 1.0	1988	20 000 000	1.50	..	16	500
GSC 1.1	1992	20 000 000	0.70	..	16	500
GSC 1.2	1996	20 000 000	0.40	..	16	500
Ac2000	1996	4 600 000	0.30	..	13	115 3
Hipparcos	1997	118 000	0.001	0.001	12	
Tycho	1997	1 058 000	0.025	..	12	25
ACT RS	1997	988 758	0.025	0.003	13	25
USNO-A1.0	1997	488 000 000	0.25	..	24	25000

Abbildung 7.1: Zum Brechungsgesetz nach Snellius.

VSOP87D: sphärische, heliozentrische Koordinaten, mittleres Äquinoktium und Ekliptik des Datums

VSOP87E: kartesische baryzentrische Koordinaten, Äquinoktium J2000.0 und dynamische Ekliptik

7.2 Korrekturen der Sternpositionen

Bei Messungen von der Erdoberfläche aus ändert die Refraktion in der Erdatmosphäre die Sternposition, so dass hierfür korrigiert werden muss. Die gemessenen Sternpositionen variieren darüber hinaus aufgrund

- der Parallaxe,
- der Aberration,
- der Eigenbewegung der Sterne und
- der Bewegung des astronomischen Koordinatensystems im Raum (Präzession,, Nutation und Polbewegung).

Diese Effekte sollen jetzt der Reihe nach behandelt werden.

7.3 Refraktion

Die astronomische Refraktion kommt durch den variierenden Brechungsindex in der Erdatmosphäre zustande. Geht ein Lichtstrahl von einem optisch homogenen Medium mit Brechungsindex n über in ein anderes homogenes Medium mit Brechungsindex n' (Abb. 7.1) über und bezeichnen α und α' die Einfallswinkel und Ausfallswinkel bezüglich der Normalenrichtung, senkrecht zur Trennfläche, so gilt das Brechungsgesetz von *Snellius*

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = \frac{n'}{n}.$$

Nun wird die Erdatmosphäre nach unten hin dichter, d.h. die Lichtstrahlen werden zur Lotrichtung hin gebrochen. Als Folge erscheint ein Stern bei kleineren Zenitdistanzen, als ohne Atmosphäre.

Für eine genäherte Ableitung der Refraktion betrachten wir zunächst nur einen kleinen Bereich in der Nähe des Zenit. Dann können wir die Erdkrümmung vernachlässigen. Wir zeichnen uns einen schematischen Schnitt durch die Erdatmosphäre, die von einem Lichtstrahl durchlaufen wird und dessen Zenitdistanz an der Grenze der Atmosphäre gleich z sein möge (Abb. 7.2). Die Atmosphäre wird im Erdschwerefeld im hydrostatischen Gleichgewicht angenommen. Wir können sie uns dann als aus konzentrischen Kugelschalen aufgebaut denken, deren Dichte nach oben hin annähernd exponentiell abnimmt. Im Fall kleiner Zenitdistanzen, in dem wir die Erdkrümmung vernachlässigen können, erscheinen diese konzentrischen Kugelschalen also als planparallele Schichten. An jeder Schichtgrenze findet eine Brechung nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz statt. Es sei n_n der Brechungsindex der äußersten Schicht, so gilt, wenn z_n der Brechungswinkel ist,

$$\sin z = n_n \cdot \sin z_n,$$

weiter für die nächste Schicht

$$n_n \cdot \sin z_n = n_{n-1} \cdot \sin z_{n-1}$$

und so fort. Für den Übergang zur letzten Schicht hat man schließlich

$$n_2 \cdot \sin z_2 = n_1 \cdot \sin z_1,$$

so dass sich insgesamt

$$\sin z = n_1 \cdot \sin z_1 \tag{7.1}$$

ergibt. Setzen wir $z_1 = z'$ und bezeichnen z' mit "scheinbarer Zenitdistanz" sowie z mit "wahrer Zenitdistanz" und den Refraktionsbeitrag mit $r = z - z'$, so haben wir wegen $\cos r \simeq 1, \sin r \simeq r$

$$\begin{aligned} \sin(z' + r) &= n_1 \cdot \sin z' \\ \sin z' + r \cdot \cos z' &= n_1 \cdot \sin z' \end{aligned}$$

bzw.

$$r = (n_1 - 1) \cdot \tan z' = \eta \cdot \tan z'. \tag{7.2}$$

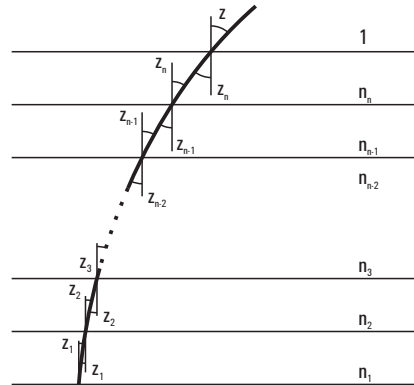


Abbildung 7.2: Refraktion an planparallelen Schichten

Man bezeichnet $\eta = (n_1 - 1)$ als Refraktionskoeffizienten. Mit $n_1 = 1,00029$ wird $\eta \simeq 1'$. Wir haben also das bemerkenswerte Ergebnis, dass sich die Zenitdistanz z an der Grenze der Atmosphäre aus der am Grunde der Atmosphäre beobachteten Zenitdistanz $z_1 = z'$ lediglich aus der Kenntnis des Brechungsindex n_1 der Luft am Grunde der Atmosphäre berechnen lässt. Die Kenntnis des Aufbaus der Atmosphäre ist für diese Näherungsrechnung gar nicht nötig. Die mittlere Refraktion ist also proportional zum Tangens der beobachteten Zenitdistanz. Dies gilt für kleine Zenitdistanzen, solange die Schichten als planparallel betrachtet werden können.

7.3.1 Das Modell von Saastamoinen

Man kann die Krümmung der atmosphärischen Schichten auf verschiedene Art und Weisen berücksichtigen. Eine einfache Möglichkeit besteht darin, höhere Potenzen von $\tan z'$ in einer Reihenentwicklung für r zu berücksichtigen:

$$r = \alpha_1 \cdot \tan z' + \alpha_3 \cdot \tan^3 z' + \dots \quad (7.3)$$

(ein \tan^2 -Term taucht hier nicht auf). Für die Konstanten dieser Reihenentwicklung findet man aus Beobachtungen für einen Luftdruck von 1000 mm hPa und einer Temperatur von 0° Celsius

$$\alpha_1 = 60'' \cdot 1; \quad \alpha_3 = -0.''072.$$

Durch eine einfache Formel kann der jeweils herrschende Druck p in hPa und die Temperatur T in Grad Celsius berücksichtigt werden:

$$r = \frac{p}{1000} \frac{273.2}{273.2 + T} \cdot (60'' \cdot 1 \cdot \tan z' - 0.''072 \cdot \tan^3 z'). \quad (7.4)$$

Eine einfache Verbesserung dieser Relation wird durch das Modell von Saastamoinen (1972) gegeben. Eingangsgrößen sind hier neben Luftdruck p in hPa, der

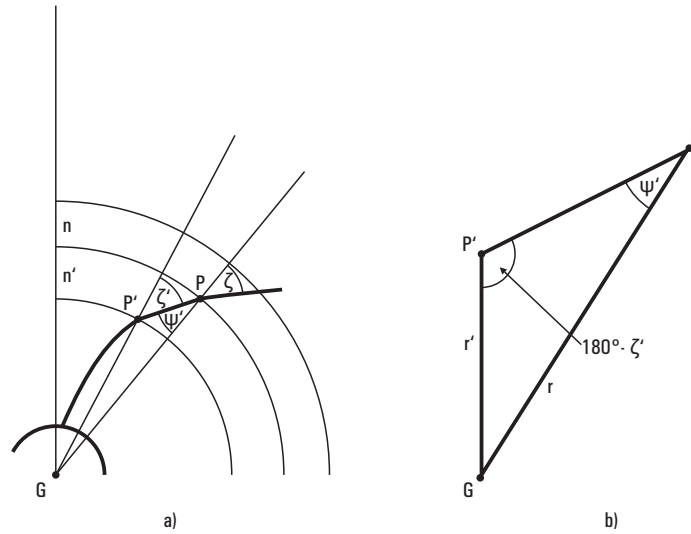


Abbildung 7.3: Refraktion im sphärischen Schichtenmodell.

Temperatur T in Grad Celcius noch die relative Luftfeuchte F_e in Prozent. Zunächst berechnet man den Wasserdampfdruck p_w gemäß der Relation

$$p_w = F_e \left(\frac{T_k}{247.1} \right)^{18.36} \quad (7.5)$$

wenn $T_k = T + 273.2$ die Temperatur in Grad Kelvin bezeichnet. Mit der Hilfsgröße

$$Q = \frac{p - 0.156p_w}{T_k}$$

hat man dann (Amplituden in Bodensekunden)

$$\alpha_1 = 16.271 Q - 7.49 \cdot 10^{-5} p$$

$$\alpha_2 = 6.410774 \cdot 10^{-4} Q - 7.49 \cdot 10^{-5} p$$

bzw.

$$r = 16.''271 Q \tan z' (1 + 0.0000394 Q \tan^3 z' + 0.''0000749 p (\tan z' + \tan^3 z')). \quad (7.6)$$

7.3.2 Refraktionskorrektur als Integrale

Wir wollen die Krümmung der atmosphärischen Schichten jetzt genauer berücksichtigen und betrachten dazu Abb. 7.3. Für zwei benachbarte Schichten seien die Brechungsindizes n und n' . Mit der Notation aus Abb. 7.3 folgt zunächst aus dem Brechungsgesetz

$$n \cdot \sin \zeta = n' \cdot \sin \psi'.$$

Wir betrachten nun das Dreieck $OP'P$, mit $OP = r$, $OP' = r'$ und der Innenwinkel bei $P' = 180^\circ - \zeta'$. Der Sinussatz für ebene Dreiecke liefert dann

$$\frac{\sin(180^\circ - \zeta')}{r} = \frac{\sin \psi'}{r'}$$

bzw.

$$r' \sin \zeta' = r \sin \psi'.$$

Zusammen mit dem Brechungsgesetz ergibt sich zunächst

$$nr \sin \zeta = n'(r \sin \psi') = n'r' \sin \zeta' = \text{const.} \quad (7.7)$$

Nennen wir die hier auftretende Konstante gleich κ , so haben wir

$$\sin \zeta = \frac{\kappa}{nr}$$

oder

$$\tan \zeta = \frac{\sin \zeta}{(1 - \sin^2 \zeta)^{1/2}} = \frac{\kappa}{(\mu^2 r^2 - \kappa^2)^{1/2}}.$$

Wir wollen jetzt die Zenitdistanz eines Lichtstrahles in Bezug auf einen Beobachter einführen. In Abb. 7.4 ist der Innenwinkel bei P' gleich $180^\circ - z$, d.h. $(180^\circ - z) + \zeta + \theta =$

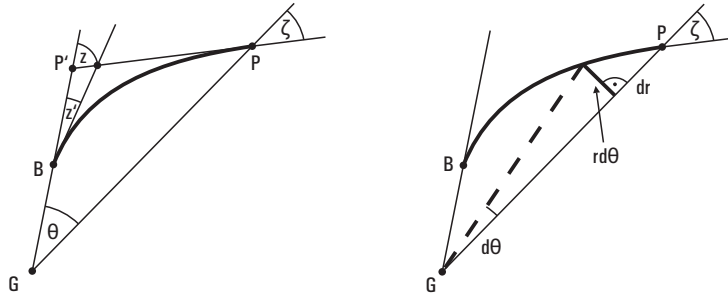


Abbildung 7.4: Zenitdistanzen im sphärischen Refraktionsmodell. Rechts: Detailbild zur Berechnung von $d\theta$.

180° , bzw.

$$z = \zeta + \theta.$$

Wir wollen nun die differentielle Relation

$$dz = d\zeta + d\theta$$

weiter auswerten. $d\zeta$ erhält man aus dem Brechungsgesetz:

$$(nr) \sin \zeta = \text{const.}$$

$$d(nr) \sin \zeta + (nr) \cos \zeta d\zeta = 0,$$

d.h.

$$d\zeta = -\tan\zeta \frac{d(nr)}{nr}.$$

Eine andere Konsequenz ist die Relation

$$\frac{d(nr)}{dr} \tan\zeta + (nr) \frac{d\zeta}{dr} = 0$$

bzw.

$$\frac{d\zeta}{dr} = -\frac{(n+r \, dn/dr) \tan\zeta}{nr}.$$

$d\theta$ erhält man aus Abb. 7.4b. Man erkennt, dass $\tan\zeta = r d\theta/dr$ bzw.

$$d\theta = \tan\zeta \frac{dr}{r}.$$

Damit erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} dz &= d\theta + d\zeta \\ &= \tan\zeta \frac{dr}{r} - \tan\zeta \frac{d(nr)}{nr} \\ &= -\tan\zeta \frac{dn}{n} = -\frac{\kappa}{(n^2 r^2 - \kappa^2)^{1/2}} \frac{dn}{n}. \end{aligned}$$

Die Refraktionskorrektur $\zeta \equiv (\Delta z)_R$ ist also gegeben durch

$$\zeta = -\int_{n_0}^1 \frac{\kappa}{(n^2 r^2 - \kappa^2)^{1/2}} \frac{dn}{n}. \quad (7.8)$$

Den Brechungsindex oberhalb der Erdatmosphäre haben wir gleich Eins gesetzt. Wir können κ noch durch Größen beim Beobachter ausdrücken:

$$\kappa = n_0 r_0 \sin\zeta_0$$

und ζ_0 ist gleich der beobachteten Zenitdistanz z' , d.h.

$$\zeta = n_0 r_0 \sin z' \int_1^{n_0} (n^2 r^2 - n_0^2 r_0^2 \sin^2 z')^{-1/2} \frac{dn}{n}. \quad (7.9)$$

Eine andere Darstellung von ζ ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \zeta &= \int_{\zeta_0}^{\zeta_\infty} \left[d\zeta + \tan\zeta \frac{dr}{r} \right] = \int_{\zeta_0}^{\zeta_\infty} \left[1 + \frac{\tan\zeta}{r} \left(\frac{d\zeta}{dr} \right)^{-1} \right] d\zeta \\ &= \int_{\zeta_0}^{\zeta_\infty} \frac{r \, dn/dr}{n + r \, dn/dr} d\zeta. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Für sehr genaue Berechnungen kann man das hier auftretende Integral mit Hilfe eines Atmosphärenmodelles numerisch lösen. Oft wird dazu ein sogenanntes polytropes

Atmosphärenmodell angenommen (Seidelmann 1992). Das heißt, dass die Modellatmosphäre aus zwei Schichten, der Troposphäre und der Stratosphäre besteht. Die Troposphäre reicht von der Oberfläche der Erde bis zu einer Höhe von 11 km. In der Troposphäre verringert sich die Temperatur mit wachsender Höhe mit einer konstanten Rate von $\alpha = 0.0065 \text{ km}^{-1}$, und es herrscht eine konstante Luftfeuchte, die der am Beobachtungsstandort entspricht. In der Stratosphäre bleibt die Temperatur konstant mit einem Wert, der dem in der Tropopause, der Grenze zwischen Troposphäre und Stratosphäre, entspricht. Zusätzlich wird angenommen, dass in der Stratosphäre kein Wasserdampfdruck mehr existiert (die relative Feuchte ist Null). Die Stratosphäre reicht von der Tropopause bis zu einer Höhe von 80 km über der Erdoberfläche. Das Refraktionsintegral (7.10) wird in einen troposphärischen (ζ_t) und einen stratosphärischen Anteil (ζ_s) zerlegt:

$$\zeta = \zeta_t + \zeta_s. \quad (7.11)$$

Zusätzlich, zu den Eingabegrößen im Modell von Saastamoinen (z_0 : gemessene Zenitdistanz; p_0 : Luftdruck am Beobachtungsort in hPa; T_0 : Temperatur in K und die relative Feuchte Fe), hat man hier die Wellenlänge des Lichtes λ in μm , sowie Breite ϕ und Geoidhöhe h_0 des Beobachters in Meter.

Mit den Parameters der Erde und des atmosphärischen Modells $R = 8314.36$, $M_d = 28.966$, $M_w = 18.016$, $\delta = 18.36$, $R_e = 6378120.$, $h_t = 11000$, $h_s = 80000$ und

$\alpha = 0.0065$ werden zunächst benötigte Konstanten berechnet:

$$\begin{aligned}
p_w &= Fe \left(\frac{T_0}{247.1} \right)^\delta \\
g &= 9.784 (1 - 0.0026 \cos 2\phi - 0.00000028 h_0) \\
A &= \left(287.604 + \frac{1.6288}{\lambda^2} + \frac{0.0136}{\lambda^4} \right) \frac{273.15}{1013.25} \cdot 10^{-6} \\
C_1 &= \alpha \\
C_2 &= gM_d/R \\
C_3 &= C_2/C_1 \equiv \gamma \\
C_4 &= \delta \\
C_5 &= \frac{p_w(1 - M_w/M_d)\gamma}{(\delta - \gamma)} \\
C_6 &= \frac{A(p_0 + C_5)}{T_0} \\
C_7 &= \frac{(AC_5 + 11.2684 \cdot 10^{-6} p_w)}{T_0} \\
C_8 &= \frac{\alpha(\gamma - 1)C_6}{T_0} \\
C_9 &= \frac{\alpha(\delta - 1)C_7}{T_0} \tag{7.12}
\end{aligned}$$

Bei diesem Verfahren wird stets der Wert von r als Funktion des Winkels ζ benötigt. Dieser ergibt sich aus der Lösung des Snelliusschen Gesetzes, $nr \sin \zeta = n_0 r_0 \sin \zeta_0$ mittels einer Iteration (der sogenannten Newton - Raphson - Iteration) aus

$$r_{i+1} = r_i - \left[\frac{n_i r_i - n_0 r_0 \sin z_0 / \sin z}{n_i + r_i (dn/dr)_i} \right] \quad i = 1, 2, \dots \tag{7.13}$$

Diese Iteration konvergiert in der Regel in wenigen Schritten.

Die Berechnung der benötigten Werte für n und dn/dr unterscheiden sich für die Troposphäre und die Stratosphäre. In der Troposphäre - mit $r \leq r_t \equiv R_e + h_t$ ergeben diese sich zu

$$\begin{aligned}
n &= 1 + \left[C_6 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\gamma-2} - C_7 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\delta-2} \right] \frac{T}{T_0} \\
\frac{dn}{dr} &= -C_8 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\gamma-2} + C_9 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\delta-2} \tag{7.14}
\end{aligned}$$

mit

$$T = T_0 - \alpha(r - r_0). \quad (7.15)$$

In der Stratosphäre - mit $r_t \leq r \leq r_s \equiv R_e + h_s$ - und der dort herrschenden Temperatur T_t :

$$T_t = T_0 - \alpha(r_t - r_0) \quad (7.16)$$

gilt:

$$\begin{aligned} n &= 1 + (n_t - 1)e^{-C_2(r-r_t)/T_t} \\ \frac{dn}{dr} &= -\frac{C_2}{T_t}(n_t - 1)e^{-C_2(r-r_t)/T_t}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Die Werte für ζ an den Integrationsgrenzen, z_t und z_s erhält man aus dem Snelliusschen Gesetz, also etwa

$$z_t = \arcsin \frac{n_0 r_0 \sin z_0}{n_t r_t}. \quad (7.18)$$

Schließlich lassen sich die Refraktionskorrekturen für Rektaszension und Deklination eines Sternes aus den differentiellen Relationen berechnen: mit $dA = d\Phi = 0$ und $dz = \Delta z_R$ folgt aus ihnen:

7.4 Parallaxe

Ein endlich weit entferntes Objekt sieht man von zwei verschiedenen Punkten aus unter verschiedenen Richtungen. Dieses Phänomen wird mit *Parallaxe* bezeichnet.

Üblicherweise bezieht man astronomische Parallaxen auf einen räumlichen Referenzpunkt. Für Sternbeobachtungen ist dieser das Baryzentrum des Sonnensystems (in guter Näherung das Heliozentrum). Dies führt zur *jährlichen* oder *Sternen Parallaxe*. Ist der Referenzpunkt das Geozentrum und werden topozentrische Richtungen auf das Geozentrum reduziert, so spricht man von *geozentrischer* oder *täglicher* Parallaxe.

Die ersten Messungen der jährlichen Parallaxe gelang Bessel 1838 am Stern 61 Cygni. 1839 bestimmte Henderson in Süd-Afrika die Parallaxe von α -Centauri, Struve 1840 dann die Parallaxe der Vega. Der erdnächste Stern, α -Centauri, weist eine Parallaxe von $0,76''$ auf. Die Parallaxen der anderen Sterne sind entsprechend ihrer Distanz kleiner.

7.4.1 Jährliche Parallaxe

Aufgrund der jährlichen Bewegung der Erde um die Sonne ändert sich die geozentrische Richtung zu einem Stern in Bezug auf quasi-inertiale Achsen. Man reduziert daher geozentrische Sternpositionen auf das Baryzentrum, bzw. das Heliozentrum. Die Geometrie der jährlichen Parallaxe ist in Abb. 7.5 dargestellt. Hierin bezeichnen θ und θ' die Richtungswinkel zur Lichtquelle bezüglich der Verbindungslinie Erde - Sonne. Tritt im Dreieck Sonne, Erde, Lichtquelle ein rechter Winkel bei der Sonne auf, so wird der Winkel am Stern die jährliche Parallaxe Π genannt. In der Geometrie von Abb.(7.5) ist:

$$\tan \Pi \simeq \Pi = \frac{\text{A.E.}}{d}, \quad (7.19)$$

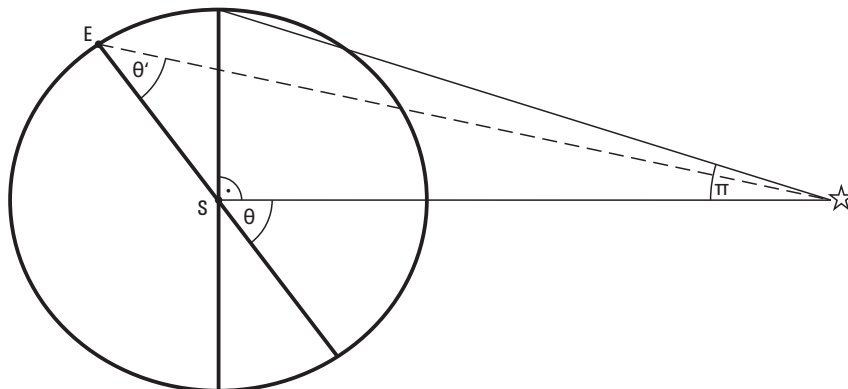


Abbildung 7.5: Geometrie im Falle der jährlichen Parallaxe.

wobei die Astronomische Einheit A.E. die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne bezeichnet. Sie beträgt

$$\text{A.E.} = 1,495985 \times 10^{13} \text{ cm} . \quad (7.20)$$

Man erkennt, dass die jährliche Parallaxe Π nichts anderes als den reziproken Abstand d von der Sonne (baryzentrum) zum Stern darstellt. Es gilt

$$\Pi[\text{rad}] = \frac{1}{d[\text{A.E.}]} . \quad (7.21)$$

Daraus leitet sich das übliche astronomische Entfernungsmaß eines *Parsecs* (pc) ab: ein Parsek ist diejenige Entfernung für welche die jährliche Parallaxe gerade eine Bogensekunde beträgt. Also

$$\begin{aligned} 1 \text{ pc} &= \frac{\text{A.E.}}{1''} = \text{A.E.} \cdot \left(\frac{3600 \cdot 180}{\pi} \right) = 206264,8 \cdot \text{A.E.} \\ &= 3,0856 \times 10^{13} \text{ km} = 3,2615 \text{ Lichtjahre} . \end{aligned} \quad (7.22)$$

Um die Korrekturen der jährlichen Parallaxe für Rektaszension und Deklination zu berechnen betrachten wir Abb.(7.6). Hier bezeichnet \mathbf{x}_Q ein Vektor vom Baryzentrum zur Lichtquelle Q , \mathbf{x}_E ein Vektor vom Baryzentrum zum Geozentrum und \mathbf{x}'_Q ein Vektor vom Geozentrum zur Lichtquelle. Die Gleichung der jährlichen Parallaxe lautet dann einfach:

$$\mathbf{x}_Q = \mathbf{x}_E + \mathbf{x}'_Q . \quad (7.23)$$

Aus dieser einfachen Gleichung können wir die Korrekturen für Rektaszension und Deklination aufgrund der jährlichen Parallaxe ableiten. Wir definieren dazu Einheitsvektoren \mathbf{m} und \mathbf{m}' von Baryzentrum, bzw. Geozentrum zur Lichtquelle, d.h. wir schreiben $\mathbf{x}_Q = d \cdot \mathbf{m}$ und $\mathbf{x}'_Q = d' \cdot \mathbf{m}'$. Damit gilt

$$\mathbf{m}' = \frac{1}{d'} (\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_E) = \frac{d}{d'} \left(\mathbf{m} - \frac{\mathbf{x}_E}{d} \right) .$$

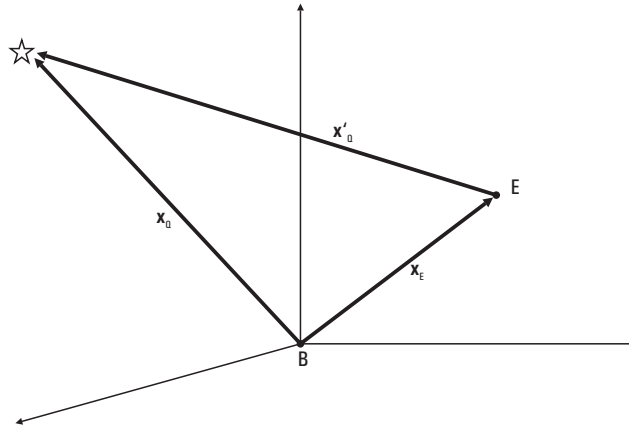


Abbildung 7.6: Vektordiagramm im Falle der jährlichen Parallaxe.

Für das Problem der jährlichen Parallaxe wollen wir die Variationen im Abstand des Geozentrums bezüglich des Baryzentrums vernachlässigen und schreiben:

$$\mathbf{x}_S = -\mathbf{x}_E = A.E. \cdot \hat{\mathbf{x}}, \quad (7.24)$$

wobei \mathbf{x}_S den Vektor vom Geozentrum zum Bary- bzw. Heliozentrum beschreibt und $\hat{\mathbf{x}}$ den entsprechenden Einheitsvektor. Damit gilt mit $\eta = d/d'$ und $\Pi = A.E./d$ die Beziehung

$$\mathbf{m}' = \eta(\mathbf{m} + \Pi \cdot \hat{\mathbf{x}}). \quad (7.25)$$

Eine Gleichung dieser Form wird uns noch öfters begegnen; wir schreiben sie als

$$\mathbf{m}' = \eta(\mathbf{m} + \delta) \quad (7.26)$$

mit $|\delta| \ll 1$. Ausgedrückt durch Rektaszension und Deklination ist der Einheitsvektor \mathbf{m} durch

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix}.$$

gegeben und analoges gilt für den Einheitsvektor \mathbf{m}' . Gleichung (7.26) lautet daher ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} \cos \delta' \cos \alpha' &= \eta(\cos \delta \cos \alpha + \delta_x) \\ \cos \delta' \sin \alpha' &= \eta(\cos \delta \sin \alpha + \delta_y) \\ \sin \delta' &= \eta(\sin \delta + \delta_z) \end{aligned} \quad (7.27)$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit $\cos \alpha$, die zweite mit $\sin \alpha$ und addiert beide so erhält man

$$\cos \delta' \cos \Delta\alpha = \eta(\cos \delta + \delta_x \cos \alpha + \delta_y \sin \alpha)$$

mit $\Delta\alpha = \alpha' - \alpha$. Multipliziert man dagegen die erste Gleichung mit $\sin \alpha$, die zweite mit $\cos \alpha$ und subtrahiert beide so findet man

$$-\cos \delta' \sin \Delta\alpha = \eta(\delta_x \sin \alpha - \delta_y \cos \alpha).$$

Unter Vernachlässigung von Gliedern zweiter Ordnung in $|\delta|$, also etwa $\tan \Delta\alpha \simeq \Delta\alpha$, erhält man die Relation

$$\Delta\alpha \simeq \delta_y \cos \alpha \sec \delta - \delta_x \sin \alpha \sec \delta \quad (7.28)$$

und auf analoge Art und Weise leitet man unter Verwendung der dritten Relation (7.27) die Beziehung

$$\Delta\delta \simeq \delta_z \cos \delta - \delta_y \sin \delta \sin \alpha - \delta_x \cos \alpha \sin \delta \quad (7.29)$$

ab.

Im Falle der jährlichen Parallaxe können wir noch $\delta_z = \Pi \hat{z}$ durch δ_y ausdrücken. Aus

$$\mathbf{x}_{\lambda,\beta} = \mathcal{R}_1(\epsilon) \mathbf{x}_{\alpha,\delta}$$

ergibt sich für die Bahn der Sonne um die Erde

$$z_{\lambda,\beta} = -\sin \epsilon y_{\alpha,\delta} + \cos \epsilon z_{\alpha,\delta} = 0,$$

also gilt $z_{\alpha,\delta} = \tan \epsilon y_{\alpha,\delta}$. Daher gilt im Falle der jährlichen Parallaxe

$$\delta_z = \tan \epsilon \cdot \delta_y. \quad (7.30)$$

Die Ergebnisse für $(\Delta\alpha)_P$ und $(\Delta\delta)_P$ schreibt man üblicherweise in der Form

$$\boxed{(\Delta\alpha)_P = \Pi(Yc - Xd); \quad (\Delta\delta)_P = \Pi(Yc' - Xd').} \quad (7.31)$$

Hier sind $X = \hat{x}$ und $Y = \hat{y}$ die kartesischen Komponenten des Einheitsvektors der Sonne bezüglich des Geozentrums. Die Konstanten c, c', d, d' sind die sogenannten *Sternkonstanten*:

$$\begin{aligned} c &= \cos \alpha \sec \delta, & d &= \sin \alpha \sec \delta \\ c' &= \tan \epsilon \cos \delta - \sin \alpha \sin \delta, & d' &= \cos \alpha \sin \delta. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Geozentrische Parallaxe

Abb. 7.7 zeigt die Geometrie im Falle der geozentrischen Parallaxe. Die Gleichung der geozentrischen oder täglichen Parallaxe lautet einfach:

$$\boxed{\mathbf{x}_Q = \mathbf{x}_T + \mathbf{x}'_Q.} \quad (7.33)$$

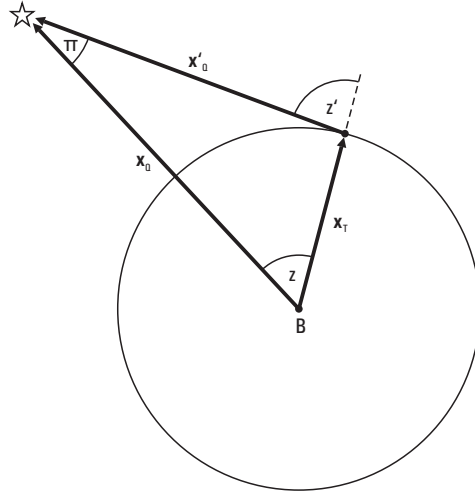


Abbildung 7.7: Geometrie im Falle der geozentrischen Parallaxe.

Hier ist jetzt \mathbf{x}_Q ein Vektor vom Geozentrum zur Lichtquelle Q , \mathbf{x}'_Q der entsprechende Vektor vom Topozentrum und \mathbf{x}_T der geozentrische Vektor des Topozentrums des Beobachters. Aus dem in Abb. 7.7 gezeigten Dreieck leitet man ab ($r = |\mathbf{x}_Q|$; $\rho = |\mathbf{x}_T|$)

$$\frac{r}{\sin(180^\circ - z')} = \frac{\rho}{\sin \pi}$$

bzw.

$$\sin \pi \simeq \pi \simeq \frac{\rho}{r} \sin z' \simeq \frac{\rho}{r'} \sin z. \quad (7.34)$$

Aus der Gleichung der geozentrischen Parallaxe ergibt sich sofort wieder unsere Grundbeziehung (7.26) mit

$$\delta \simeq -\frac{\rho}{r'} \mathbf{m}_T \simeq -\pi \operatorname{cosec} z \cdot \mathbf{m}_T, \quad (7.35)$$

wobei \mathbf{m}_T den Einheitsvektor vom Geozentrum zum Topozentrum bezeichnet. Es ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \Delta \alpha &\simeq \delta_y \cos \alpha \sec \delta - \delta_x \sin \alpha \sec \delta \\ &\simeq -\pi \operatorname{cosec} z \sec \delta (\hat{y}_T \cos \alpha - \hat{x}_T \sin \alpha) \\ &\simeq -\pi \operatorname{cosec} z \sec \delta \cos \delta_T \sin(\alpha_T - \alpha). \end{aligned}$$

Nun ist aber die Deklination des Topozentrums δ_T gleich der astronomischen Breite Φ . Die Rektaszension des Topozentrums α_T ist gleich der lokalen Sternzeit ST des Beobachters. Mit $\alpha_T - \alpha = ST - \alpha = h$ (h : Stundenwinkel) ergibt sich schließlich

$$(\Delta \alpha)_{\text{GP}} = -\pi \sin h \operatorname{cosec} z \cos \Phi \sec \delta. \quad (7.36)$$

Analog findet man

$$(\Delta \delta)_{\text{GP}} = -\pi (\sin \Phi \operatorname{cosec} z \sec \delta - \tan \delta \cot z). \quad (7.37)$$

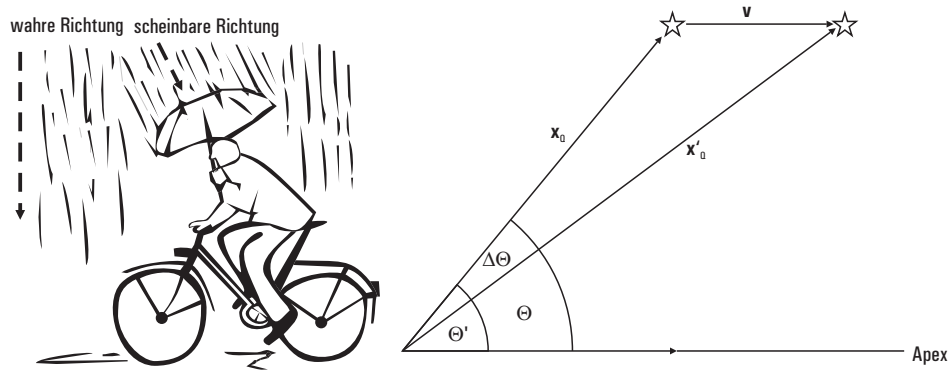


Abbildung 7.8: Zum Effekt der Aberration. Links: Illustration des Effektes am Beispiel von Regen; rechts: ein Vektordiagramm zur quasi-Newtonschen Beschreibung der Aberration.

7.5 Aberration

Die Aberration ist ein Effekt der Geschwindigkeit des Beobachters und der Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit. Folgendes Beispiel ist nützlich: steht man zunächst still und es regnet direkt von oben, so scheint der Regen von vorne zu kommen, wenn man sich dann vorwärts bewegt (Abb.(7.8a)). Abb.(7.8b) zeigt ein einfaches Vektordiagramm zur Illustration der Aberration. Der Vektor \mathbf{x}_Q weist vom ruhenden Beobachter zur Lichtquelle. Wir weisen ihm die Länge c (Lichtgeschwindigkeit im Vakuum) zu. Der Vektor \mathbf{v} bezeichnet die Geschwindigkeit des Beobachters bezüglich des ruhenden Bewegungszustandes. Dieser Vektor weist auf einen weit entfernten fiktiven Punkt: den Apex der Bewegung. Aufgrund der Aberration wird das Bild eines entfernten Körpers in Richtung auf den Apex verschoben. Addiert man im Rahmen der Newtonschen Theorie die Vektoren \mathbf{x}_Q und \mathbf{v} so erhält man den Vektor \mathbf{x}'_Q welcher für den bewegten Beobachter auf die Lichtquelle weist, also

$$\mathbf{x}'_Q = \mathbf{x}_Q + \mathbf{v} \quad (7.38)$$

bzw. ausgedrückt durch entsprechende Einheitsvektoren

$$\mathbf{m}' = \frac{\mathbf{m} + \mathbf{v}/c}{|\mathbf{m} + \mathbf{v}/c|}. \quad (7.39)$$

Sei θ der Richtungswinkel bezüglich des Apex unter dem ein Stern vom ruhenden Beobachter aus gesehen wird, θ' der entsprechende Apexwinkel für den bewegten Beobachter. Dann liefert der Sinussatz der ebenen Trigonometrie für $\Delta\theta = \theta - \theta'$

$$\frac{\sin \Delta\theta}{\sin \theta'} = \frac{v}{c}$$

oder wegen $\sin \Delta\theta \simeq \Delta\theta$; $\sin \theta' \simeq \sin \theta$

$$\Delta\theta \simeq \frac{v}{c} \cdot \sin \theta \equiv \kappa \sin \theta.$$

Die Größe $\kappa = v/c$ wird Aberrationskonstante genannt.

Gleichung (7.39) ist im Rahmen der Newtonschen Theorie korrekt, nicht jedoch im Rahmen der Relativitätstheorie. Im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie wird diese Gleichung ersetzt durch:

$$\mathbf{m}' = \frac{\gamma^{-1}\mathbf{m} + \beta + \beta(\mathbf{m} \cdot \beta)/(1 + \gamma^{-1})}{1 + \mathbf{m} \cdot \beta} \quad (7.40)$$

mit $\beta \equiv \mathbf{v}/c$ und

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (7.41)$$

Hieraus leitet man ab

$$\begin{aligned} \sin \Delta\theta &= \frac{(v/c) \sin \theta + (v/c)^2 \sin 2\theta/[2(1 + \gamma^{-1})]}{1 + (v/c) \cos \theta} \\ &= \frac{v}{c} \sin \theta - \frac{1}{4} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sin 2\theta + \dots \end{aligned} \quad (7.42)$$

7.5.1 Die jährliche Aberration

Die jährliche Aberration resultiert aus der Bewegung der Erde um die Sonne mit einer Geschwindigkeit von 30 km/s. Daraus ergibt sich dann die Konstante der jährlichen Aberration zu

$$\kappa = \frac{30\text{km/s}}{300000\text{km/s}} = 10^{-4} \text{ rad} = 20.''5.$$

Zur Berechnung der Korrekturen für Rektaszension und Deklination gehen wir von Gleichung (7.38). Teilt man diese durch die Lichtgeschwindigkeit c , so erhalten wir wieder unsere Grundgleichung (7.26) mit

$$\delta = \beta \equiv \frac{\mathbf{v}}{c}. \quad (7.43)$$

Analog wie im Fall der jährlichen Parallaxe leitet man für die Geschwindigkeit der Erde um die Sonne ab:

$$\beta_z = \tan \epsilon \cdot \beta_y. \quad (7.44)$$

Damit hat man

$$\begin{aligned} (\Delta\alpha)_A &= \beta_y \cos \alpha \sec \delta - \beta_x \sin \alpha \sec \delta \\ (\Delta\delta)_A &= \beta_y (\tan \epsilon \cos \delta - \sin \alpha \sin \delta) - \beta_x \cos \alpha \sin \delta. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Dieses Resultat schreibt man üblicherweise in der Form:

$$\boxed{(\Delta\alpha)_A = Cc + Dd, \quad (\Delta\delta)_A = Cc' + Dd'}. \quad (7.46)$$

Die Größen c, c', d, d' sind wieder die oben eingeführten Sternkonstanten, C und D heißen Besselsche Aberrations-Tagzahlen. Diese sind durch

$$C \equiv \beta_y, \quad D \equiv -\beta_x \quad (7.47)$$

gegeben. Die bisher angegebenen Relationen für $(\Delta\alpha)_A$ und $(\Delta\delta)_A$ sind korrekt zur Ordnung $(1/c)$. Inklusive quadratischer Terme in $1/c$ findet man

$$\begin{aligned}
(\Delta\alpha)_A &= \beta_y \cos \alpha \sec \delta - \beta_x \sin \alpha \sec \delta \\
&\quad + (\beta_x \sin \alpha - \beta_y \cos \alpha)(\beta_x \cos \alpha + \beta_y \sin \alpha) \sec^2 \delta + \dots \\
(\Delta\delta)_A &= -\beta_y \sin \alpha \sin \delta + \beta_z \cos \delta - \beta_x \cos \alpha \sin \delta \\
&\quad - \frac{1}{2}(\beta_x \sin \alpha - \beta_y \cos \alpha)^2 \tan \delta \\
&\quad + (\beta_x \cos \delta \cos \alpha + \beta_y \cos \delta \sin \alpha + \beta_z \sin \delta) \times \\
&\quad (\beta_x \sin \delta \cos \alpha + \beta_y \sin \delta \sin \alpha - \beta_z \cos \delta) + \dots
\end{aligned} \tag{7.48}$$

7.5.2 Die tägliche Aberration

Die tägliche Aberration resultiert aus der Rotationsgeschwindigkeit der Erde um ihre eigene Achse. Beschreibt man diese durch eine Winkelgeschwindigkeit Ω_E , so ist die Geschwindigkeit eines Beobachters am Topozentrum \mathbf{x}_T in geozentrischen Koordinaten durch

$$\mathbf{v}_T = \Omega_E \times \mathbf{x}_T \tag{7.49}$$

gegeben. Aufgrund der Erddrehung besitzt jeder erdfeste Beobachter eine daher Geschwindigkeit in ostwärtiger Richtung von

$$v = \Omega_E R \cos \Phi.$$

Hier ist Φ die Breite des Beobachters,

$$\Omega_E = \frac{2\pi}{86164} \text{ sec}^{-1}$$

und R ist die Entfernung zum Geozentrum. Die resultierende Konstante der täglichen Aberration beträgt damit

$$k = \frac{v}{c} = 0.''319 \rho \cos \Phi \tag{7.50}$$

mit $\rho = R/R_E$ und $R_E = 6378$ km. Die Korrekturen für Rektaszension und Deklination aufgrund der täglichen Aberration lassen sich wieder aus der Beziehung (7.26) mit $\delta = \beta$ ableiten. Nun ist der in die Äquatorebene projizierte (normierte) Vektor zum Topozentrum gegeben durch $\hat{\mathbf{e}} = (\cos(ST), \sin(ST), 0)^T$ und der Einheitsvektor, der hierauf senkrecht steht und in ostwärtige Richtung weist, lautet $\hat{\mathbf{e}}_{\text{ost}} = (-\sin(ST), \cos(ST), 0)^T$. Der Vektor β ist dann durch

$$\delta = \beta = \frac{\mathbf{v}_T}{c} = k \hat{\mathbf{e}}_{\text{ost}} = k (-\sin(ST), \cos(ST), 0)^T \tag{7.51}$$

gegeben. Daraus leiten wir ab:

$$\begin{aligned}
(\Delta\alpha)_{DA} &= k \sec \delta [\sin(ST) \sin \alpha + \cos(ST) \cos \alpha] = k \sec \delta \cos(ST - \alpha) \\
&= k \sec \delta \cos h.
\end{aligned}$$

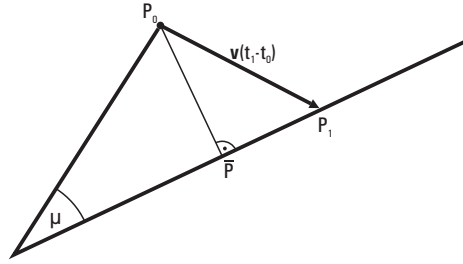


Abbildung 7.9: Zur Eigenbewegung eines Sternes

Einsetzen von k liefert dann

$$(\Delta\alpha)_{DA} = 0.''319\rho \cos \Phi \cos h \sec \delta. \quad (7.52)$$

Analog leitet man ab

$$(\Delta\delta)_{DA} = k \sin \delta \sin h$$

bzw.

$$(\Delta\delta)_{DA} = 0.''319\rho \cos \Phi \sin h \sin \delta. \quad (7.53)$$

7.6 Die Eigenbewegung der Sterne

Das Bild eines Sternes verändert seine Position auf der Himmelskugel relativ zu anderen Sternbildern aufgrund seiner Eigenbewegung, z.B. relativ zum Baryzentrum des Sonnensystems. Als Entdecker der Eigenbewegung der Sterne gilt HALLEY, welcher 1718 durch Vergleich neuerer Beobachtungen mit Angaben aus dem ALMAGEST des Ptolemäus die Eigenbewegungen der Sterne Aldebaran und Arcturus entdeckte. Ein Stern möge sich in einem baryzentrischen Koordinatensystem (Abb. 7.9) von \mathbf{P}_0 innerhalb einer Zeitspanne t_1 nach \mathbf{P}_1 bewegen, d.h.

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_0 + \mathbf{v}t_1.$$

Unter der Eigenbewegung μ versteht man den Winkel, den die Position auf der Himmelskugel während einer festen Zeitspanne (etwa ein Jahr) zurücklegt. Aus Abb. 7.9 erkennt man, dass sich diese Eigenbewegung aus der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Sehstrahl ergibt ($\mu \simeq \sin \mu = P_0P/d$).

Die Eigenbewegungen in Rektaszension und Deklination werden mit μ_α und μ_δ bezeichnet. Diese beziehen sich auf die Referenzepeche $t_0 = \text{J2000.0}$. In zeitlicher Nähe zur Referenzepeche sind dann die Korrekturen in Rektaszension und Deklination aufgrund der Eigenbewegung gegeben durch:

$$(\Delta\alpha)_{PM} = \mu_\alpha(t - t_0), \quad (\Delta\delta)_{PM} = \mu_\delta(t - t_0). \quad (7.54)$$

Kapitel 8

Präzession - Nutation

Die Präzession des Äquators resultiert aus den Drehmomenten, die Mond, Sonne und Planeten auf die "Äquatorwülste" der Erde ausüben. Die Periode beträgt dabei 25780 Jahre (das Platonische Jahr), was einer Bewegung von rund $50''$ pro Jahr entspricht. Ein anderer Effekt wird auch mit dem Begriff Präzession belegt: die Präzession der Ekliptik. Diese kommt durch die Störungen der anderen Planeten auf die Bahn der Erde um die Sonne, die Ekliptik, zustande. Durch diese Störungen schwankt die Schiefe der Ekliptik zwischen $21^{\circ}55''$ und $24^{\circ}18''$, d.h. die Amplitude dieser Schwankungen beträgt rund $17''$. Die Nutationen sind Schwankungen der Erdrotationsachse im Raum mit kürzeren Perioden. Die ganze Dynamik des Sonnensystems bildet sich hier ab. Infolge der Nutation beschreibt der wahre Himmelspol eine kleine Ellipse um den mittleren Himmelspol, der nur durch die Präzessionsbewegung gegeben ist. Diese Nutationsellipse hat eine große Halbachse von $9.''2$ und eine kleine Halbachse von $6.''9$ (Abb. 8.1).

Wir kommen nun zu einer Beschreibung der allgemeinen Präzession, die sich aus Präzession des Äquators und der Ekliptik zusammensetzt. Die Präzessionsbewegung beschreibt man am einfachsten durch die drei Winkel ζ_A , z_A und θ_A . Diese sind in Abb. 8.2 erläutert. Man betrachte zwei Koordinatensysteme, die sich auf zwei Epochen T_0 und T beziehen. Die z -Achse weise auf die jeweiligen nördlichen Himmelspole P_0 (T_0) und P (T). Die jeweiligen x,y -Ebenen sind mit \ddot{A}_0 (mittlere Äquatorebene zur Epoche T_0) und \ddot{A} (mittlere Äquatorebene zur Zeit T) bezeichnet. In der Regel werden wir von einer festen Epoche (J2000) T_0 ausgehen und auf das Datum einer Beobachtung transformieren. Die Richtungen der x -Achsen sind durch γ_0 auf \ddot{A}_0 und γ auf \ddot{A} gegeben. Wir betrachten den Großkreisbogen durch P_0 und γ_0 .

Wir drehen das Koordinatensystem zur Epoche T_0 zunächst um die z -Achse um den Winkel $-\zeta_A$. Dadurch verschiebt sich dieser Großkreisbogen und geht nun durch den Himmelspol P , er trifft \ddot{A}_0 im Punkte Q und \ddot{A} im Punkte R . Die neue x -Achse weist auf Q , die y -Achse auf S , den Schnittpunkt zwischen \ddot{A}_0 und \ddot{A} und die z -Achse weist nach wie vor auf P_0 .

Wir drehen nun um die y -Achse mit dem Winkel θ_A derart, dass \ddot{A} zur neuen x,y -Ebene wird. Die neue x -Achse weist nun auf R , die y -Achse auf S und die z -Achse auf P .

Mit Hilfe einer dritten Drehung um die z -Achse erreichen wir, dass die x -Achse

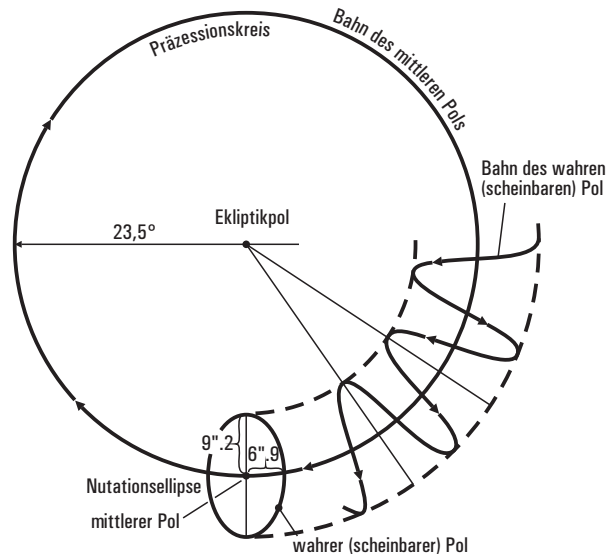


Abbildung 8.1: Zur Nutationsbewegung der Erdatmosphäre.

auf γ weist. Der Drehwinkel ist hier durch $-z_A$ gegeben.

Aus diesen drei Drehungen erkennt man die Definitionen der Drehwinkel ζ_A , z_A und θ_A . Der aufsteigende Knoten von \ddot{A} im T_0 -System heiße S . Die Rektaszension von S im T_0 -System ist dann $90^\circ - \zeta_A$. Die Rektaszension von S im T -System ist $90^\circ + z_A$ und die Inklination von \ddot{A} im T_0 -System ist θ_A .

Daraus ergibt sich, dass die Transformation von $\mathbf{x}(\alpha_0, \delta_0)$ nach $\mathbf{x}(\alpha, \delta)$ durch die Präzessionsmatrix \mathcal{P} gegeben ist:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\alpha, \delta} = \mathcal{P} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\alpha_0, \delta_0} \quad (8.1)$$

mit

$$\mathcal{P} = \mathcal{R}_3(-z_A) \mathcal{R}_2(+\theta_A) \mathcal{R}_3(-\zeta_A). \quad (8.2)$$

Die inverse Präzessionsmatrix ist z.B. durch

$$\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{R}_3(+\zeta_A) \mathcal{R}_2(-\theta_A) \mathcal{R}_3(+z_A) \quad (8.3)$$

gegeben. Ausgeschrieben lauten die Komponenten der Präzessionsmatrix:

Für die inverse Abbildung gilt

$$\begin{aligned}\sin(\alpha_0 + \zeta_A) \cos \delta_0 &= + \sin(\alpha - z_A) \cos \delta \\ \cos(\alpha_0 + \zeta_A) \cos \delta_0 &= + \cos(\alpha - z_A) \cos \theta_A \cos \delta + \sin \theta_A \sin \delta \\ \sin \delta_0 &= - \cos(\alpha - z_A) \sin \theta_A \cos \delta + \cos \theta_A \sin \delta.\end{aligned}$$

Für die Präzessionswinkel haben J.Lieske, 1979, *Astron. Astrophys.*, **73**, 282 und Lieske et al., 1977, *Astron. Astrophys.*, **58**, 1 folgende Ausdrücke angegeben

$$\begin{aligned}\zeta_A &= 2306.2181''t + 0.30188''t^2 + 0.017998''t^3, \\ z_A &= 2306.2181''t + 1.''09468t^2 + 0.018203t^3, \\ \theta_A &= 2004.''3109t - 0.''42665t^2 - 0.''041833t^3\end{aligned}\tag{8.4}$$

mit

$$t = [JD(T) - JD(J2000.0)]/36525.$$

In der Literatur werden vielfach andere Präzessionswinkel verwendet. Einige davon sind in Abb. 8.3 zu sehen:

- π_A = Winkel zwischen der T -Ekliptik und der ursprünglichen Ekliptik
- Π_A = Länge des aufsteigenden Knotens der bewegten Ekliptik in Bezug auf die ursprüngliche Ekliptik
- ϵ = Schiefe der Ekliptik
- ψ_A = „Äquatorpräzession“ = Winkel in der ursprünglichen Ekliptik vom alten Äquinoktium (Υ_0) zum dynamischen Äquator (P)
- χ_A = „Ekliptikpräzession“ = Winkel in dynamischer Äquatorebene, gezählt von ursprünglicher Ekliptik (P) zum dynamischen Äquinoktium (Υ)

Die Ausdrücke von Lieske et al. (1977) lauten:

$$\begin{aligned}\pi_A &= 47.0029''t - 0.03302''t^2 + 0.000060t^3 \\ \Pi_A &= 174^\circ 52' 34.982'' - 869.8089''t + 0.03536''t^2 \\ \psi_A &= 5038.7784''t - 1.07259''t^2 - 0.001147''t^3 \\ \chi_A &= 10.5526''t - 2.38064''t^2 - 0.001125''t^3\end{aligned}$$

Die Schiefe der Ekliptik ϵ zu einem Zeitpunkt setzt sich aus der mittleren Schiefe des Datums ϵ_A und der Nutation in der Schiefe $\Delta\epsilon$ (s. unten) zusammen.

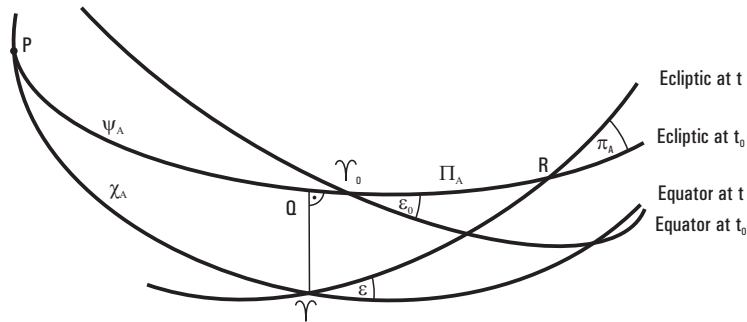


Abbildung 8.3: Weitere Präzessionswinkel.

8.1 Genäherte Behandlung der Präzession

Für kurze Zeitspannen sind die Präzessionswinkel klein und man kann verschiedene Näherungen verwenden. So kann man etwa den mittleren Äquator der festen Epoche und der dynamischen Epoche als parallel ansehen. Das gleiche trifft auf die zwei Ekliptiken zu. Dies ist in Abb. 8.4 angenommen. Hier ist es am günstigsten mit den Winkeln der Äquatorpräzession Ψ_A und der Ekliptikpräzession χ_A zu arbeiten.

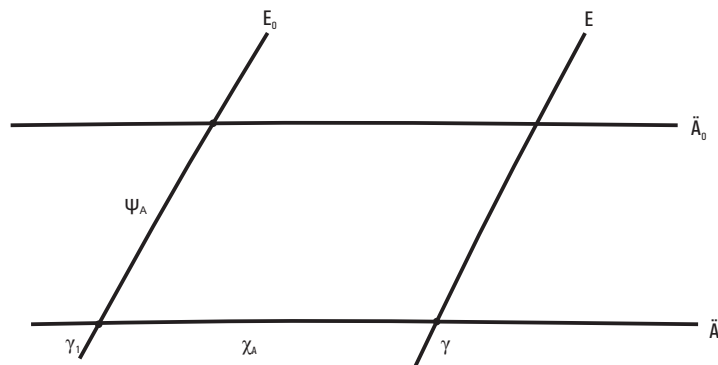


Abbildung 8.4: Zur genäherten Behandlung der Präzession mit den Winkeln ψ_A und χ_A .

Wir betrachten zunächst nur die Äquatorpräzession. Diese lässt die Ekliptik unverändert, aber verschiebt den Äquator von $\ddot{A}(T_0)$ nach $\ddot{A}(T)$. Dadurch wandert der Frühlingspunkt von γ_0 nach γ_1 in Abb. 8.4. Man erkennt, dass man den Winkel ψ_A als kleine Änderung der ekliptikalen Länge $d\lambda$ interpretieren kann. Die Änderungen der Rektaszension und Deklination, $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$, kann man dann aus den differentiellen Relationen

$$d\alpha = (\cos r \cos \beta d\lambda - \sin r d\beta - \sin \delta \cos \alpha d\epsilon) \sec \delta$$

$$d\delta = \sin r \cos \beta d\lambda + \cos r d\beta + \sin \alpha d\epsilon$$

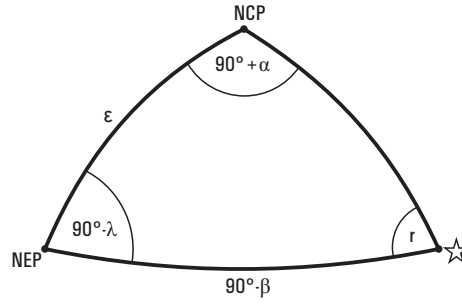


Abbildung 8.5: Zur Eliminierung des parallaktischen Winkels r .

ableiten mit

$$d\beta = d\epsilon = 0; \quad d\lambda = \psi_A.$$

Aus dem Dreieck in Abb. 8.5 ergibt sich noch:

$$\sin r \cos \beta = \sin \epsilon \cos \alpha$$

$$\cos r \cos \beta = \cos \epsilon \cos \delta + \sin \epsilon \sin \alpha \sin \delta$$

Einsetzen dieser Relationen in

$$\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0 = \psi_A \cos r \cos \beta \sec \delta$$

$$\Delta\delta = \delta - \delta_0 = \psi_A \sin r \cos \beta$$

ergibt schließlich

$$\Delta\alpha = \psi_A (\cos \epsilon + \sin \epsilon \sin \alpha \tan \delta)$$

$$\Delta\delta = \psi_A \sin \epsilon \cos \alpha.$$

Die Ekliptikpräzession verringert nur die Rektaszension um χ_A , sodass wir für die allgemeine Präzession erhalten

$$(\Delta\alpha)_{Pr} = (\psi_A \cos \epsilon - \chi_A) + \psi_A \sin \epsilon \sin \alpha \tan \delta \quad (8.5)$$

$$(\Delta\delta)_{Pr} = \psi_A \sin \epsilon \cos \alpha. \quad (8.6)$$

Für kurze Zeitspannen, kleiner als etwa ein Jahr, schreibt man dies in der Form

$$(\Delta\alpha)_{Pr} = (m + n \sin \alpha \tan \delta)(T - T_0) \quad (8.7)$$

$$(\Delta\delta)_{Pr} = n \cos \alpha (T - T_0) \quad (8.8)$$

mit

$$m \equiv \frac{d\psi_A}{dt} \cos \epsilon - \frac{d\chi_A}{dt}$$

$$n \equiv \frac{d\psi_A}{dt} \sin \epsilon.$$

8.2 Astronomische Nutation

Der dominante Beitrag zur astronomischen Nutation kommt dadurch zustande, dass die Mondbahnebene um ca. 5° gegen die Ekliptik geneigt ist. Dies führt zu periodischen Schwankungen des Himmelsäquators gegen die Ekliptik (Schiefe der Ekliptik), genannt die *Nutation in der Schiefe* und bezeichnet mit $\Delta\epsilon$.

Die astronomische Nutation kommt teilweise auch dadurch zustande, dass die Erdbahn um die Sonne und die Mondbahn um die Erde exzentrisch sind. Die führt zur *Nutation in der Länge*, bezeichnet mit $\Delta\psi$.

Definiert das rein präzedierende Koordinatensystem die "mittleren Größen", so definiert dasjenige System, welches Präzessions- und Nutationsbewegung ausführt die "wahren Größen" (wahrer Frühlingspunkt, wahrer Himmelsäquator etc.). Die Wirkung der Nutation wird durch die Nutationsmatrix \mathcal{N} beschrieben. Hat man die Präzessionsbewegung berücksichtigt, so liegen die *mittlere Ekliptik des Datums* $E(T)$ und der *mittlere Äquator des Datums* $\ddot{A}_M(T)$ als zwei Referenzebenen fest. Die Ekliptik wird bei der Nutationsbewegung nicht verändert, wohl aber die Lage des Äquators. Mit Hilfe der Nutationsmatrix gelangt man vom mittleren Äquator des Datums zum wahren Äquator des Datums. Dies ist in Abb. 14.5 dargestellt.

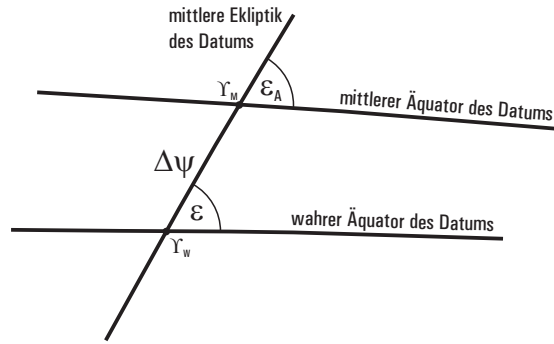


Abbildung 8.6: Die Nutationswinkel $\Delta\psi$ und $\Delta\epsilon = \epsilon - \epsilon_A$.

Die Nutation in der Schiefe ist über

$$\epsilon_W = \epsilon_A + \Delta\epsilon \quad (8.9)$$

definiert. Hierin ist

$$\epsilon_A = 23^\circ 26' 21.''448 - 46.''8150 t - 0.''00059 t^2 + 0.''001813 t^3 \quad (8.10)$$

mit $t = (JD(T) - 2451545.0)/36525$. Aus Abb. 14.5 kann man die Nutationsmatrix \mathcal{N} ablesen:

$$\mathcal{N} = \mathcal{R}_1(-\epsilon_W) \mathcal{R}_3(-\Delta\psi) \mathcal{R}_1(\epsilon_A). \quad (8.11)$$

- Eine Drehung um die x -Achse mit ϵ_A bringt die $x - y$ -Ebene vom mittleren Äquator des Datums auf die mittlere Ekliptik des Datums.

- Eine zweite Drehung um die z -Achse mit $-\Delta\psi$ dreht die x -Achse vom mittleren Äquinoktium des Datums (Υ_M) auf das wahre Äquinoktium des Datums (Υ).
- Eine letzte Drehung um die neue x -Achse mit $-\epsilon_W$ bringt die $x - y$ -Ebene in die Ebene des wahren Äquators des Datums.

Die Nutationsmatrix \mathcal{N} bewirkt den Übergang vom mittleren System des Datums \mathbf{x}_M zum wahren System des Datums \mathbf{x}_W :

$$\mathbf{x}_W = \mathcal{N} \mathbf{x}_M \quad (8.12)$$

mit

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} \cos \Delta\psi & -\sin \Delta\psi \cos \epsilon_A & -\sin \Delta\psi \sin \epsilon_A \\ \sin \Delta\psi \cos \epsilon_W & \cos \Delta\psi \cos \epsilon_W \cos \epsilon_A + \sin \epsilon_W \sin \epsilon_A & \cos \Delta\psi \cos \epsilon_W \sin \epsilon_A - \sin \epsilon_W \cos \epsilon_A \\ \sin \Delta\psi \sin \epsilon_W & \cos \Delta\psi \sin \epsilon_W \cos \epsilon_A - \cos \epsilon_W \sin \epsilon_A & \cos \Delta\psi \sin \epsilon_W \sin \epsilon_A + \cos \epsilon_W \cos \epsilon_A \end{pmatrix}$$

In einer ersten Näherung erhält man mit $\cos \Delta\psi \simeq \cos \Delta\epsilon \simeq 1$ und $\sin \Delta\psi \simeq \Delta\psi$

$$\mathcal{N} \simeq \begin{pmatrix} 1 & -\Delta\psi \cos \epsilon & -\Delta\psi \sin \epsilon \\ \Delta\psi \cos \epsilon & 1 & -\Delta\epsilon \\ \Delta\psi \sin \epsilon & \Delta\epsilon & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lage des wahren Pols im mittleren System ist dann durch $\mathcal{N}^{-1}(0,0,1)^T$, d.h. durch $(\Delta\psi \sin \epsilon, \Delta\epsilon, 1)^T$ gegeben. Setzt man hierin den Nutationsterm (s.unten) einsetzt, so erhält man die Nutationsellipse mit den Halbachsen von 9,2 und 6,7 Bogensekunden.

Oft wird die Nutation durch einen kartesischen Vektor \mathbf{N} , bzw. durch eine einzige komplexe Zahl

$$N = N_x + iN_y = \Delta\psi \sin \epsilon + i\Delta\epsilon \quad (8.13)$$

beschrieben.

Die Nutationswinkel $\Delta\psi$ und $\Delta\epsilon$ werden üblicherweise in Form von *Nutations-Reihen* angegeben. Man schreibt

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= \sum_i [(A_i + A'_i t) \sin(\text{ARG}_i) + (A''_i + A'''_i t) \cos(\text{ARG}_i)] \\ \Delta\epsilon &= \sum_i [(B_i + B'_i t) \cos(\text{ARG}_i) + (B''_i + B'''_i t) \sin(\text{ARG}_i)]. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Die Summe gibt an, dass hier eine ganze Reihe von Nutationsgliedern aufsummiert wird. Die individuellen Glieder werden mit Partialnutationen bezeichnet. Die Größen A_i, B_i, \dots sind die Nutationsamplituden, ARG_i ist das Argument oder die Phasen der Partialnutation i . Dominiert werden die Partialnutationen durch die Amplituden A_i und B_i , d.h., die dominanten Teile für $\Delta\psi$ hängen von $\sin(\text{ARG}_i)$ ab, diejenigen von $\Delta\epsilon$ von $\cos(\text{ARG}_i)$. Diese Terme werden in-phase genannt, die \cos -Terme in $\Delta\psi$ und die \sin -Terme in $\Delta\epsilon$ sind die out-of-phase Terme.

Schließlich werden die Argumente oder Phasen aus sogenannten Fundamentalwinkeln aufgebaut. Im einfachsten Fall finden die Fundamentalwinkel l, l', F, D, Ω Verwendung. Ein Argument ist dann durch

$$\text{ARG}_i = i_l l + i_{l'} l' + i_F F + i_D D + i_\Omega \Omega \quad (8.15)$$

gegeben, wobei die verschiedenen Vorfaktoren vor den Fundamentalwinkeln (i_l etc.) ganze Zahlen darstellen. Für die elementaren Fundamentalwinkel gilt zunächst:

$$\begin{aligned} l &= L - \varpi \\ l' &= L' - \varpi' \\ F &= L - \Omega \\ D &= L - L' \end{aligned}$$

mit den fundamentalen Argumenten

$$\begin{aligned} L &= \text{mittlere Laenge Mond} \\ L' &= \text{mittlere Laenge Sonne} \\ \varpi &= \text{mittlere Laenge des Mondperizentrums} \\ \varpi' &= \text{mittlere Laenge des Sonnenperizentrums} \\ \Omega &= \text{mittlere Laenge des aufsteigenden Mondknotens.} \end{aligned}$$

Damit sind l und l' gleich der mittleren Anomalie des Mondes und der Sonne. Diese Winkel sind in guter Näherung *lineare Funktionen* der Zeit. Nur bei sehr hohen Genauigkeitsansprüchen sind auch höhere Potenzen der Zeitvariable zu berücksichtigen. Für die Nutationsreihe IAU-1980 sind die Fundamentalwinkel gegeben durch

$$\begin{aligned} l &= 134^\circ 57' 46.733'' + (1325^r + 198^\circ 52' 02.633'')t + 31.310''t^2 + 0.064''t^3 \\ l' &= 357^\circ 31' 39.804'' + (99^r + 359^\circ 03' 01.224'')t - 0.577''t^2 - 0.012''t^3 \\ F &= 93^\circ 16' 18.877'' + (1342^r + 82^\circ 01' 03.137'')t - 13.257''t^2 + 0.011''t^3 \\ D &= 297^\circ 51' 01.307'' + (1236^r + 307^\circ 06' 41.328'')t - 6.891''t^2 + 0.019''t^3 \\ \Omega &= 125^\circ 02' 40.280'' - (5^r + 134^\circ 08' 10.539'')t + 7.455''t^2 + 0.008''t^3. \end{aligned} \tag{8.16}$$

Hier ist $1^r = 360^\circ = 1296000''$ und die Zeitvariable t wird hier in Julianisches Jahr-

Tabelle 8.1: Einige wichtige luni-solare in-phase Terme der Nutation.

l	l'	F	D	Ω	Periode	A_i	B_i
0	0	0	0	1	-6798.383	-17206.4161	9205.2331
0	0	2	-2	2	182.621	-1317.0906	573.0336
0	0	2	0	2	13.661	-227.6413	97.8459
0	0	0	0	2	-3399.192	207.4554	-89.7492
0	1	0	0	0	365.260	147.5877	7.3871
0	1	2	-2	2	121.749	-51.6821	22.4386
1	0	0	0	0	27.555	71.1159	-0.6750
0	0	2	0	1	13.633	-38.7298	20.0728
1	0	2	0	2	9.133	-30.1461	12.9025
0	-1	2	-2	2	365.225	21.5829	-9.5929

hunderten angegeben. Interessant sind die diesen Winkeln entsprechenden Perioden:

$$T_L = \frac{2\pi}{L} : \text{mittlere Periode eines Mondumlaufes} = 27,32 \text{ Tage}$$

$$T_{L'} = \frac{2\pi}{L'} : 1 \text{ Jahr}$$

$$T_{\varpi} = \frac{2\pi}{\varpi} : \text{mittlere Periode des Mondperigaeums} = 8,85 \text{ Jahre}$$

$$T_{\Omega} = \frac{2\pi}{\Omega} : \text{mittlere Periode des Mondknotens} = 18,61 \text{ Jahre}$$

$$T_{\varpi'} = \frac{2\pi}{\varpi'} : \text{mittlere Periode des Perihels} = 20940 \text{ Jahre}.$$

Einige wichtige luni-solaren in-phase Terme sind in Tabelle 8.1 aufgelistet. Die Periode ist hierbei in Tagen, die Amplituden in mas angegeben.

Betrachten wir zunächst die erste Partialnutation der Tabelle in der ersten Zeile. Diese beginnt mit ganzen Zahlen, den Vorfaktoren vor den Fundamentalwinkeln. Demnach ist $0 \times l + 0 \times l' + 0 \times F + 0 \times D + 1 \times \Omega = \Omega$ das Argument der ersten Partialnutation. Die Amplitude des in-phase Termes von $\Delta\psi$ ist $A_i = -17,2064161''$, diejenige von $\Delta\epsilon$ ist $B_i = 9,2052332''$. Die erste Zeile von Tabelle 8.1 liefert also

$$\Delta\psi = -17,2064161'' \sin(\Omega); \quad \Delta\epsilon = 9,2052331'' \cos(\Omega).$$

Entsprechend lautet das Argument der zweiten Partialnutation in der Tabelle $\text{ARG}_i = 2F - 2D + 2\Omega$ usw. Insgesamt sind dann die einzelnen Partialnutationen aufzusummieren um den Gesamtwert der Nutation in Länge und Schiefe zu erhalten.

Kapitel 9

Die Polbewegung

Unter Polbewegung versteht man die Bewegung des 'wahren' Himmelpoles (die instantane Rotationsachse der Erde) bezüglich eines festen Referenzpunktes auf der Erdoberfläche. Sie ist mit Schwankungen der astronomischen Breite verknüpft.

Auf die Möglichkeit einer Bewegung der Rotationsachse der Erde hat EULER 1765 erstmals hingewiesen. Sie sollte sich in Schwankungen der Polhöhe mit einer Periode von etwa 10 Monaten widerspiegeln. Der Nachweis durch Breitenbeobachtungen blieb jedoch lange erfolglos. Er gelang erst F. KÜSTNER in Berlin, aus Beobachtungen seit 1884.

Um die Küstnerschen Beobachtungen zu bestätigen, wurde 1899 der internationale Breitendienst (ILS = International Latitude Service) gegründet. Innerhalb weniger Jahre wurde die Existenz der Polbewegung bestätigt und es stellte sich heraus, dass die Bewegung *nicht* im Einklang mit der EULERSchen Theorie eines starren Kreisels ist (Euler Periode = 304 Tage). S. C. CHANDLER fand dann später, dass die Polbewegung zwei Anteile enthält:

1. eine Bewegung des Rotationspols um die Hauptträgheitsachse mit einer Periode von rund 430 Tage (Chandler Periode) und
2. eine analoge Bewegung mit einer Periode von etwa einem Jahr.

Die erste Bewegung wurde von Newcomb als Rotation eines elastischen Kreisels gedeutet. Die jährliche Bewegung kommt durch jahreszeitliche meteorologische und geophysikalische Störungen zustande. Abb. 9.1 zeigt die Polbewegung für die Jahre 2001 - 2005. Zu erkennen ist die etwa siebenjährige Spiralbewegung zwischen zwei Kreisen mit drei und neun Meter Radius als Folge der Überlagerung von Bewegungen mit einer jährlichen und einer 14-monatigen Periode. Abb. 9.2 zeigt die verschiedenen Einflüsse, welche die Polbewegung beeinflussen.

Sei \mathbf{X}_I ein Vektor im ICRS, \mathbf{X}_A ein Vektor im wahren astronomischen System einer Epoche T . Er ist durch die wahren Himmelskoordinaten (α, δ) der Epoche T definiert. Dann gilt:

$$\mathbf{X}_A = \mathcal{N}\mathcal{P} \mathbf{X}_I$$

und

$$\mathbf{X}_T = \mathcal{S} \mathbf{X}_A .$$

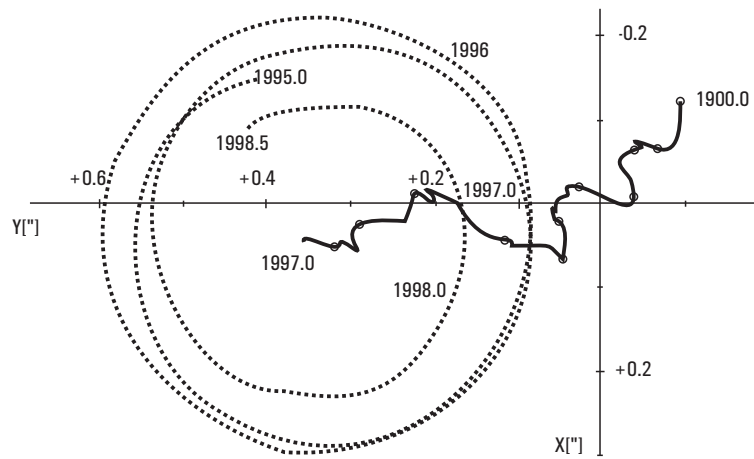


Abbildung 9.1: Die Polbewegung für die Jahre 2001 - 2005 .

Dreht man die x -Achse vom wahren Frühlingspunkt der Epoche T auf den mittleren Greenwich-Meridian, so gelangen wir zum Vektor \mathbf{X}_G :

$$\mathbf{X}_G = \mathcal{R}_3(\text{GAST}) \mathbf{X}_A .$$

Der Drehwinkel GAST ist gleich der Sternzeit von Greenwich (Greenwich Apparent Siderial Time). Mit zwei weiteren Drehungen kommen wir dann zu den Komponenten des Vektors im CTS:

$$\mathbf{X}_T = \mathcal{R}_2(-x_p) \mathcal{R}_1(-y_p) \mathbf{X}_G$$

bzw.

$$\mathbf{X}_T = \mathcal{R}_2(-x_p) \mathcal{R}_1(-y_p) \mathcal{R}_3(\text{GAST}) \mathbf{X}_A ,$$

d.h.

$$\mathcal{S} = \mathcal{R}_2(-x_p) \mathcal{R}_1(-y_p) \mathcal{R}_3(\text{GAST}) .$$

Die hier auftretenden Winkel (x_p, y_p) werden die Polkoordinaten genannt. Diese beschreiben die Position des konventionellen terrestrischen Pols (CTP).

Wir wollen uns jetzt die Polkoordinaten (x_p, y_p) etwas genauer ansehen. Der CTP stellt im gewissen Sinne einen zeitlich gemittelten Rotationspol dar. Wir schreiben

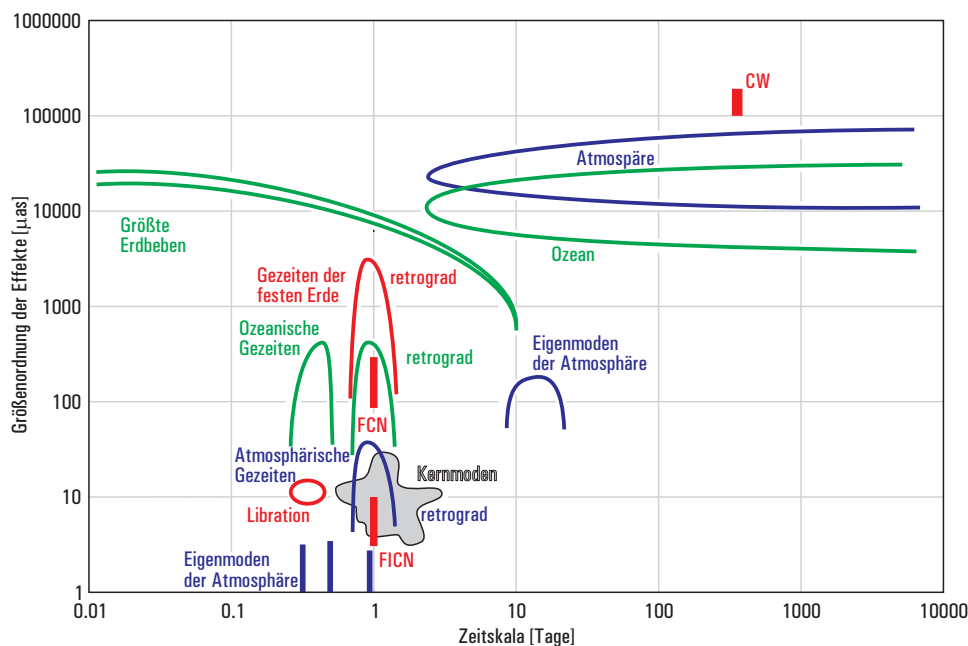


Abbildung 9.2: Verschiedene Ursachen der Polbewegung.

dafür \bar{P}_N . (x, y, z) seien kartesische Koordinaten des ITRS. Die x -Achse weise in Richtung des Greenwich Meridians ($\Lambda = 0^\circ$). Die y -Achse weise nach Westen in Richtung auf $\Lambda = 270^\circ$. Dann geben die Polkoordinaten (x_p, y_p) die Position des wahren Himmelspols P_N in Bezug auf das ITRS an (Abb. 9.3).

Man definiert ein terrestrisches (u, v, w) -System wie soeben, nur dass die v -Achse nach Osten weist, d.h. $(u, v, w) = (x, -y, z)$. Dadurch taucht in Abb. 9.4 die positive Strecke $-y_p$ auf. Die zwei Rotationsmatrizen $\mathcal{R}_1(-y_p)$ und $\mathcal{R}_2(-x_p)$ beschreiben dann den Übergang von \mathbf{X}_A mit der z -Achse in Richtung des wahren Rotationspols ins CTS mit der z -Achse in Richtung des CTP. Dies ist in Abb. 9.4 dargestellt.

Mit der ersten Drehung $\mathcal{R}_1(-y_p)$ wird die alte y -Achse auf neue y -Achse abgebildet und der Pol wandert von P_N auf P'_N . Mit einer zweiten Drehung um die neue y -Achse mit $-x_p$ gelangt man dann ins ITRS. Der Pol wandert dadurch von P'_N auf \bar{P}_N .

In Abb. 9.4 kann man die durch die Polbewegung induzierte Breitenschwankung $\Phi - \Phi_0$ gut erkennen. Aber auch Azimut und Länge ändern sich aufgrund der Polbewegung. Dies wollen wir noch quantitativ beschreiben. Seien Φ_0, Λ_0 und A_0 die beobachteten Werte für astronomische Breite, Länge und Azimut. Diese Größen beziehen sich auf das \mathbf{X}_G -System. Die Gleichung

$$\mathbf{X}_T = \mathcal{R}_2(-x_p)\mathcal{R}_1(-y_p)\mathbf{X}_G$$

lautet

$$\begin{pmatrix} \cos \Phi \cos \Lambda \\ \cos \Phi \sin \Lambda \\ \sin \Phi \end{pmatrix} = \mathcal{U} \begin{pmatrix} \cos \Phi_0 \cos \Lambda_0 \\ \cos \Phi_0 \sin \Lambda_0 \\ \sin \Phi_0 \end{pmatrix}$$

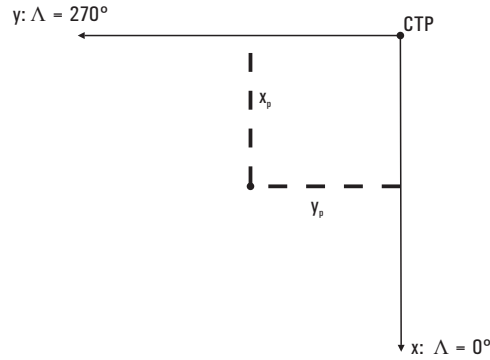


Abbildung 9.3: Zur Lage des instantanen Rotationspols in Bezug auf den CTP .

mit

$$\mathcal{U} \equiv \mathcal{R}_2(-x_p)\mathcal{R}_1(-y_p) \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_p \\ 0 & 1 & -y_p \\ -x_p & y_p & 1 \end{pmatrix}, \quad (9.1)$$

wobei wir $\cos x_p \simeq \cos y_p \simeq 1$ und $\sin x_p \simeq x_p$ etc. geschrieben haben. Ausgeschrieben lautet diese Beziehung

$$\begin{aligned} \cos \Phi \cos \Lambda &= \cos \Phi_0 \cos \Lambda_0 + x_p \sin \Phi_0 \\ \cos \Phi \sin \Lambda &= \cos \Phi_0 \sin \Lambda_0 - y_p \sin \Phi_0 \\ \sin \Phi &= -x_p \cos \Phi_0 \cos \Lambda_0 + y_p \cos \Phi_0 \sin \Lambda_0 + \sin \Phi_0. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Der Effekt der Polbewegung auf die astronomische Breite ist daher durch

$$\sin \Phi = \sin \Phi_0 + \cos \Phi_0 (y_p \sin \Lambda_0 - x_p \cos \Lambda_0) \quad (9.3)$$

gegeben. Die Taylor-Entwicklung $\sin \Phi = \sin \Phi_0 + (\Delta \Phi)_{\text{PM}} \cos \Phi_0 + \dots$ liefert zur ersten Ordnung

$$(\Delta \Phi)_{\text{PM}} = \Phi - \Phi_0 = y_p \sin \Lambda_0 - x_p \cos \Lambda_0. \quad (9.4)$$

Analog erhält man aus (9.2) in erster Ordnung

$$(\Delta \Lambda)_{\text{PM}} = \Lambda - \Lambda_0 = -(x_p \sin \Lambda_0 + y_p \cos \Lambda_0) \tan \Phi_0. \quad (9.5)$$

Der Effekt der Polbewegung auf das astronomische Azimut lässt sich aus Abb. 9.5 ablesen. Hier ist B die Beobachtungsstation, P_N der wahre Himmelspol und \overline{P}_N der CTP. Sei $(\Delta A)_{\text{PM}} = A - A_0$; aus Abb. 9.5 liest man ab:

$$\frac{\sin(-\Delta A)}{\sin d} = \frac{\sin(\theta + \Lambda)}{\sin(90^\circ - \Phi_0)}$$

oder

$$\sin(\Delta A)_{\text{PM}} = -\frac{\sin d \sin(\theta + \Lambda)}{\cos \Phi_0}$$

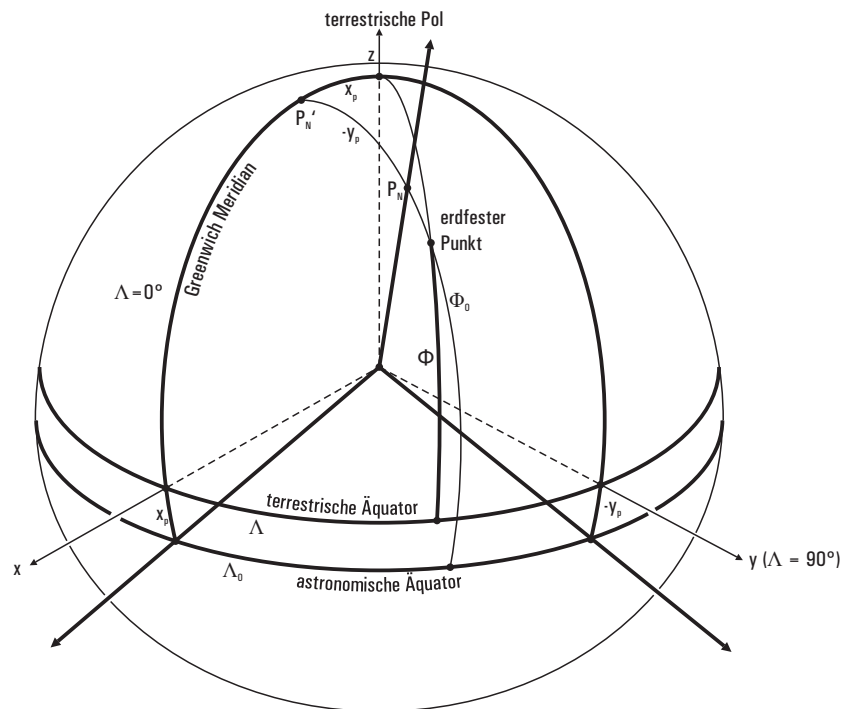


Abbildung 9.4: Terrestrische Koordinaten.

d.h.

$$(\Delta A) \simeq -d(\sin \theta \cos \Lambda + \cos \theta \sin \Lambda) \sec \Phi_0 .$$

Wegen $d \cos \theta = x_p$; $d \sin \theta = y_p$ ergibt sich schließlich

$$(\Delta A)_{PM} \simeq -(x_p \sin \Lambda + y_p \cos \Lambda) \sec \Phi_0 . \quad (9.6)$$

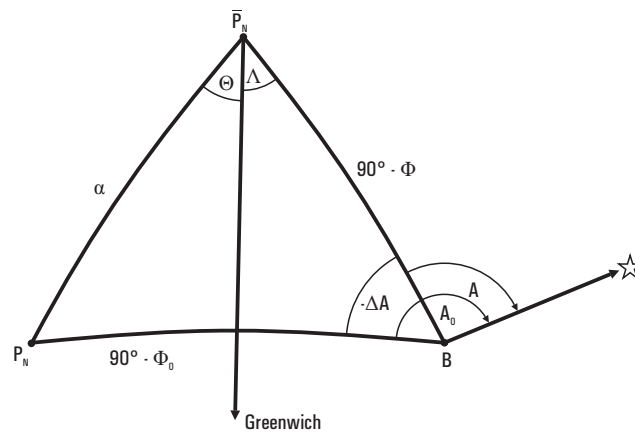


Abbildung 9.5: Einfluss der Polbewegung auf das Azimut.

Kapitel 10

Weltzeit UT, UT1 und Tageslängenschwankungen

Alle in der astronomisch-geodätischen Wissenschaft heutzutage verwendeten Zeitskalen sind von TAI abgeleitete Atom-Zeiten. Im praktischen Leben spielt jedoch die Stellung der Erde zur Sonne eine wichtige Rolle, sodass andere "Erdzeitskalen" von großem Nutzen sind. Diese Erdzeitskalen sind Winkel, welche die Stellung der Erde im Raum beschreiben.

10.1 Die Weltzeit UT

Die wahre Sonnenzeit TT_S ist definiert durch

$$TT_S = h_S + 12^h, \quad (10.1)$$

wenn h_S der lokale Stundenwinkel der wahren Sonne ist. Die 12 Stunden addiert man, damit $0^h TT$ auf Mitternacht fällt (und nicht auf den Mittag, wo die Sonne im Süden durch den Meridian geht und $h_S = 0$ gilt). Die Schiefe der Ekliptik und die Exzentrizität der Erdbahn bewirken, dass die Dauer eines TT_S -Tages im Laufe eines Jahres, gemessen mit Atomuhren, schwankt. Man definiert daher eine mittlere Sonnenzeit (MT_S) mit Hilfe einer fiktiven mittleren Sonne: ein fiktiver Punkt, der sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit längs des Äquators (nicht der Ekliptik) bewegt und die gleiche Umlaufzeit wie die wahre Sonne hat. Sei h_S^M der lokale Stundenwinkel der fiktiven mittleren Sonne. Dann ist

$$MT_S = h_S^M + 12^h. \quad (10.2)$$

Bezieht man TT_S und MT_S auf den mittleren Greenwich Meridian, so erhält man

$$GTT_S = h_S(\text{Green.}) + 12^h \quad (10.3)$$

und

$$UT = h_S^M(\text{Green.}) + 12^h. \quad (10.4)$$

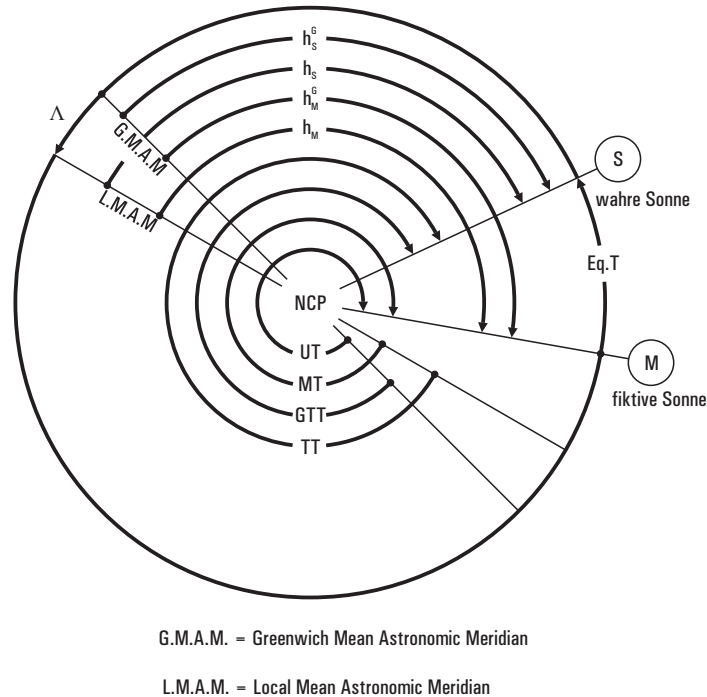


Abbildung 10.1: Geometrie der Erdzeitskalen.

Hierin ist UT die sogenannte *Weltzeit* (universal time). Es gilt

$$TT_S - GTT_S = MT_S - UT = h_S^M - h_S^G(\text{Greenw.}) = \Lambda.$$

Der Unterschied zwischen TT_S und MT_S wird *Zeit-Gleichung* (Eq.T) genannt:

$$Eq.T = TT_S - MT_S = GTT - UT = h_S - h_S^M. \quad (10.5)$$

Abb. 10.1 zeigt UT , MT_S , GTT_S und TT_S , Abb. 10.2 die Zeitgleichung (Eq.T). Trägt man die Deklination der Sonne gegen die Zeitgleichung auf, so erhält man eine Figur, welche *Analemma* genannt wird (Fig. 10.3). Man findet sie auf vielen Sonnenuhren, um von der wahren auf die mittlere Sonnenzeit schließen zu können.

10.2 UT1 und UT1-Variationen

Sowohl die siderischen Zeiten, als auch die Weltzeit werden durch Schwankungen der Erdrotationsgeschwindigkeit, aber auch durch die Polbewegung beeinflusst. Korrigiert man die Weltzeit UT für die Polbewegung, so erhält man die Zeitskala $UT1$:

$$UT1 = UT + (\Delta\Lambda)_{PM}. \quad (10.6)$$

Hauptsächlich aufgrund von atmosphärischen Störungen schwankt die Tageslänge und damit auch $UT1$ bis zu einigen Millisekunden pro Tag. Diverse Effekte, ihre Zeitskalen

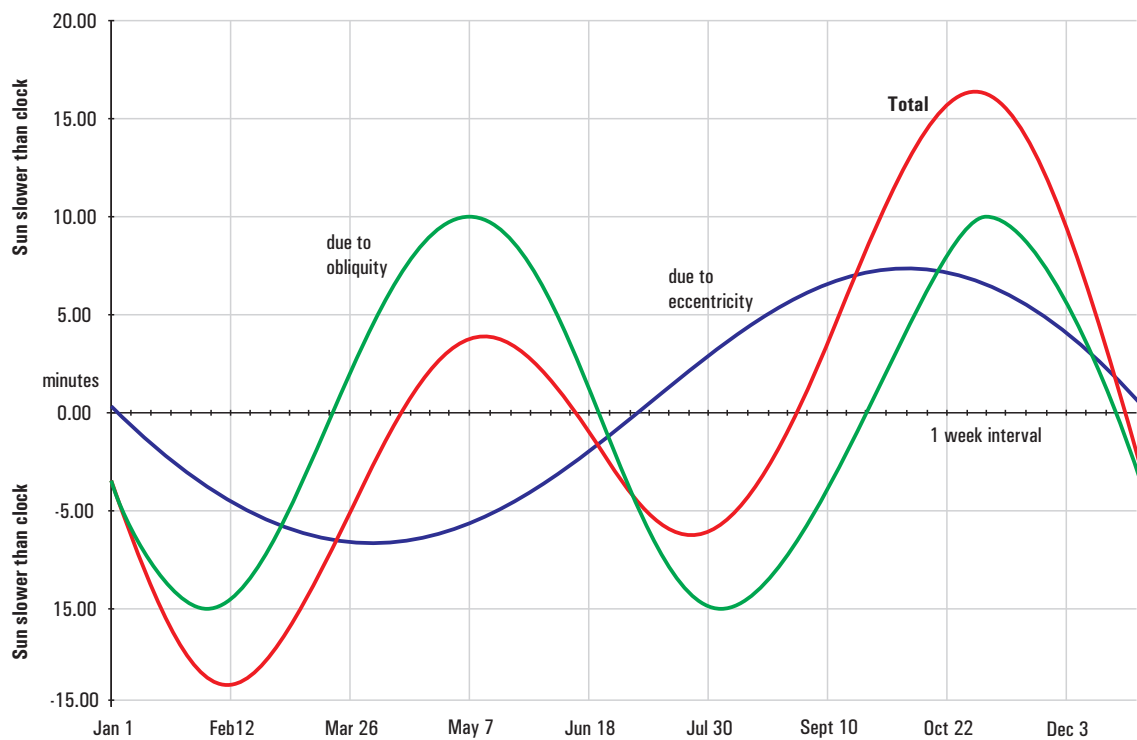


Abbildung 10.2: Einfluss Die Zeitgleichung (rot) für das Jahr 2000. Die grüne Kurve gibt den Beitrag der Ekliptikschiefe, die blaue Kurve den der Bahnexzentrizität an.

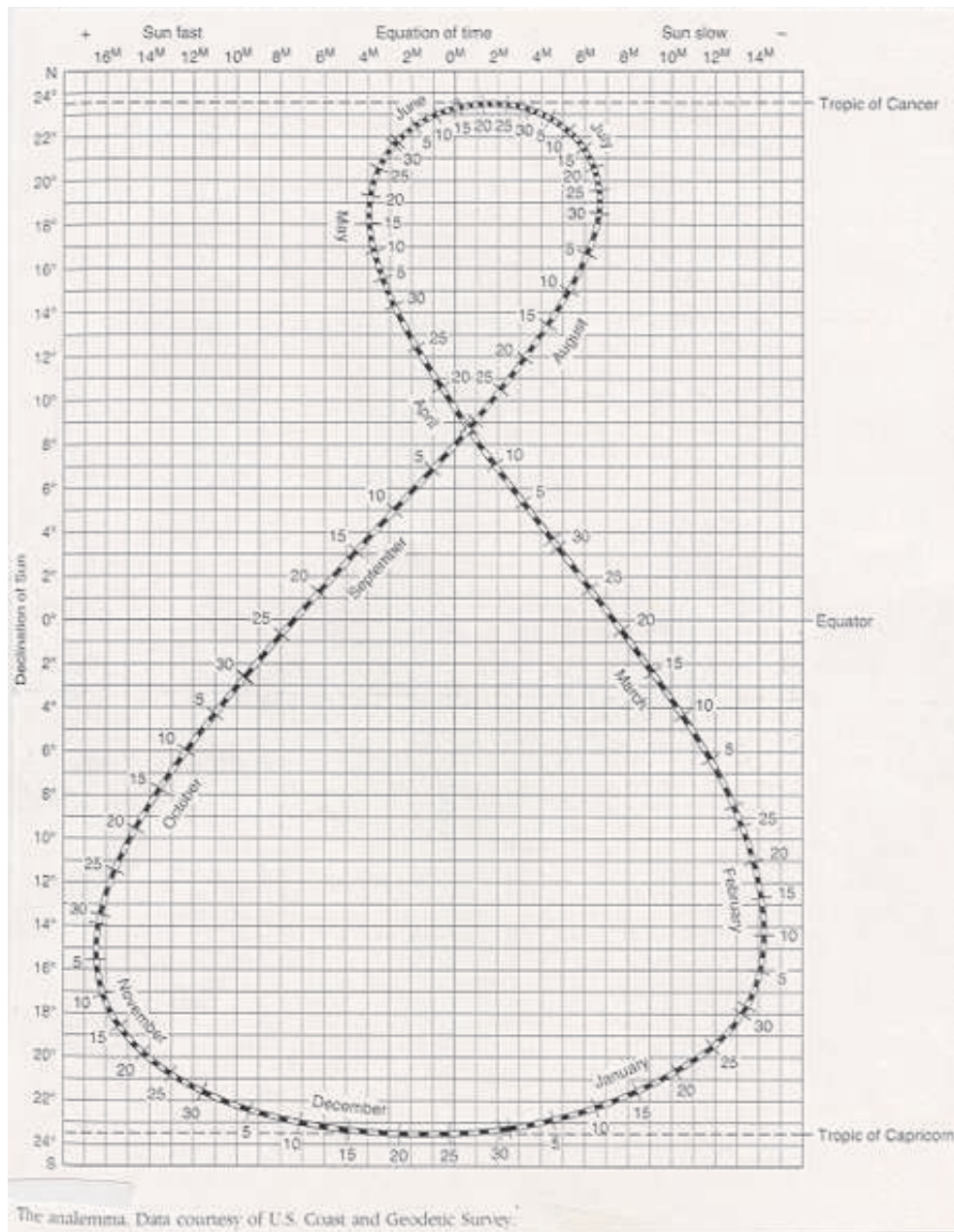


Abbildung 10.3: Das Analemma für das Jahr 2000.

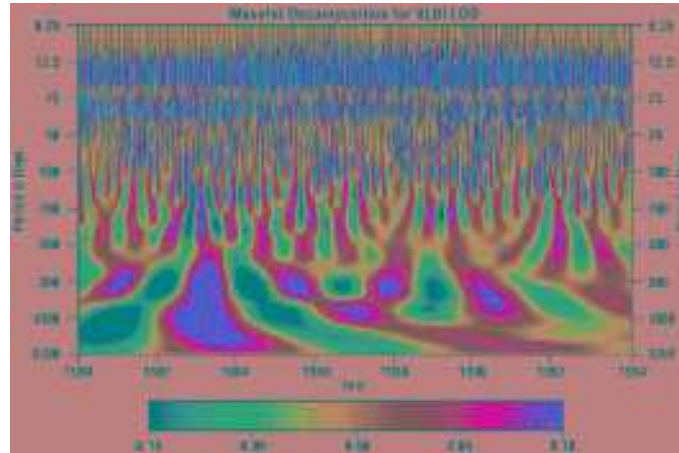


Abbildung 10.4: Wavelet Darstellung der Tageslängenschwankungen.

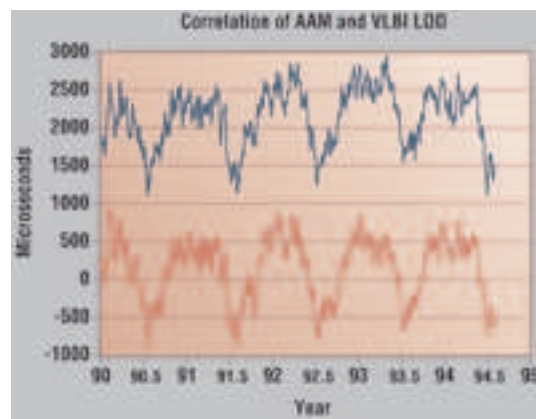


Abbildung 10.5: Korrelation der Tageslängenschwankungen mit der Drehimpuls AAM der Atmosphäre.

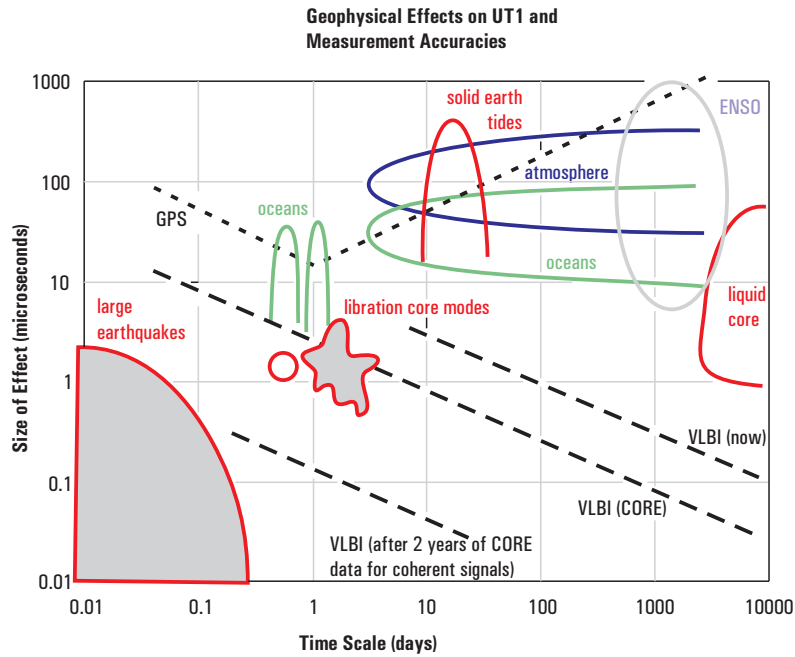


Abbildung 10.6: Geophysikalische Ursachen der Tageslängenschwankungen.

und Auswirkungen auf UT1 sowie Messgenauigkeiten sind in Abb. 10.6 zu erkennen. Die Gezeiten der festen Erde dominieren die Schwankungen für Perioden, welche etwas größer als 10 Tage sind. In einem weiten Periodenbereich dominieren die Schwankungen aufgrund des atmosphärischen Drehimpulses. Diese Korrelation ist in Abb. 10.5 dargestellt. Für Perioden größer als etwa 1000 Tagen spielt der bekannte El Nino (El Nino Southern Oscillation = ENSO) eine wichtige Rolle. Sogenannte Dekadenschwankungen resultieren vermutlich aus der Wechselwirkung zwischen Erdkern und Erdmantel. Schließlich wächst aufgrund der Gezeitenreibung die Tageslänge um 2 Millisekunden in 100 Jahren stetig an.

Kapitel 11

Terrestrisches und Celestäres Bezugssystem

11.1 Das konventionelle terrestrische Referenzsystem: ITRS

Zur Beschreibung der Erdrotation benötigt man ferner ein geeignet definiertes terrestrisches Referenzsystem (ITRS = International Terrestrial Reference System). Keine Probleme bei der Definition körperfester Achsen gäbe es im Fall einer starren Erde. Der Trägheitstensor definiert drei orthogonale Hauptträgheitsachsen, welche körperfest sind. Nun ist aber die Erde nicht starr und die Achse, welche einen terrestrischen Pol definiert, bewegt sich u.a. durch die Gezeitendeformation der Erde. Man hätte gerne einen Pol, der sich so ähnlich wie die Figurenachse einer starren Erde bewegt.

Das ITRS wird über ein Netz von Beobachtungsstationen definiert. Der Ursprung des ITRS liegt im Massenzentrum der ganzen Erde inklusive der Ozeane und der Atmosphäre. Skaleneinheit ist das Meter. Die zeitliche Entwicklung des Systems wird so festgelegt, dass keine Rotation bzgl. der Erdkruste auftritt. Die Verfahren, welche zur Realisierung des ITRS beitragen sind VLBI, SLR, GPS und DORIS.

Betrachten wir nun die Orientierung der ITRS-Achsen zu einem festen Zeitpunkt T_0 . Der Durchstoßpunkt der ITRS z -Achse auf der Himmelskugel wird auch *konventioneller terrestrischer Pol* (conventional terrestrial pole = CTP) genannt. Gemäß einer Resolution der IUGG aus dem Jahre 1960 soll der mittlere terrestrische Pol dem mittleren Rotationspol aus den Jahren 1900 - 1905 entsprechen. Dieser CTP wird dann auch CIO (conventional international origin) genannt. In der Vergangenheit wurde der CIO dadurch realisiert, dass man 5 Stationen des internationalen Breitendienstes (ILS) feste Längen- und Breitenwerte zuwies (s. Tabelle 15.1).

Nun spielen aufgrund des Einsatzes moderner Messtechniken (VLBI, GPS, SLR, DORIS) ganz andere Stationen eine zentrale Rolle. Jedes Jahr wird mit Hilfe der modernen Methoden eine Realisierung des ITRS vorgenommen und man redet vom ITRF92, ITRF99 usw. Jede Realisierung hat dabei ihr eigenes System von Koordinatenachsen. Man hat nur festgelegt, dass die Pole innerhalb rund 5 mas Abstand zum CIO liegen sollen. Dies bedeutet, dass verschiedene Realisierungen des ITRS sich bei

Station	Länge	Breite
Carloforte, Italy	8°18'44"	39°08'08."941
Gaithersburg, Maryland	-77°11'57"	39°08'13."202
Kitab, USSR	66°52'51"	39°08'01."850
Mizusawa, Japan	141°07'51"	39°08'03."602
Ukiah, California	-123°12'35"	39°08'12."096

Tabelle 11.1: Realisierung des CIO durch feste Längen- und Breitenwerte von 5 Stationen des ILS

einer festen Epoche durch 7 Relativ-Parameter unterscheiden. Dies sind

- 3 Translationsparameter (T_1, T_2, T_3) ,
- 3 Rotationsparameter (R_1, R_2, R_3) , sowie
- 1 Parameter der Skalenänderung (D) .

Der Zusammenhang zweier Realisierungen ist dann durch

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D & -R_3 & R_2 \\ R_3 & D & -R_1 \\ -R_2 & R_1 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

gegeben. Die verschiedenen Transformationsparameter kann man den Publikationen des IERS entnehmen.

Die zeitliche Entwicklung des ITRF wird durch die Auswahl eines bestimmten kinematischen Plattenmodells definiert. Dies ist gegenwärtig noch das NUVEL-1A Modell. Das NUVEL-1A Modell als geophysikalisches Modell der Plattentektonik beschreibt die Horizontalbewegungen von 12 starren Kugelkappen (keine Vertikalbewegungen). Die zeitliche Entwicklung des ITRF ist durch eine Bedingung der Form

$$\sum_{i=1}^N [(d\mathbf{X}_i/dt)_{\text{beob.}} - (d\mathbf{X}_i/dt)_{\text{NUVEL}}]^2 = \text{Min.} \quad (11.1)$$

festgelegt. Das NUVEL-1 Modell hat entscheidende Nachteile: sämtliche Daten stammen von Plattenrändern, die Meeresbodenausbreitung wurde über lange Zeiträume extrapoliert etc. Vermutlich wird es bald durch ein besseres, geodätisch bestimmtes Plattenmodell abgelöst. Ein solches ist etwa das APKIM 8.8 Modell, welches auf VLBI, SLR und GPS Daten basiert.

11.2 Das klassische celestäre Referenzsystem

Das klassische celestäre Referenzsystem mit Äquinoktium basierenden räumlichen Koordinaten wird durch Sternkataloge realisiert. Bis zur Einführung des ICRS (s.Kap.12) war der Fundamentalkatalog FK5 Basis eines solchen Referenzsystems.

Der erste Sternkatalog, der auf Teleskopbeobachtungen basierte, wurde vermutlich von John Flamsteed, einem englischen Astronomen, zusammengestellt. Dieser wurde nach Flamsteeds Tod im Jahre 1726 abgedruckt. Danach wurden für die verschiedensten Zwecke Sternkataloge erstellt. Das Centre de Données astronomique de Strasbourg (CDS) (<http://cdsweb.u-strasbg.fr/cats/cats.html>) verwaltet eine sehr große Zahl astronomischer Kataloge. Wir wollen uns hier nur für die astrometrischen Kataloge interessieren, von denen wir 209 verschiedene beim CDS aufgelistet finden, die auch per Internet abgerufen werden können. Eine Auswahl davon ist in Tab. 11.2 zusammengestellt. Die *HIPPARCOS* und *Tycho* Kataloge haben wir bereits diskutiert. Weitere sollen hier kurz vorgestellt werden.

Name of the catalog	Date	Approximate number of stars	precision of position (arcsec)	precision of proper motions (arcsec per year)	maximal stellar magnitude	average star density per square degree
Fk4	1964	1 500	0.05	0.003	6	1/27
SAO	1966	260 000	1.50	--	9	6.3
AGK3	1975	183 000	0.21	0.010	9	8.8
Fk5	1988	1 500	0.05	0.002	6	1/27
Fk5 Sup	1991	3 000	0.08	0.003	9	1/8.5
IRS	1990	36 000	0.22	0.005	9	0.9
ACRS	1992	320 000	0.22	0.006	8	10.5
PPM	1991	380 000	0.29	0.006	9	11
GSC 1.0	1988	20 000 000	1.50	--	16	500
GSC 1.1	1992	20 000 000	0.70	--	16	500
GSC 1.2	1996	20 000 000	0.40	--	16	500
Ac2000	1996	4 600 000	0.30	--	13	115 3
Hipparcos	1997	118 000	0.001	0.001	12	
Tycho	1997	1 058 000	0.025	--	12	25
ACT RS	1997	988 758	0.025	0.003	13	25
USNO-A1.0	1997	488 000 000	0.25	--	24	25000

Tabelle 11.2: Eine Zusammenstellung der wichtigen astrometrischen Kataloge .

11.2.1 Die Fundamentalkataloge FK3, FK4 und FK5

Über einen langen Zeitraum hinweg wurde das klassische astronomische celestäre Referenzsystem durch die sogenannten Fundamentalkataloge FK3, FK4 und FK5 gegeben. Da man zur genauen Bestimmung der Eigenbewegungen mehrere Beobachtungen aus weit auseinanderliegenden Epochen benötigt, sind solche Fundamentalkataloge durch geeignete Zusammenfassung verschiedener einzelner Beobachtungskataloge entstanden.

1938 empfahl die Internationale Astronomische Union (IAU) die Annahme des Fundamentalkataloges FK3, welcher 1950.0 Koordinaten und Eigenbewegungen von 1535 Basissternen enthält.

Der 1964 angenommene FK4 enthält B1950.0 Koordinaten und Eigenbewegungen

der FK4 Sterne, sowie von 1987 weiteren. Die meisten der Sterne sind heller als 7.0 mag. Die CDS-Version des FK4 enthält sieben Datenfiles, sechs für verschiedene Äquinoktien (1950, 1955, 1860, 1965, 1970, 1975) und eines für die Zusatzsterne.

Der 1988 gedruckte FK5 enthält gegenüber dem FK4 verbesserte Koordinaten und Eigenbewegungen der 1535 klassischen, sowie von 3117 weiteren Fundamentalsternen. Die Maschinenversion des FK5 enthält Werte für Epoche und Äquinoktium J2000.0 und B1950.0. Der FK5 wurde aus rund 300 Einzelkatalogen zusammengestellt.

Der FK5 weist in Hinblick auf gegenwärtig erzielbare Positionsgenauigkeiten (z.B. mit Hilfe von *HIPPARCOS*) relativ große systematische Fehler auf. Diese werden auf etwa $0.03'' - 0.1''$ geschätzt.

11.2.2 Der PPM-Katalog

Eine Erweiterung des FK5 in Hinblick auf eine größere Zahl von Sternen ist im PPM-Katalog zu sehen (PPM: positions and proper motions). Der Katalog PPM-Nord liefert J2000 Positionen und Eigenbewegungen von 181731 Sternen nördlich von -2.5° Deklination. Der mittlere Fehler in den Positionen wird mit $0.27''$, in den Eigenbewegungen mit $0.43''/\text{Jhd.}$ angegeben. PPM-Süd enthält Positionen und Eigenbewegungen von 197179 Sternen südlich von -2.5 Grad Deklination. Darüber hinaus existiert eine Supplement-Katalog von 90000 Sternen. Die Idee des PPM-Kataloges war die Realisierung des IAU 1976 Himmelsreferenzsystems mit einem hinreichend dichten und genauen Sternenkatalog.

11.2.3 GSC

Der Guide Star Catalogue (GSC) wurde aufgrund der operationellen Bedürfnisse des Hubble Space Telescopes geschaffen. Er basiert primär auf einer Sammlung von Schmidt Platten zu einer Epoche. Er enthält Positionen und Helligkeiten von mehr als 15 Millionen Sternen, dagegen keine Eigenbewegungen. Vom GSC sind mehrere Versionen erschienen.

11.2.4 USNO-A2.0

Der USNO-A2.0 Katalog enthält die Positionen von 526 280 881 Sternen und stellt damit den derzeit größten Sternkatalog dar. Er unterscheidet sich von der Vorgängerversion USNO-A1.0 dadurch, dass er, wie der *HIPPARCOS*-Katalog auch, als optische Realisierung des ICRF angesehen werden kann. Hier tritt ein weitere Katalog, der ACT Referenzkatalog, mit direkten Anbindungen an *HIPPARCOS*- oder Tycho-Sternen, als Bindeglied auf (der USNO-A1.0 wurde noch an das durch den GSC realisierte System angebunden). In der Praxis hat man oft das Problem, dass die meisten der hier angegebenen Sterne nur sehr geringe Helligkeit aufweisen. Ein weiteres ist das Fehlen von Eigenbewegungen.

Kapitel 12

Das konventionelle Himmels-Referenzsystem: ICRS

Früher dienten genaue Sternkataloge (die Fundamentalkataloge (FK3, FK4, FK5) der Realisierung eines quasi-inertialen astronomischen Referenzsystems. Nun übertreffen die mit VLBI erzielbaren Genauigkeiten bei der Bestimmung von Relativpositionen entfernter astronomischer Objekte diejenigen, die mit optischen Methoden gegenwärtig erreichbar sind. Ferner kann die VLBI Quasare beobachten, deren Entfernung extrem groß ist (Millionen bis Milliarden von Lichtjahren) und die Eigenbewegungen entsprechend klein sind. Während der Generalversammlung der IAU im August 1997 wurde beschlossen, dass ab 1.1.1998 das astronomische Referenzsystem durch das ICRS gegeben ist. Das internationale Himmels-Referenzsystem (ICRS = International Celestial Reference System) wird dabei realisiert durch einen Radio-Katalog von Positionen extragalaktischer Objekte, den ICRF-Katalog, festgelegt. Dieser enthält die Positionen ausgewählter extragalaktischer Radioquellen, welche eingeteilt werden in:

- definierende Quellen
- Kandidatenquellen und
- andere Quellen

Zu den Radioquellen des ICRF zählen Quasare, BL Lac Objekte und einige aktive galaktische Kerne (AGN). Zur Zeit enthält der ICRF-Katalog die Positionen von insgesamt 608 galaktischen Radioquellen, welche aus etwa 1,6 Millionen VLBI Daten abgeleitet wurden. Davon sind 212 definierende Quellen, 294 Kandidatenquellen und 102 weitere Quellen, welche im wesentlichen der Verdichtung des Quellennetzes dienen. Die definierenden Quellen sind dabei besonders sorgfältig ausgewählt worden und müssen eine ganze Reihe von Bedingungen erfüllen: der formale Positionsfehler muss kleiner als 1 mas sein, es müssen mehr als 20 Beobachtungen verteilt über eine Zeitspanne von mehr als 2 Jahren vorliegen, die intrinsische Struktur muss klein sein und es darf keine

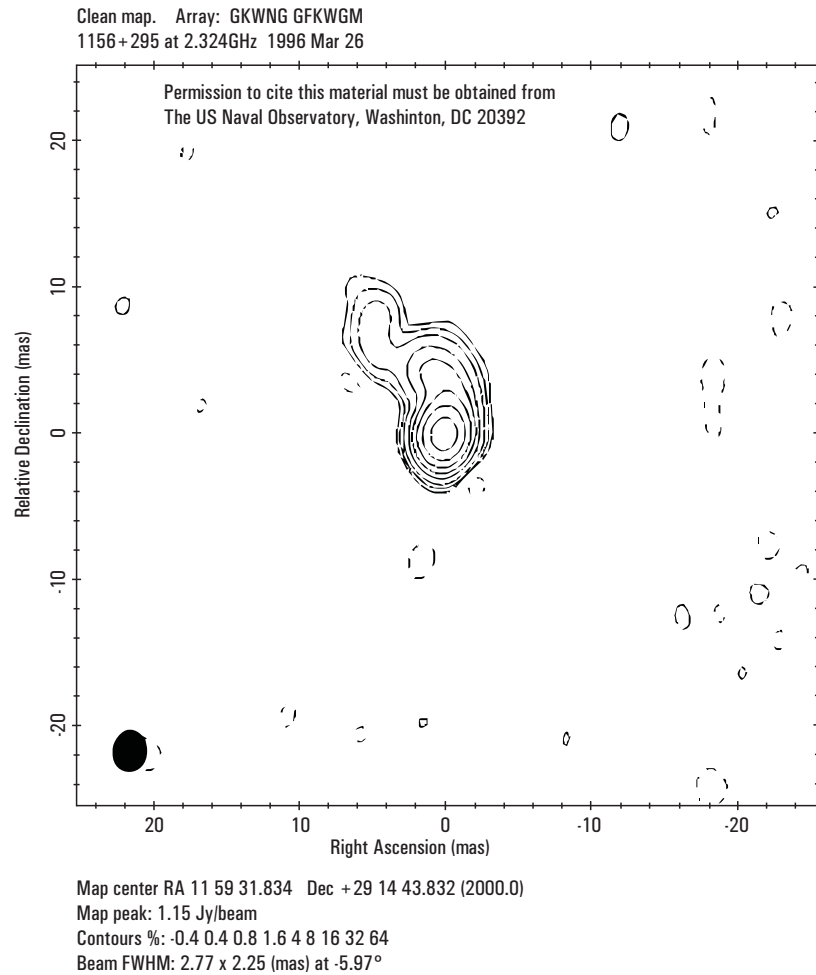


Abbildung 12.1: Isophotonlinien des Quasars 1156+295 bei einer Frequenz von 2.324 GHz (S-Band). Die Einheiten von Rektaszension auf der x -Achse und der Deklination auf der y -Achse sind Millibogensekunden (mas). Räumliche Strukturen von einigen mas Ausdehnung sind deutlich zu erkennen.

signifikante Eigenbewegung vorliegen. Interessant ist beispielsweise die Frage der intrinsischen Struktur. Die meisten Quasare weisen Strukturelemente von einigen *mas* Ausdehnung auf, wobei die Strukturen stark von der Radiofrequenz abhängen können. In Abb. 12.1 sind Isophotenzlinien (Linien gleicher Radiointensität) des Quasars 1156+295 bei einer Frequenz von 2.324 GHz (S-Band) zu sehen. Die Einheiten von Rektaszension auf der *x*-Achse und der Deklination auf der *y*-Achse sind Millibogensekunden (*mas*). In Hinblick auf das ICRF wird die intrinsische Struktur eines Quasars durch einen frequenzabhängigen Strukturindex angegeben. Der Strukturindex 1 impliziert ausgezeichnete astrometrische Qualität und punktförmige Struktur. Bei einem Index von 2 können klare Strukturen aufgelöst werden, die astrometrische Qualität ist aber immer noch gut. Definierende Quellen haben alle einen Strukturindex von 1 oder 2.

12.1 Orientierung des ICRS

Von besonderem Interesse ist die Lage der durch den ICRF-Katalog definierten *x*, *y*- und *z*-Achsen. Diese sind prinzipiell unabhängig von der Orientierung der Erde im Raum, d.h. unabhängig von Lage des Himmelsäquators und Äquinoktium im Raum, was eine Revolution im Bereich astronomischer Referenzsysteme darstellt. Ursprung des ICRS ist das Baryzentrum des Sonnensystems. Der Pol des ICRS wurde in Hinblick auf die IAU Modelle der Präzession und Nutation gewählt und der Ursprung der Rektaszension wurde implizit dadurch festgelegt, dass man die Rektaszension des Quasars 3C 273B festgelegt hat (durch den FK5-Wert bezogen auf die Epoche J2000.0). Dadurch haben die Größen Himmelsäquator und Äquinoktium (Frühlingspunkt) ihre klassische Bedeutung für die Konstruktion astronomischer Referenzsysteme verloren. Die Orientierung des ICRS ist konventionell geworden. Liegen verschiedene Realisierungen des ICRS in Form verschiedener ICRF-Kataloge vor, so muss die relative Orientierung der verschiedenen Bezugsrahmen festgestellt und angegeben werden. Um den Zusammenhang mit den Äquinoktium-basierenden klassischen celestären Koordinaten angeben zu können benötigt man die Lage des mittleren Pols J2000.0 im ICRS. Diese wird sich später im *Frame Bias* wiederfinden. Analysen von LLR Beobachtungen zeigen, dass der Ursprung des mittleren Äquinoktiums J2000.0 eine Rektaszension von -14.6 ± 0.1 mas im ICRS aufweist (McCarthy & Petit 2003).

12.2 Realisierung des ICRF in anderen Wellenlängenbereichen

Das durch den *HIPPARCOS* Katalog realisierte *HIPPARCOS*-System wurde astrometrisch gemäß des ICRF innerhalb von ± 0.6 mas für eine Epoche von 1991.25 ausgerichtet. Die Rotationsgeschwindigkeit beider Systeme gegeneinander beträgt weniger als ± 0.25 mas/Jahr. In diesem Sinne stellt das *HIPPARCOS*-System eine Realisierung des ICRS im optischen Bereich dar.

Wie bereits weiter oben erwähnt umfasst der *HIPPARCOS*-Katalog rund 118000 Sterne, deren Positionen auf eine Millibogensekunde genau, mit Hilfe des *HIPPARCOS* Satelliten, bestimmt wurden. Die Grenzgröße liegt bei $V = 12.4$ mag; er ist

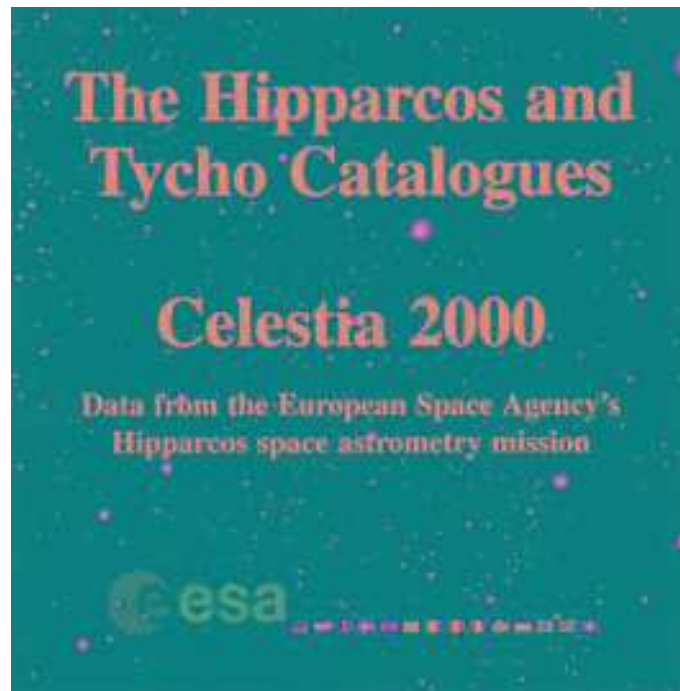


Abbildung 12.2: Titelblatt von CELESTIA 2000, einem CD-ROM Paket mit dem *HIPPARCOS*- und dem Tycho-Katalog.

komplett bis $V = 7.3 - 9.0$ mag. Eigenbewegungen der Sterne sind mit einer Genauigkeit von etwa 1-2 mas/Jahr angegeben. Der Tycho-Katalog enthält rund eine Million Sternpositionen mit einer Genauigkeit von rund 25 mas. Die wesentlichen Teile des *HIPPARCOS*- und des Tycho-Kataloges sind auf einem CD-ROM Paket mit dem Namen Celestia 2000 (unter <http://astro.estec.esa.nl/Hipparcos/CELESTIA/celestia-pr.html>; s. Abb. 12.2) erhältlich.

Das Problem Räumlicher Koordinaten

Teil II: Neue Paradigmen

Kapitel 13

BCRS und GCRS

13.1 BCRS

Bei den heute erreichbaren Genauigkeiten der geodätischen Raumverfahren, der interplanetaren Navigation und der Astrometrie kann sich die Anwendung der Relativitätstheorie nicht nur auf die baryzentrischen und geozentrischen Zeitskalen beschränken, sondern muss auch die Beschreibung geeigneter räumlicher Koordinaten betreffen. Aus diesem Grunde muss zwischen dem Baryzentrischen Celestären Referenzsystem (BCRS = Barycentric Celestial Reference System) mit Koordinaten $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$ und dem Geozentrischen Celestären Referenzsystem (GCRS = Geocentric Celestial Reference System) mit Koordinaten $X^\alpha = (cT, \mathbf{X})$ unterschieden werden. Im Rahmen der *Newtonschen Näherung* sind beide Referenzsysteme durch die trivialen Relationen $T = t$ und $\mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{z}_E(t)$ miteinander verknüpft, wobei \mathbf{z}_E die baryzentrische Position des Geozentrums bezeichnet. Diese Relationen suggerieren, dass der Unterschied zwischen einem baryzentrischen und einem geozentrischen Quasi-Inertialsystem lediglich in der Wahl des Ursprungs besteht. Diese Situation ändert sich jedoch im Rahmen der Relativitätstheorie drastisch. Werden alle gravitativen Felder vernachlässigt, so hängen diese zwei Inertialsysteme über eine Lorentz-Transformation (3.9), d.h. einer nichttrivialen Transformation von Zeit- und Raumvariablen, miteinander zusammen.

Eine präzise Definition des BCRS liefert die IAU2000 Resolution B1.3 über die Form des baryzentrischen metrischen Fundamentaltensors. Diese Resolution empfiehlt den metrischen Tensor des BCRS in folgender Form zu schreiben (die Indizes i und j sind Raumindizes und nehmen nur die Werte 1,2,3 an)

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 + \frac{2w}{c^2} - \frac{2w^2}{c^4} + \mathcal{O}(c^{-5}), \\ g_{0i} &= -\frac{4}{c^3}w^i + \mathcal{O}(c^{-5}) \\ g_{ij} &= \delta_{ij} \left(1 + \frac{2}{c^2}w \right) + \mathcal{O}(c^{-4}). \end{aligned} \tag{13.1}$$

Man sieht, dass der baryzentrische Fundamentaltensor vollständig durch zwei Potentiale festgelegt wird, einem skalaren Potenzial w und einem Vektorpotenzial w^i . Ohne

diese beiden Potentiale reduziert sich der Fundamentaltensor auf denjenigen der Speziellen Relativitätstheorie (3.5). Der wichtigste gravitative Term ist der w/c^2 -Term in g_{00} , den wir bereits bei der Diskussion der gravitativen Rotverschiebung kennengelernt haben. Dies impliziert, dass im Newtonschen Grenzfall das Potenzial w in das Newton'sche Gravitationspotenzial U übergeht, d.h., das skalare Potenzial w (auch gravito-elektrisches Potenzial genannt) stellt eine relativistische Verallgemeinerung des Newton'schen Gravitationspotenzials U dar. Die Feldgleichung für w lautet

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right)w = -4\pi G\sigma + \mathcal{O}(c^{-4}), \quad (13.2)$$

wobei σ die gravitative Massendichte darstellt. Ohne die zweite Zeitableitung auf der linken Seite reduziert sich diese Gleichung auf die Poisson-Gleichung der Newtonschen Gravitationstheorie.

In der Newtonschen Theorie taucht kein Analogon des gravito-magnetischen Potentials w^i auf. Dieses beschreibt die Wirkung bewegter Massen in Analogie zu den Strömen der Elektrodynamik. Die entsprechende Feldgleichung lautet

$$\Delta w^i = -4\pi G\sigma^i + \mathcal{O}(c^{-2}), \quad (13.3)$$

wobei σ^i die Massenstromdichte bezeichnet.

Bei der IAU2000 Definition des BCRS werden lediglich Massen und Massenströme des Sonnensystems in Betracht gezogen und alle anderen Massen in Form von Sternen oder Galaxien oder dunkle Materie oder Energie vernachlässigt. Damit kann man die gravitativen Potentiale weit weg vom Sonnensystem vernachlässigen und fordern

$$\lim_{r \rightarrow \infty} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1). \quad (13.4)$$

Die empfohlene Lösung welche diese Randbedingung erfüllt lautet:

$$\begin{aligned} w(t, \mathbf{x}) &= G \int d^3x' \frac{\sigma(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{1}{2c^2} G \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int d^3x' \sigma(t, \mathbf{x}') |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \\ w^i(t, \mathbf{x}) &= G \int d^3x' \frac{\sigma^i(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \end{aligned} \quad (13.5)$$

Für ein System von (relativistischen) Massenmonopolen M_A lauten diese baryzentrischen metrischen Potentiale

$$w = \sum_A w_A; \quad w^i = \sum_A w_A^i \quad (13.6)$$

mit ($r_{BA} \equiv |\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A|$; $\mathbf{a}_A \equiv d\mathbf{v}_A/dt$)

$$w_A(t, \mathbf{x}) = \frac{GM_A}{r_A} \left[1 + 2\frac{v_A^2}{c^2} - \frac{1}{c^2} \sum_{B \neq A} \frac{GM_B}{r_{BA}} - \frac{1}{2c^2} \left(\frac{(\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{v}_A)^2}{r_A^2} + \mathbf{r}_A \cdot \mathbf{a}_A \right) \right] \quad (13.7)$$

und

$$w_A^i(t, \mathbf{x}) = \frac{GM_A}{r_A} v_A^i. \quad (13.8)$$

Schließlich möchten wir noch bemerken, dass die IAU2000 Resolutionen die Orientierung der räumlichen BCRS Koordinaten in unserem Kosmos nicht festlegen. Es besteht jedoch eine Übereinkunft, dass diese Orientierung durch das ICRS (s. unten) festgelegt wird.

13.1.1 Bewegungsgleichungen astronomischer Körper*

In Kapitel 3.3 haben wir zwei bedeutende Eigenschaften des metrischen Fundamentaltensors $g_{\mu\nu}$ angesprochen: Er beschreibt die Ausbreitung von Lichtstrahlen als Nullgeodäten, sowie die Gangrate einer idealierten Uhr. Darüber hinaus kann man aus ihr die Bewegungsgleichungen astronomischer Körper ableiten. Diese folgen als zeitartige Geodäten aus dem metrischen Fundamentaltensor. Die Differenzialgleichungen einer Geodäten folgen am Einfachsten aus einem Variationsprinzip, welches die Länge der Geodäten zwischen zwei festen Punkten stationär (Maximum oder Minimum) werden läßt. Eine differenzierbare Kurve beschreiben wir durch eine Funktion $x^\mu(\lambda)$, wobei λ Kurvenparameter genannt wird. Eine Kurve $x^\mu(\lambda)$, welche die Punkte P_1 und P_2 verbindet, heißt *Geodäte*, falls

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) d\lambda = 0. \quad (13.9)$$

Dies ist so zu verstehen: Sei $x_G^\mu(\lambda)$ die gesuchte Geodäte. Dann betrachtet man kleine Variationen dieser Kurve, d.h. Kurven der Form $x_G^\mu(\lambda) + \delta x^\mu(\lambda)$ mit festgehaltenen Endpunkten:

$$\delta x^\mu(P_1) = \delta x^\mu(P_2) = 0.$$

Mit der Regel

$$\delta A(x^\mu) = A_{,\mu} \delta x^\mu$$

für eine beliebige differenzierbare Funktion $A(x^\mu)$, wobei das Komma als Abkürzung für die partielle Differentiation steht

$$A_{,\mu} \equiv \frac{\partial A}{\partial x^\mu}$$

und der Notation

$$\dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

und haben wir dann

$$\begin{aligned} 0 &= \int [(\delta g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + 2g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \delta \dot{x}^\nu)] d\lambda \\ &= \int [g_{\mu\nu,\rho} \delta x^\rho \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + 2g_{\mu\rho} \dot{x}^\mu (\delta \dot{x}^\rho)] d\lambda \\ &= \int [g_{\mu\nu,\rho} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - (2g_{\mu\rho} \dot{x}^\mu)'] \delta x^\rho d\lambda \\ &= -2 \int \left[g_{\mu\rho} \ddot{x}^\mu + \dot{g}_{\mu\rho} \dot{x}^\mu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\rho} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \right] \delta x^\rho d\lambda \\ &= -2 \int \left[g_{\mu\rho} \ddot{x}^\mu + g_{\mu\rho,\nu} \dot{x}^\nu \dot{x}^\mu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\rho} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \right] \delta x^\rho d\lambda \\ &= -2 \int \left[g_{\mu\rho} \ddot{x}^\mu + \frac{1}{2} (g_{\mu\rho,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \right] \delta x^\rho d\lambda \\ &= -2 \int g_{\alpha\rho} \left[\ddot{x}^\alpha + \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \right] \delta x^\rho d\lambda. \end{aligned}$$

Hierin ist $g^{\alpha\sigma}$ der zu $g_{\sigma\beta}$ inverse Tensor:

$$g^{\alpha\sigma}g_{\sigma\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (13.10)$$

Damit läßt sich die Gleichung einer Geodäten in folgender Form schreiben:

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0 \quad (13.11)$$

mit

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \equiv \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}). \quad (13.12)$$

Die Größen $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ werden *Christoffel-Symbole* genannt.

Als Anwendung wollen wir zunächst ein einfaches geometrisches Beispiel studieren und die Geodäten auf der Einheitskugel betrachten. Wir benötigen zunächst den metrischen Fundamentaltensor auf unserer Kugel in den gewählten Koordinaten. Wir betrachten dazu den ebenen 3-dimensionalen Raum. In Kartesischen Koordinaten $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ ist der metrische Tensor durch

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

(3-dimensionaler Satz des Pythagoras) gegeben. Eine Transformation auf Kugelkoordinaten gemäß

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

liefert nach Bildung der totalen Differenziale

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (13.13)$$

D.h., bzgl. $x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$ lauten die nichtverschwindenden Komponenten des metrischen Fundamentaltensors

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{33} = g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta. \quad (13.14)$$

Für $r = 1; dr = 0$ erhalten wir hieraus den gesuchten metrischen Tensor auf der Einheitskugel in üblichen Kugelkoordinaten $x^1 = \theta, x^2 = \phi$:

$$g_{11} = g_{\theta\theta} = 1, \quad g_{12} = g_{\theta\phi} = 0, \quad g_{22} = g_{\phi\phi} = \sin^2 \theta. \quad (13.15)$$

Der inverse Metriktensor lautet damit:

$$g^{11} = 1, \quad g^{12} = 0, \quad g^{22} = \sin^{-2} \theta$$

und die von Null verschiedenen Christoffel-Symbole ergeben sich zu

$$\Gamma_{22}^1 = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \cot \theta.$$

Die Gleichungen einer Geodäten auf der Einheitskugel lauten damit

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 &= 0 \\ \ddot{\phi} + 2 \cot \theta \dot{\phi} \dot{\theta} &= 0. \end{aligned} \quad (13.16)$$

Die Geodäten durch die zwei Pole mit $\theta_+ = 0, \theta_- = \pi$ sind daher durch die Meridiane

$$\phi = \text{const.}, \quad \theta = \lambda \quad \lambda \in [0, \pi]$$

gegeben.

Wir wollen jetzt als physikalisches Anwendungsbeispiel die Bewegungsgleichungen astronomischer Körper im BCRS mit Koordinaten $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$ betrachten. Der metrische Fundamentaltensor im BCRS ist durch (13.1) gegeben. Für den inversen Tensor und die Christoffel-Symbole findet man folgende Entwicklungen ($\mathcal{O}_n \equiv \mathcal{O}(c^{-n})$)

$$\begin{aligned} g^{00} &= -1 - \frac{2w}{c^2} - \frac{2w^2}{c^4} + \mathcal{O}_6 \\ g^{0i} &= -\frac{4}{c^3}w_i + \mathcal{O}_5 \\ g^{ij} &= \delta_{ij} \left(1 - \frac{2}{c^2}w\right) + \mathcal{O}_4 \end{aligned} \quad (13.17)$$

und

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= -\frac{w_{,0}}{c^2} + \mathcal{O}_5 \\ \Gamma_{0i}^0 &= -\frac{w_{,i}}{c^2} + \mathcal{O}_6 \\ \Gamma_{ij}^0 &= \delta_{ij} \frac{w_{,0}}{c^2} + \frac{4}{c^3}w_{(i,j)} + \mathcal{O}_5 \\ \Gamma_{00}^i &= -\frac{w_{,i}}{c^2} + 4\frac{w w_{,i}}{c^4} - \frac{4}{c^3}w_{i,0} + \mathcal{O}_6 \\ \Gamma_{0j}^i &= -\frac{4}{c^3}w_{[i,j]} + \frac{w_{,0}}{c^2}\delta_{ij} + \mathcal{O}_5 \\ \Gamma_{jk}^i &= \delta_{ij} \frac{w_{,k}}{c^2} + \delta_{ik} \frac{w_{,j}}{c^2} - \delta_{jk} \frac{w_{,i}}{c^2} + \mathcal{O}_4 \end{aligned} \quad (13.18)$$

mit

$$\begin{aligned} w_{(i,j)} &\equiv \frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{j,i}) \\ w_{[i,j]} &\equiv \frac{1}{2}(w_{i,j} - w_{j,i}). \end{aligned}$$

Übung 13.1 Man leite durch explizites Nachrechnen die Entwicklungen (13.17) und (13.18) für den inversen Metriktensor und die Christoffel-Symbole für eine Metrik der Form (13.1) her.

Aus den Geodätengleichungen (13.11)

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda}$$

können wir sofort die Koordinatenbeschleunigung des Massenmittelpunktes \mathbf{z}_A eines astro-

nomischen Körpers A berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z_A^i}{dt^2} &= \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^{-1} \frac{d}{d\lambda} \left[\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^{-1} \frac{dz_A^i}{d\lambda} \right] \\ &= \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^{-2} \frac{d^2 z_A^i}{d\lambda^2} - \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^{-3} \frac{d^2 t}{d\lambda^2} \frac{dz_A^i}{d\lambda} \\ &= -\Gamma_{\nu\sigma}^i \frac{dz_A^\nu}{dt} \frac{dz_A^\sigma}{dt} + \frac{1}{c} \Gamma_{\nu\sigma}^0 \frac{dz_A^\nu}{dt} \frac{dz_A^\sigma}{dt} \frac{dz_A^i}{dt} \end{aligned}$$

mit $z_A^0 = ct$; $dz_A^i/dt = v_A^i$. Ausgeschrieben lautet diese Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z_A^i}{dt^2} &= -c^2 \left\{ \Gamma_{00}^i + 2\Gamma_{0j}^i \frac{v_A^j}{c} + \Gamma_{jk}^i \frac{v_A^j}{c} \frac{v_A^k}{c} \right. \\ &\quad \left. - \left[\Gamma_{00}^0 + 2\Gamma_{0j}^0 \frac{v_A^j}{c} + \Gamma_{jk}^0 \frac{v_A^j}{c} \frac{v_A^k}{c} \right] \frac{v_A^i}{c} \right\}. \end{aligned} \quad (13.19)$$

Man erkennt, dass die Koordinatenbeschleunigung eines Körpers durch den Term

$$-c^2 \Gamma_{00}^i = -w_{,i} + \mathcal{O}_2 \quad (13.20)$$

dominiert wird. In dieser *Newtonscher Näherung* ist die Beschleunigung eines Körpers damit durch den Gradienten des gravitativen Potentials $w = U + \mathcal{O}_2$ gegeben.

Aus der Form der metrischen Potentiale (??, 13.8) für ein System von 'Punktmassen' im BCRS folgen damit die bekannten Einstein-Infeld-Hoffmann Gleichungen, welche die Basis für moderne Ephemeriden des Sonnensystems liefern:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{z}_A}{dt^2} &= - \sum_{B \neq A} \frac{GM_B}{r_{AB}^2} \mathbf{n}_{AB} \left[1 + \frac{1}{c^2} \left[\mathbf{v}_A^2 + 2\mathbf{v}_B^2 - 4\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B - \frac{3}{2} (\mathbf{n}_{AB} \cdot \mathbf{v}_B)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - 4 \sum_{C \neq A} \frac{GM_C}{c^2 r_{AC}} - \sum_{C \neq B} \frac{GM_C}{c^2 r_{BC}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r_{AB}}{r_{CB}} \mathbf{n}_{AB} \cdot \mathbf{n}_{CB} \right) \right] \\ &\quad - \frac{7}{2} \sum_{B \neq A} \sum_{C \neq B} \mathbf{n}_{BC} \frac{G^2 M_B M_C}{c^2 r_{AB} r_{BC}^2} \\ &\quad + \sum_{B \neq A} (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B) \frac{GM_B}{c^2 r_{AB}^2} (4\mathbf{n}_{AB} \cdot \mathbf{v}_A - 3\mathbf{n}_{AB} \cdot \mathbf{v}_B) \end{aligned} \quad (13.21)$$

mit

$$r_{AB} \equiv |\mathbf{z}_A(t) - \mathbf{z}_B(t)|, \quad \mathbf{n}_{AB} \equiv [\mathbf{z}_A(t) - \mathbf{z}_B(t)]/r_{AB}.$$

Übung 13.2 Aus der Form der metrischen Potentiale (??, 13.8) und der Form (13.19) leite man die Einstein-Infeld-Hoffmann Gleichungen (13.21) ab.

13.1.2 Die gravitative Lichtablenkung*

Wir wollen jetzt die Ausbreitung von Lichtstrahlen in der BCRS-Metrik näher studieren. Wie wir bereits früher festgestellt haben, können Lichtstrahlen durch Null-Geodäten beschrieben werden, d.h. durch Kurven der Form $x_\gamma^\mu(\lambda)$, welche der Geodätengleichung (13.11) genügen, bzw.

$$\frac{d^2 x_\gamma^i}{dt^2} = \left(\Gamma_{\nu\sigma}^0 \frac{1}{c} \frac{dx_\gamma^i}{dt} - \Gamma_{\nu\sigma}^i \right) \frac{dx_\gamma^\nu}{dt} \frac{dx_\gamma^\sigma}{dt}, \quad (13.22)$$

sowie der Bedingung

$$0 = ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\gamma^\mu dx_\gamma^\nu = g_{\mu\nu} \frac{dx_\gamma^\mu}{dt} \frac{dx_\gamma^\nu}{dt}. \quad (13.23)$$

Für einen Lichtstrahl machen wir jetzt folgenden Ansatz

$$\mathbf{x}_\gamma(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{n} c(t - t_0) + \mathbf{x}_P \equiv \mathbf{x}_N + \mathbf{x}_P, \quad (13.24)$$

wobei wir angenommen haben, dass sich die Lichtpartikel im Rahmen der Newtonschen Theorie längs einer Geraden \mathbf{x}_N mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten und \mathbf{x}_P die post-Newtonische Korrektur dazu beschreibt. Mit den Christoffel-Symbolen aus (13.18) können wir die Größenordnungen der in (13.22) auftretenden Terme abschätzen. Mit

$$\frac{dx_\gamma^0}{dt} = c, \quad \frac{dx_\gamma^i}{dt} = c n^i + \dots$$

finden wir (den Index γ werden wir im Folgenden unterdrücken)

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \Gamma_{00}^0 \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^0}{dt} &= \mathcal{O}_1 \\ \frac{1}{c} \Gamma_{0j}^0 \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^j}{dt} &= -\frac{1}{c^2} w_{,j} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^i}{dt} + \mathcal{O}_2 \\ \frac{1}{c} \Gamma_{jk}^0 \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} &= \mathcal{O}_1 \\ \Gamma_{00}^i \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^0}{dt} &= -w_{,i} + \mathcal{O}_2 \\ \Gamma_{0j}^i \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^j}{dt} &= \mathcal{O}_1 \\ \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} &= \frac{1}{c^2} (\delta_{ij} w_{,k} + \delta_{ik} w_{,j} - \delta_{jk} w_{,i}) \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} + \mathcal{O}_2 \\ &= \frac{1}{c^2} \left(2w_{,k} \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^i}{dt} - w_{,i} \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|^2 \right) + \mathcal{O}_2. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich aus der Geodätengleichung (13.22)

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = w_{,i} \left(1 + \frac{1}{c^2} \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|^2 \right) - \frac{4}{c^2} \frac{dx^i}{dt} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \nabla w \right) + \mathcal{O}_1. \quad (13.25)$$

Gleichung (13.23) liefert entsprechend

$$0 = \left(-1 + \frac{2w}{c^2} \right) c^2 + \delta_{ij} \left(1 + \frac{2}{c^2} \right) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} + \mathcal{O}_1, \quad (13.26)$$

was sich wegen

$$\frac{dx^i}{dt} = c n^i + \frac{dx_P^i}{dt} + \dots$$

in der Form

$$\mathbf{n} \cdot \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{x}_P}{dt} = -\frac{2w}{c^2} \quad (13.27)$$

schreiben läßt. Setzt man dies in die Geodätengleichung ein, so nimmt sie in post-Newtonscher Näherung folgende Form an:

$$\frac{d^2\mathbf{x}_P}{dt^2} = 2[\nabla w - 2\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla w)] . \quad (13.28)$$

Definiert man

$$\begin{aligned} x_P(t)_{\parallel} &\equiv \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_P(t) \\ \mathbf{x}_P(t)_{\perp} &\equiv (1 - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\mathbf{x}_P(t) . \end{aligned} \quad (13.29)$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{x}_{P\perp}}{dt^2} &= \frac{d^2\mathbf{x}_P}{dt^2} - \mathbf{n} \left(\mathbf{n} \cdot \frac{d^2\mathbf{x}_P}{dt^2} \right) \\ &= 2\nabla w - 4\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla w) - 2\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla w) + 4\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla w) \end{aligned}$$

bzw.

$$\frac{d^2\mathbf{x}_{P\perp}}{dt^2} = 2[\nabla w - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla w)] \quad (13.30)$$

und

$$\frac{1}{c} \frac{dx_{P\parallel}}{dt} = -\frac{2w}{c^2} . \quad (13.31)$$

Wir wollen nun konkret die Lichtablenkung im Gravitationsfeld eines Massenmonopols im Ursprung unseres Koordinatensystems betrachten. Da wir das skalare Gravitationspotenzial nur zur Newtonschen Ordnung brauchen haben wir dann

$$w \simeq \frac{GM}{r}$$

mit

$$r \simeq r_N = |\mathbf{x}_0 + c\mathbf{n}(t - t_0)| .$$

Wegen

$$\nabla w = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{x}$$

findet man

$$\frac{d^2\mathbf{x}_{P\perp}}{dt^2} = -\frac{2GM}{r^3} [\mathbf{x} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})] = -\frac{2GM}{r^3} \mathbf{d}$$

wobei

$$\mathbf{d} = \mathbf{n} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{n}) = \mathbf{n} \times (\mathbf{x}_0 \times \mathbf{n}) \quad (13.32)$$

einen *konstanten* Vektor bezeichnet, der von der gravitativen Masse zum Punkt der nächsten Annäherung an den ungestörten Lichtstrahl weist. Wegen $r^2 = \mathbf{x}^2 = \mathbf{x}_0^2 + 2c\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0(t - t_0) + c^2(t - t_0)^2$ haben wir

$$\frac{1}{c} \dot{\mathbf{x}}_{P\perp} = -\frac{2GM}{c} \mathbf{d} \int dt [\mathbf{x}_0^2 + 2c\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0(t - t_0) + c^2(t - t_0)^2]^{-3/2}$$

d.h., wir begegnen einem Integral der Form

$$\int dx [ax^2 + bx + c]^{-3/2} = \frac{2(2ax + b)}{\Delta \sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

mit $\Delta \equiv 4ac - b^2$. In unserem Fall ist $\Delta = 4c^2 [\mathbf{x}_0^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0)^2]$. Wegen

$$d^2 = [\mathbf{n} \times (\mathbf{x}_0 \times \mathbf{n})]^2 = [\mathbf{x}_0 - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0)]^2 = \mathbf{x}_0^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0)^2$$

ergibt sich $\Delta = 4c^2 d^2$ und $2ax + b = 2c^2(t - t_0) + 2c\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0 = 2c\mathbf{x}_N \cdot \mathbf{n}$. Damit findet man

$$\frac{1}{c} \dot{\mathbf{x}}_{P\perp} = -\frac{2GM}{c^2} \frac{\mathbf{d}}{d^2} \left(\frac{\mathbf{x}_N(t) \cdot \mathbf{n}}{r_N(t)} - \frac{\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{n}}{r_0} \right),$$

was mit (13.31) auf die Relationen

$$\frac{1}{c} \dot{\mathbf{x}} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \mathbf{n} - \frac{2m\mathbf{d}}{d^2} \left(\frac{\mathbf{x}_N(t) \cdot \mathbf{n}}{r} - \frac{\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{n}}{r_0} \right) \quad (13.33)$$

führt mit

$$m = \frac{GM}{c^2}.$$

Wir wollen im Weiteren eine sehr weit entfernte Lichtquelle am Orte \mathbf{x}_Q von der Erde aus ($|\mathbf{x}_E| \ll |\mathbf{x}_Q|$) betrachten und definieren dazu die (Euklidischen) Einheitsvektoren (Abb. 13.1) :

$$\mathbf{p} = -\mathbf{n}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{x}_E/|\mathbf{x}_E|, \quad \mathbf{q} = \mathbf{x}_Q/|\mathbf{x}_Q|. \quad (13.34)$$

\mathbf{p} ist hierbei der Einheitsvektor von der Erde in Richtung auf die ungestörte Lichtquelle. Für unseren Fall setzen wir $\mathbf{x}_N = \mathbf{x}_E$ und $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_Q$ mit $\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{n}/r_0 = -1$ und es gilt $\mathbf{q} = \mathbf{p}$. Der zweite Term in Gleichung (13.33) proportional zu \mathbf{d} beschreibt die gravitative Lichtablenkung und gibt direkt die post-Newtonsche Korrektur zum Richtungsvektor \mathbf{p} an:

$$\delta \mathbf{p} = \frac{2m\mathbf{d}}{d^2} (\cos \chi + 1) \quad (13.35)$$

mit $\cos \chi = -\mathbf{e} \cdot \mathbf{p}$ (Abb. 13.1). Wegen

$$\mathbf{d} = \mathbf{p} \times (\mathbf{x}_E \times \mathbf{p}) = r_E (\mathbf{e} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{e})\mathbf{p})$$

und

$$d^2 = r_E^2 (1 + \mathbf{e} \cdot \mathbf{p})(1 - \mathbf{e} \cdot \mathbf{p})$$

läßt sich die Gleichung für die gravitative Lichtablenkung im Falle eines weit entfernten Sternes schreiben als:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \left(\frac{2GM}{c^2 r_E} \right) \frac{\mathbf{e} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{e})\mathbf{p}}{(1 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{e})}. \quad (13.36)$$

Im Falle der Lichtablenkung im Gravitationsfeld unsere Sonne ist der Faktor $(GM_\odot/c^2 r_E) \simeq 2 \cdot 10^{-8}$. Am Sonnenrand beträgt der Ablenkungswinkel $1,75''$.

13.2 GCRS

Die IAU2000 Resolution B1.3 definiert weiterhin ein Geozentrisches Celestäres Referenzsystem (GCRS = Geocentric Celestial Reference System). Die räumlichen Koordinaten \mathbf{X} des GCRS werden hierbei als kinematisch nicht-rotierend in Bezug auf das BCRS definiert (Brumberg & Kopeikin 1989; Klioner & Soffel 1998). Dies bedeutet folgendes: wenn wir in

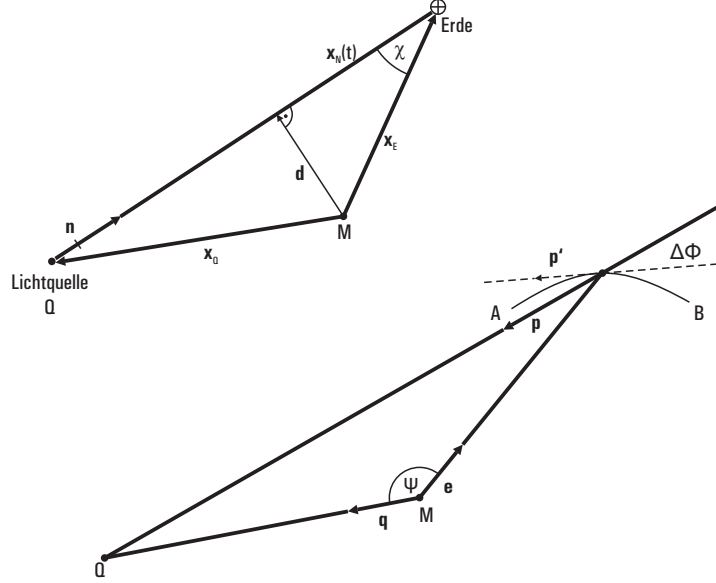


Abbildung 13.1: Oben: Geometrie im Problem der Lichtablenkung im Gravitationsfeld einer Masse M . Unten: der wahre Lichtstrahl verläuft von A nach B und ist in einer Richtung \mathbf{p}' zu sehen.

der Relation zwischen den baryzentrischen räumlichen Koordinaten x^μ und X^α (Relation (??)) den δ_{ai} -Term durch eine allgemeine Rotationsmatrix R_{ai} ersetzen, d.h. schreiben

$$X^\alpha = R_{ai} \left[r_E^i + \frac{1}{c^2}(\dots) \right] + \mathcal{O}(c^{-4})$$

mit $\mathbf{r}_E = \mathbf{x} - \mathbf{x}_E$. Im Falle der Wahl $R_{ai} = \delta_{ai}$ nennt man die geozentrischen Koordinaten \mathbf{X} kinematisch nicht-rotierend in Bezug auf das BCRS. In diesem Falle induziert die Orientierung der räumlichen BCRS Koordinaten die entsprechende Orientierung der räumlichen GCRS Koordinaten. Die IAU2000 Resolution empfiehlt, den metrischen Fundamentaltensor des GCRS in der selben Form wie derjenige des BCRS zu schreiben, jedoch mit anderen Potenzialen $W(T, \mathbf{X})$ und $W^a(T, \mathbf{X})$. Konkret gelte im GCRS

$$\begin{aligned} G_{00} &= -1 + \frac{2W}{c^2} - \frac{2W^2}{c^4} + \mathcal{O}(c^{-5}), \\ G_{0a} &= -\frac{4}{c^3}W^a + \mathcal{O}(c^{-5}), \\ G_{ab} &= \delta_{ab} \left(1 + \frac{2}{c^2}W \right) + \mathcal{O}(c^{-4}) \end{aligned} \quad (13.37)$$

und die Feldgleichungen sehen genauso aus wie im baryzentrischen Fall wenn sich alle Variable auf das GCRS beziehen. Von besonderem Interesse ist die formale Linearität dieser Feldgleichungen, die eine eindeutige Aufspaltung der metrischen Potenziale W und W^a in der Form

$$W(T, \mathbf{X}) = W_E(T, \mathbf{X}) + W_{\text{ext}}(T, \mathbf{X}), \quad W^a(T, \mathbf{X}) = W_E^a(T, \mathbf{X}) + W_{\text{ext}}^a(T, \mathbf{X}). \quad (13.38)$$

Hierbei bezeichnen W_E und W_E die metrischen Potentiale der Erde im GCRS. Sie sind über die Ausdrücke (13.5) definiert, wenn sich die Integrale nur über den Erdkörper erstrecken und alle Größen sich auf das GCRS beziehen.

Für praktische Anwendungen, etwa in der Satellitengeodäsie, wird man das metrischen Potentiale nach Multipolen entwickeln. In Soffel et al. (2003) wird erläutert, dass man für eine fast axialsymmetrische und langsam rotierende Erde das relativistische Potenzial $W_E(T, \mathbf{X})$ außerhalb der Erde in der Form

$$W_E(T, \mathbf{X}) = \frac{GM_E}{R} \left[1 + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{R_E}{R} \right)^l P_{lm}(\cos \theta) (C_{lm} \cos m\phi + S_{lm} \sin m\phi) \right] \quad (13.39)$$

schreiben kann. Hierin sind (R, θ, ϕ) die Kugelkoordinaten eines GCRS Vektors \mathbf{X} . Die letzte Gleichung sieht formal rein Newtonsch aus, ist aber in guter Näherung ein gültiger relativistischer Ausdruck. M_E ist die relativistische Masse der Erde und die Potenzialkoeffizienten (C_{lm}, S_{lm}) sind ebenfalls relativistisch definiert.

Betrachten wir den Fall einer isolierten Erde, deren Massenmittelpunkt sich aus irgendwelchen Gründen längs einer Trajektorie $\mathbf{z}_E(t)$ im BCRS bewegt. Im Falle einer kugelförmigen, nichtrotierenden Erde sind dann die metrischen Potentiale im GCRS durch

$$W_E = \frac{GM_E}{R}, \quad W_E^a = 0 \quad (13.40)$$

gegeben. Im BCRS ergeben sich hieraus jedoch die Potentiale w_E und w_E^i aus den Gleichungen (??) und (13.8), wenn wir die Massen aller anderen Körper zu Null setzen.

Wir wollen jetzt die GCRS-Koordinatenbeschleunigung eines Satelliten, $d^2 Z_S^i / dT^2$, im sphärisch symmetrischen Gravitationsfeld der Erde berechnen. Die Christoffel-Symbole ergeben sich aus (13.18), wenn man die entsprechenden Potentiale im GCRS einsetzt. Mit $W_E = GM_E/R$ findet man

$$\begin{aligned} \Gamma_{0i}^0 &= \frac{1}{c^2} \frac{GM_E}{R^3} X^i \\ \Gamma_{00}^i &= \frac{1}{c^2} \frac{GM_E}{R^3} X^i - \frac{4}{c^4} \frac{G^2 M_E^2}{R^4} X^i \\ \Gamma_{jk}^i &= -\frac{1}{c^2} \frac{GM_E}{R^3} \left[\delta_{ij} X^k + \delta_{ik} X^j - \delta_{jk} X^i \right]. \end{aligned}$$

Eingesetzt in (13.19), jetzt aber interpretiert als analoge Gleichung im GCRS, ergibt dann:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Z_S^i}{dT^2} &= -c^2 \Gamma_{00}^i - \Gamma_{jk}^i V_S^j V_S^k + \frac{2}{c} \Gamma_{0j}^0 V_S^j \\ &= -\frac{GM_E}{R_S^3} Z_S^i \\ &\quad + \frac{GM_E}{c^2 R_S^3} \left\{ \left[4 \frac{GM_E}{R_S} - \mathbf{V}_S^2 \right] Z_S^i + 4 (\mathbf{Z}_S \cdot \mathbf{V}_S) V_S^i \right\}. \end{aligned} \quad (13.41)$$

In Soffel et al. (2003) wird ebenfalls gezeigt, dass das gravito-magnetische Vektorpotential der Erde, W_E^a , welches durch die Bewegung der verschiedenen materiellen Elemente der Erde im GCRS erzeugt wird, in guter Näherung durch

$$W_E^a(T, \mathbf{X}) = -\frac{G}{2} \frac{(\mathbf{X} \times \mathbf{S}_E)}{R^3} \quad (13.42)$$

gegeben ist. Hierin ist \mathbf{S}_E der totale Drehimpuls (Spin) der Erde im GCRS. Das Potenzial W_E^a wird üblicherweise mit Lense-Thirring Effekten, welche aus der Erddrehung resultieren, in Verbindung gebracht.

Es ist nützlich, die externen metrischen Potenziale W_{ext} und W_{ext}^a weiter aufzuspalten und sie in der Form

$$W_{\text{ext}} = W_{\text{Gez}} + W_{\text{iner}}, \quad W_{\text{ext}}^a = W_{\text{Gez}}^a + W_{\text{iner}}^a \quad (13.43)$$

zu schreiben, wobei die Gezeitenterme wenigstens quadratisch von X^a abhängen, die inertialen Terme dagegen linear. Die inertialen Terme lassen sich so schreiben

$$W_{\text{iner}} = Q_a X^a, \quad W_{\text{iner}}^a = -\frac{1}{4} c^2 \epsilon_{abc} \Omega_{\text{iner}}^b X^c. \quad (13.44)$$

Das skalare inertielle Potenzial resultiert von der Kopplung der Erdabplattung an das externe Gravitationsfeld und ist vernachlässigbar klein. Das inertielle Vektorpotenzial W_{iner}^a beschreibt eine relativistische Coriolis-Kraft aufgrund der Rotation des GCRS in Bezug auf ein dynamisch nicht-rotierendes System. Ein idealer drehmomentfreier Kreisel würde nämlich im GCRS mit einer Winkelgeschwindigkeit Ω_{iner} präzedieren. Das über die Bedingung der kinematischen Nichtrotation mit dem BCRS verknüpfte GCRS stellt also *kein* lokales Inertialsystem dar. Die relativistische Coriolis Kraft wird durch die sogenannte geodätische Präzession dominiert, d.h.,

$$\Omega_{\text{iner}} \simeq \Omega_{\text{GP}} = \frac{3}{2} \frac{GM_S}{c^2} \frac{\mathbf{x}_E \times \mathbf{v}_E}{r_E^3} \quad (13.45)$$

wobei M_S die Sonnenmasse bezeichnet. Diese geodätische Präzession resultiert also aus der Bewegung des Geozentrums bzgl. des Baryzentrums. Sie beträgt rund $2''/\text{Jhd}$. Aufgrund der Exzentrizität der Erdbahn taucht in Ω_{iner} auch ein geodätischer Nutationsterm mit der Periode von einem Jahr auf.

Dadurch, dass das GCRS als kinematisch nicht-rotierendes System definiert wurde, geht die geodätische Rotation in die Präzessions-Nutationsmatrix ein. Wäre die Erde ein sphärisch symmetrischer Körper und würden die an ihr angreifenden Drehmomente verschwinden, so würde alleine die geodätische Bewegung zur Präzession/Nutation beitragen.

Die Form der metrischen Fundamentaltensoren im BCRS und im GCRS legen die Transformationen zwischen den BCRS Koordinaten x^μ und den GCRS Koordinaten X^α fest. Die GCRS Koordinaten als Funktion von $t = TCB$ und x^i erhält man durch

$$\begin{aligned} T &= t - \frac{1}{c^2} [A(t) + \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{r}_E] \\ &\quad + \frac{1}{c^4} [B(t) + B^i(t)r_E^i + B^{ij}(t)r_E^i r_E^j + C(t, \mathbf{x})] + \mathcal{O}(c^{-5}), \\ X^a &= \delta_{ai} \left[r_E^i + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} v_E^i \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{r}_E + w_{\text{ext}}(\mathbf{x}_E) r_E^i + r_E \mathbf{a}_E \cdot \mathbf{r}_E - \frac{1}{2} a_E^i r_E^2 \right) \right] \\ &\quad + \mathcal{O}(c^{-4}), \end{aligned} \quad (13.46)$$

mit ($\mathbf{r}_E = \mathbf{x} - \mathbf{x}_E$)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}A(t) &= \frac{1}{2}v_E^2 + w_{\text{ext}}(\mathbf{x}_E), \\
\frac{d}{dt}B(t) &= -\frac{1}{8}v_E^4 - \frac{3}{2}v_E^2 w_{\text{ext}}(\mathbf{x}_E) + 4v_E^i w_{\text{ext}}(\mathbf{x}_E) + \frac{1}{2}w_{\text{ext}}^2(\mathbf{x}_E), \\
B^i(t) &= -\frac{1}{2}v_E^2 v_E^i + 4w_{\text{ext}}^i(\mathbf{x}_E) - 3v_E^i w_{\text{ext}}(\mathbf{x}_E), \\
B^{ij} &= -v_E^i \delta_{\alpha i} Q^\alpha + 2\frac{\partial}{\partial x^j} w_{\text{ext}}^i(\mathbf{x}_E) - v_E^i \frac{\partial}{\partial x^j} w_{\text{ext}}(\mathbf{x}_E) + \frac{1}{2}\delta^{ij} \dot{w}_{\text{ext}}(\mathbf{x}_E), \\
C(t, \mathbf{x}) &= -\frac{1}{10}r_E^2 (\dot{\mathbf{a}}_E \cdot \mathbf{r}_E). \tag{13.47}
\end{aligned}$$

Hierin stehen \mathbf{x}_E , \mathbf{v}_E und \mathbf{a}_E für die baryzentrische Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung des Geozentrums, der Punkt steht für die totale Ableitung nach $t = \text{TCB}$ und die externen Potentiale sind durch

$$w_{\text{ext}} = \sum_{A \neq E} w_A, \quad w_{\text{ext}}^i = \sum_{A \neq E} w_A^i \tag{13.48}$$

gegeben. Diese 4-dimensionale Koordinatentransformation stellt eine verallgemeinerte Lorentz-Transformation dar. Ohne die gravitativen Potentiale und die Beschleunigungsterme reduziert sich diese auf die entsprechend entwickelte Lorentz-Transformation (3.9).

Vernachlässigt man die $1/c^4$ Terme in der $T - t$ Beziehung (13.46) so erhält man

$$T = t - \frac{1}{c^2} \left(\int_{t_0}^t \left(\frac{v_E^2}{2} + w_{\text{ext}}(\mathbf{x}_E) \right) dt + \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{r}_E \right) + \mathcal{O}(c^{-4}), \tag{13.49}$$

welches sich auf die alte TCB - TCG Beziehung reduziert. Da $t = \text{TCB}$, $T = \text{TCG}$ und w_{ext} reduziert sich auf das Newtonsche Gravitationspotenzial in entsprechender Näherung.

Gemäß (3.15) hat man etwa

$$T = t \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 \right) - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}}{c^2} + \mathcal{O}(c^{-4}).$$

Ersetzen wir hierin \mathbf{x} durch den Newtonschen Ausdruck $\mathbf{X} + \mathbf{v}t$, so ergibt sich

$$T = t \left(1 - \frac{1}{2}\beta^2 \right) - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{X}}{c^2} + \mathcal{O}(c^{-4})$$

im Einklang mit (13.49).

Kapitel 14

Der Celestäre Intermediäre Pol (CIP)

Von grundlegendem Interesse ist die Bewegung des ITRS (räumliche Koordinaten X_T, Y_T, Z_T) im GCRS (räumliche Koordinaten X, Y, Z), welche im Prinzip mit nur drei Eulerschen Winkeln ψ_E, θ_E and ϕ_E beschrieben werden könnte. Diese werden in Abb. 14.1 erläutert. Es hat sich jedoch als zweckmäßig erwiesen, einen intermediären Pol einzuführen, dessen Bewegung in entsprechender Näherung vorhersagbar ist. D.h., man zerlegt die Bewegung des ITRS im GCRS in einen gut vorhersagbaren forcierten Teil, der sich im wesentlichen aus den Drehmomenten von Mond, Sonne und Planeten errechnen lässt und einen schlecht vorhersagbaren geophysikalischen Teil, welcher im wesentlichen durch das komplexe System Erde bestimmt wird.

14.1 Der Instantane Rotationspol (IRP)

Bei der Diskussion der Äquinoktium basierenden räumlichen Koordinaten wurde der Instantane Rotationspol (IRP) als intermediärer Pol betrachtet. Der IRP der wahren Erde ist eine Verallgemeinerung dieses Konzeptes für eine starre Erde. Hier ist der entsprechende Rotationsvektor $\boldsymbol{\Omega}$ durch das Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x} \quad (14.1)$$

eines starr rotierenden Körpers definiert. Der IRP war der grundlegende Referenzpol für die Nutation ab der IAU 1964 Nutationsreihe (Woolard 1953) und hatte diese Rolle bis zum Jahr 1984. Er zerlegt die gut vorhersagbare astronomisch forcierte Bewegung in zwei Anteile:

1. einen Präzessions-Nutationsanteil und eine
2. astronomisch forcierte tägliche Polbewegung.

In der Literatur treten verschiedene Bezeichnungen für die astronomisch forcierte tägliche Polbewegung auf. Sie wird auch als tägliche Nutation oder forcierte Breitenschwankung (Fedorov 1963) bezeichnet. Im ITRS enthält diese forcierte Bewegung einen täglichen Anteil mit Amplitude 8.7mas und fast täglichen Termen mit Amplituden $\leq 7\text{mas}$. Die Bewegung des IRP im ITRS ist für eine starre Erde in Abb. 14.2 dargestellt. Im GCRS kommt diese forcierte tägliche Polbewegung dadurch zustande, dass der IRP eine etwas andere Nutationsbewegung vollführt, als der Pol des ITRS. Derartige Differenzen in der Nutationsbewegung

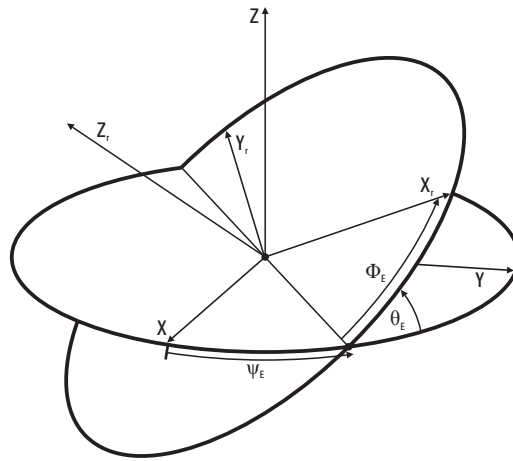


Abbildung 14.1: Die drei Euler-Winkel ψ_E, θ_E und ϕ_E .

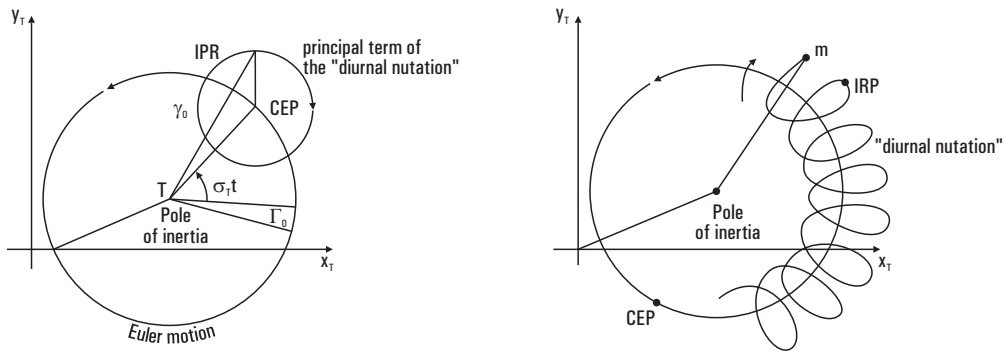


Abbildung 14.2: Bewegung des IRP einer starren Erde aufgrund der forcierten täglichen Bewegung.

werden durch sogenannte Oppolzer-Terme (Jeffreys 1963) beschrieben. Diese enthalten einen konstanten Term mit einer Amplitude von 8.7mas und langperiodische Terme (18.6a, 1a, 182 Tage, 13.7 Tage ...).

Man kann nun zeigen, dass der IRP durch kein geodätisches Raumverfahren gemessen werden kann. Genauer sind Nutationsbewegungen und (quasi-) tägliche Polbewegungsterme für solche Verfahren ununterscheidbar. Dies liegt daran, dass die Raumverfahren nur für die Gesamttransformation vom BCRS ins ITRS sensitiv sind. Weiter oben haben wir diese Transformation in der Form

$$\mathbf{x}_T = \mathcal{R}_2(-x_p)\mathcal{R}_1(-y_p)\mathcal{R}_3(\theta)\mathcal{N}\mathcal{P}\mathbf{x}_I \quad (14.2)$$

mit $\theta = \text{GAST}$ geschrieben. Wir wollen jetzt kleine Variationen in ϵ, ψ, θ und x_p, y_p betrachten und die Matrix

$$\mathcal{C} \equiv \mathcal{U}\mathcal{R}_3(\theta + \delta\theta)\delta\mathcal{N} \quad (14.3)$$

definieren mit

$$\delta\mathcal{N} = \begin{bmatrix} 1 & -\cos \epsilon \delta\psi & -\sin \epsilon \delta\psi \\ \cos \epsilon \delta\psi & 1 & -\delta\epsilon \\ \sin \epsilon \delta\psi & \delta\epsilon & 1 \end{bmatrix}, \quad (14.4)$$

$$\mathcal{R}_3(\theta + \delta\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta - \delta\theta \sin \theta & \sin \theta + \delta\theta \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta - \delta\theta \cos \theta & \cos \theta - \delta\theta \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14.5)$$

und $(x = x_p + \delta x, y = y_p + \delta y)$

$$\mathcal{U} \equiv \mathcal{R}_2(-x)R_1(-y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -y \\ -x & y & 1 \end{bmatrix}. \quad (14.6)$$

In erster Ordnung findet man so

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \cos \theta - z \sin \theta & \sin \theta + z \cos \theta & v \cos \theta - w \sin \theta + x \\ -\sin \theta - z \cos \theta & \cos \theta - z \sin \theta & -v \sin \theta - w \cos \theta - y \\ -v - x \cos \theta - y \sin \theta & w - x \sin \theta + y \cos \theta & 1 \end{bmatrix} \quad (14.7)$$

mit

$$v = -\delta\psi \sin \epsilon, \quad w = \delta\epsilon$$

und

$$x = x_p + \delta x, \quad y = y_p + \delta y, \quad z = \delta\theta - \delta\psi \cos \epsilon.$$

Nutation und Polbewegung können dann nicht voneinander getrennt werden falls

$$\mathcal{C}(\delta\psi, \delta\epsilon) = \mathcal{C}(\delta x, \delta y, z) \quad (14.8)$$

d.h. falls

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & v \cos \theta - w \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta & -v \sin \theta - w \cos \theta \\ -v & w & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta - z \sin \theta & \sin \theta + z \cos \theta & \delta x \\ -\sin \theta - z \cos \theta & \cos \theta - z \sin \theta & -\delta y \\ -\delta x \cos \theta - \delta y \sin \theta & -\delta x \sin \theta + \delta y \cos \theta & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich folgende drei Gleichungen:

$$\delta\theta = \delta\psi \cos \epsilon \quad (14.9)$$

$$\delta x = -\delta\psi \sin \epsilon \cos \theta - \delta\epsilon \sin \theta$$

$$\delta y = -\delta\psi \sin \epsilon \sin \theta + \delta\epsilon \cos \theta.$$

(14.10)

Eine Nutationsbewegung ist für geodätische Raumverfahren ununterscheidbar von einer täglichen bzw. quasi-täglichen Polbewegung. Aus diesem Grunde wurde der Celestäre Ephemeridenpol (CEP) eingeführt.

14.2 Der Celestäre Ephemeridenpol (CEP)

Der CEP ist derjenige Pol, welcher weder im GCRS noch im ITRS eine quasi-tägliche Bewegung aufweist.

Der CEP kommt dem 'beobachtbaren Pol' näher als der IRP. Theoretisch hängt bei einer starren Erde der CEP mit dem IRP über die Oppolzer-Terme zusammen.

Die Oppolzer-Terme definieren die Unterschiede in der Nutationsbewegung zweier fundamentaler Achsen: der Rotationsachse (R), dem ITRS-Pol (Z) und der Drehimpulsachse (H). Wir betrachten hierzu entsprechende Einheitsvektoren $\mathbf{N}_R, \mathbf{N}_Z$ und \mathbf{N}_H , welche die Bewegungen der drei fundamentalen Achsen im GCRS beschreiben. Von besonderem Interesse sind hierbei die entsprechenden X - und Y -Komponenten, welche durch die komplexen Zahlen

$$N \equiv N_X + iN_Y \quad (14.11)$$

beschrieben werden können. Diese komplexen Zahlen hängen mit den Nutationswinkeln über

$$N = \Delta\psi \sin \epsilon + i\Delta\epsilon \quad (14.12)$$

zusammen (man beachte, dass in der Literatur oft mit einem Eulerschen Winkel $\Delta\psi_E$ gearbeitet wird, der mit dem üblichen Nutationswinkel in der Länge $\Delta\psi$ über

$$\Delta\psi_E = -\Delta\psi \quad (14.13)$$

verknüpft ist. Zählt $\Delta\psi_E$ positiv in prograder Richtung, d.h. positiv im Sinne der Erddrehung, so zählt die übliche Nutation in der Länge $\Delta\psi$ positiv in retrograder Richtung in der auch die Präzessionsbewegung erfolgt). Nun kann man die forcierten Nutationen im Rahmen einer Partialidenttheorie beschreiben (z.B. Moritz & Müller 1988), welche folgenden Ausdrücke liefert:

$$\begin{aligned} N_R &= i \sum_{j \neq 0} \frac{\omega_j \sigma_E}{\Delta\omega_j (\omega_j + \sigma_E)} B_j e^{-i(\Delta\omega_j t + \beta_j)} + p_A(t - t_0) \\ N_Z &= i \sum_{j \neq 0} \frac{\Omega \sigma_E}{\Delta\omega_j (\omega_j + \sigma_E)} B_j e^{-i(\Delta\omega_j t + \beta_j)} + p_A(t - t_0) \\ N_H &= i \sum_{j \neq 0} \frac{\Omega \sigma_E}{\Delta\omega_j (\Omega + \sigma_E)} B_j e^{-i(\Delta\omega_j t + \beta_j)} + p_A(t - t_0). \end{aligned} \quad (14.14)$$

Die Summen erstrecken sich hierbei über alle Partialtiden, außer der K_1 -Tide ($j = 0$), welche die Präzessionsterme liefert. B_j und ω_j sind die Tidenamplituden und Frequenzen, welche aus der Theorie der Partialtiden bekannt sind. Ω ist die Frequenz der täglichen Erddrehung und es gilt:

$$\Delta\omega_j = \omega_j - \Omega. \quad (14.15)$$

p_A ist die Präzessionskonstante und die Euler-Frequenz σ_E ist durch

$$\sigma_E = \frac{C - A}{A} \Omega \quad (14.16)$$

gegeben, wenn C und A die Hauptträgheitsmomente der Erde bezeichnen. Die Oppolzer-Terme sind dann über

$$N_Z = N_R + N_R^{\text{Opp}} = N_H + N_H^{\text{Opp}} \quad (14.17)$$

definiert und es gilt

$$\begin{aligned} N_R^{\text{Opp}} &= -i \sum_{j \neq 0} \frac{\sigma_E}{\omega_j + \sigma_E} B_j e^{-i(\Delta\omega_j t + \beta_j)} \\ &= -\frac{i}{\Omega} \frac{d}{dt} [N_Z - p_A(t - t_0)]. \end{aligned} \quad (14.18)$$

Damit ergibt sich die Möglichkeit, die Oppolzer-Terme aus den Nutationsamplituden selbst auszurechnen (Dehant & Capitaine 1997)

$$\begin{aligned} \delta\epsilon_R^{\text{Opp}} &= \frac{1}{\Omega} \frac{d}{dt} [\Delta\psi_Z \sin \epsilon_0 - \sin \epsilon_0 \dot{\psi}_A(t - t_0)], \\ \delta\psi_R^{\text{Opp}} \sin \epsilon_0 &= -\frac{1}{\Omega} \frac{d}{dt} \Delta\epsilon_Z. \end{aligned} \quad (14.19)$$

Die Werte für die Oppolzer-Terme in Tabelle (14.1) sind mit Hilfe von `oppolzer.mws` aus der IAU 1980 Nutationsreihe berechnet worden. Im GCRS wird die forcierte tägliche Polbewegung für eine starre Erde dadurch eliminiert, dass man CEP mit

$$N_{\text{CEP}} = N_R + N_R^{\text{Opp}} \quad (14.20)$$

eingführt. Wie bereits oben ausgeführt kommt zu den quasi-täglichen astronomisch forcierten Termen noch ein täglicher Term mit einer Amplitude von 8,7 mas hinzu, der im GCRS lediglich eine konstante Verschiebung des Pols beschreibt.

14.3 Definition des CIP

Den CEP hat man durch das Wort 'quasi' nur näherungsweise definiert. Der rasche Fortschritt in Genauigkeit und zeitlicher Auflösung der Erdorientierungsparameter (EOP) hat dann eine präzisere Definition eines intermediären Systems (celestärer intermediärer Pol und Äquator) notwendig gemacht. Die IAU2000 Resolution B1.7 definiert den

CIP als intermediären Pol in der Transformation zwischen dem GCRS und dem ITRS. Seine Bewegung im GCRS wird beschrieben durch die Bewegung des ITRS-Pols mit Perioden größer als 2 Tage. Die Lage wird festgelegt durch das IAU2000A Präzessions-Nutationsmodell und die Korrekturen des Frame Bias.

Perioden größer als 2 Tage im GCRS entsprechen Frequenzen zwischen -0.5 cpsd und +0.5 cpsd (cpsd: cycles per sidereal day), da

$$f_{\text{cpsd}} = \frac{1}{P_d}. \quad (14.21)$$

Tabelle 14.1: Amplituden der Oppolzer-Terme $(\delta\psi_R^{\text{OPP}}, \delta\epsilon_R^{\text{OPP}})$ berechnet aus IAU 1980 Nutation.

l	l'	F	D	Ω	Periode Tage	$\Delta\psi_Z$ mas	$\Delta\epsilon_Z$ mas	$\delta\psi_R^{\text{OPP}}$ mas	$\delta\epsilon_R^{\text{OPP}}$ mas
0	0	0	0	1	-6798.4	-17199.6	9202.5	3.40	-1.01
0	0	2	-2	2	182.6	-1318.7	573.6	-7.90	2.87
0	1	2	-2	2	121.7	-51.7	22.4	-0.46	0.17
1	0	0	0	1	27.7	6.3	-3.3	0.30	-0.09
-1	0	0	0	1	-27.4	-5.8	3.2	0.29	-0.09
-1	0	2	0	2	27.1	12.3	-5.3	0.49	-0.18
1	0	2	-2	2	23.9	2.9	-1.2	0.13	-0.05
0	0	2	0	2	13.7	-227.4	97.7	-17.98	6.62
0	0	2	0	1	13.6	-38.6	20.0	-3.69	1.13
-1	0	2	2	2	9.6	-5.9	2.6	-0.68	0.25
-1	0	2	2	1	9.5	-1.0	0.5	-0.13	0.04
1	0	2	0	2	9.1	-30.1	12.9	-3.55	1.31
1	0	2	0	1	9.1	-5.1	2.7	-0.74	0.22
0	0	2	2	2	7.1	-3.8	1.6	-0.57	0.21
0	0	2	2	1	7.1	-0.7	0.3	-0.11	0.04
2	0	2	0	2	6.9	-3.1	1.3	-0.48	0.18
1	0	2	2	2	5.6	-0.8	0.3	-0.14	0.06

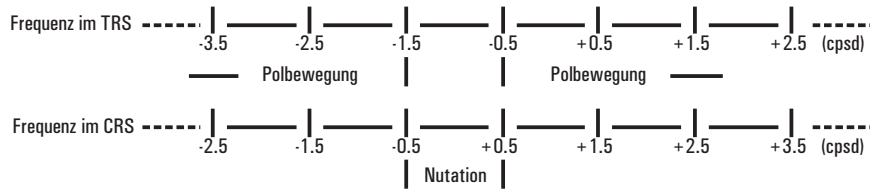


Abbildung 14.3: Frequenzen im CRS und TRS.

In dieser Einheit (cpsd) hat man einfach

$$f_{\text{TRS}} = f_{\text{CRS}} - 1.$$

Bei positiven Frequenzen erfolgt die Bewegung *prograd*, d.h. im Sinne der Erddrehung. Bei negativen Frequenzen erfolgt sie *retrograd*, d.h. entgegen der Erddrehung.

Die Definition des CIP beinhaltet eine bestimmte Ordnung der astronomisch forcierten und der geophysikalischen Terme.

Gewisse geophysikalische Terme werden jetzt der Nutation zugeordnet. Diese geophysikalischen Terme in der Nutation haben Perioden größer als 2 Tage im GCRS.

Andererseits werden jetzt astronomisch forcierte Terme mit Perioden kleiner als 2 Tage im GCRS (früher: tägliche und subtägliche Nutationen) der Polbewegung zugeordnet. Tabelle 14.2 gibt hierüber einen Überblick. In Abb. 14.4 wird für den jeweiligen Term die Periode im TRS bzw. CRS und seine Bezeichnung angegeben.

Tabelle 14.2: Einteilung der astronomisch forcierten Erdorientierungsterme durch ihre Perioden im GCRS und ITRS. Die täglichen und subtäglichen Terme im GCRS werden jetzt der Polbewegung zugeordnet. In der ersten Spalte steht $U_{l,j}$ für die Stokes-Koeffizienten $C_{l,j}$, $S_{l,j}$ (Grad l , Ordnung j) und $u_{l,j}$ in der nächsten Spalte steht das Gezeitenpotenzial (Grad l , Ordnung j). Die letzte Spalte zeigt die Summe der absoluten Werte aller Amplituden größer als $0.01 \mu\text{as}$.

Geo- potenzial	Gezeiten- potenzial	CRS Bewegung	TRS Bewegung	Summe aller Amplituden (μas)
$U_{l,0}$ für $l = 2,3,\dots$	$u_{l,1}$	lang- periodische	retrograde tägliche	Nutation $> 10'$ + Präzession
$U_{3,1}$	$u_{3,0}$	prograde tägliche	lang- periodische	91.3
$U_{4,1}$	$u_{4,0}$			periodisch 1.0 + Drift 5.1 $\mu\text{as}/\text{Jahr}$
$U_{2,2}$	$u_{2,1}$	prograde subtägliche	prograde tägliche	51.5
$U_{3,2}$	$u_{3,1}$			0.2
$U_{3,3}$	$u_{3,2}$	prograde 1/3 tägliche	prograde subtägliche	0.1
$U_{3,1}$	$u_{3,2}$	retrograde tägliche	retrograde subtägliche	0.8
$U_{3,2}$	$u_{3,3}$	retrograde subtägliche	retrograde 1/3 tägliche	0.1

In einem starren Erdmodell besteht ein Zusammenhang zwischen dem CIP, dem CEP und dem IRP. Im GCRS hat man

$$\text{CIP} = \text{CEP} - \text{tägliche und subtägliche astronomisch forcierte Terme.}$$

14.4 Bewegung des CIP im GCRS

14.4.1 Celestial Pole Offsets

Die Bewegung des CIP im GCRS wird näherungsweise durch das IAU2000A Modell der Präzession Nutation beschrieben.

Wie VLBI-Beobachtungen zeigten, sind im IAU 2000A Modell Unzulänglichkeiten von der Größe $0.2 \mu\text{as}$ (Mathews et al., 2002) vorhanden. Die IERS veröffentlicht regelmäßig Korrekturen zum IAU 2000 Modell. Die beobachteten Unterschiede in Bezug auf die Polposition, definiert durch die Modelle, werden überwacht und herausgegeben als Celestial Pole Offsets. Inzwischen ist es üblich geworden anstelle der Präzessions- Nutationswinkel die kartesischen Komponenten (X, Y) des CIP-Einheitsvektors im GCRS zu betrachten. Die zeitabhängigen Offsets der Richtung des Pols im GCRS, müssen dann als Korrekturen δX und δY für die Koordinaten X und Y zur Verfügung gestellt werden. Die Korrekturen δX und δY können, aus den durch die IERS in den Bulletin A und B herausgegebenen Celestial Pole Offsets $\delta\psi$ und $\delta\epsilon$, berechnet werden. Mit μas -Genauigkeit für ein Jahrhundert gilt folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned}\delta X &= \delta\psi \sin \epsilon_A + (\psi_A \cos \epsilon_0 - \chi_A) \delta\epsilon, \\ \delta Y &= \delta\epsilon - (\psi_A \cos \epsilon_0 - \chi_A) \delta\psi \sin \epsilon_A.\end{aligned}\tag{14.22}$$

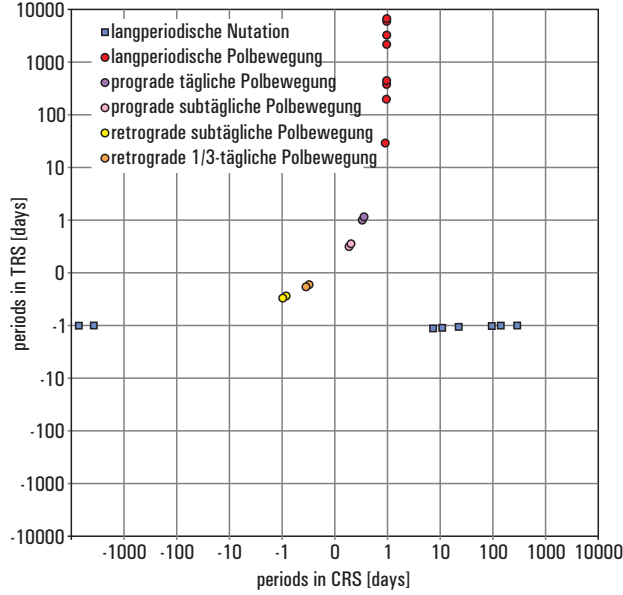


Abbildung 14.4: Perioden im CRS und TRS.

Die Winkel ϵ_A , ψ_A und χ_A sind in Figur (14.5) beschrieben werden weiter unten diskutiert. Mit Hilfe des Offsets ist die korrigierte Position des CIP im GCRS gegeben werden durch:

$$\begin{aligned} X &= X_{\text{IAU}} + \delta X, \\ Y &= Y_{\text{IAU}} + \delta Y. \end{aligned} \quad (14.23)$$

14.4.2 Das IAU 2000 Präzession-Nutation-Modell

Das Präzession-Nutation-Modell IAU 2000A ersetzt ab dem 1. Januar 2003 das IAU 1976 Präzessionsmodell (Lieske 1977) und das IAU 1980 Nutationsmodell.

Die Grundlage für dieses Modell bildete das MHB2000 Nutationsmodell, welches in Mathews et al., (2002) aufgestellt wurde. Dieses Modell liefert Werte für die Transferfunktion T , die die Nutationsamplituden η eines realistischen Erdmodells mit denjenigen einer starren Erde η_R verknüpft. Die Nutationsamplituden für eine starre Erde sind aus dem Modell REN-2000 (Souchay et al., 1999) entnommen worden. Im MHB2000 Modell gilt der Zusammenhang:

$$\eta(\sigma; e) = T(\sigma; e|e_R) \eta_R(\sigma; e_R) \quad (14.24)$$

mit σ als dimensionsloser Frequenz $f = \sigma\Omega$, sowie e und e_R als Elliptizität einer reellen bzw. einer starren Erde. Die Transferfunktion kann durch:

$$T(\sigma; e|e_R) = \frac{e_R - \sigma}{e_R + 1} \left[N_0 + (1 + \sigma) \left(Q_0 + \sum_{\alpha=1}^4 \frac{Q_\alpha}{\sigma - s_\alpha} \right) \right] \quad (14.25)$$

approximiert werden. Die Werte für N_0 , Q_0 , Q_α und für die Resonanzfrequenzen s_α werden in Mathews (2000) angegeben. Im Vergleich zum IAU 1980 Nutationsmodell ist es möglich, mit

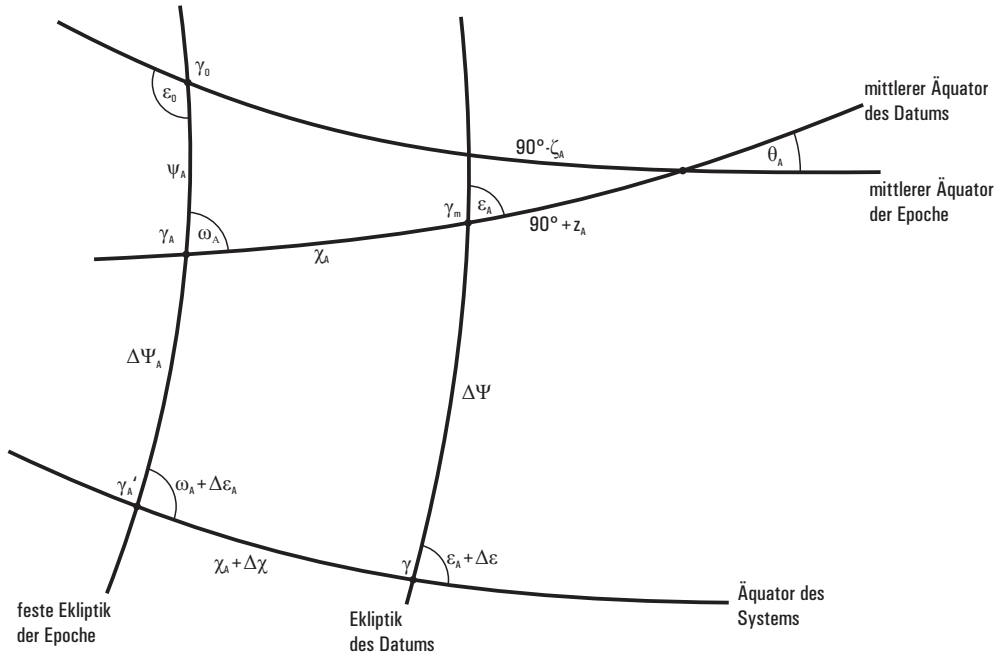


Abbildung 14.5: Verschiedene Präzessions- und Nutationswinkel.

dem MHB2000 Modell die Wirkungen der Ozeangezeiten, der Atmosphäre, die Anelastizität des Mantels und die elektromagnetischen Kopplungen (Kern-Mantel, innerer Kern, äußerer Kern) zu berücksichtigen (Schuh et al., 2003).

Die freie Kernnutration ist im IAU 2000A Modell nicht enthalten. Sie kann nicht eindeutig in ein Modell gefasst werden, wird allerdings durch kontinuierliche VLBI-Beobachtungen geliefert. Im Gegensatz dazu ist die geodätische Nutation im IAU 2000A Modell enthalten. Sie wird zu den Zahlenwerten der MHB2000 Nutationsreihe addiert (Schuh et al., 2003).

Das IAU-2000 Nutationsmodell wird beschrieben durch eine Reihe für die Nutation in der Länge $\Delta\psi$ und in der Schiefe $\Delta\epsilon$, bezogen auf die mittlere Ekliptik des Datums:

$$\begin{aligned}\Delta\psi &= \sum_{i=1}^N (A_i + A'_i t) \sin(\arg) + (A''_i + A'''_i t) \cos(\arg), \\ \Delta\epsilon &= \sum_{i=1}^N (B_i + B'_i t) \cos(\arg) + (B''_i + B'''_i t) \sin(\arg).\end{aligned}$$

(14.26)

Diese Reihe ist auf der Daten-CD im Ordner Tabellen unter IAU2000-nuta.txt und IAU2000-nutb.txt für die 678 lunisolaren und 687 planetaren Komponenten zu finden. Ein Auszug aus den Tabellen ist in Tabelle 14.3 dargestellt.

Das IAU 2000B Modell ist eine kürzere Version und daher eine etwas ungenauere Version des IAU 2000 Modelles. Es beschreibt die Bewegung des CIP im GCRS im Vergleich zum IAU 2000A Modell mit einer Genauigkeit von 1 mas im Zeitfenster von 1950-2050. Dieses Modell beinhaltet weniger als 80 lunisolare Terme und einen Beitrag der planetaren Terme. Die folgenden Reihen sind von Capitaine (2003c) für die Präzessionswinkel ζ_A, θ_A und z_A

Tabelle 14.3: Diese beinhaltet einen Auszug aus den Tabellen IAU2000A-ls.txt (lunisolare Nutation) und IAU2000B-pl(planetare Nutation). Die kompletten Tabellen sind auf der Daten-CD zu finden. Hier sind nur die größten Terme aufgelistet. Einheiten sind mas und mas/c für die Koeffizienten und ihre zeitliche Veränderungen. Die Perioden sind in Tagen angegeben. Die Fundamentalwinkel Ω , F , D , l , l' sind in (14.31) gegeben. Die mittleren Längen (l_{Me} , l_{Ve} , l_E , l_{Ma} , l_{Ju} , l_{Sa} , l_{Ur} , l_{Ne}) und die allgemeine Präzession in der Länge p_a sind in (14.33) definiert.

l	l'	F	D	Ω	Periode	A_i	A'_i	B_i	B'_i	A''_i	A'''_i	B''_i	B'''_i
0	0	0	0	1	-6798.383	-17206.4161	-17.4666	9205.2331	0.9086	3.3386	0.0029	1.5377	0.0002
0	0	2	-2	2	182.621	-1317.0906	-0.1675	573.0336	-0.3015	-1.3696	0.0012	-0.4587	-0.0003
0	0	2	0	2	13.661	-227.6413	-0.0234	97.8459	-0.0485	0.2796	0.0002	0.1374	-0.0001
0	0	0	0	2	-3399.192	207.4554	0.0207	-89.7492	0.0470	-0.0698	0.0000	-0.0291	0.0000
0	1	0	0	0	365.260	147.5877	-0.3633	7.3871	-0.0184	1.1817	-0.0015	-0.1924	0.0005
0	1	2	-2	2	121.749	-51.6821	0.1226	22.4386	-0.0677	-0.0524	0.0002	-0.0174	0.0000
1	0	0	0	0	27.555	71.1159	0.0073	-0.6750	0.0000	-0.0872	0.0000	0.0358	0.0000
0	0	2	0	1	13.633	-38.7298	-0.0367	20.0728	0.0018	0.0380	0.0001	0.0318	0.0000
1	0	2	0	2	9.133	-30.1461	-0.0036	12.9025	-0.0063	0.0816	0.0000	0.0367	0.0000
0	-1	2	-2	2	365.225	21.5829	-0.0494	-9.5929	0.0299	0.0111	0.0000	0.0132	-0.0001

l	l'	F	D	Ω	L_{Me}	L_{Ve}	L_E	L_{Ma}	L_J	L_{Sa}	L_U	L_{Ne}	p_A	Periode	Länge		Schiefe	
l	l'	F	D	Ω	L_{Me}	L_{Ve}	L_E	L_{Ma}	L_J	L_{Sa}	L_U	L_{Ne}	p_A		A_i	A'_i	B_i	B'_i
0	0	1	-1	1	0	0	-1	0	-2	5	0	0	0	311921.26	-0.3084	0.5123	0.1647	0.2735
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	5	0	0	1	311927.52	-0.1444	0.2409	-0.0771	-0.1286
0	0	0	0	0	0	-3	5	0	0	0	0	0	2	2957.35	-0.2150	0.0000	0.0932	0.0000
0	0	1	-1	1	0	-8	12	0	0	0	0	0	0	-88082.01	0.1200	0.0598	-0.0641	0.0319
0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	2	2165.30	-0.1166	0.0000	0.0505	0.0000
0	0	0	0	0	0	0	4	-8	3	0	0	0	0	-651391.30	-0.0462	0.1604	0.0000	0.0000
0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	583.92	0.1485	0.0000	0.0000	0.0000
0	0	0	0	0	0	0	8	-16	4	5	0	0	0	034075700.82	0.1440	0.0000	0.0000	0.0000
0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	398.88	-0.1223	-0.0026	0.0000	0.0000
0	0	0	0	1	0	0	-1	2	0	0	0	0	0	37883.60	-0.0460	-0.0435	0.0246	-0.0232

aus dem IAU2000 Modell entwickelt worden:

$$\begin{aligned}
\zeta_A &= 2.5976176'' + 2306.0809506''t + 0.3019015''t^2 + 0.0179663''t^3 \\
&\quad - 0.0000327''t^4 - 0.0000002''t^5 \\
\theta_A &= 2004.1917476''t - 0.4269353''t^2 - 0.0418251''t^3 \\
&\quad - 0.0000601''t^4 - 0.0000001''t^5 \\
z_A &= -2.5976176'' + 2306.0803226''t + 1.0947790''t^2 + 0.0182273''t^3 \\
&\quad + 0.0000470''t^4 - 0.0000003''t^5
\end{aligned} \tag{14.27}$$

Festzustellen ist, dass die neuen Ausdrücke für die Winkel ζ_A und z_A einen konstanten Term mit entgegengesetzten Vorzeichen enthalten.

Weitere Präzessionswinkel ergeben sich aus dem IAU 2000A Modell gemäß

$$\begin{aligned}
 \psi_A &= 5038.47875''t - 1.07259''t^2 - 0.001147''t^3, \\
 \omega_A &= \epsilon_0 - 0.02524''t + 0.05127''t^2 - 0.007726''t^3, \\
 \epsilon_A &= \epsilon_0 - 46.84024''t - 0.00059''t^2 + 0.001813''t^3, \\
 \chi_A &= 10.5526''t - 2.38064''t^2 - 0.001125''t^3
 \end{aligned} \tag{14.28}$$

mit

$$t = (\text{JD}_{\text{TT}} - \text{JD}_{\text{J2000.0}}) / 36525.$$

Mit Hilfe dieser Winkel kann die Präzession \mathcal{P} beschrieben werden durch:

$$\mathcal{P} = R_1(-\epsilon_0) R_3(\psi_A) R_1(\omega_A) R_3(-\chi_A). \tag{14.29}$$

Bei diesen Beschreibungen der Präzessionsbewegung wird TT als Zeitskala verwendet. In den originalen Entwicklungen ist t definiert durch TDB. Jedoch kann auch TT anstelle von TDB genutzt werden. Die Differenz TDB-TT entspricht $1.7 \text{ mas} \times \sin l'$. Der resultierende Fehler in der Präzessionsgröße ψ_A hat eine jährliche Periode und eine Amplitude von $2.7'' \times 10^{-9}$. Bei einer geforderten Genauigkeit im Mikrobogensekundenbereich hat die Verwendung von TT keine Auswirkungen auf die Präzessionsmatrix (McCarthy 2003).

14.4.3 Fundamentale Argumente der Nutation

Jeder der lunisolaren Terme in der Nutationsreihe wird durch einen Satz von fünf Zahlen N_j charakterisiert. Sie definieren das Argument (arg) für den Term als lineare Kombination der fünf Fundamentalen Argumente F_j , die als Delaunay Variablen (l, l', F, D, Ω) bezeichnet werden:

$$\text{arg} = \sum_{j=1}^5 N_j F_j. \tag{14.30}$$

Die Fundamentalen Argumente sind Funktionen der Zeit und für die lunisolare Nutation gegeben durch (14.31). Sie basieren auf IERS 1992 Konstanten und auf den Resultaten in

Williams et al., (1991) für die Präzession.

$$\begin{aligned}
F_1 \equiv l &= \text{mittlere Anomalie des Mondes} \\
&= 134.96340251^\circ + 1717915923.2178''t + 31.8792''t^2 \\
&\quad + 0.051635''t^3 - 0.00024470''t^4, \\
F_2 \equiv l' &= \text{mittlere Anomalie der Sonne} \\
&= 357.52910918^\circ + 129596581.0481''t - 0.5532''t^2 \\
&\quad + 0.000136''t^3 - 0.00001149''t^4 \\
F_3 \equiv F &= L - \Omega \\
&= 93.27209062^\circ + 1739527262.8478''t - 12.7512''t^2 \\
&\quad - 0.001037''t^3 + 0.00000417''t^4 \\
F_4 \equiv D &= \text{mittlere Elongation des Mondes von der Sonne} \\
&= 297.85019547^\circ + 1602961601.2090''t - 6.3706''t^2 \\
&\quad + 0.006593''t^3 - 0.00003169''t^4 \\
F_5 \equiv \Omega &= \text{mittlere Länge des aufsteigenden Knotens des Mondes} \\
&= 125.04455501^\circ - 6962890.5431''t + 7.4722''t^2 \\
&\quad + 0.007702''t^3 - 0.00005939''t^4
\end{aligned} \tag{14.31}$$

Hierbei ist t definiert durch:

$$t = (\text{JD}_{\text{TT}} - \text{JD}_{\text{J2000.0}}) / 36525.$$

Die planetaren Nutationsterme unterscheiden sich von den lunisolaren Termen nur im Argument. Es werden bei diesen Termen neben den Delaunay Variablen, die mittleren Längen der Planeten und die allgemeine Präzession in der Länge als Argumente benötigt.

$$\arg = \sum_{j=1}^{14} N_j F_j \tag{14.32}$$

F_6 bis F_{13} sind die mittleren Längen der Planeten Merkur bis Neptun einschließlich der Erde (l_{Me} , l_{Ve} , l_E , l_{Ma} , l_{Ju} , l_{Sa} , l_{Ur} , l_{Ne}) und F_{14} ist die allgemeine Präzession in der Länge p_a . Die mittleren Längen sind gegeben in Souchay (1999), basierend auf den Theorien und Konstanten von VSOP82 (Bretagnon 1982) und ELP 2000 (Chapront & Chapront-Touze 1983), sowie auf den Entwicklungen in (Simon et al., 1994). Die mittleren Längen der

Planeten sind in Radiant gegeben durch:

$$\begin{aligned}
F_6 &\equiv l_{Me} = 4.402608842 + 2608.7903141574 \times t \\
F_7 &\equiv l_{Ve} = 3.176146697 + 1021.3285546211 \times t \\
F_8 &\equiv l_E = 1.753470314 + 628.3075849991 \times t \\
F_9 &\equiv l_{Ma} = 6.203480913 + 334.0612426700 \times t \\
F_{10} &\equiv l_{Ju} = 0.599546497 + 52.9690962641 \times t \\
F_{11} &\equiv l_{Sa} = 0.874016757 + 21.3299104960 \times t \\
F_{12} &\equiv l_{Ur} = 5.481293872 + 7.4781598567 \times t \\
F_{13} &\equiv l_{Ne} = 5.311886287 + 3.8133035638 \times t \\
F_{14} &\equiv p_a = 0.024381750 \times t + 0.00000538691 \times t^2
\end{aligned} \tag{14.33}$$

mit

$$t = (\text{JD}_{\text{TT}} - \text{JD}_{\text{J2000.0}}) / 36525.$$

In den originalen Entwicklungen ist t gegeben in TDB. Jedoch kann TT anstelle von TDB genutzt werden. Die Differenz TDB-TT entspricht $0.9 \text{ mas} \times \sin l'$ für die größten Effekte in den Argumenten der Nutation. Dies liefert eine unerhebliche Differenz (kleiner als $10^{-2} \mu\text{as}$ mit einer Periode von einem Jahr) in den entsprechenden Amplituden der Nutation (McCarthy 2003).

14.4.4 Die Reihen von Capitaine et al.

Mit Hilfe von Reihen können die Koordinaten X und Y des CIP im GCRS mit einer Genauigkeit im μs -Bereich gegeben werden. Diese basieren auf dem IAU2000A Modell der Präzession Nutation und den entsprechenden Pole Offsets der Epoche J2000 im Bezug auf den GCRS Pol. Sie haben folgende Form:

$$\begin{aligned}
X &= -0.016617'' + 2004.191743''t - 0.4272191''t^2 \\
&\quad - 0.19862054''t^3 - 0.00004605''t^4 + 0.00000598''t^5 \\
&\quad + \sum_i [(a_{s,0})_i \sin(\arg) + (a_{c,0})_i \cos(\arg)] \\
&\quad + \sum_i [(a_{s,1})_i t \sin(\arg) + (a_{c,1})_i t \cos(\arg)] \\
&\quad + \sum_i [(a_{s,2})_i t^2 \sin(\arg) + (a_{c,2})_i t^2 \cos(\arg)] \\
&\quad + \sum_i [(a_{s,3})_i t^3 \sin(\arg) + (a_{c,3})_i t^3 \cos(\arg)] \\
&\quad + \sum_i [(a_{s,4})_i t^4 \sin(\arg) + (a_{c,4})_i t^4 \cos(\arg)]
\end{aligned} \tag{14.34}$$

$$\begin{aligned}
Y = & -0.006951'' - 0.025382''t - 22.4072510''t^2 \\
& + 0.00184228''t^3 + 0.00111306''t^4 + 0.00000099''t^5 \\
& + \sum_i [(b_{c,0})_i \cos(\arg) + (b_{s,0})_i \sin(\arg)] \\
& + \sum_i [(b_{c,1})_i t \cos(\arg) + (b_{s,1})_i t \sin(\arg)] \\
& + \sum_i [(b_{c,2})_i t^2 \cos(\arg) + (b_{s,2})_i t^2 \sin(\arg)] \\
& + \sum_i [(b_{c,3})_i t^3 \cos(\arg) + (b_{s,3})_i t^3 \sin(\arg)] \\
& + \sum_i [(b_{c,4})_i t^4 \cos(\arg) + (b_{s,4})_i t^4 \sin(\arg)],
\end{aligned} \tag{14.35}$$

wobei t definiert ist durch:

$$t = (\text{JD}_{\text{TT}} - \text{JD}_{\text{J2000.0}}) / 36525.$$

Die Beiträge des Frame Bias in μs (s.unten) zu den Ausdrücken (14.34) und (14.35) sind gegeben durch:

$$\begin{aligned}
dX &= -16617.0 - 1.6t^2 + 0.7 \cos \Omega, \\
dY &= -6819.2 - 141.9t + 0.5 \sin \Omega.
\end{aligned} \tag{14.36}$$

Die Reihen sind auf der Daten-CD im Ordner Tabellen unter 5.2a.txt für die X Koordinate und unter 5.2b.txt für die Y Koordinate zu finden. Die Tabelle 14.4 stellt einen Auszug aus 5.2a.txt und 5.2b.txt für die größten nicht polynomialen Terme dar.

14.4.5 Beschreibung von X und Y des CIP durch das IAU 2000 Modell

Die Koordinaten X und Y können auch zu jeder Zeit t als eine Funktion von Präzessions- und Nutationsgrößen durch das IAU 2000 Modell geliefert werden. Der Zusammenhang zwischen den Koordinaten X und Y und den Präzessions- und Nutationsgrößen lautet (Capitaine, 1990):

$$\begin{aligned}
X &= \bar{X} + \xi_0 - d\alpha_0 \bar{Y}, \\
Y &= \bar{Y} + \eta_0 + d\alpha_0 \bar{X}.
\end{aligned} \tag{14.37}$$

Die Größen ξ_0 , η_0 und $d\alpha_0$ sind die unten beschriebenen Korrekturen des Frame-Bias.

Die Größen \bar{X} und \bar{Y} sind gegeben durch (Abb. 14.5)

$$\begin{aligned}
\bar{X} &= \sin \omega \sin \psi, \\
\bar{Y} &= -\sin \epsilon_0 \cos \omega + \cos \epsilon_0 \sin \omega \cos \psi
\end{aligned} \tag{14.38}$$

gegeben. ($\epsilon_0 = 84381.448''$) ist die Schiefe der Ekliptik der Epoche J2000. Weiterhin gilt:

$$\omega = \omega_A + \Delta\epsilon_1, \quad \psi = \psi_A + \Delta\psi_1. \tag{14.39}$$

Tabelle 14.4: Auszug aus den Tabellen 5.2a und 5.2b für die größten nicht-polynomialen Terme in den Entwicklungen (14.34) für $X(t)$ (oberer Teil) und (14.35) für $Y(t)$ (unterer Teil) (Einheit μas). Die Ausdrücke für die fundamentalen Argumente in den Spalten 4 bis 17 sind gegeben in (14.31) und (14.33).

i	$(a_{s,0})_i$	$(a_{c,0})_i$	l	l'	F	D	Ω	L_{Me}	L_{Ve}	L_E	L_{Ma}	L_J	L_{Sa}	L_U	L_{Ne}	p_A
1	-6844318.44	1328.67	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-523908.04	-544.76	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	-90552.22	111.23	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	82168.76	-27.64	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	58707.02	470.05	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.....																
i	$(a_{s,1})_i$	$(a_{c,1})_i$	l	l'	F	D	Ω	L_{Me}	L_{Ve}	L_E	L_{Ma}	L_J	L_{Sa}	L_U	L_{Ne}	p_A
1307	-3328.48	205833.15	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1308	197.53	12814.01	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1309	41.19	2187.91	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.....																
i	$(b_{s,0})_i$	$(b_{c,0})_i$	l	l'	F	D	Ω	L_{Me}	L_{Ve}	L_E	L_{Ma}	L_J	L_{Sa}	L_U	L_{Ne}	p_A
1	1538.18	9205236.26	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-458.66	573033.42	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	137.41	97846.69	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	-29.05	-89618.24	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	-17.40	22438.42	0	1	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.....																
i	$(b_{s,1})_i$	$(b_{c,1})_i$	l	l'	F	D	Ω	L_{Me}	L_{Ve}	L_E	L_{Ma}	L_J	L_{Sa}	L_U	L_{Ne}	p_A
963	153041.82	878.89	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
964	11714.49	-289.32	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
965	2024.68	-50.99	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.....																

Hier sind ω_A und ψ_A die Präzessionsgrößen in der Länge und in der Schiefe (Lieske et al., 1977) bezogen auf die Ekliptik der Epoche. Diese Präzessionswinkel sind in (??) und (??) gegeben. $\Delta\psi_1$ und $\Delta\epsilon_1$ sind die Nutationswinkel in der Länge und in der Schiefe. Diese beziehen sich auf die Ekliptik der Epoche und können aus den Nutationswinkeln $\Delta\psi$ und $\Delta\epsilon$, die sich auf die Ekliptik des Datums beziehen, abgeleitet werden .

Der folgende Ausdruck hat eine Genauigkeit von einer Mikrobogensekunde über ein Jahrhundert (Aoki & Kinoshita, 1983):

$$\begin{aligned} \Delta\psi_1 \sin \omega_A &= \Delta\psi \sin \epsilon_A \cos \chi_A - \Delta\epsilon \sin \chi_A, \\ \Delta\epsilon_1 &= \Delta\psi \sin \epsilon_A \sin \chi_A + \Delta\epsilon \cos \chi_A. \end{aligned} \tag{14.40}$$

ω_A und ϵ_A sind Präzessionsgrößen in der Schiefe bezogen auf die Ekliptik der Epoche und die Ekliptik des Datums. χ_A ist die Präzession der Ekliptik entlang des Äquators (Lieske 1977).

14.4.6 Die Bias-Matrix

Die oben angegebenen kartesischen Koordinaten des CIP im GCRS kann man auf einfache Art und Weise aus der Matrix

$$\mathcal{M} = \mathcal{N}\mathcal{P}\mathcal{B} \tag{14.41}$$

erhalten. Hier ist \mathcal{P} wieder die Präzessionsmatrix, \mathcal{N} die Nutationsmatrix und \mathcal{B} die sogenannte Bias-Matrix:

$$\mathcal{B} = \mathcal{R}_1(-\eta_0)\mathcal{R}_2(\xi_0)\mathcal{R}_3(d\alpha_0). \quad (14.42)$$

Diese zeitunabhängige Matrix führt einen Vektor im GCRS in einen entsprechenden Vektor im mittleren System der Epoche J2000.0 über. Die Größen ξ_0 und η_0 beschreiben die Position des CIP im GCRS zur Epoche J2000.0:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= (-0.0166170 \pm 0.0000100)'' \\ \eta_0 &= (-0.0068192 \pm 0.0000100)'' . \end{aligned} \quad (14.43)$$

$d\alpha_0$ ist die Rektaszension des mittleren Äquinoktiums J2000 im GCRS (Chapront et al., 2002):

$$d\alpha_0 = (-0.01460 \pm 0.00050)'' . \quad (14.44)$$

14.5 Bewegung des CIP im ITRS

Die Polkoordinaten x und y werden von der IERS veröffentlicht. Zu diesen müssen die Komponenten der Ozeangezeiten und die lunisolaren Terme mit Perioden kleiner als 2 Tage (im GCRS) addiert werden. Somit gilt:

$$(x_p, y_p) = (x, y)_{\text{IERS}} + (\Delta x, \Delta y)_{\text{GZ}} + (\Delta x, \Delta y)_{\text{LS}}. \quad (14.45)$$

Hier sind $(x, y)_{\text{IERS}}$ die Polkoordinaten veröffentlicht durch den IERS, $(\Delta x, \Delta y)_{\text{GZ}}$ die Gezeitenkomponenten und $(\Delta x, \Delta y)_{\text{LS}}$ die lunisolaren Komponenten.

14.5.1 IERS Terme

Durch das IERS Bulletin A und das Bulletin B werden $(x, y)_{\text{IERS}}$ herausgegeben. Das Bulletin A und Bulletin B enthält die Erdorientierungsparameter (EOP). Dazu zählen neben den Daten für die Polbewegung, die Celestial Pole Offsets und die Differenz UT1-UTC. Sie werden aus VLBI, SLR, LLR, GPS und DORIS Messungen gewonnen. Nach der Analyse der Messwerte erfolgt die Berechnung der EOP. Es werden Korrekturen angebracht und Gewichtungen vorgenommen. Die Ergebnisse erscheinen wöchentlich im IERS Bulletin A. Nach Berücksichtigung weiterer Korrekturen und zusätzlicher Berechnungen wird das Bulletin B aufgestellt. Das IERS Bulletin B stellt die Standardlösung dar. Es wird monatlich veröffentlicht und enthält Werte für einen Zeitraum von 90 Tagen. Die Polbewegungskomponenten werden für jeweils 0h UTC herausgegeben und müssen für den Zeitpunkt der Transformation interpoliert werden.

14.5.2 Gezeitenterme

Die Korrekturen $(\Delta x, \Delta y)_{\text{GZ}}$ werden verursacht durch Ozeangezeiten und haben tägliche und subtägliche Perioden. Sie können unter Nutzung von Routinen berechnet werden, die auf der IERS-Webseite verfügbar sind (s.auch Ray et al., 1994).

Die Tabelle 14.5 liefert Amplituden und Argumente für tägliche und subtägliche Terme. Insgesamt werden im Modell 41 tägliche und 30 subtägliche Gezeitenterme betrachtet. Die kompletten Tabellen sind in (McCarthy & Petit 2003) als auch auf der Daten-CD im Ordner Tabellen unter gezeitenterme.txt zu finden. Diese Werte sind nicht in den IERS-Polbewegungswerten beinhaltet und müssen zu diesen addiert werden.

Tabelle 14.5: Tabelle für die täglichen (oben) und subtäglichen (unten) Schwankungen der Polbewegung aufgrund der Ozeangezeiten. Angegeben sind jeweils die größten Terme. Die Einheit ist μas ; χ bezeichnet $\text{GMST} + \pi$. Die Fundamentalwinkel l, l', F, D und Ω sind in (14.31) gegeben.

Tide	χ	Argument					Doodson zahl	Periode (Tage)	x_p		y_p	
		l	l'	F	D	Ω			sin	cos	sin	cos
2Q1	1	-2	0	-2	0	-2	125.755	1.1669259	0.3	3.4	-3.4	0.3
σ 1	1	0	0	-2	-2	-2	127.555	1.1603495	0.5	4.2	-4.1	0.5
Q1	1	-1	0	-2	0	-2	135.655	1.1195148	6.2	26.3	-26.3	6.2
RO1	1	1	0	-2	-2	-2	137.455	1.1134606	1.3	5.0	-5.0	1.3
O1	1	0	0	-2	0	-2	145.555	1.0758059	48.8	132.9	-132.9	48.8
M1	1	-1	0	0	0	0	155.655	1.0347187	-4.5	-9.6	9.6	-4.5
P1	1	0	0	-2	2	-2	163.555	1.0027454	26.1	51.2	-51.2	26.1
K1	1	0	0	0	0	0	165.555	0.9972695	-77.5	-151.7	151.7	-77.5
	1	0	0	0	0	-1	165.565	0.9971233	-10.5	-20.6	20.6	-10.5
J1	1	1	0	0	0	0	175.455	0.9624365	-3.5	-7.3	7.3	-3.5
2N2	2	-2	0	-2	0	-2	235.755	0.5377239	-6.1	-1.6	3.1	3.4
μ 2	2	0	0	-2	-2	-2	237.555	0.5363232	-7.6	-2.0	3.4	4.2
N2	2	-1	0	-2	0	-2	245.655	0.5274312	-56.9	-12.9	11.1	32.9
ν 2	2	1	0	-2	-2	-2	247.455	0.5260835	-11.0	-2.4	1.9	6.4
M2	2	0	0	-2	0	-2	255.555	0.5175251	-330.2	-27.0	37.6	195.9
L2	2	1	0	-2	0	-2	265.455	0.5079842	9.4	-1.4	-1.9	-5.6
T2	2	0	-1	-2	2	-2	272.556	0.5006854	-8.5	3.5	3.3	5.1
S2	2	0	0	-2	2	-2	273.555	0.5000000	-144.1	63.6	59.2	86.6
K2	2	0	0	0	0	0	275.555	0.4986348	-38.5	19.1	17.7	23.1
	2	0	0	0	0	-1	275.565	0.4985982	-11.4	5.8	5.3	6.9

14.5.3 Lunisolare Terme

Gemäß der Definition des CIP, werden astronomisch forcierte Terme mit Perioden kleiner als 2 Tage im GCRS der Polbewegung zugeordnet. Tabelle 14.6 (Mathews & Bretagnon 2003) gibt hierüber einen Überblick. Für weitere Details sei der Leser auf Brzezinski und Capitaine (1993) verwiesen.

Tabelle 14.6: Koeffizienten von $\sin(\arg)$ und $\cos(\arg)$ mit $\arg = \pm\Theta_\omega(t)$ in $(\Delta x, \Delta y)_{LS}$ aufgrund des Gezeitenpotenzials vom Grad n . Die Einheit ist μas . Es werden nur Terme mit Amplituden größer als $0,5 \mu\text{as}$ angegeben. Die Fundamentalwinkel l, l', F, D und Ω sind durch (14.31) definiert und die Periode in Tagen gegeben.

n	$\Phi + \pi$	Argument					Periode PM	x_p		y_p		Periode Nutation
		l	l'	F	D	Ω		sin	cos	sin	cos	
3	0	-1	0	-1	0	-1	-13.719	1.39	0.17	-0.17	1.39	1.07545
3	0	0	0	-1	0	0	-27.212	2.48	0.30	-0.30	2.48	1.03521
3	0	0	0	-1	0	-1	-27.322	15.75	1.93	-1.93	15.75	1.03505
3	0	0	0	-1	0	-2	-27.432	-0.82	-0.10	0.10	-0.82	1.03489
3	0	-1	0	-1	2	-1	-193.560	0.81	0.10	-0.10	0.81	1.00243
3	0	1	0	-1	0	0	-2190.35	1.86	0.24	-0.24	1.86	0.99772
3	0	1	0	-1	0	-1	-3231.50	12.32	1.59	-1.59	12.32	0.99758
3	0	1	0	-1	0	-2	-6159.14	-0.68	-0.09	0.09	-0.68	0.99743
3	0	-1	0	1	0	2	6159.14	0.78	0.09	-0.09	0.78	0.99711
3	0	-1	0	1	0	1	3231.50	-16.16	-1.83	1.83	-16.16	0.99696
3	0	-1	0	1	0	0	2190.35	-2.78	-0.31	0.31	-2.78	0.99682
3	0	1	1	-1	0	0	438.360	-0.63	0.12	-0.12	-0.63	0.99501
3	0	1	1	-1	0	-1	411.807	1.05	0.27	-0.27	1.05	0.99486
3	0	0	0	1	-1	1	365.242	1.31	0.20	-0.20	1.31	0.99455
3	0	1	0	1	-2	1	193.560	2.10	0.27	-0.27	2.10	0.99216
3	0	0	0	1	0	2	27.432	-0.87	-0.11	0.11	-0.87	0.96229
3	0	0	0	1	0	1	27.322	16.64	2.04	-2.04	16.64	0.96215
3	0	0	0	1	0	0	27.212	2.62	0.32	-0.32	2.62	0.96201
3	0	1	0	1	0	1	13.719	1.28	0.16	-0.16	1.28	0.92969
2	1	-1	0	-2	0	-1	1.11970	-0.44	0.25	-0.25	-0.44	0.52747
2	1	-1	0	-2	0	-2	1.11951	-2.31	1.32	-1.32	-2.31	0.52743
2	1	1	0	-2	-2	-2	1.11346	-0.44	0.25	-0.25	-0.44	0.52608
2	1	0	0	-2	0	-1	1.07598	-2.14	1.23	-1.23	-2.14	0.51756
2	1	0	0	-2	0	-2	1.07581	-11.36	6.52	-6.52	-11.36	0.51753
2	1	-1	0	0	0	0	1.03472	0.84	-0.48	0.48	0.84	0.50782
2	1	0	0	-2	2	-2	1.00275	-4.76	2.73	-2.73	-4.76	0.50000
2	1	0	0	0	0	0	0.99727	14.27	-8.19	8.19	14.27	0.49863
2	1	0	0	0	0	-1	0.99712	1.93	-1.11	1.11	1.93	0.49860
2	1	1	0	0	0	0	0.96244	0.76	-0.43	0.43	0.76	0.48977
Rate der säkularen Polbewegung ($\mu\text{as}/y$) aufgrund der Null Frequenztide												
4	0	0	0	0	0	0						
									-3.80		-4.31	0.99727

Kapitel 15

CIO, TIO, ERA und GST

15.1 Der CIO

Der Celestäre Intermediäre Pol (CIP) realisiert die z -Achse des astronomischen intermediären Systems und ersetzt damit den instantanen Rotationspol des klassischen Konzeptes. Die klassische Wahl der intermediären x -Achse, gegeben durch das Äquinoktium des Datums hängt an der komplizierten Bewegung der Erde um die Sonne. Dies ist für die aktuelle Wahl der intermediären astronomischen x -Achse, dem Celestären Intermediären Ursprung (CIO: celestial intermediate origin), nicht mehr der Fall: die Dynamik des CIO ergibt sich alleine aus der Bewegung des CIP im GCRS.

Die räumlichen Koordinaten des GCRS wollen wir mit großen Buchstaben (X,Y,Z) bezeichnen, diejenigen des intermediären System mit kleinen Buchstaben (x,y,z) . Die z -Achse ist durch den CIP gegeben und die x -Achse wollen wir durch einen Punkt σ auf des CIP-Äquator markieren. Dies ist in Abb. 15.2 dargestellt, wo die X -Achse des GCRS mit Σ_0 markiert wurde.

Der CIO (σ) auf dem intermediären Äquator sei kinematisch so definiert, dass das intermediäre System zu keinem Zeitpunkt eine Winkelgeschwindigkeit um den CIP aufweist, d.h., σ hat keine Geschwindigkeitskomponente längs des CIP-Äquators. Diese Bedingung als nicht-rotierender Ursprung (NRO), zusammen mit einer geeignet gewählten Position zur Epoche $J2000.0$ liegt den CIO eindeutig fest.

Wir wollen im Weiteren den CIP durch dessen Kugelkoordinaten (d,E) beschreiben und den CIO durch einen Winkel s so, dass der Knoten N in Abb. 15.2 im CIP-Äquator die Länge $90^\circ + E + s$ aufweist. Man beachte, dass im GCRS die entsprechende Länge durch $90^\circ + E$ gegeben ist. Danach ist die Transformation vom GCRS ins intermediäre System durch

$$\mathcal{R}_3(-90^\circ + E + s)\mathcal{R}_1(d)\mathcal{R}_3(90^\circ + E) \quad (15.1)$$

gegeben. Die erste Drehung erfolgt dabei um die Z -Achse des GCRS mit Einheitsvektor \mathbf{n}_Z , die zweite um die durch \mathbf{n}_N beschriebene Knotenachse und die dritte um den CIP mit Einheitsvektor \mathbf{n}_P . Daraus ergibt sich, dass die momentane Winkelgeschwindigkeit des intermediären Systems im GCRS durch

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{E}\mathbf{n}_Z + \dot{d}\mathbf{n}_N - (\dot{E} + \dot{s})\mathbf{n}_P \quad (15.2)$$

gegeben ist. Eine Projektion dieser Winkelgeschwindigkeit auf \mathbf{n}_P liefert $(\mathbf{n}_Z \cdot \mathbf{n}_P = \cos d)$

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}_P = \dot{E}(\cos d - 1) - \dot{s}, \quad (15.3)$$

d.h., der CIO muss folgende dynamische Gleichung erfüllen:

$$s(t) = \int_{t_0}^t (\cos d - 1) \dot{E} dt - (\sigma_0 N_0 - \Sigma_0 N_0). \quad (15.4)$$

Aus $X = \sin d \cos E, Y = \sin d \sin E, Z = \cos d$ für die kartesischen GCRS-Koordinaten des CIP hat man

$$X\dot{Y} - Y\dot{X} = \dot{E}(1 - \cos^2 d),$$

sodass sich die dynamische Gleichung für s auch so schreiben lässt (z.B., Capitaine et al., 1986):

$$s = - \int_{t_0}^t \frac{1}{1 + Z} \left(X \frac{dY}{dt} - Y \frac{dX}{dt} \right) dt - (\sigma_0 N_0 - \Sigma_0 N_0).$$

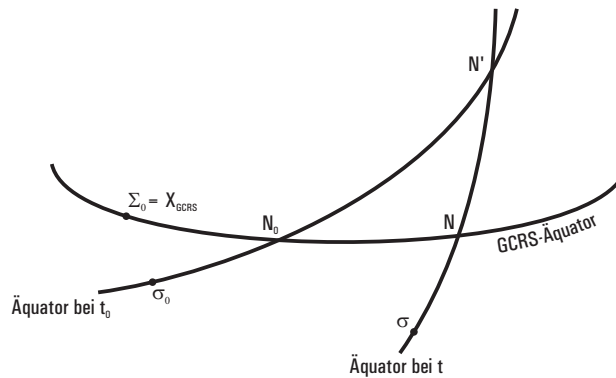


Abbildung 15.1: Ableitung von σ zum Zeitpunkt t .

Die Festlegung

$$\sigma_0 N_0 = \Sigma_0 N_0 \quad (15.5)$$

vervollständigt dann die Definition des CIO, so dass gilt:

$$s = - \int_{t_0}^t \frac{1}{1 + Z} \left(X \frac{dY}{dt} - Y \frac{dX}{dt} \right) dt. \quad (15.6)$$

15.1.1 Darstellung von s in Form einer Reihe

Ausgehend von den Entwicklungen (14.34) für X und (14.35) Y des CIP können entsprechende Reihen nach s abgeleitet werden. Eine derartige Reihenentwicklung ist in Capitaine (2003a) für die Größe $s + XY/2$ zu finden (im Vergleich zu einer direkten Entwicklung für s , erfordert diese weniger Terme bei gleicher Genauigkeit).

Der konstante Term in der Reihenentwicklung von $s + XY/2$ entspricht einer GCRS Rektaszension von $-2012 \mu\text{as}$ für den CIO zur Epoche J2000. Er wurde in Capitaine (2003b) so definiert, dass eine Kontinuität von UT1 am Tag der Einführung des CIP (1. Januar 2003) übereinstimmend mit dem Erdrotationswinkel θ gewährleistet ist.

Die Tabelle 15.1 zeigt die Terme, die größer als $0.5 \mu\text{as}$ über einen Zeitraum von 25 Jahren sind, mit Mikrobogensekunden Genauigkeit. Die Abb. 15.3 veranschaulicht die Größe s zwischen den Jahren 1800 und 2200.

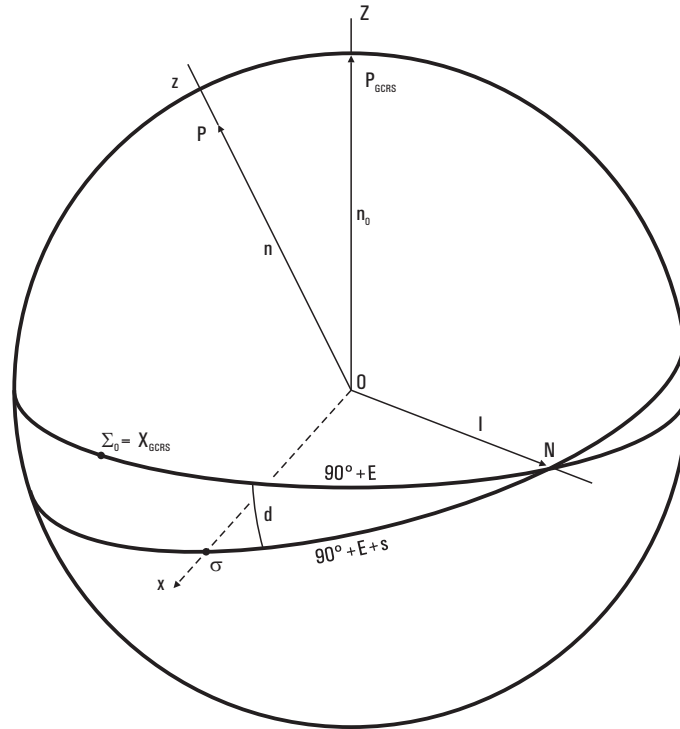


Abbildung 15.2: Die Größe s (Annahme $\sigma_0 N_0 = \Sigma_0 N_0$).

15.2 Der TIO

Die Bewegung des CIP im GCRS nennen wir Präzessions- Nutationsbewegung. Diese Bewegung legt die Dynamik des CIO im GCRS fest. Vom terrestrischen System, dem ITRS, aus betrachtet wird diese Bewegung des CIP Polbewegung genannt, welche durch die Polkoordinaten x_p und y_p beschrieben werden. Analog zum CIO kann man nun einen terrestrischen intermediären Ursprung (TIO) im ITRS auf dem Äquator des CIP einführen. Analog zur Konstruktion des CIO wird der TIO im ITRS durch einen Winkel $s'(T)$ beschrieben, dessen Dynamik sich aus der Polbewegung ergibt. Aus Relation (15.6) ergibt sich durch Substitution $X \rightarrow x_p, Y \rightarrow y_p$ und $Z \simeq 1$

$$s' = (1/2) \int_{t_0}^t (x_p \dot{y}_p - \dot{x}_p y_p) dt \quad (15.7)$$

(Capitaine 1990). Das Integral für $s'(T)$ wurde von Lambert & Bizouard (2002) näherungsweise ausgewertet. Sie erhielten

$$s' = -47.0 \mu\text{as} \times t. \quad (15.8)$$

15.3 Der Erdrotationswinkel θ und GST

Der Erdrotationswinkel θ bezeichnet den Winkel zwischen dem CIO (σ) und dem TIO (ϖ) zu einem Zeitpunkt T auf dem Äquator des CIP. Die Sternzeit von Greenwich (GST)

Tabelle 15.1: Reihenentwicklung für $s(t)$ im Zusammenhang mit dem IAU 2000A Präzession-Nutation Modell: alle Terme, die $0.5\mu\text{as}$ während eines Intervalls 1975-2025 übersteigen (Einheit μas). Die Fundamentalwinkel Ω , F , D , l und l' sind in Kapitel 14.4.2 durch (14.31) gegeben.

Argument α_k	Amplitude C_k
Ω	-2640.73
2Ω	-63.53
$2F - 2D + 3\Omega$	-11.75
$2F - 2D + \Omega$	-11.21
$2F - 2D + 2\Omega$	+4.57
$2F + 3\Omega$	-2.02
$2F + \Omega$	-1.98
3Ω	+1.72
$l' + \Omega$	+1.41
$l' - \Omega$	+1.26
$l + \Omega$	+0.63
$l - \Omega$	+0.63

wird ebenfalls auf dem Äquator des CIP definiert. Sie beschreibt den Winkel zwischen dem Äquinoktium (γ) und dem TIO (ϖ) (Abb. 15.4).

Für den Erdrotationswinkel θ ist in Capitaine et al., (2000) folgende Relation angegeben:

$$\theta(T_u) = 2\pi (0.7790572732640 + 1.00273781191135448T_u), \quad (15.9)$$

hier ist

$$T_u = (\text{JD}_{\text{UT1}} - \text{J2000.0}).$$

Der lineare Zusammenhang zwischen θ und UT1 ist unabhängig vom IAU 2000A Modell.

Der numerische Ausdruck für GST im Zusammenhang mit dem IAU 2000A Modell ist durch:

$$\begin{aligned} \text{GST} = & 0.014506'' + \theta + 4612.15739966''t + 1.39667721''t^2 \\ & - 0.00009344''t^3 + 0.00001882''t^4 + \Delta\psi \cos \epsilon_A \\ & - \sum_k [(C'_{s,0})_k \sin \alpha_k + (C'_{c,0})_k \cos \alpha_k] \\ & - 0.00000087''t \sin \Omega \end{aligned} \quad (15.10)$$

(Capitaine 2003b) mit

$$t = (\text{JD}_{\text{TT}} - \text{JD}_{\text{J2000.0}}) / 36525$$

gegeben. Die letzten beiden Zeilen in (15.10) sind Ergänzungsterme, die zur klassischen Gleichung des Äquinoktiums addiert werden. Sie stellen eine Genauigkeit der Relation auf dem μas -Niveau sicher. Die komplementären Terme sind in Tabelle 15.2 zusammengefasst.

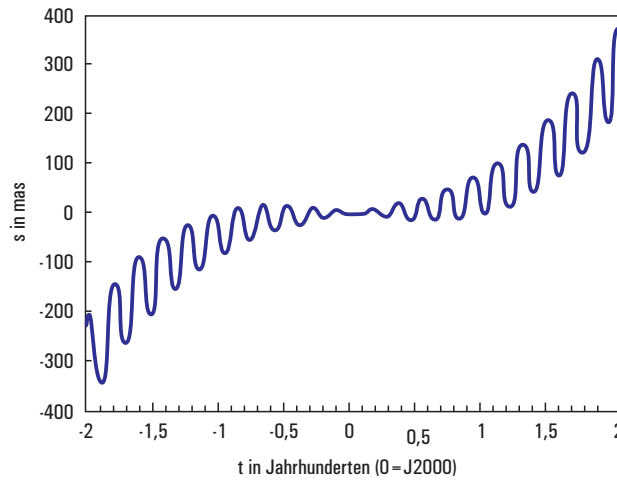


Abbildung 15.3: Die Größe s von 1800 bis 2200.

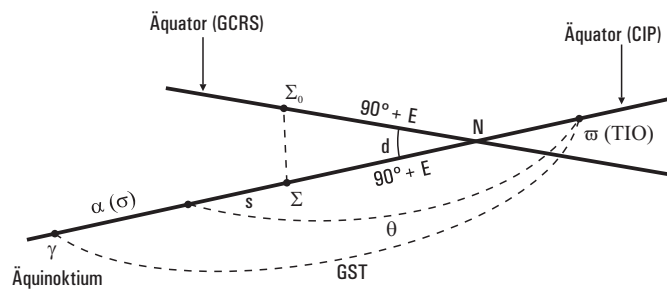


Abbildung 15.4: Erdrotationswinkel θ und GST

Mit der angegebenen Definition von GST ist auch eine neue Beschreibung von GMST verbunden. GMST wird jetzt definiert durch:

$$\begin{aligned}
 \text{GMST} = & 0.014506'' + \theta + 4612.15739966'' t + 1.39667721'' t^2 \\
 & - 0.00009344'' t^3 + 0.00001882'' t^4
 \end{aligned}
 \tag{15.11}$$

(Capitaine 2003b). Damit wird für GMST nicht mehr nur UT1 verwendet, sondern auch TT. Bei Verwendung von ausschließlich UT1 würden Fehler im 100 μs -Bereich auftreten (Capitaine 2003b).

Die konstanten Terme in GMST und in s sind auf folgender Grundlage bestimmt: Zur Einführung der neuen Konzepte am 1. Januar 2003 0h TT = JD 2452640.5 sollte gewährleistet sein, dass unterschiedliche Methoden der Bestimmung der Rotationsbewegung - GST/Äquinoktium alt - GST/Äquinoktium neu - θ /CIO - für dieses Datum die gleichen Werte liefern. Es wurde festgelegt, dass die Differenz TAI-UT1 für dieses Datum 32.3 s und somit TT-UT1 = 64.484 s ist. Diese konstanten Terme enthalten somit die Differenz TT-UT1 am 1. Januar 2003 0h und berücksichtigen die Änderung des Äquinoktiums der Epoche (Capitaine 2003b).

Argument α_k	$(C'_{s,0})_k$	$(C'_{e,0})_k$
Ω	+2640.96	-0.39
2Ω	+63.52	-0.02
$2F - 2D + 3\Omega$	+11.75	+0.01
$2F - 2D + \Omega$	+11.21	+0.01
$2F - 2D + 2\Omega$	-4.55	+0.00
$2F + 3\Omega$	+2.02	0.00
$2F + \Omega$	+1.98	0.00
3Ω	-1.72	0.00
$l' + \Omega$	-1.41	-0.01
$l' - \Omega$	-1.26	-0.00
$l + \Omega$	-0.63	0.00
$l - \Omega$	-0.63	0.00
$l' + 2F - 2D + 3\Omega$	0.46	0.00
$l' + 2F - 2D + \Omega$	0.45	0.00
$4F - 4D + 4\Omega$	0.36	0.00
$F - D + \Omega - 8L_{Ve} + 12L_E$	-0.24	-0.12
$2F$	0.32	0.00
$2F + 2\Omega$	0.28	0.00
$l + 2F + 3\Omega$	0.27	0.00
$l + 2F + \Omega$	0.26	0.00
$2F - 2\Omega$	-0.21	0.00
$l' - 2F + 2D - 3\Omega$	0.19	0.00
$l' - 2F + 2D - \Omega$	0.18	0.00
$8L_{Ve} - 13L_E$	-0.10	0.05
$2D$	0.15	0.00
$2l - 2F - \Omega$	-0.14	0.00
$l - 2D + \Omega$	0.14	0.00
$l' + 2F - 2D + 2\Omega$	-0.14	0.00
$l - 2D - \Omega$	0.14	0.00
$4F - 2D + 4\Omega$	0.13	0.00
$2F - 2D + 4\Omega$	-0.11	0.00
$l - 2F - 3\Omega$	0.11	0.00
$l - 2F - \Omega$	0.11	0.00
Ω	$-0.87 \times t$	0.00

Tabelle 15.2: Komplementäre Terme in GST. Die Amplituden sind in μas angegeben.

Kapitel 16

Transformationswege vom GCRS in das ITRS

Die Transformation zwischen GCRS und ITRS kann durch zwei verschiedene Wege realisiert werden.

Mit den oben angegebenen Relationen kann ein klassischer äquinoktium-basierender Transformationsweg angegeben werden. Dieser nutzt das IAU 2000 Modell der Präzession und Nutation, die neu Beschreibung für GST und die Frame-Bias Matrix.

Im neuen CIO-basierenden Transformationsweg kommen die Größen (X, Y, s, θ) zum tragen. Eine Unterscheidung zwischen Präzession und Nutation ist hier nicht erforderlich.

16.1 Die Äquinoktium basierende Transformation

Die klassische Verbindung zwischen einem Vektor \mathbf{X}_I im GCRS und dem analogen Vektor \mathbf{X}_T ITRS lautet jetzt:

$$\mathbf{X}_T = \mathcal{W}(t) \mathcal{R}_3(GST)(t) \mathcal{N}(t) \mathcal{P}(t) \mathcal{B} \mathbf{X}_I. \quad (16.1)$$

- Der Parameter t , der auch in den weiteren Beschreibungen genutzt wird, ist definiert durch:

$$t = (\text{JD}_{\text{TT}} - \text{JD}_{\text{J2000.0}}) / 36525.$$

- \mathcal{B} die oben diskutierte Frame-Bias Matrix

$$\mathcal{B} = \mathcal{R}_1(-\eta_0) \mathcal{R}_2(\xi_0) \mathcal{R}_3(d\alpha_0).$$

- \mathcal{P} ist die Präzessionsmatrix. Sie ist entweder gegeben durch

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{R}_3(-z_A) \mathcal{R}_2(+\theta_A) \mathcal{R}_3(-\zeta_A)$$

oder äquivalent durch

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{R}_3(\chi_A) \mathcal{R}_1(-\omega_A) \mathcal{R}_3(-\psi_A) \mathcal{R}_1(\epsilon_0).$$

- \mathcal{N} ist die Nutationsmatrix, gegeben durch

$$\mathcal{N}(t) = \mathcal{R}_1(-\epsilon) \mathcal{R}_3(-\Delta\psi) \mathcal{R}_1(\epsilon_A).$$

Hier ist $\epsilon = \epsilon_A + \Delta\epsilon$ und

$$\epsilon_A = 23^\circ 26' 21.448'' - 46.84024'' t - 0.00059'' t^2 + 0.001813'' t^3$$

beschreibt die Schiefe des mittleren Äquators bzgl. der mittleren Ekliptik des Datums.

- Die Matrix \mathcal{W} beschreibt schließlich die Polbewegung. Sie ist gegeben durch

$$\mathcal{W}(t) = \mathcal{R}_1(-y_p) \mathcal{R}_2(-x_p) \mathcal{R}_3(s'). \quad (16.2)$$

x_p und y_p sind die Polkoordinaten des CIP im ITRS.

Man beachte, dass nach 2003 hat die IAU entschieden hat, die Reihenfolge der beiden Polbewegungsmatrizen zu vertauschen! Aufgrund der Kleinheit der Drehwinkel sind nur sehr geringe Unterschiede von der Ordnung $0.1 \mu\text{as}$ zwischen den beiden Formulierungen der Polbewegungsmatrix vorhanden.

16.2 Die CIO basierende Transformation

Hier ist der Zusammenhang zwischen GCRS und ITRS gegeben durch

$$\mathbf{X}_T = \mathcal{W}(t) \mathcal{R}_3(\theta)(t) \mathcal{Q}(t) \mathbf{X}_I. \quad (16.3)$$

- Der Zeitparameter ist wie oben durch

$$t = (\text{JD}_{TT} - \text{JD}_{J2000.0}) / 36525$$

gegeben.

- Die Matrix \mathcal{Q} beschreibt den Frame-Bias, sowie Präzession und Nutation. Sie ist gegeben durch

$$\mathcal{Q}(t) = \mathcal{R}_3(-s) \mathcal{R}_3(-E) \mathcal{R}_2(d) \mathcal{R}_3(E). \quad (16.4)$$

Ausgeschrieben lautet die Matrix \mathcal{Q}

$$\mathcal{Q}(t) = \mathcal{R}_3(-s) \cdot \begin{pmatrix} 1 + \cos^2 E (\cos d - 1) & (\cos d - 1) \sin E \cos E & -\sin d \cos E \\ (\cos d - 1) \sin E \cos E & 1 + \sin^2 E (\cos d - 1) & -\sin d \sin E \\ \sin d \cos E & \sin d \sin E & \cos d \end{pmatrix}. \quad (16.5)$$

Die Komponenten lassen sich noch durch die kartesischen GCRS-Koordinaten des CIP-Einheitsvektors ausdrücken

$$\mathcal{Q}(t) = \mathcal{R}_3(-s) \cdot \begin{pmatrix} 1 - aX^2 & -aXY & -X \\ -aXY & 1 - aY^2 & -Y \\ X & Y & 1 - a(X^2 + Y^2) \end{pmatrix} \quad (16.6)$$

mit

$$a = (1 + \cos d)^{-1}.$$

- \mathcal{W} ist wieder die Polbewegungsmatrix aus (16.2).

Kapitel 17

Professionelle Astro-Software

Schließlich möchten wir noch darauf hinweisen, dass hier in diesem Werk diskutierten astronomisch-mathematischen Relationen mit Hilfe von professioneller Software behandelt werden können. Es ist davon auszugehen, dass in Zukunft in jedem astronomisch orientierten Institut derartige Software zum Einsatz kommen wird, was beispielsweise die Verwendung von Jahrbüchern überflüssig machen wird. Insbesondere die Software-Pakete SOFA und NOVAS verdienen hier erwähnt zu werden.

17.1 SOFA

Die FORTRAN Routinen SOFA (Standards of Fundamental Astronomy) sind im Rahmen der Internationalen Astronomischen Union (IAU) entwickelt worden und stehen zur freien Verfügung. Der Leser sei hier auf die Webseite www.iau-sofa.rl.ac.uk verwiesen.

17.2 NOVAS

Das US Naval Observatory (USNA) gibt die Software NOVAS (Naval Observatory Vector Astrometry Subroutines) heraus, die im Internet unter aa.usno.navy.mil/software/novas/novas_info.html zu finden ist. NOVAS ist in ANSI FORTRAN und C erhältlich. Auf ihr basieren die Daten des Astronomical Almanacs.

Kapitel 18

Astronomische Jahrbücher

Um die Verknüpfung zwischen beobachteten bzw. scheinbaren Örtern und Örtern in Sternkatalogen (mittlere Örter (T_0) bezogen auf das Äquinoktium (T_0)) zu erleichtern kann man astronomische Jahrbücher zu Rate ziehen. Astronomische Jahrbücher sind jährlich erscheinende Verzeichnisse astronomischer Daten. Die zwei wichtigsten sind 'The Astronomical Almanac' (United States Naval Observatory, Washington und Nautical Almanac Office, London) und das vom Institut für Angewandte Astronomie in St.Petersburg herausgegebene russische Jahrbuch.

Mittlerweile kann man elektronische Versionen der astronomischen Jahrbücher käuflich erwerben. Das DOS-Programm 'MICA 1990-1999 interactive Astronomical Almanac' wird vom U.S. Naval Observatory herausgegeben. Ein entsprechendes russisches Softwarepaket (AE software package) wird vom ITA (mittlerweile IPA) in St.Petersburg vertrieben.

In der Vergangenheit spielte das Werk 'Apparent Places of Fundamental Stars (APFS)' (herausgegeben vom Astronomischen Rechen-Institut, Heidelberg), also die scheinbaren Orte der Fundamentalsterne, eine wichtige Rolle.

18.1 APFS

Das Jahrbuch APFS (Apparent Places of Fundamental Stars) ist ein seit 1941 jährlich erscheinendes Verzeichnis scheinbarer (und mittlerer) Positionen von gegenwärtig 1535 Sternen des Fünften Fundamentalkatalogs (FK 5). Es wurde von 1960 vom Astronomischen Rechen-Institut in Heidelberg bis zur Einstellung im Jahre 2003 herausgegeben. Neben den scheinbaren Örtern der Fundamentalsterne enthielt das Werk ebenfalls: Besselsche Tagzahlen zur Berechnung der jährlichen Aberration, sowie Tafeln für kurzperiodische Nutationsglieder, für die Sternzeit bei 0^h Weltzeit, für die Umwandlung von mittlerer Sonnenzeit in Sternzeit und umgekehrt und für die Korrekturen der täglichen Aberration.

18.2 Astronomical Almanac

Der *Astronomical Almanac* wird seit 1981 gemeinsam vom U.S. Naval Observatory (Washington) und dem Royal Greenwich Observatory (London) herausgegeben. Es ist aus der Vereinigung des seit 1855 publizierten amerikanischen Jahrbuches *The American Ephemeris and Nautical Almanac* und des seit 1767 erscheinenden englischen Werkes *The Astronomical Ephemeris* hervorgegangen. In ihm findet man Ephemeriden der Sonne, des Mondes, der

großen Planeten und deren Monde, von Kleinplaneten und Kometen, Sternpositionen bezogen auf den mittleren Äquator und das mittlere Äquinoktium für eine Epoche in der Mitte des jeweiligen Jahres sowie Hilfsmittel für die astronomische Datenauswertung.

Nehmen wir als Beispiel den *Astronomical Almanac* 1999. Es ist in folgende Sektionen eingeteilt:

- A: Phänomene (Seite A1-A93; Mondphasen, Sichtbarkeit von Planeten, Zeiten der Sonnen- und Mond-Aufgänge und Untergänge)
- B: Zeitskalen und Koordinatensysteme (Seite B1-B67; Kalender, diverse Zeitskalen und Koordinatensysteme und deren Relationen, Weltzeit-Sternzeit, Position und Geschwindigkeit der Erde, Besselsche Tagzahlen, Nutationsterme in Länge und Schiefe, Matrixelemente für Präzession und Nutation etc.)
- C: Sonne (Seite C1-C24; Koordinaten der Sonne, Distanz und scheinbarer Durchmesser, Zeitgleichung etc.)
- D: Mond (Seite D1-D46; Mondphasen, Bahnelemente, Librationswinkel etc.)
- E: Große Planeten (Seite E1-E88; Oskulierende Bahnelemente für Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus, Neptun und Pluto)
- F: Satelliten der Planeten (Seite F1-F61; Ephemeriden der Monde von Mars, Jupiter, Saturn, Uranus, Neptun und Pluto)
- G: Kleinplaneten und Kometen (Seite G1-G12; Bahnelemente von Asteroiden und Kometen)
- H: Sterne und Sternsysteme (Seite H1-H78; Sternpositionen für mittleren Äquator und Äquinoktium J1999.5 = JD 2451362,375; Positionen von Radioquellen für J2000.0 = JD 2451545,0.)
- J-N: Observatorien, Tabellen und Daten (Kalenderdaten, IAU System, astronomische Konstanten etc.), Erklärungen, Glossar, Index.

Referenzen

- Aoki, S., Kinoshita, H., 1983, Note on the relation between the equinox and Guinot's non-rotating origin, *CMDA* **29**, 335-360
- Bretagnon, P., 1982, Theory for the motion of all the planets - the VSOP82 solution, *A&A* **114**, 278
- Bretagnon, P., Francou, G., 1988, Planetary theories in rectangular and spherical variables. VSOP87 solutions. *A&A* **202**, 309
- Brzezinski, A., Capitaine, N., 1993, *J.Geophys.Res.* **98**, 6667
- Capitaine, N., 1990, The Celestial Pole Coordinates, *CMDA* **48**, 127-143
- Capitaine, N., Williams, J., Seidelmann, P.K., 1985, *A&A* **146**, 381
- Capitaine, N., Guinot, B., Souchay, J., 1986, A non-rotating origin on the instantaneous equator: definition, properties and use, *CMDA* **39**, 283-307
- Capitaine, N., Guinot, B., McCarthy, D., 2000, Definition of the Celestial ephemeris Origin and of UT1 in the International Celestial Reference Frame, *A&A* **355**, 398-405
- Capitaine, N., Chapront, J., Lambert, S., Wallace, P., 2003a, *Astronomy and Astrophysics*, 400, 1145-1154
- Capitaine, N., Wallace, P., McCarthy, D., 2003b, Expressions to implement the IAU-2000 definition of UT1, *Astronomy and Astrophysics* 406, 1135-1149
- Capitaine, N., Wallace, P., Chapront, J., 2003c, Expressions for IAU-2000 precession quantities, *Astronomy and Astrophysics* 412, 567-586
- Capitaine, N., Wallace, P., 2006, High precision methods for locating the celestial intermediate pole and origin, *Astronomy and Astrophysics* no. aa4550-05
- Capitaine, N., 2002, Comparison of 'Old' and 'New' Concepts: The Celestial Intermediate Pole and Earth Orientation Parameters, *IERS Technical Note* No. 29
- Chapront-Touze, M., Chapront, J., 1983, The lunar ephemeris ELP 2000. *Astron. Astrophys.*, 124, 50
- Chapront, J., Chapront-Touze, M., Francou, G., 2002, An new determination of lunar orbital parameters, precession constant and tidal acceleration from LLR measurements, *A&A* **387**, 700-709

- Dehant, V., Capitaine, N., 1997, On the precession constant: values and constraints on the dynamical ellipticity; link with Oppolzer terms and tilt-over mode, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **65**, 439-458
- Fairhead, L., Bretagnon, P., Lestrade, J.-F., 1988, The Earth's Rotation and Reference Frames for Geodesy and Geodynamics, IAU Symp. 128, A.K. Babcock, G.A. Wilkins, Kluwer, Dordrecht
- Fairhead, L., Bretagnon, P., 1990, *Astron. Astrophys.* **229**, 240
- Fedorov, E.P., 1963, 'Nutation and forced motion of the Earth's pole', Pergamon Press, Oxford
- Folgueira, M., Bizouard, C., Souchay, J., 2001, *Celest.Mech.Dyn.Astr.* **81**, 191
- Guinot, B., 1979, Basic problems in the kinematics of the rotation of the Earth, in *Time and the Earth's rotation*, 7-18, D.McCarthy and J.Pilkington (eds.), Reidel Publishing Company
- Herring, T., Mathews, P., Buffett, B., 2002, Modelling of nutation-precession: Very long baseline interferometry results, *J.Geophys.Res.* **107**, B4
- Jeffreys, H., 1963, Vorwort zu Fedorov, 1963
- Jones, R., Tryon, P., 1987, *SIAM, J.Sci.Stat.Comput.* 8(1), 71
- Kinoshita, H., Nakajima, K., Kubo, Y., Nakagawa, I., Sasao, T., Yokohama, K., 1979, *Publ.Int.Lat.Obs.Mizusawa* **12**, 71
- Lambert, S., Bizouard, C., 2002, Positioning the Terrestrial Ephemeris Origin in the International Terrestrial Frame, *A&A* **394**, 317-321
- Lieske, J., Lederle, T., Fricke, W., Morando, B., 1977, Expression for the Precession Quantities Based upon the IAU (1976) System of Astronomical Constants, *A&A* **58**, 1-16
- Mathews, P., 2000, *Proc. IAU Colloq.* **180**, K.Johnston et al., (eds.), USNO 2000
- Mathews, P., Herring, T., Buffet, B., 2002, Modelling of nutation-precession: New nutation series for nonrigid Earth and insights into the Earth's interior, *J.Geophys.Res.* **107**, B4
- Mathews, P., Bretagnon, P., 2003, Polar motion equivalent to high frequency nutations for a nonrigid earth with anelastic mantle, *A&A* **400**, 1113-1128
- McCarthy, D., Petit, G., 2003, *IERS Conventions 2003*, IERS Technical Note No. 32, Verlag des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main, 2004
- Moritz, H., Mueller, I.I., 1988, 'Earth Rotation, Theory and Observation', Ungar, New York
- Mueller, I.I., 1969, 'Spherical and practical astronomy' (as applied to geodesy), Frederick Ungar Publishing Co., New York
- Murray, B., 1979, in 'Time and the Earth's rotation', D.McCarthy, J.Pilkington, eds., Reidel, Dordrecht
- Oppolzer, T., 1886, 'Traité de détermination des orbites', Gauthiers-Villars, Paris
- Ray, R., Steinberg, D., Chao, B., Cartwright, D., 1994, Diurnal and Semidiurnal Variations in the Earth's Rotation Rate Induced by Oceanic Tides, *Science* **264**, 830-832

- Schuh, H., et al., 2003, Erdrotation und globale dynamische Prozesse, Mitteilungen des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie **32**, Frankfurt/M.
- Seidelmann, P.K., 1992, Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac, University Science Books
- Sigl, R., 1991, 'Geodätische Astronomie', Herbert Wichmann, Karlsruhe
- Simon, J.-L., Bretagnon, P., Chapront, J., Chapront-Touze, M., Francou, G., Laskar, J., 1994, Numerical Expressions for Precession Formulae and Mean Elements for the Moon and Planets, A&A **282**, 663-683
- Soffel et al., 2003... Quelle fehlt, Kap. BCRS/GCRS
- Standish, E.M., Newhall, X.X., Williams, J.G., Folkner, W.F., 1995, JPL planetary and lunar ephemerides, DE403/LE403. JPL IOM, 314, 10
- Souchay, J., Kinoshita, H., 1996, Astron.Astrophys. **312**, 1017
- Souchay, J., Kinoshita, H., 1997, Astron.Astrophys. **318**, 639
- Souchay, J., Loysel, B., Kinoshita, H., Folgueira, M., 1999, Corrections and new developments in rigid Earth nutation theory III. Final tables REN-2000 including crossed-nutation and spin-orbit coupling effects, A&A Suppl. Ser. **135**, 111
- Williams, J., Newhall, X.X., Dickey, J., 1991, Luni-solar precession - Determination from lunar laser ranging, Astron.J. **241**, L9-12
- Woolard, E.W., 1953, Theory of the rotation of the earth around its center of mass, in Astronomical papers prepared for the use of the American ephemeris and nautical almanac, XV, 1-165

Akronymen-Verzeichnis

- APFS** — Apparent Places of Fundamental Stars
Altes deutsches Jahrbuch, welches die scheinbaren Örter von Fundamentalsternen enthält
- BCRS** — Barycentric Celestial Reference System
Baryzentrisches Celestäres Referenzsystem
- BNM** — Bureau National de Metrologie (Paris)
- CIP** — Celestial Intermediate Pole
Celestärer Intermediärer Pol
- DCF77**
deutscher Zeitzeichensender
- DExxx** — Development Ephemeris (Version xxx)
Numerische Ephemeriden des Jet Propulsion Laboratory (JPL)
- DORIS** — Doppler Orbitography by Radiopositioning Integrated on Satellite
Navigationssystem auf Satelliten
- EQE** — Equation of the Equinox
Gleichung des Äquinoktiums
- ERA** — Earth Rotation Angle
Erdrotationswinkel
- FKx** — Fundamentalkatalog (Version x)
- GAIA**
geplante astrometrische Raummission
- GALILEO**
Europäisches Satellitennavigationssystem
- GCRS** — Geocentric Celestial Reference System
Geozentrisches Celestäres Referenzsystem
- GLONASS** — Globalnaja Nawigazionnaja Sputnikowaja Sistema
Russisches Satellitennavigationssystem
- GMST** — Greenwich Mean Sidereal Time
Mittlere Sternzeit Greenwich

- GPS** — Global Positioning System
Amerikanisches Satellitennavigationssystem
- GSC** — Guide Star Catalogue
Sternkatalog zur Lagekontrolle des Hubble Weltraumteleskops
- GST** — Greenwich Sidereal Time
Sternzeit Greenwich
- HIPPARCOS** — High Precision Parallax Collecting Satellite
Astrometrische Raummission
- IAU** — Internationale Astronomische Union
- ICRS** — International Celestial Reference System
Internationales Celestäres Referenzsystem
- IEN** — Istituto Elettrotecnico Nazionale (Turin)
- ILS** — International Latitude Service
Internationaler Breitendienst. Heute abgelöst durch den Internationalen Erdrotationsdienst
- IERS** — International Earth Rotation Service
Internationaler Erdrotationsdienst
- IRP** — Instantaneous Rotation Pole
Instantaner Rotationspol
- ITRS** — International Terrestrial Reference System
Internationales Terrestrisches Referenzsystem
- IVS** — International VLBI Service
Internationaler VLBI Service
- J2000.0**
Die gegenwärtige Referenzepoche (1. Januar 2000, 12.00 Uhr)
- JD** — Julianisches Datum
- LAGEOS** — Laser Geodynamics Satellite
Lasergeodynamischer Satellit
- LLR** — Lunar Laser Ranging
Laserentfernungsmessungen zum Mond
- LORAN-C** — Long Range Navigation
Altes Navigationssystem mittels Zeitzeichensender
- MJD** — Modifiziertes Julianisches Datum
- NICT** — National Institute of Information and Communication Technology (Tokyo)
- NIST** — National Institute of Standards and Technology (Boulder)

NPL — National Physical Laboratory (Middlesex)

PFS — Primäre Frequenzstandards

PPM — Parallaxes and Proper Motions
Ein Sternkatalog

PTB — Physikalisch Technische Bundesanstalt (Braunschweig)

SI — Système international d'unités
Internationales Einheitensystem

SLR — Satellite Laser Ranging
Laserentfernungsmessungen zu Satelliten

ST — Sidereal Time
(Lokale) Sternzeit

TAI — Temps Atomique International
Internationale Atomzeit

TCB — Temps-Coordonnée Barycentrique
Baryzentrische Koordinatenzeit

TCG — Temps-Coordonnée Geocentrique
Geozentrische Koordinatenzeit

TDB — Temps Dynamique Barycentrique
Baryzentrische Dynamische Zeit

T_{eph}
Baryzentrische Ephemeridenzeit

TT — Terrestrial Time
Terrestrische Zeit

TT_s — Wahre Sonnenzeit

TIO — Terrestrial Intermediate Origin
Terrestrischer Intermediärer Ursprung

USNO — US Naval-Observatory (Washington)

USNO-A2.0
Ein Sternkatalog des US Naval-Observatory

UT — Universal Time
Weltzeit

UT1
Die um Effekte der Polbewegung korrigierte Weltzeit

UTC — Universal Time Coordinated
Koordinierte Weltzeit

VLBI — Very Large Baseline Interferometry
Radiointerferometrie auf großen Basislinien

VSOP — Variations Séculaire des Orbites Planétaires
Semi-analytische Ephemeriden des Sonnensystems

Fragen zum Inhalt

I. Astronomische, räumliche Bezugssysteme

- I.1 Beschreiben Sie das Horizontsystem, das astronomische Äquatorsystem und das ekliptikale System. Welche Koordinaten werden hier üblicherweise verwendet? Beschreiben Sie die Elemente des astronomischen (nautischen) Dreiecks. Wenden Sie den Sinus- und den Kosinus-Satz der sphärischen Trigonometrie auf das astronomische Dreieck an. Wie lautet der Zusammenhang zwischen (Zenitdistanz z , Azimut A) einerseits und (Deklination δ , Stundenwinkel h) andererseits?
- I.2 Was wissen Sie über Drehmatrizen? Wie sehen diese konkret aus? Wie finden diese in der astronomischen Geodäsie Verwendung?
- I.3 Diskutieren Sie die Zusammenhänge zwischen den Differentialformen der astronomischen Koordinaten $d\phi, dh, dA \dots$ in Hinblick auf Messfehler bei astronomisch geodätischen Messungen.

II. Methoden und Verfahren der astronomischen Geodäsie

- II.1 Beschreiben Sie die Methode der Meridiandurchgangsbeobachtungen zur Bestimmung der Länge.
- II.2 Beschreiben Sie das Höhenstandlinienverfahren.
- II.3 Beschreiben Sie Methoden der Azimutbestimmung (Sonne, Polaris).
- II.4 Beschreiben Sie die Lasermessverfahren SLR und LLR.
- II.5 Beschreiben Sie das Verfahren der VLBI.
- II.6 Was wissen Sie über die Missionen *HIPPARCOS* und *GAIA*?

III. Variationen der Himmelskoordinaten

- III.1 Wie lautet das Brechungsgesetz nach Snellius? Beschreiben Sie die Wirkungsweise der astronomischen Refraktion.
- III.2 Wie beschreibt man die Variation der Zenitdistanz Δz_R aufgrund der astronomischen Refraktion?
- III.3 Beschreiben Sie das Phänomen der Parallaxe. Gegen Sie insbesondere auf die jährliche Parallaxe ein. Wodurch ist der parallaktische Winkel Π gegeben?
- III.4 Wie kann man in der Praxis effektiv die Korrekturen $\Delta\alpha_P$ und $\Delta\delta_P$ für die jährliche Parallaxe beschreiben?

- III.5 Beschreiben Sie die geozentrische Parallaxe π und die dadurch resultierende Variation der Zenitdistanz.
- III.6 Beschreiben Sie das Phänomen der Aberration. Was bedeuten die Begriffe: jährliche und tägliche Aberration?
- III.7 Was wissen Sie über die Aberrationskonstante κ der jährlichen Aberration? Wie ergibt sich die Änderung $\Delta\theta$ des Apexwinkels durch die stellare Aberration?
- III.8 Wie kann man in der Praxis effektiv die Korrekturen $\Delta\alpha_A$ und $\Delta\delta_A$ für die jährliche Aberration beschreiben? Was beschreiben die Besselschen Aberrations Tagzahlen C und D ? Wie hängen diese mit den Bahnelementen der Erde um die Sonne zusammen?
- III.9 Beschreiben Sie die tägliche Aberration und ihre Aberrationskonstante k .
- III.10 Gehen Sie ein auf die Thematik der Eigenbewegung der Sterne.
- III.11 Was wissen Sie über astronomische Jahrbücher und Sternkataloge?

IV. Globale Bewegung der Erde im Raum

- IV.1 Beschreiben Sie die Präzession der Ekliptik und des Äquators.
- IV.2 Welches ist die Bedeutung der Präzessionswinkel ζ_A, z_A, θ_A und wie sieht die Präzessionsmatrix in diesen Winkeln aus?
- IV.3 Beschreiben Sie die Bedeutung der Präzessionswinkel ψ_A (luni-solare Präzession), χ_A (planetare Präzession), sowie der Winkel π_A und Π_A .
- IV.4 Wie kann man in die Korrekturen $\Delta\alpha_P$ und $\Delta\delta_P$ näherungsweise durch ψ_A und χ_A ausdrücken?
- IV.5 Beschreiben Sie das Phänomen der Nutation der Erde. Welches ist die Bedeutung der Nutationswinkel $\Delta\epsilon$ und $\Delta\psi$?
- IV.6 Welches ist die Bedeutung der astronomischen Fundamentalwinkel l, l', F, D und Ω ? Welche Rolle spielen diese in einer Nutationsreihe?
- IV.7 Was bedeuten die Begriffe: mittleres System einer Epoche und wahres System einer Epoche? Wie sieht die sogenannte Nutationsmatrix aus?
- IV.8 Was versteht man unter dem Begriff Polbewegung? Wie äußert sich die Polbewegung und wie kann man diese messen? Gehen Sie auf Ursachen und Zeitskalen ein.
- IV.9 Was wissen Sie über zum Thema klassisches Celestäres Referenzsystem und ITRS? Wodurch ist der Zusammenhang zwischen beiden Referenzsystemen gegeben? Was bedeutet der Winkel $GAST$ und die Polkoordinaten x_P, y_P ?
- IV.10 Wie wirkt sich die Polbewegung auf astronomische Orts- und Azimutbestimmungen aus?

V. Zeitmessung, Zeitskalen und Erdzeitskalen

- V.1 Beschreiben Sie die Funktionsweise von Quarz-, Cäsium- und Rubidium-Uhren, sowie der H-Maser als Frequenznormale.
- V.2 Wie beschreibt man die Stabilität von Frequenz-Oszillatoren? Gehen Sie auf die Allan-Varianz von Atomuhren ein.
- V.3 Beschreiben Sie Methoden der Zeitverbreitung und des Zeitvergleiches.
- V.4 Gehen Sie auf folgende Begriffe ein: SI-Sekunde, TCG und Eigenzeit einer Uhr, TT, TAI, UTC und Zonenzeiten.

- V.5 Was beschreibt die Gleichung des Äquinoktiums, was die Zeitgleichung? Wie sehen die entsprechenden Zusammenhänge aus?
- V.6 Gehen Sie ein auf die Erdzeitskalen: TT_S , MT_S , UT und $UT1$.

VI. Moderne Paradigmen

- VI.1 Gehen Sie ein auf Definition und Bedeutung des metrischen Fundamentaltensors? Welche Bedeutung haben die metrischen Potentiale?
- VI.2 Gehen Sie ein auf die Thematik BCRS und GCRS.
- VI.3 Was wissen Sie zur Thematik 'relativistische Bewegungsgleichungen von sphärische symmetrischen astronomischen Körpern' und der relativistischen Lichtausbreitung im BCRS?
- VI.4 Beschreiben Sie das ICRS.
- VI.5 Gehen Sie ein auf die Problematik des Celestären Intermediären Pols (CIP), des CIOs, TIOs und des Frame-Bias.
- VI.6 Beschreiben Sie die zwei Transformationswege vom GCTS ins ITRS.

Anhang A: Die Nutationsreihe 'IAU-1980'

In der folgenden Tabelle sind die ersten 50 in-phase Terme der klassischen Nutationsreihe 'IAU-1980' für die Nutation in der Länge $\Delta\Psi$ (SINus) und der Schiefe $\Delta\epsilon$ (COSinus) bezogen auf den mittleren Äquator und Äquinoktium des Datums angegeben (ohne zeitabhängige Amplitudentglieder).

Tabelle 18.1: Die ersten 50 Terme der IAU-1980 Nutationsreihe. Die Einheit der Amplituden ist 1 mas.

	(l, l', F, D, Ω)	Periode (Tage)	$\Delta\psi$ sin	$\Delta\epsilon$ cos	
1	(0,0,0,0,1)	6798,4	-17199,6	9202,5	
2	(0,0,0,0,2)	3399,2	206,2	-89,5	
3	(-2,0,2,0,1)	1305,5	4,6	-2,4	
4	(2,0,-2,0,0)	1095,2	1,1	0	
5	(-2,0,2,0,2)	1615,7	-0,3	0,1	
6	(1,-1,0,-1,0)	3232,9	-0,3	0	
7	(0,-2,2,-2,1)	6786,3	-0,2	0,1	
8	(2,0,-2,0,1)	943,2	0,1	0	
9	(0,0,2,-2,2)	182,6	-1318,7	573,6	
10	(0,1,0,0,0)	365,3	142,6	5,4	
11	(0,1,2,-2,2)	121,7	-51,7	22,4	
12	(0,-1,2,-2,2)	365,2	21,7	-9,5	
13	(0,0,2,-2,1)	177,8	12,9	-7,0	
14	(2,0,0,-2,0)	205,9	4,8	0,1	
15	(0,0,2,-2,0)	173,3	-2,2	0	
16	(0,2,0,0,0)	182,6	1,7	0	
17	(0,1,0,0,1)	386,0	-1,5	0,9	
18	(0,2,2,-2,2)	91,3	-1,6	0,7	(18.1)
19	(0,-1,0,0,1)	346,6	-1,2	0,6	
20	(-2,0,0,2,1)	199,8	-0,6	0,3	
21	(0,-1,2,-2,1)	346,6	-0,5	0,3	
22	(2,0,0,-2,1)	212,3	0,4	-0,2	
23	(0,1,2,-2,1)	119,6	0,4	-0,2	
24	(1,0,0,-1,0)	411,8	-0,4	0	
25	(2,1,0,-2,0)	131,7	0,1	0	
26	(0,0,-2,2,1)	169,0	0,1	0	
27	(0,1,-2,2,0)	329,8	-0,1	0	
28	(0,1,0,0,2)	409,2	0,1	0	
29	(-1,0,0,1,1)	388,3	0,1	0	
30	(0,1,2,-2,0)	117,5	-0,1	0	
31	(0,0,2,0,2)	13,7	-227,4	97,7	
32	(1,0,0,0,0)	27,6	71,2	-0,7	
33	(0,0,2,0,1)	13,6	-38,6	20,0	
34	(1,0,2,0,2)	9,1	-30,1	12,9	
35	(1,0,0,-2,0)	31,8	-15,8	-0,1	
36	(-1,0,2,0,2)	27,1	12,3	-5,3	
37	(0,0,0,2,0)	14,8	6,3	-0,2	

Anhang B: Maple-Worksheets

Auf der CD-ROM befinden sich folgende Maple-Worksheets:

alde2bela

Rechnet Äquatorkoordinaten der zweiten Art (α, δ) in ekliptische Koordinaten (β, λ) um.

app_simp

Berechnet den scheinbaren Ort eines Sternes auf einfache Art und Weise. Viele Größen werden vorgegeben. Die Parallaxe wird vernachlässigt.

framebias

Berechnet die Framebias-Matrix.

intro

Elementare Einführung in Maple.

jdate

Berechnet das Julianische Datum.

NROmod

Einfaches Modell zur Berechnung des NRO.

NROplot

Berechnet und plottet die Bewegung des NRO.

oppolzer

Berechnet die Opolzer-Terme für eine ausgewählte Nutation.

prec-appl

Berechnet die Präzessionsmatrix und die Auswirkung der Präzession auf eine Sternposition.

precess

Berechnet den Einfluss der Präzession auf α und δ .

prec2000

Berechnet die Präzessionsmatrix, welche mit der IAU2000 Theorie im Einklang ist.

refrac_num_int

Berechnet den Refraktionswinkel ζ mittels numerischer Integration in einem komplexen atmosphärischen Modell.

refrac_saas

Berechnet den Refraktionswinkel nach einer Methode von Saastamoinen

rotmat

Berechnet die drei Rotationsmatrizen \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 . und \mathbf{R}_3 zu vorgegebenem Winkel in rad.

sunpos

Berechnet die Sonnenposition mit einfachsten Methoden.

ST

Berechnet die lokale wahre und mittlere Sternzeit.

TT2TAI+UTC

Berechnet TAI und UTC aus TT mit Hilfe der Schaltsekunden.

tt2tb

Berechnet TB aus TT mit Hilfe der Fairhead-Bretagnon Theorie.

venus

Berechnet die Position der Venus mit einer vereinfachten VSOP87 Theorie.

nut1980

Berechnet die Nutationswinkel nach der IAU-1980 Nutationsreihe. Es werden ferner die Schiefen ϵ_0 und ϵ angegeben, sowie die Gleichung des Äquinoktiums und der Nutationsmatrix.

Stichwortverzeichnis

- Äquatorsystem der ersten Art, 68
- Äquinoktialkolor, 65, 69
- Äquinoktien, 65
- Äquinoktium, 60
- 2-PUNKT ALLAN-Varianz, 16
- 2-Punkt Allan-Varianz, 14

- Aberration, 119, 132
- Aberrationskonstante, 133
- ALLAN-Varianz, 16
- Almukantarat, 64
- Alterung, 14
- Amplitudenschwankungen, 14
- Analemma, 154
- Apex, 132
- APOLLO, 92
- Apparent Places of Fundamental Stars, 211
- Astronomical Almanac, 211
- Astronomische Einheit, 128
- astronomisches Dreieck, 65, 72
- Atomuhren, 5
- Autokovarianzfunktion, 18
- Azimut, 67
- Azimutbestimmung, 87

- Baryzentrum, 65
- BCRS, 169
- Bias, 18
- Bias-Matrix, 198
- Breitenschwankung, 149
- Bureau National de Metrologie, 41

- Cäsium-Atomuhr, 23
- Cäsiumuhr, 30
- Cäsiumuhren, 5
- Celestäre Intermediäre Pol, 201
- Celestärer Ephemeridenpol, 186
- celestärer intermediärer Pol, 187
- Celestial Pole Offsets, 189
- Chandler Periode, 147
- Christoffel-Symbole, 172
- CIO, 159

- CIP, 189
- CTP, 159

- DE-Ephemeride, 117
- DE200, 118
- DE403, 118
- DE404, 118
- DE405, 118
- DE406, 118
- Definition des Meters, 33
- Doppler-Effekt, 39
- DORIS, 105
- Drehmatrizen, 76

- Eigenbewegung, 119, 135
- Eigenzeit, 34, 36, 38
- Einstein-Infeld-Hoffmann Gleichungen, 174
- Einsteinsche Summenkonvention, 35
- Ekliptik, 58, 60
- Ekliptikpol, 70
- El Nino, 158
- electron shelving, 31
- elektromagnetischen Falle, 31
- Elektronenspin, 22
- ELP2000, 48
- Energieniveau, 22
- EOP, 7
- Ephemeride, 117
- Erste Vertikalebene, 64
- Euler Periode, 147

- Fairhead-Bretagnon, 47
- Feinstruktur, 24
- Femtosekundenkamm, 31
- Femtosekundenkamm, 32
- Finsternisjahr, 61
- FK3, 161
- FK4, 161
- FK5, 161
- Flicker Rauschen, 18
- Fluoreszenzphotonen, 31
- Fluoreszenzstrahlung, 31

- Frühlingspunkt, 69
Frühlingspunkt, 65, 70
Frame Bias, 196
Frequenzfluktuation, 14
Fundamentalkatalog, 161
Fundamentalwinkel, 144
- GAIA, 9, 113
GALILEO, 6, 7, 106
GAST, 82
GCRS, 169, 177
Geodäte, 171
Geodätengleichung, 173
Geoid, 39
Geopotential, 39
geozentrische Parallaxe, 130
Gleichung des Äquinoktiums, 83
Gleichzeitigkeit, 38
GLONASS, 6, 105
GMST, 82
GPS, 3, 6, 7, 50, 100
gravitativen Rotverschiebung, 39
Gregorianischer Kalender, 44
Guide Star Catalogue, 162
- Händigkeit, 66
Höhenstandlinienverfahren, 86
Himmels-Äquator, 68
Himmels-Meridian, 68
Himmelsäquator, 58
Himmelspol, 58
Hipparcos, 109
Hipparcos-Katalog, 113, 165
Hohlraumresonator, 28
Horizont, 58
Horizont-Koordinaten, 67
Horizontebene, 58
Hyperfeinstruktur-Niveaus, 21
Hyperfeinstrukturaufspaltung, 25
- ICRF, 9
ICRS, 113, 163
Inertialsystem, 36
Instantaner Rotationspol, 183
Istituto Elettrotecnico Nazionale, 41
ITRS, 159
IVS, 96
- J2000.0, 46
jährliche Aberration, 133
Jet Propulsion Laboratory, 117
Julianischer Kalender, 44
- Julianisches Datum, 44
- Kernspin, 22
Knotenlinie, 61
Kreuzkorrelationsfunktion, 96
Kulmination, 74
- LAGEOS, 89, 90
Lichtstrahlen, 35
Lichtuhr, 33
LLR, 6, 64, 85, 91
lokale Sternzeit, 83
Lotrichtung, 64
- magnetische Unterniveaus, 22
Meridian, 58
Meridiandurchgang, 86
metrischer Fundamentaltensor, 34, 38
metrischer Fundamentaltensors, 171
Mikrowellenresonator, 23
modifiziertes Julianisches Datum, 46
- nördlicher Himmelspol, 58
Nadir, 64
National Bureau of Standards, 39
National Institute of Information and Communication Technology, 41
National Institute of Standards and Technology, 41
National Physical Laboratory, 41
Normalpunkt, 93
NOVAS, 209
Null-Geodäte, 174
Nullpunktfehler, 87
Nutation, 7, 119, 143
Nutationsmatrix, 144
NUVEL-1 Modell, 160
- Oppolzer-Terme, 185
optisches Pumpen, 25
- parallaktischer Winkel, 72
Parallaxe, 119, 127
Parsek, 128
Phasenschwankungen, 14
Phasenzeit, 15
Physikalisch Technische Bundesanstalt, 39, 41
piezo-elektrischer Effekt, 21
Platonisches Jahr, 61, 137
Polbewegung, 7, 119
Polkoordinaten, 148
Polstern, 63

- PPM-Katalog, 162
Präzession, 7, 119
Präzession der Ekliptik, 137
Präzession des Äquators, 137
Präzessionsmatrix, 138
primäre Referenzebene, 68
- Quarzoszillator, 21
Quarzuhr, 5
- Random Walk, 18
Refraktion, 120
Relativitätstheorie, 33
Ringlaserkreisel, 106
Rotationsmatrizen, 84
- Sagnac-Frequenz, 107
Saros-Zyklus, 61
Schiefe der Ekliptik, 58, 65
SI-Sekunde, 37
siderische Zeit, 74
Sinussatz, 72
SLR, 6, 85
Snelliussches Brechungsgesetz, 120
SOFA, 209
Solstitien, 65
Sommersonnenwende, 58
Spin-Bahnkopplung, 24
Spinquantenzahl, 22
Springbrunnenuhren, 5
Standlinien, 87
Stundenkreis, 64
Stundenwinkel, 68, 74
- tägliche Aberration, 134
Tag- und Nachtgleichen, 58
TAI, 40
terrestrischer intermediärer Ursprung, 203
Topozentrum, 66
Tripelprisma, 91
TT, 40, 42
Tycho-Katalog, 113
- Uhrengang, 35
Uhrentransport, 38, 42
USNO, 18
USNO-A2.0, 162
UT1, 43
UTC, 43
- Vertikal-Ebene, 64
VLBI, 6, 85, 96
- vollständiges Differenzial, 78
VSOP, 118
VSOP82, 48
VSOP87, 118
- Wasserstoffmaser, 5
Weißes Rauschen, 18
Weltzeit, 154
Wendekreis, 58
Wiener-Khintchine Theorem, 18
Wintersonnenwende, 58
- Zeeman-Effekt, 22
Zeitdilatation, 34
Zeitzone, 44
Zenit, 58, 64
Zenitdistanz, 67