Formelsammlung zur sphärischen Trigonometrie

TU Dresden
Institut für planetare Geodäsie

A. Goniometrie

A.1. Additionstheoreme

für $\alpha \neq \beta$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \, \cos\beta \pm \cos\alpha \, \sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \, \cos\beta \mp \sin\alpha \, \sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \, \tan\beta}$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha \, \cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$$

für $\alpha = \beta$

$$\sin(2\,\alpha) = 2\,\sin\alpha \, \cos\alpha$$

$$\sin\alpha = 2\,\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\begin{aligned} \cos(2\,\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ &= 2\,\cos^2\alpha - 1 \\ &= 1 - 2\,\sin^2\alpha \end{aligned}$$

A.2. Verwandlungsformeln

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2\,\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \\ \sin x - \sin y &= 2\,\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \\ \cos x + \cos y &= 2\,\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \\ \cos x - \cos y &= -2\,\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \end{aligned}$$

B. Ebene Trigonometrie

B.1. Sinussatz

$$\mathrm{a} : \mathrm{b} : \mathrm{c} = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$

B.2. Kosinussatz

$$\mathrm{a}^2 = \mathrm{b}^2 + \mathrm{c}^2 - 2\,\mathrm{bc}\,\cos\alpha$$
$$\mathrm{b}^2 = \mathrm{c}^2 + \mathrm{a}^2 - 2\,\mathrm{ca}\,\cos\beta$$
$$\mathrm{c}^2 = \mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2 - 2\,\mathrm{ab}\,\cos\gamma$$

B.3. Tangentenformel

es gilt: $2\,s = \mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c}$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(\mathrm{s}-\mathrm{b})(\mathrm{s}-\mathrm{c})}{\mathrm{s}\,(\mathrm{s}-\mathrm{a})}}$$
$$\tan\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(\mathrm{s}-\mathrm{c})(\mathrm{s}-\mathrm{a})}{\mathrm{s}\,(\mathrm{s}-\mathrm{b})}}$$
$$\tan\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(\mathrm{s}-\mathrm{a})(\mathrm{s}-\mathrm{b})}{\mathrm{s}\,(\mathrm{s}-\mathrm{c})}}$$

C. Sphärische Trigonometrie

C.1. Sinussatz

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\mathrm{a}}{\sin\mathrm{b}} \qquad \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{\sin\mathrm{b}}{\sin\mathrm{c}} \qquad \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{\sin\mathrm{c}}{\sin\mathrm{a}}$$

C.2. Seitenkosinussatz

$$\cos\mathrm{a} = \cos\mathrm{b}\,\cos\mathrm{c} + \sin\mathrm{b}\,\sin\mathrm{c}\,\cos\alpha$$
$$\cos\mathrm{b} = \cos\mathrm{c}\,\cos\mathrm{a} + \sin\mathrm{c}\,\sin\mathrm{a}\,\cos\beta$$
$$\cos\mathrm{c} = \cos\mathrm{a}\,\cos\mathrm{b} + \sin\mathrm{a}\,\sin\mathrm{b}\,\cos\gamma$$

C.3. Winkelkosinussatz

$$\cos\alpha = -\cos\beta\,\cos\gamma + \sin\beta\,\sin\gamma\,\cos\mathrm{a}$$
$$\cos\beta = -\cos\gamma\,\cos\alpha + \sin\gamma\,\sin\alpha\,\cos\mathrm{b}$$
$$\cos\gamma = -\cos\alpha\,\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta\,\cos\mathrm{c}$$

4. Winkel und Seiten haben positive Werte!

   Sonst: $\pi - \alpha\,,\ \ldots\,,\ \pi - \mathrm{a}\,,\ \ldots$ oder $2\,\pi + \alpha\,,\ \ldots$ oder $\ldots$

5. Prüfen Sie, ob die Winkelsumme größer ist als π:

   $\alpha + \beta + \gamma > \pi$.

6. Prüfen Sie, ob die Seitensumme kleiner ist als $2\,\pi$:

   $\mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c} < 2\,\pi$.

7. Prüfen Sie, ob dem größeren von zwei Winkeln auch die größere Seite gegenüber liegt:

   $\mathrm{b} < \mathrm{a} \quad \Rightarrow \quad \beta < \alpha$.

D. Ergänzungen

D.1. Mehrdeutigkeiten bei der Berechnung von sphärischen Dreiecken

D.1.1. Grundaufgabe 5 (siehe C.10.5)

1. Fall

$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{2} > \frac{\pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad \frac{\alpha+\beta}{2} > \frac{\pi}{2}, \\
\alpha < \frac{\pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad \beta > \frac{\pi}{2} && \text{(geometrisch eindeutig)}, \\
\alpha > \frac{\pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad \beta < \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad > \frac{\pi}{2} && \text{(geometrisch zweideutig)}.
\end{aligned}$$

2. Fall

$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{2} < \frac{\pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad \frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{\pi}{2}, \\
\alpha < \frac{\pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad \beta < \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad > \frac{\pi}{2} && \text{(geometrisch zweideutig)}, \\
\alpha > \frac{\pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad \beta < \frac{\pi}{2} && \text{(geometrisch eindeutig)}.
\end{aligned}$$

D.1.2. Grundaufgabe 6 (siehe C.10.6)

1. Fall

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha+\beta}{2} > \frac{\pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad \frac{a+b}{2} > \frac{\pi}{2}, \\
a < \frac{\pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad b > \frac{\pi}{2} && \text{(geometrisch eindeutig)}, \\
a > \frac{\pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad b < \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad > \frac{\pi}{2} && \text{(geometrisch zweideutig)}.
\end{aligned}$$

2. Fall

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{\pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad \frac{a+b}{2} < \frac{\pi}{2}, \\
a < \frac{\pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad b < \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad > \frac{\pi}{2} && \text{(geometrisch zweideutig)}, \\
a > \frac{\pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad b < \frac{\pi}{2} && \text{(geometrisch eindeutig)}.
\end{aligned}$$

D.2. Grundregeln

1. Vermeiden Sie den Sinussatz!
2. Im Falle des Sinussatzes für jede Grundaufgabe die Lösung auf Mehrdeutigkeiten prüfen!
3. Zweite Lösung im mehrdeutigen Fall für α im ersten Quadranten ist $180° - \alpha$.

C.4. Fünfstückebeziehung (Sinus-Kosinussatz)

$$\begin{aligned}
\sin a \cos\beta &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos\alpha \\
\sin a \cos\gamma &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos\alpha \\
\sin b \cos\alpha &= \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos\beta \\
\sin b \cos\gamma &= \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos\beta \\
\sin c \cos\alpha &= \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos\gamma \\
\sin c \cos\beta &= \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos\gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\alpha \cos b &= \cos\beta \sin\gamma + \sin\beta \cos\gamma \cos a \\
\sin\alpha \cos c &= \cos\gamma \sin\beta + \sin\gamma \cos\beta \cos a \\
\sin\beta \cos a &= \cos\alpha \sin\gamma + \sin\alpha \cos\gamma \cos b \\
\sin\beta \cos c &= \cos\gamma \sin\alpha + \sin\gamma \cos\alpha \cos b \\
\sin\gamma \cos a &= \cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta \cos c \\
\sin\gamma \cos b &= \cos\beta \sin\alpha + \sin\beta \cos\alpha \cos c
\end{aligned}$$

C.5. Kotangentensatz

$$\begin{aligned}
\cos a \cos\beta &= \sin a \cot c - \sin\beta \cot\gamma \\
\cos a \cos\gamma &= \sin a \cot b - \sin\gamma \cot\beta \\
\cos b \cos\alpha &= \sin b \cot c - \sin\alpha \cot\gamma \\
\cos b \cos\gamma &= \sin b \cot a - \sin\gamma \cot\alpha \\
\cos c \cos\alpha &= \sin c \cot b - \sin\alpha \cot\beta \\
\cos c \cos\beta &= \sin c \cot a - \sin\beta \cot\alpha
\end{aligned}$$

C.6. Halbstücksrelationen

es gilt: $2\,\delta = \alpha + \beta + \gamma$

$$\begin{aligned}
\sin\frac{a}{2} &= \sqrt{-\frac{\cos\delta \cos(\delta-\alpha)}{\sin\beta \sin\gamma}} & \cos\frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\cos(\delta-\beta) \cos(\delta-\gamma)}{\sin\beta \sin\gamma}} \\
\sin\frac{b}{2} &= \sqrt{-\frac{\cos\delta \cos(\delta-\beta)}{\sin\gamma \sin\alpha}} & \cos\frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{\cos(\delta-\gamma) \cos(\delta-\alpha)}{\sin\gamma \sin\alpha}} \\
\sin\frac{c}{2} &= \sqrt{-\frac{\cos\delta \cos(\delta-\gamma)}{\sin\alpha \sin\beta}} & \cos\frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{\cos(\delta-\alpha) \cos(\delta-\beta)}{\sin\alpha \sin\beta}}
\end{aligned}$$

es gilt: $2\,\mathrm{s} = \mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c}$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(\mathrm{s}-\mathrm{b})\,\sin(\mathrm{s}-\mathrm{c})}{\sin\mathrm{b}\,\sin\mathrm{c}}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin\mathrm{s}\,\sin(\mathrm{s}-\mathrm{a})}{\sin\mathrm{b}\,\sin\mathrm{c}}}$$
$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin(\mathrm{s}-\mathrm{c})\,\sin(\mathrm{s}-\mathrm{a})}{\sin\mathrm{c}\,\sin\mathrm{a}}} \qquad \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin\mathrm{s}\,\sin(\mathrm{s}-\mathrm{b})}{\sin\mathrm{c}\,\sin\mathrm{a}}}$$
$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin(\mathrm{s}-\mathrm{a})\,\sin(\mathrm{s}-\mathrm{b})}{\sin\mathrm{a}\,\sin\mathrm{b}}} \qquad \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin\mathrm{s}\,\sin(\mathrm{s}-\mathrm{c})}{\sin\mathrm{a}\,\sin\mathrm{b}}}$$

C.7. Tangentenformeln

$$\tan\frac{\mathrm{a}}{2} = \sqrt{-\frac{\cos\delta\,\cos(\delta-\alpha)}{\cos(\delta-\beta)\,\cos(\delta-\gamma)}} \qquad \tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(\mathrm{s}-\mathrm{b})\,\sin(\mathrm{s}-\mathrm{c})}{\sin\mathrm{s}\,\sin(\mathrm{s}-\mathrm{a})}}$$
$$\tan\frac{\mathrm{b}}{2} = \sqrt{-\frac{\cos\delta\,\cos(\delta-\beta)}{\cos(\delta-\gamma)\,\cos(\delta-\alpha)}} \qquad \tan\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin(\mathrm{s}-\mathrm{c})\,\sin(\mathrm{s}-\mathrm{a})}{\sin\mathrm{s}\,\sin(\mathrm{s}-\mathrm{b})}}$$
$$\tan\frac{\mathrm{c}}{2} = \sqrt{-\frac{\cos\delta\,\cos(\delta-\gamma)}{\cos(\delta-\alpha)\,\cos(\delta-\beta)}} \qquad \tan\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin(\mathrm{s}-\mathrm{a})\,\sin(\mathrm{s}-\mathrm{b})}{\sin\mathrm{s}\,\sin(\mathrm{s}-\mathrm{c})}}$$

C.8. Delambresche Formelpaare (Gaußsche Formeln)

$$\cos\frac{\mathrm{a}}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\mathrm{b}+\mathrm{c}}{2} \qquad \sin\frac{\mathrm{a}}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\mathrm{b}+\mathrm{c}}{2}$$
$$\cos\frac{\mathrm{a}}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\mathrm{b}-\mathrm{c}}{2} \qquad \sin\frac{\mathrm{a}}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\mathrm{b}-\mathrm{c}}{2}$$
$$\cos\frac{\mathrm{b}}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2} = \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\mathrm{c}+\mathrm{a}}{2} \qquad \sin\frac{\mathrm{b}}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2} = \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\mathrm{c}+\mathrm{a}}{2}$$
$$\cos\frac{\mathrm{b}}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2} = \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\mathrm{c}-\mathrm{a}}{2} \qquad \sin\frac{\mathrm{b}}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2} = \cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\mathrm{c}-\mathrm{a}}{2}$$
$$\cos\frac{\mathrm{c}}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{2} \qquad \sin\frac{\mathrm{c}}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{2}$$
$$\cos\frac{\mathrm{c}}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{2} \qquad \sin\frac{\mathrm{c}}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{2}$$

- aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel

$$\begin{aligned} cot\frac{\varepsilon}{2} &= \cot\alpha + \frac{\cot\frac{\mathrm{b}}{2}\,\cot\frac{\mathrm{c}}{2}}{\sin\alpha} \\ &= \cot\beta + \frac{\cot\frac{\mathrm{c}}{2}\,\cot\frac{\mathrm{a}}{2}}{\sin\beta} \\ &= \cot\gamma + \frac{\cot\frac{\mathrm{a}}{2}\,\cot\frac{\mathrm{b}}{2}}{\sin\gamma} \end{aligned}$$

- Näherungsformel für kleine sphärische Dreiecke (Seiten bis 75 km, R = Erdradius)

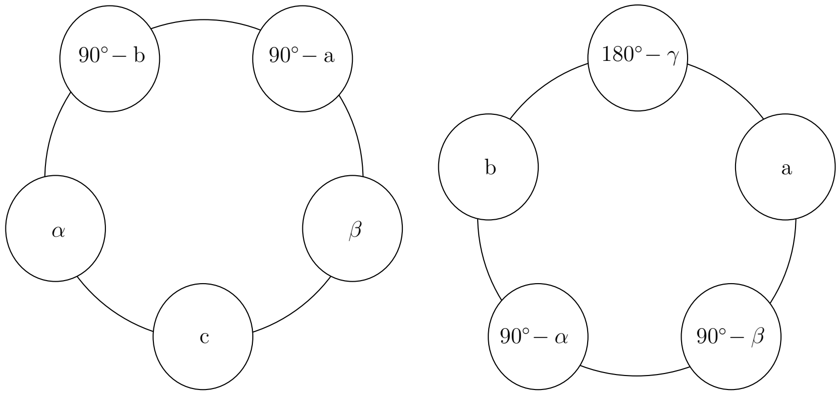
$$\begin{aligned} \varepsilon'' &= \frac{\mathrm{a}^2}{2\mathrm{R}^2}\,\frac{\sin\beta\,\sin\gamma}{\sin\alpha}\,\rho'' \\ &= \frac{\mathrm{b}^2}{2\mathrm{R}^2}\,\frac{\sin\gamma\,\sin\alpha}{\sin\beta}\,\rho'' \\ &= \frac{\mathrm{c}^2}{2\mathrm{R}^2}\,\frac{\sin\alpha\,\sin\beta}{\sin\gamma}\,\rho'' \end{aligned}$$

Zusammenhang zwischen Exzeß und Fläche des sphärischen Dreiecks I

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{O}}{720^\circ}\,\varepsilon \qquad \mathrm{O} = \text{Kugeloberfläche}$$

Mit $\mathrm{O} = 4\pi\mathrm{R}^2$ und für die Einheitskugel $\mathrm{R} = 1$ folgt

$$\mathrm{I} = \mathrm{arc}\ \varepsilon$$



(a) für das rechtwinklige Dreieck $\gamma = 90°$ (b) für das rechtseitige Dreieck $\mathrm{c} = 90°$

Abbildung 2: Neperscher Ring

C.11. Rechtwinkliges und rechtseitiges Dreieck

Npersche Regel

Der Kosinus eines Stückes im Neperschen Ring (Abb. 2) ist gleich dem Produkt der Kot**an**ges der **an**liegenden Stücke
oder
gleich dem Produkt der S**i**nus der n**i**chtanliegenden Stücke.

C.12. Sphärischer Exzeß ε

Winkelsumme im sphärischen Dreieck:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° + \varepsilon$$

Im Eulerschen Dreieck gilt:

$$0° < \varepsilon < 360°$$

Berechnung von ε:

- aus drei Seiten (nach L´Huilier)

$$\tan\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\tan\frac{\mathrm{s}}{2}\,\tan\frac{\mathrm{s-a}}{2}\,\tan\frac{\mathrm{s-b}}{2}\,\tan\frac{\mathrm{s-c}}{2}}$$

C.9. Nepersche Tangentenformeln (Nepersche Analogien)

$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2} = \cot\frac{\gamma}{2}\,\frac{\cos\frac{\mathrm{a-b}}{2}}{\cos\frac{\mathrm{a+b}}{2}} \qquad \tan\frac{\alpha-\beta}{2} = \cot\frac{\gamma}{2}\,\frac{\sin\frac{\mathrm{a-b}}{2}}{\sin\frac{\mathrm{a+b}}{2}}$$

$$\tan\frac{\mathrm{a+b}}{2} = \tan\frac{\mathrm{c}}{2}\,\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} \qquad \tan\frac{\mathrm{a-b}}{2} = \tan\frac{\mathrm{c}}{2}\,\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$\tan\frac{\beta+\gamma}{2} = \cot\frac{\alpha}{2}\,\frac{\cos\frac{\mathrm{b-c}}{2}}{\cos\frac{\mathrm{b+c}}{2}} \qquad \tan\frac{\beta-\gamma}{2} = \cot\frac{\alpha}{2}\,\frac{\sin\frac{\mathrm{b-c}}{2}}{\sin\frac{\mathrm{b+c}}{2}}$$

$$\tan\frac{\mathrm{b+c}}{2} = \tan\frac{\mathrm{a}}{2}\,\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}} \qquad \tan\frac{\mathrm{b-c}}{2} = \tan\frac{\mathrm{a}}{2}\,\frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}$$

$$\tan\frac{\gamma+\alpha}{2} = \cot\frac{\beta}{2}\,\frac{\cos\frac{\mathrm{c-a}}{2}}{\cos\frac{\mathrm{c+a}}{2}} \qquad \tan\frac{\gamma-\alpha}{2} = \cot\frac{\beta}{2}\,\frac{\sin\frac{\mathrm{c-a}}{2}}{\sin\frac{\mathrm{c+a}}{2}}$$

$$\tan\frac{\mathrm{c+a}}{2} = \tan\frac{\mathrm{b}}{2}\,\frac{\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}} \qquad \tan\frac{\mathrm{c-a}}{2} = \tan\frac{\mathrm{b}}{2}\,\frac{\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}}$$

C.10. Formeln für die Auflösung der 6 Standardfälle des sphärischen Dreiecks

C.10.1. Gegeben: a, b, c

Grundformeln	abgeleitete Formeln
$\cos\alpha = \dfrac{\cos\mathrm{a} - \cos\mathrm{b}\,\cos\mathrm{c}}{\sin\mathrm{b}\,\sin\mathrm{c}}$	$\tan\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{\sin(\mathrm{s-b})\,\sin(\mathrm{s-c})}{\sin\mathrm{s}\,\sin(\mathrm{s-a})}}$
$\cos\beta = \underline{\hspace{4cm}}$	$\tan\dfrac{\beta}{2} = \underline{\hspace{5cm}}$
$\cos\gamma = \underline{\hspace{4cm}}$	$\tan\dfrac{\gamma}{2} = \underline{\hspace{5cm}}$
oder	
$\sin\beta = \dfrac{\sin\mathrm{b}\,\sin\alpha}{\sin\mathrm{a}}$	$\mathrm{s} = \dfrac{\mathrm{a+b+c}}{2}$
$\sin\gamma = \underline{\hspace{4cm}}$	

C.10.2. Gegeben: α, β, γ

Grundformeln

$$\cos \mathrm{a} = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\,\cos\gamma}{\sin\beta\,\sin\gamma}$$

$$\cos \mathrm{b} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\cos \mathrm{c} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

oder

$$\sin \mathrm{b} = \frac{\sin \mathrm{a}\,\sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$\sin \mathrm{c} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

abgeleitete Formeln

$$\tan\frac{\mathrm{a}}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\delta\,\cos(\delta-\alpha)}{\cos(\delta-\beta)\,\cos(\delta-\gamma)}}$$

$$\tan\frac{\mathrm{b}}{2} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\tan\frac{\mathrm{c}}{2} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\delta = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

C.10.3. Gegeben: $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \gamma$

Grundformeln

$$\cos \mathrm{c} = \cos \mathrm{a}\,\cos \mathrm{b} + {}$$
$$+ \sin \mathrm{a}\,\sin \mathrm{b}\,\cos\gamma$$

$$\sin\alpha = \frac{\sin \mathrm{a}\,\sin\gamma}{\sin \mathrm{c}}$$

$$\sin\beta = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

abgeleitete Formeln

$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2} = \cot\frac{\gamma}{2}\,\frac{\cos\frac{(\mathrm{a}-\mathrm{b})}{2}}{\cos\frac{(\mathrm{a}+\mathrm{b})}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha-\beta}{2} = \cot\frac{\gamma}{2}\,\frac{\sin\frac{(\mathrm{a}-\mathrm{b})}{2}}{\sin\frac{(\mathrm{a}+\mathrm{b})}{2}}$$

$$\sin \mathrm{c} = \frac{\sin\gamma\,\sin \mathrm{a}}{\sin\alpha}$$

C.10.4. Gegeben: $\alpha, \beta, \mathrm{c}$

Grundformeln

$$\cos\gamma = -\cos\alpha\,\cos\beta + {}$$
$$+ \sin\alpha\,\sin\beta\,\cos \mathrm{c}$$

$$\sin \mathrm{a} = \frac{\sin\alpha\,\sin \mathrm{c}}{\sin\gamma}$$

$$\sin \mathrm{b} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

abgeleitete Formeln

$$\tan\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{2} = \tan\frac{\mathrm{c}}{2}\,\frac{\cos\frac{(\alpha-\beta)}{2}}{\cos\frac{(\alpha+\beta)}{2}}$$

$$\tan\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{2} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\sin\gamma = \frac{\sin \mathrm{c}\,\sin\alpha}{\sin \mathrm{a}}$$

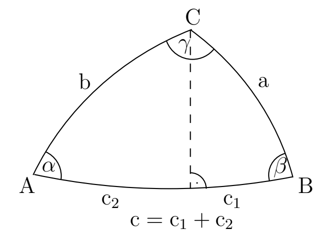


Abbildung 1: Skizze zum Verständnis von C.10.5 und C.10.6

C.10.5. Gegeben: $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \alpha$

Grundformeln

$$\sin\beta = \frac{\sin \mathrm{b}\,\sin\alpha}{\sin \mathrm{a}}$$

$$\tan \mathrm{c}_1 = \cos\beta\,\tan \mathrm{a}$$

$$\tan \mathrm{c}_2 = \cos\alpha\,\tan \mathrm{b}$$

$$\sin\gamma = \frac{\sin \mathrm{c}\,\sin\alpha}{\sin \mathrm{a}}$$

abgeleitete Formeln

$$\sin\beta = \frac{\sin \mathrm{b}\,\sin\alpha}{\sin \mathrm{a}}$$

$$\tan\frac{\mathrm{c}}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}\,\tan\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{2}$$

$$\cot\frac{\gamma}{2} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

C.10.6. Gegeben: α, β, a

Grundformeln

$$\sin \mathrm{b} = \frac{\sin\beta\,\sin \mathrm{a}}{\sin\alpha}$$

$$\tan \mathrm{c}_1 = \cos\beta\,\tan \mathrm{a}$$

$$\tan \mathrm{c}_2 = \cos\alpha\,\tan \mathrm{b}$$

$$\sin\gamma = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

abgeleitete Formeln

$$\sin \mathrm{b} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\tan\frac{\mathrm{c}}{2} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\cot\frac{\gamma}{2} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$