

Kapitel 6

Messfehler

6.1 Fehlereinteilung

Bei der Informationsgewinnung kommt es darauf an, dass die auf das System wirkenden Eingangsgrößen, d.h. die an den wasserwirtschaftlichen/wassertechnischen Prozessen beteiligten physikalischen und/oder chemischen Größen genau erfasst und durch einen Zahlenwert oder eine Grafik dargestellt werden können. Entsprechend der Charakterisierung von Signalen (vergleiche Abschnitt 2.1 Messtechnik), bei der von Informationsparameter und Informationsträger gesprochen wurde, spricht man im Zusammenhang mit der Fehlerbetrachtung von Messgrößen. Die **Messgröße** ist die physikalische oder chemische Größe, der die Messung gilt. Der Wert einer Messgröße wird durch das **Produkt aus Zahlenwert und Einheit** ausgedrückt. Das **Messergebnis** ist der **Schätzwert der Messgröße**, der durch Auswertung einer Messung erhalten wird.

Auch in der Geohydraulik spielt dabei die Frage nach der Vertrauenswürdigkeit derartiger Zahlenwerte, d.h. die **Messunsicherheit** und **Messungenauigkeit** eine große Rolle. Diese Unsicherheit bzw. Ungenauigkeit des Messwertes wird von Fehlern negativ beeinflusst. Man kann dabei Fehler nach der Art ihres Auftretens in **systematische** und **zufällige (statische) Fehler**, aber auch nach der Art ihrer Entstehung in **subjektive** und **objektive Fehler** einteilen.

Systematische Fehler: werden hauptsächlich durch Unvollkommenheiten der Maßverkörperung der Messgeräte, der Messverfahren und des Messgegenstandes sowie von messtechnisch erfassbaren Einflüssen der Umwelt und persönlichen Einflüssen der Beobachter hervorgerufen. Sie haben

- ein bestimmtes Vorzeichen (+ oder -)
- unter gleichen Bedingungen den gleichen Betrag, d.h. sie können durch Wiederholung der Messung nicht festgestellt werden, sondern nur durch ein anderes (genauerer) Messgerät oder Messverfahren

Zufällige bzw. stochastische Fehler: werden von messtechnisch nicht erfassbaren Änderungen der Maßkörper, der Messgeräte, des Messgegenstandes, der Umwelt und der Beobachter hervorgerufen. Auch numerische Berechnungen z.B. mit einem Computer sind in der Regel nicht beliebig genau, sondern fehlerhaft. So führen Rundungen und endliche Tiefe jedes Iterationsverfahren zu stochastischen Fehlern. Die zufälligen Fehler können bei einer Einzelmessung weder nach ihrem Betrag noch nach ihrem Vorzeichen bestimmt werden; sie sind daher nicht zu korrigieren und machen das Ergebnis unsicher. Wiederholt man eine

Messung unter gleichen Bedingungen, so weichen die einzelnen Messwerte voneinander ab, sie "streuen". Sie können nach den Regeln der mathematischen Statistik in ihrer Gesamtheit zahlenmäßig erfasst und durch eine statistische Kenngröße charakterisiert werden.

Subjektive Fehler: sind die vom Menschen im Informationsgewinnungsprozess verursachten Fehler. Im Zuge der on-line-Informationsgewinnung werden diese Fehler immer mehr eliminiert. Subjektive Messfehler entstehen durch

- falsches Ablesen der Messskala
- falsche oder fehlerhafte Eintragung in die Protokolllisten
- Eintragung von geschätzten Messwerten oder Fehlstellen.

Objektive Fehler: sind im Allgemeinen durch ein Messverfahren oder Messgerät bedingt und damit gleichzeitig in die Klasse der systematischen Fehler einzuordnen. Typische Ursachen und Quellen systematischer objektiver Messfehler sind

- Rückwirkung des Messsystems auf das Messobjekt
- Unzulänglichkeiten der Messsysteme und der Gerätetechnik
- ungünstige Wahl des Messortes und -zeitpunktes.

Durch **systematische Messfehler** wird ein Messergebnis immer **unrichtig (ungenau, falsch)**, durch **zufällige Fehler** dagegen **unsicher**.

6.2 Systematische Fehler

Systematische Messfehler durch **Rückwirkung des Messsystems** auf das Messobjekt treten bei fast allen Messverfahren auf. Es muss versucht werden, solche Effekte zu erkennen und zu minimieren. Als Beispiel lässt sich schon das Einbringen eines Grundwasserbeobachtungsrohres in den Untergrund ansehen. Durch das Bohr- und anschließende Verfüllverfahren wird die Bodenstruktur des Untergrundes zerstört, andersartiges Bodenmaterial eingebracht und damit der Durchlässigkeitskoeffizient und das Speichervermögen gegenüber dem Originalsystem verändert. Beim Ausbau der sog. Gütepegel kann durch Verwendung

von ungünstigem Material (z.B. PVC) die Messung der entsprechenden chemischen Konzentrationen negativ beeinflusst werden. Eine weitere Rückwirkung des Messsystems auf den Prozess besteht durch den Energietransport. Verfügt die zu messende Prozessgröße nur über eine kleine Energie, so kann der Messvorgang durch die Entnahme von Energie den Prozess erheblich beeinflussen (z.B. Bewegen von Getrieben und Hebeln, Stromfluss bei Elektrolyten, Temperaturmessung mit großen Wärmekapazitäten).

Unzulänglichkeiten des Messsystems und der Gerätetechnik zeigen sich z.B. im Abweichen des Übertragungsverhaltens eines Systems (z.B. Sensor) von der vorgeschriebenen Charakteristik. Solche Effekte können durch Alterung oder Verschmutzung entstehen. Weitere Unzulänglichkeiten können die Beschädigung des Messsystems und Störungen bzw. Einstreuungen auf dem Übertragungsweg sein. Eine besondere Fehlerquelle ist in der mangelhaften oder veränderlichen Ankopplung des Messsystems an den Prozess zu sehen. Solche Beispiele können unter anderem bei der Temperaturmessung infolge schlechten Wärmeübergangs oder bei der Leitfähigkeitsmessung durch Verschmutzungen auftreten. Meist kann man davon ausgehen, dass zwischen Prozess und Messsystem ein zusätzlicher unerwünschter Widerstand vorhanden ist.

Die Abweichung des Übertragungsverhaltens von der vorgeschriebenen Charakteristik des Messsystems wird als systematischer Kennlinienfehler bezeichnet. Dabei werden vor allem drei Arten, die additiven, die multiplikativen und die nichtlinearen Fehler (siehe Abbildung 6.1) unterschieden. Die Bezeichnungen gehen dabei davon aus, dass das gewünschte Übertragungsverhalten proportionalen Charakter hat.

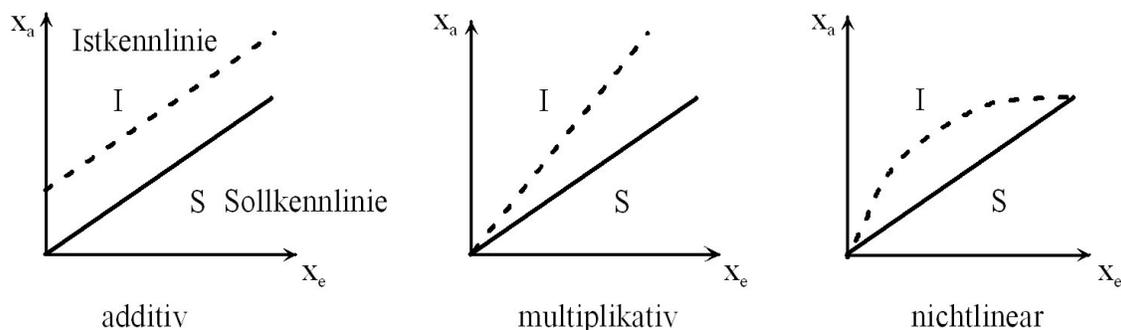


Abbildung 6.1: Systematische Kennlinienfehler

Die mathematische Beschreibung derartiger Fehler ist in Tabelle 6.1 zusammengestellt.

Ist die Art des Kennlinienfehlers bekannt, so kann über eine entsprechende Kalibrierungs-

Tabelle 6.1: Kennlinienfehler

Fehlerart	Sollkennlinie	Istkennlinie
additiv	$x_a = k \cdot x_e$	$x_a = k \cdot x_e + x_s$
multiplikativ	$x_a = k \cdot x_e$	$x_a = (k + k_s) \cdot x_e$
nichtlinear	$x_a = k \cdot x_e$	$x_a = f(x_e)$

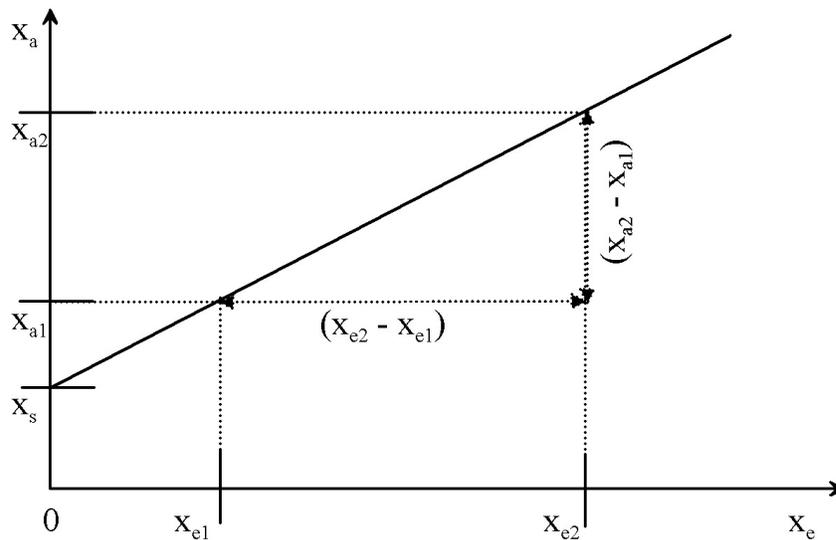


Abbildung 6.2: Kalibriermessung zur Kennlinienbestimmung

messung die Abweichungen von der Sollkennlinie, d.h. die Änderung der Steigung k_s und der Schnittpunkt x_s mit der x_a -Achse, bestimmt werden. Da zwei Unbekannte gesucht werden, müssen zwei Kalibrierungsmessungen durchgeführt werden. Diese Experimente liefern die Wertepaare $x_{e1}; x_{a1}$ und $x_{e2}; x_{a2}$. damit lassen sich zwei Gleichung mit zwei Unbekannten aufstellen (siehe Abbildung 6.2).

$$x_{a1} = (k + k_s) \cdot x_{e1} + x_s \quad (6.1)$$

$$x_{a2} = (k + k_s) \cdot x_{e2} + x_s$$

Daraus ergibt sich

$$(k + k_s) = \frac{(x_{a1} - x_{a2})}{(x_{e1} - x_{e2})} \quad (6.2)$$

$$x_s = x_{a1} - \frac{(x_{a1} - x_{a2})}{(x_{e1} - x_{e2})} \cdot x_{e1} \quad \text{bzw.}$$

$$x_s = x_{a2} - \frac{(x_{a1} - x_{a2})}{(x_{e1} - x_{e2})} \cdot x_{e2}$$

Wird als ein Kalibrierungspunkt eine sogenannte Nullmessung durchgeführt, d.h. die Eingangsgröße $x_{e1} = 0$ wird Null gesetzt, so vereinfachen sich die Bestimmungsgleichungen zu

$$x_s = x_{a1} \quad (6.3)$$

$$(k + k_s) = \frac{(x_{a1} - x_{a2})}{(-x_{e2})}$$

Für den realen Messvorgang, bei dem i.a. die Eingangsgröße gesucht wird, bedeutet dies

$$x_e = \frac{(x_a - x_s)}{(k + k_s)} \quad (6.4)$$

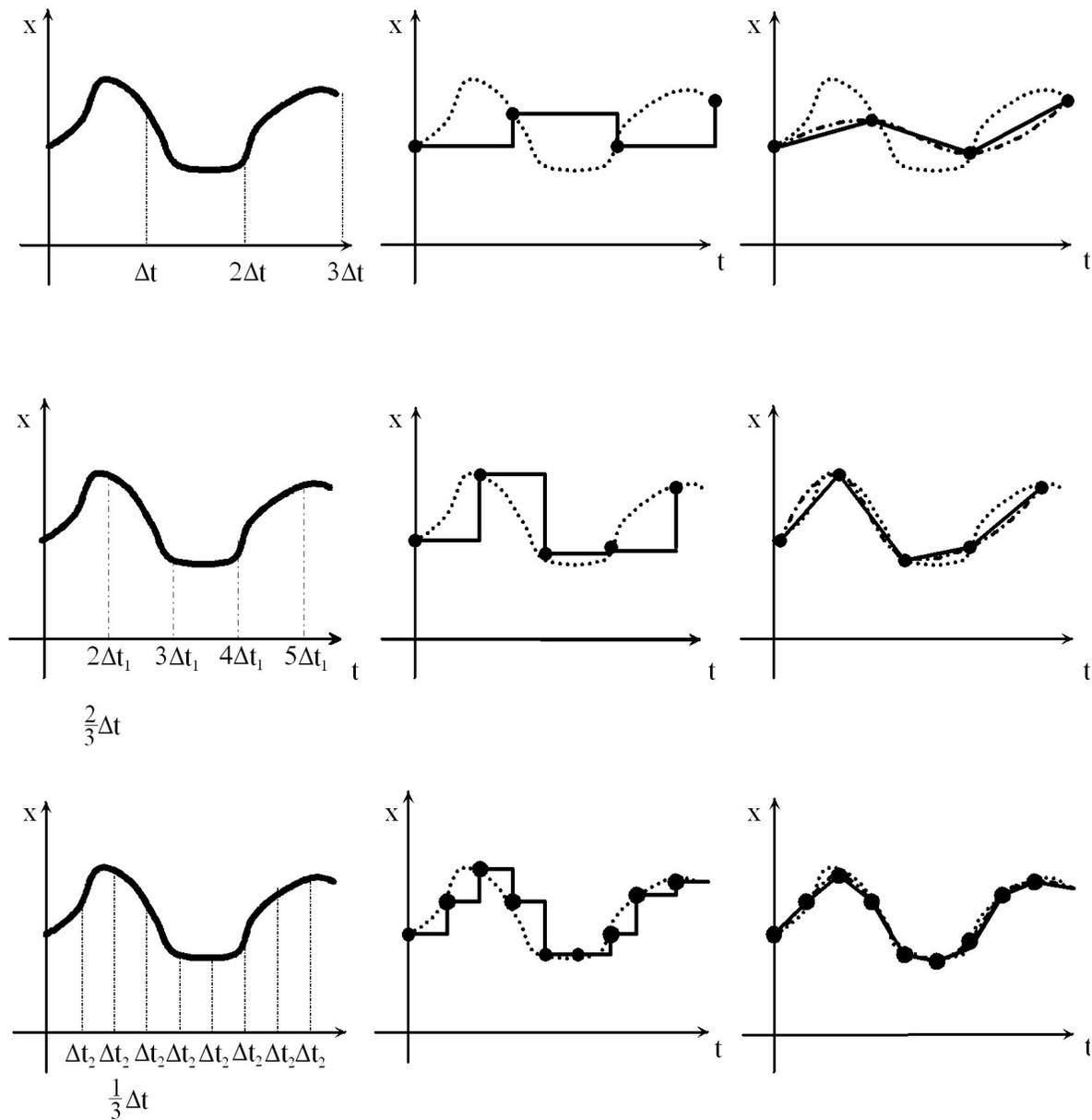
$$\text{beliebige Kalibrierung} \quad x_e = \frac{\left(x_a - \left(x_{a1} - \frac{(x_{a1} - x_{a2})}{(x_{e1} - x_{e2})} \cdot x_{e1} \right) \right)}{\frac{(x_{a1} - x_{a2})}{(x_{e1} - x_{e2})}}$$

$$\text{Nullpunktkalibrierung} \quad x_e = \frac{(x_a - x_{a1})}{\frac{(x_{a1} - x_{a2})}{(-x_{e2})}}$$

Diese einfache Kennlinienbestimmung mittels zwei Kalibrierungsmessungen kann nur bei linearen Übertragungskennlinien angewendet werden. Handelt es sich bei der Übertragungsfunktion um eine nichtlineare Kennlinie, müssen die Methoden der Interpolation bzw. nichtlinearen Regression benutzt werden. Bekannte Interpolationsverfahren sind z.B. Polynomansatz, LAGRANGE-, NEWTON-, SPLINE- oder AKIMOVinterpolation. Näheres dazu ist entsprechender mathematischen Standardliteratur oder dem Vorlesungsscript "Wasserwirtschaftliche Systemanalyse" zu entnehmen.

Beachte: Dieser Vorgang wird **Kalibrierung** genannt und nicht wie oft fälschlicherweise als **Eichung** bezeichnet. Die Eichung ist eine spezielle Art der Kalibrierung, die von staatlich befugten Personen, z.B. das Amt für Mess- und Prüfwesen, an genormten Methoden und Vergleichsmaßen durchgeführt wird. Die Eichung ist ein Rechtsakt.

Bei einer **ungünstigen Wahl des Messortes oder -zeitpunktes** kann es zu sehr großen Fehlern, die in Zehnerpotenzen über denen der anderen Fehler liegen können, kommen. Im Allgemeinen werden in der Geohydraulik diskontinuierliche Informationen bezüglich des Ortes und der Zeit gewonnen, aus denen man oft kontinuierliche Aussagen ableitet (siehe Abschnitt ?? Signalstrukturen). In Anlehnung an das in der Informationstheorie bekannte Abtasttheorem lässt sich aussagen, dass auch über die geohydraulischen Prozesse nur an den gewählten Abtastpunkten exakte Aussagen gegeben werden können. Zwischen den Abtastpunkten, sowohl zeitlich als auch räumlich gesehen, sind nur interpolierende Aussagen möglich. Diese errechneten Werte stimmen mit dem Originalsystem nur dann überein, wenn die Häufigkeit der Abtastpunkte groß genug ist. Die notwendige Häufigkeit kann aus der FOURIERreihenanalyse des Informationsparameters berechnet werden. Dabei kann der Informationsparameter jede geohydraulische Variable sein, die nach der Zeit oder den drei Ortskoordinaten entwickelt wird. Bei einer eindeutigen Reproduzierbarkeit des Informationsparameters muss der Abstand der Abtastpunkte doppelt so klein sein wie die Periodendauer mit der höchsten Frequenz der FOURIERreihenanalyse. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, kann die Messfunktion durch eine additive Überlagerung von harmonischen Sinusschwingungen dargestellt werden. Eine andere Art zur Abschätzung des Abtastintervalls stellt die TAYLORreihenentwicklung der Messfunktion um einen Messpunkt dar. An Hand des Vergleichs zwischen Originalfunktion und approximierter Funktion lässt sich der Abstand zweier Messpunkte für eine vorgegebene Fehlerschranke ermitteln.



Originalfunktion

Abgetastete Funktion

Interpolierte Funktion

● Abgetasteter Messwert
 Originalfunktion

—— Lineare Interpolation
 - - - - Spline-Interpolation

Abbildung 6.3: Messfehler durch Quantisierung der unabhängigen Variablen - Abtastfehler

Als approximierte Funktion haben sich vor allem die lineare und die quadratische Funktion, d.h. das erste und zweite Glied der TAYLORreihenentwicklung, bewährt.

Eine weitere bewährte Form der Interpolation ist die Spline-Interpolation. Zu beachten ist aber, dass bei den üblichen großen Quantisierungsweiten der unabhängigen Variablen, die in der Geohydraulik verwendet werden, die lineare Interpolation, d.h. eine Approximation mit einer Funktion ersten Grades, die besten Werte liefert. Auf Grund der konvexen oder konkaven Kurvenform höherwertiger Interpolationsalgorithmen (einschließlich der Spline- oder AKIMOV-Interpolation) liefern diese meist größere Fehler als die linearen (siehe Abbildung 6.3).

6.3 Zufällige Fehler

In der Messwertanalyse werden alle Messgrößen als Zufallsvariablen behandelt. Das gilt auch für die Störgrößen, die die Messunsicherheit hervorrufen. Diese Störgrößen unterscheiden sich dabei von den gemessenen Größen nur dadurch, dass über sie meist weniger Informationen vorliegen.

Die zufälligen Fehler werden nach den Methoden der Statistik erfasst und behandelt. Das erfordert das Ausführen von Messungen unter Wiederholbedingungen. Vor dem Ausgleich sind die Messwerte von groben Ausreißern zu befreien. Bei Messreihen unter Wiederholungsbedingungen tritt in der Regel eine Streuung der Einzelmessung auf, sofern die Auflösung der Messeinrichtung genügend hoch ist. Die Menge der Einzelmessung nennt man **Stichprobe**. Aus den Einzelmessungen erhält man nicht den gesuchten wahren Wert x_{wahr} , sondern nur einen **Schätzwert** \hat{x}_{wahr} . Die mathematische Grundlage bildet die Normalverteilung von Zufallsgrößen nach GAUSS. Die **Normalverteilung** (GAUSS-Verteilung) geht von Voraussetzungen aus, von denen folgende wesentlich sind:

- Die Anzahl der Zufallsgrößen (Messwerte) ist unendlich groß.
- Das Vorkommen gleich großer negativer und positiver Fehler ist gleich wahrscheinlich.
- Kleinere Fehler sind wahrscheinlicher als große.
- Fehler der Größenordnung Null sind am häufigsten.

Als Vorstufe der GAUSSschen Normalverteilung können die Histogramme angesehen werden. Für die Aufstellung von Histogrammen müssen die Messwerte in Klassen eingeteilt werden. Diese Klassen besitzen eine konstante Breite um einen Klassenmittelwert. Der

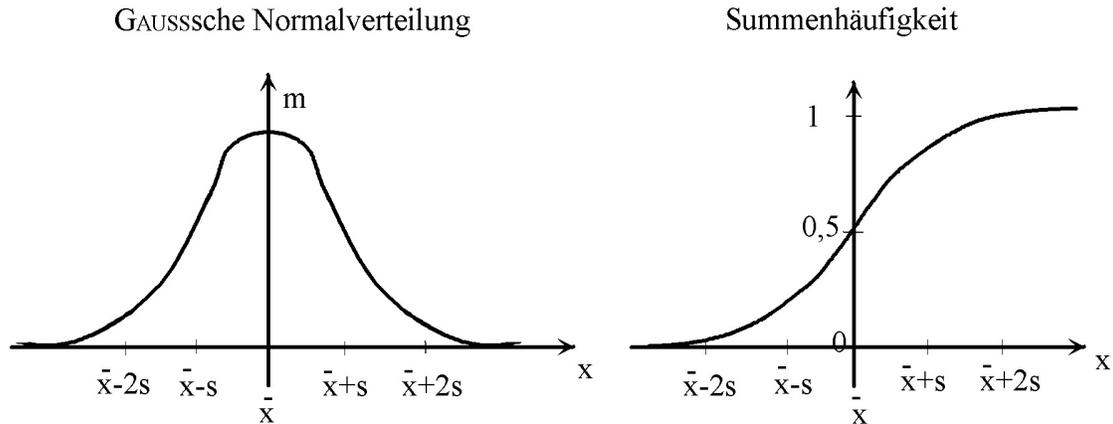


Abbildung 6.4: Häufigkeits- und Summenhäufigkeitsverteilung für normalverteilte Messreihen

Klassenmittelwert sollte dem Streubereich der Messwerte entsprechen. Das Histogramm entsteht durch Zuordnung der Messwerte zu den Klassen und Auftragen der Messwertanzahl pro Klasse (Häufigkeit) über der Messwertklasse. Dabei ist zu beachten, dass die Häufigkeitsverteilung und damit die Form des Histogramms stark von den gewählten Klassen abhängt. Die Verteilungsfunktion erhält man durch Verringerung der Klassenbreite, speziell beim Übergang von der endlichen Breite Δx zur Infinitesimaldarstellung. An Hand der Form der Verteilungskurve unterscheidet man GAUSS- bzw. **normalverteilte** Häufigkeitsfunktionen (siehe Abbildung 6.4) und **schiefverteilte**, die wiederum in verschiedene spezielle Arten eingeteilt werden, z.B. Chi-Verteilung. Mittels des Histogramms lassen sich auch die so genannten Ausreißer (Messwerte, die weit vom Maximum der Verteilungsfunktion liegen) erkennen und eventuelle bewerten. An Hand der Definition der Normalverteilung (siehe oben) wird der Mittelwert einer Messreihe durch das Maximum der Verteilungskurve festgelegt. Dieser so definierte Mittelwert kann vom arithmetischen Mittelwert abweichen. Dieser nach der Normalverteilung festgelegte Mittelwert stellt eine bessere Widerspiegelung der natürlichen Verhältnisse dar als der arithmetische Mittelwert.

In der Abbildung 6.4 stellt s die empirische Standardabweichung, die die Grenze des Vertrauensbereiches bildet, der Messwerte dar und wird berechnet mit:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (6.5)$$

n	Anzahl der Messwerte
x_i	n-ter Messwert
\bar{x}	Mittelwert, Maximum der Normalverteilung

Als Beispiel für ein Histogramm sollen Messwerte einer Wasserstandsmessung an einem zeitlich konstanten Pegel dienen (siehe Tabelle 6.2). Nach Einteilung der Messwerte in Klassen werden die Häufigkeiten pro Klasse ermittelt. Die grafische Darstellung der Häufigkeit in Abhängigkeit von den Klassen nennt man Histogramm (siehe Abbildung 6.5).

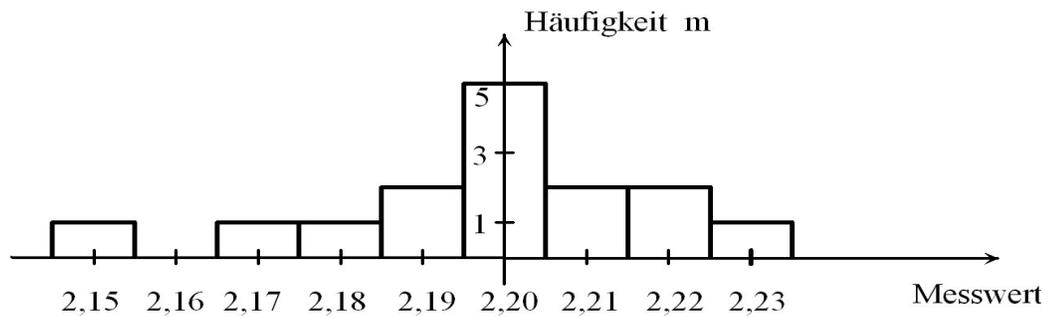


Abbildung 6.5: Histogramm der Messreihe

Tabelle 6.2: Beispiel zum Aufstellen eines Histogramms

Wasserstand in m																
Messwerte	2,21	2,18	2,20	2,20	2,15	2,20	2,17	2,22	2,20	2,23	2,19	2,20	2,21	2,22	2,19	2,20

Häufigkeitsverteilung									
Klassen in m	2,15	2,16	2,17	2,18	2,19	2,20	2,21	2,22	2,23
Häufigkeiten	1	0	1	1	2	5	2	2	1

6.4 Fehlerrechnung

6.4.1 Konstante Versuchsbedingungen

Für die zufälligen Fehler, die als **normalverteilt** angenommen werden, können die Rechenoperationen der mathematischen Statistik angewandt werden, um den wahren Wert zu ermitteln. Deshalb werden zufällige Fehler, die unter konstanten Versuchsbedingungen auftreten auch als statistische Fehler bezeichnet.

Mit **Spannweite** R wird die Differenz zwischen dem größten und kleinsten Messwert einer Reihe bezeichnet.

$$R = x_{\max} - x_{\min} \quad (6.6)$$

Mittelwerte \bar{x} : Wenn alle Einzelmessungen gleich gut sind, ist der plausibelste und auch der beste Schätzwert der **arithmetische Mittelwert**. Man muss aber beachten, dass nach der Definition der normalverteilten Messwerte, der Mittelwert exakter Weise das Maximum der GAUSS-Verteilung ist. Neben dem arithmetischen Mittelwert sind noch weitere Mittelwerte bekannt.

Arithmetisches Mittel:

$$\bar{x}_A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (6.7)$$

Gewichtetes Mittel:

$$\bar{x}_{Gew} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n G_i} \cdot \sum_{i=1}^n G_i x_i \quad (6.8)$$

G_i Gewichtungsfunktion

Quadratisches Mittel:

$$\bar{x}_Q = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (6.9)$$

Geometrisches Mittel:

$$\bar{x}_G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \quad (6.10)$$

Harmonisches Mittel:

$$\bar{x}_H = \frac{1}{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} = \frac{n \cdot \prod_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n \left(\prod_{l=1; l \neq i}^n x_l \cdot x_i \right)} \quad (6.11)$$

n Anzahl der Messwerte

x_i Einzelmesswert

Beispiel:

Aus den Zahlen 1; 3; 5; 9 ergeben sich folgende Mittelwerte:

\bar{x}_A	\bar{x}_{Gew}	\bar{x}_Q	\bar{x}_G	\bar{x}_H
4,5	3,2	5,38	3,41	2,432

Daheraus sieht man, dass speziell bei dem harmonischen Mittel der kleinste Wert sich dominant durchsetzt. Dieses hat speziell auch bei allen Strömungsprozessen physikalisch begründet. So z.B. die Reihenschaltung von Strömungswiderständen oder Durchlässigkeitswerte von Bodenschichten.

Aus den Zahlenwerten der Tabelle 6.2, Seite 194 sollen die verschiedenen Mittelwerte berechnet werden. Es ergeben sich folgende Werte:

\bar{x}_A	\bar{x}_Q	\bar{x}_G	\bar{x}_H	\bar{x}_{GAUSS}
2,20	2,1981	2,1979	2,1978	2,20

Gewichtete Mittelwertbildung: Bei der gewichteten Mittelwertbildung werden die einzelnen Summanden mit entsprechenden Gewichten (Faktoren) multipliziert. Damit kann

erreicht werden, dass einzelne Messwerte stärker oder schwächer berücksichtigt werden.

$$\bar{x}_{Gew} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n G_i} \cdot \sum_{i=1}^n G_i \cdot x_i \quad (6.12)$$

G_i Gewichtungsfunktionswert für den jeweiligen Messwert

Als spezielle Gewichtungsfunktion kann auch die Quadrierung angesehen werden, bei der größere Messwerte stärker betont werden als kleinere (siehe auch Abschnitt 6.4.2 Methode der kleinsten Fehlerquadrate).

Standardabweichung: Als **empirische Standardabweichung** der Messwerte bzw als **mittlere quadratische Abweichung** wird s verwendet. Ihr Quadrat s^2 heißt **empirische Streuung** oder **Varianz**.

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (6.13)$$

s empirische Standardabweichung

Sind mehrere Variable über eine mathematische Funktion verknüpft, so sind die Standardabweichungen ebenfalls zu verknüpfen und führt zu einer Vergrößerung der Standardabweichung. In der Abbildung 6.6 ist beispielhaft die Vergrößerung der Standardabweichung additiver Verknüpfung zweier Messwerte dargestellt.

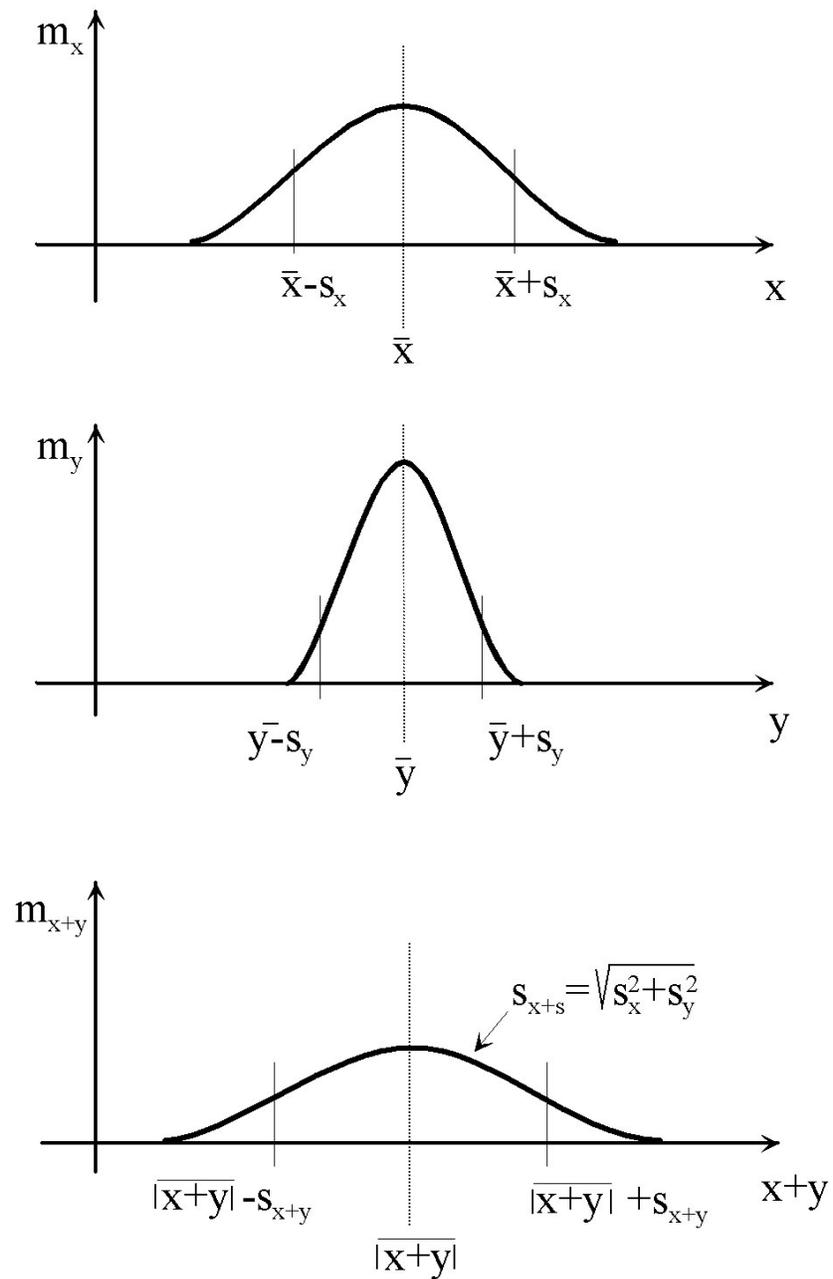


Abbildung 6.6: Vergrößerung der Standardabweichung bei Addition zweier Einzelmessgrößen

Variationskoeffizient Der **empirische Variationskoeffizient** oder der **Variabilitätskoeffizient** v einer Messreihe ist definiert zu

$$v = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\% \quad (6.14)$$

Vertrauensgrenzen, Messunsicherheit, Messergebnis Bei der Normalverteilung gibt der Mittelwert $x_{wahr} \approx \bar{x}$ den wahren Wert an. Bei einer **endlichen** Zahl von Messwerten ist der wahre Wert in einem **Bereich** um $x_{wahr} \approx \bar{x} \pm \Delta x$ zu erwarten. Zur Angabe des Vertrauensbereiches des Mittelwertes \bar{x} ist stets die gewählte Sicherheit P hinzuzufügen. Sind die Messwerte normalverteilt, so bestimmt das Maximum der Glockenkurve (siehe Abbildung 6.4) den Mittelwert \bar{x} . Die Standardabweichung (siehe Gleichung 6.13) s ist das Maß, wie stark die Messwerte um diesen Mittelwert streuen. Die Wendepunkte der Glockenkurve liegen bei $x_W = \bar{x} \pm s$.

Bei der Beurteilung von Stichprobenergebnissen wird häufig auf die prozentuale Verteilung der Eintrittswahrscheinlichkeit der Messwerte in Abhängigkeit von der Standardabweichung Bezug genommen. So gilt der in Tabelle 6.3 dargestellte Zusammenhang.

Anschaulich bedeutet dies: Bei einer normalverteilten Messwertreihe ist eine Abweichung von mehr als $1 \cdot s$ vom Mittelwert etwa einmal ($\approx 32\%$) in drei Versuchen zu erwarten, eine Abweichung um mehr als $2 \cdot s$ etwa nur einmal in je 22 Versuchen und eine Abweichung um mehr als $3 \cdot s$ etwa nur einmal in je 370 Versuchen oder anders ausgedrückt: Die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Wert vom Mittelwert absolut genommen um mehr als $n \cdot s$ unterscheidet, ist kleiner als $100\% - P_n$.

$$P \{|x - \bar{x}| > n \cdot s\} = \frac{(100\% - P_n)}{100\%} \quad (6.15)$$

Tabelle 6.3: Abhängigkeit der Eintrittswahrscheinlichkeit von der Standardabweichung

$x \approx \bar{x} \pm n \cdot s$	P_n in %
$\bar{x} \pm 1 \cdot s$	68,0
$\bar{x} \pm 1,96 \cdot s$	95,0
$\bar{x} \pm 2 \cdot s$	95,5
$\bar{x} \pm 2,58 \cdot s$	99,0
$\bar{x} \pm 3 \cdot s$	99,7
$\bar{x} \pm 3,29 \cdot s$	99,9

Neben der Unsicherheit der Messwerte wird noch von einer Unsicherheit der Messfehler gesprochen, d.h. die Messfehler, die man aus einzelnen Stichproben ermitteln kann, streuen selber wiederum um den zufälligen Messfehler, den man bei Kenntnis aus der Grundgesamtheit berechnen würde. Diese Streuung wird mit Hilfe der **t-** bzw. **Student-Verteilung** abgeschätzt. Sie gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit P der gesuchte wahre Wert x_{wahr} in einem Bereich, den **Vertrauensbereich** $\bar{x} \pm t \cdot \Delta x$ erwartet werden kann. Die t-Verteilung ist im Gegensatz zur GAUSS-Verteilung eine Funktion, die von der **Anzahl der Messungen** und von der statistischen Sicherheit abhängt. Werden nur wenige Messwerte aufgenommen, so sollte man den statistischen Messfehler der Stichprobe durch einen entsprechenden Faktor aus der Student-Verteilung korrigieren. Das bedeutet, dass die Streubreite der Messwerte, die bei unendlicher Anzahl durch die empirische Standardabweichung s definiert ist, bei endlicher Anzahl durch einen Faktor vergrößert wird. Wie aus Tabelle 6.4 zu ersehen ist, sind bei extrem kleinen Versuchsreihen sehr hohe Faktoren zu berücksichtigen.

$$\begin{array}{ll}
 \text{obere Vertrauensgrenze} & \bar{x} + \left(1 \pm \frac{t}{\sqrt{n}}\right) s \\
 \text{untere Vertrauensgrenze} & \bar{x} - \left(1 \pm \frac{t}{\sqrt{n}}\right) s \\
 \text{Vertrauensbereich} & \pm \left(1 \pm \frac{t}{\sqrt{n}}\right) s \\
 \text{Messunsicherheit} & u = \left(\left(1 \pm \frac{t}{\sqrt{n}}\right) s + f \right)
 \end{array} \tag{6.16}$$

$\frac{t}{\sqrt{n}}$ t- oder Student-Verteilung

f abgeschätzter Betrag der nicht erfassten systematischen Messfehler

Das Ergebnis von Messungen x unter Wiederholbedingungen lässt sich aus einer endlichen Zahl von Messwerten wie folgt darstellen, wobei neben den zufälligen Fehlern auch die abschätzbaren systematischen Fehler einzubeziehen sind:

$$x = \bar{x} \pm u \tag{6.17}$$

Neben der **absoluten Fehlerangabe** u wird auch oft von dem **relativen Fehler** in Prozenten gesprochen.

$$x = \bar{x} \pm \frac{u}{\bar{x}} \cdot 100\% \tag{6.18}$$

Beachte:

Während die Standardabweichung s der Grundgesamtheit keine Unsicherheit enthält, besitzt jede aus einer begrenzten Anzahl von Messwerten ermittelte **Standardabweichung** eine **Unsicherheit**, die um so größer ist, je kleiner die Anzahl der Messwerte ist.

Tabelle 6.4: t-Verteilung in Abhängigkeit der Messwertanzahl und der geforderten Sicherheit

Anzahl der Messwerte	Student-Verteilung $\frac{t}{\sqrt{n}}$	
	P = 95%	P = 99%
3	2,50	5,70
4	1,60	2,90
5	1,24	2,10
6	1,05	1,60
8	0,85	1,24
10	0,72	1,03
20	0,47	0,64
30	0,37	0,50
50	0,28	0,38
100	0,20	0,26
200	0,14	0,18

Bei einer Anzahl von Einzelmessungen $n < 50$ und einer Sicherheit $P = 95\%$ ist die Unsicherheit der Standardabweichung s stets $> 20\%$. Die Zahlenwerte sollten deshalb für s immer stark gerundet angegeben werden (siehe Tabelle 6.4). Für eine vernünftige, d.h. Verhältnis von Aufwand zu Nutzen, statistische Auswertung sollten daher entsprechend der Tabelle mindestens 10 Messungen durchgeführt werden.

In der Literatur werden die Tabellen der t- bzw. Student-Verteilung oft ohne den Faktor \sqrt{n} angegeben.

Beispiel:

Bei einer Zeitmessung sind folgende Messwerte festgestellt wurden.

Der Mittelwert \bar{t} ergibt sich zu $\bar{t} = 4,98s$ und die empirische Standardabweichung (Gleichung 6.13) zu $s = 0,13s$. Der statistische Fehler Δt beträgt $\Delta t = s/\sqrt{n} = 0,058s \approx$

Tabelle 6.5: Beispiel einer Zeitmessreihe

n	t_n/sec	$(t_n - \bar{t})$ in s	$(t_n - \bar{t})^2$ in s^2
1	4,9	-0,08	$6,4 \cdot 10^{-3}$
2	5,0	0,02	$4,0 \cdot 10^{-4}$
3	4,8	-0,18	$3,2 \cdot 10^{-2}$
4	5,1	0,12	$1,44 \cdot 10^{-2}$
5	5,1	0,12	$1,44 \cdot 10^{-2}$

0,06s, bzw. als relativer Fehler $\Delta t/t = 0,012 = 1,2\%$. Das Ergebnis lautet

$$t \approx (4,98 \pm 0,01)s \quad (6.19)$$

Man darf also erwarten, dass bestenfalls zwei von drei Einzelmessungen im Bereich zwischen 4,97s und 4,99s liegen, falls nur statistische Fehler auftreten.

Da die Messwertanzahl sehr klein ist, muss das Ergebnis mit Hilfe der Student-Verteilung korrigiert werden. Und man erhält unter Beachtung der Gleichung 6.16 und der Tabelle 6.4, Seite 201 das Ergebnis zu

$$t = (4,98 \pm 0,03)s \text{ mit } 95\% \text{ Wahrscheinlichkeit} \quad (6.20)$$

6.4.2 Veränderliche Versuchsbedingungen

Für die Behandlung von Messwerten, die nicht unter Wiederholbedingungen (z.B. Messreihen, Experimente) gewonnen wurden, hat sich die Ausgleichsrechnung mit der **Methode der kleinsten Fehlerquadrate** bewährt. Mit Hilfe der Ausgleichsrechnung können aus fehlerhaften Messwerten a_i Schätzwerte (Näherungswerte) y_i für die zu messende Größe bestimmt und deren Genauigkeit ähnlich wie bei den statistischen Fehlern angegeben werden. Die Methode der kleinsten Fehlerquadratsumme geht davon aus, dass die positiven und negativen Abweichungen der Messwerte von einer mathematischen Ausgleichsfunktion, im einfachsten Fall eine Gerade, gleich groß sind und größere Abweichungen stärker gewichtet werden. Mathematisch geschrieben bedeutet dies, dass die Summe S minimiert werden soll:

$$S = \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i - y_i}{s_i} \right)^2 \implies \text{Minimum} \quad (6.21)$$

a_i Messwert

y_i wahrer Wert, Wert einer Ausgleichsfunktion an der Stelle i

n Anzahl der Messwerte

s_i Standardabweichung der Messwerte

Diese Summe wird auch als Gütefunktion bezeichnet. Die Standardabweichung kann angegeben werden, wenn das Experiment mit den veränderlichen Versuchsbedingungen mehrmals (unendlich mal) wiederholt wurde. Anderenfalls ist $s_i = 1$ zu setzen. Anstelle des wahren Wertes kann auch die Funktion der Ausgleichskurve stehen. Führt man den Infinitesimalübergang durch, so wird die Summe in ein Integral überführt. Für einfache Genauigkeitsanforderungen können diese Ausgleichskurven auch geometrisch ermittelt werden.

Auch unter den veränderlichen Versuchsbedingungen, die deterministisch begründet sind, kann ein **mittlerer Fehler der Einzelmessung** eingeführt werden. Der mittlere Fehler entspricht der empirischen Standardabweichung s einer Stichprobe.

$$s_e = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (a_i - y_i)^2} \quad (6.22)$$

Weiterhin kann man auch einen **Fehler des Schätzwertes** aus n Messungen definieren zu:

$$\frac{s_e}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \sum_{i=1}^n (a_i - y_i)^2} \quad (6.23)$$

Bei der Analyse von Messfehlern wird meistens nur der Fehler der Zustandsgröße (Wasserstand, pH-Wert, usw.) betrachtet und als Fehlerbalken (z.B. Box-Plot-Diagramme) dargestellt. Dies ist aber unzureichend, denn die Messung der unabhängigen Variablen, z.B. die Zeit unterliegt ebenfalls eines Messfehlers. Dieser Messfehler kann auch zur Unsicherheit der Zustandsvariablen führen.

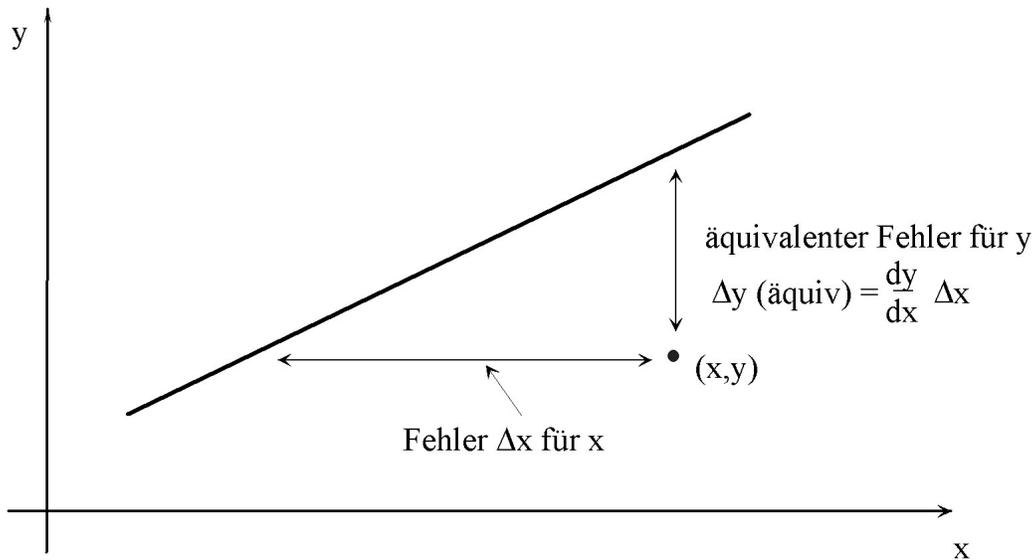


Abbildung 6.7: Abhängigkeit des Fehlers der Zustandsgröße vom Fehler der unabhängigen Variablen

6.4.3 Fehlerfortpflanzung

Bei der Weiterleitung der Informationsparameter vom Messort bis hin zur Auswertung werden die Signale mittels Wandler oft umgeformt (siehe Abschnitt 5.3, Messkette, Wandler, Seite 97). Dabei können entsprechend der Beziehung zwischen Ausgangs- und Eingangsgröße die Informationen transformiert werden. In diesem Zusammenhang werden die Bestimmungsgleichungen von indirekt gemessenen Zustandsgrößen auch als Ergebnis einer Wandlung betrachtet. Man spricht in diesem Zusammenhang von natürlichen Zwischensignalen. Da die Signale nicht fehlerfrei sind, werden auch die Fehlergrößen mit gewandelt und teilweise verstärkt. Zur mathematischen Abschätzung dieser Fehlerfortpflanzung können die folgenden aufgezeigten Methoden benutzt werden.

Für die Behandlung von Fehlern beim Rechnen mit Näherungswerten wird die **Methode der Fehlerschranken**, auch als **GAUSSSches Fehlerfortpflanzungsgesetz** bekannt, (siehe z.B. Enzyklopädie Mathematik) sehr oft benutzt. Diese Methode führt schnell zur Fehler-

berechnung und bietet den Vorteil, dass man aus der Genauigkeit der Eingangsdaten, die auf eine Gleichung Einfluss haben, unmittelbar eine Fehlerschranke für das Resultat angeben kann. Die Methode der Fehlerschranke beruht auf dem Prinzip, dass die Gleichung in eine TAYLORreihe um den wahren Messwert x entwickelt wird und der real gemessene Wert als Näherungswert a aufgefasst wird. Die TAYLORreihenentwicklung wird nach dem Glied 1. Ordnung abgebrochen. Die Vernachlässigung der Ableitung von Gliedern höherer Ordnung in den absoluten Fehlern wirkt sich in der Praxis kaum aus. Die Näherungswerte haben den absoluten Fehler ε , der sehr klein gegen den Messwert x ist. Damit ergibt sich die Grundgleichung zur Abschätzung der Genauigkeit von Rechenresultaten aus fehlerbehafteten Messwerten für eine Funktion $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\Delta f = \Delta a_1 \left| \frac{\delta f}{\delta x_1} \right| + \Delta a_2 \left| \frac{\delta f}{\delta x_2} \right| + \dots + \Delta a_n \left| \frac{\delta f}{\delta x_n} \right| \quad (6.24)$$

Nach Gleichung 6.24 lässt sich aus den Fehlerschranken der in die Berechnung eingehenden Näherungswerte eine Fehlerschranke für das Resultat berechnen.

Für die Anwendung der Methode der Fehlerschranken auf elementare Rechenoperationen soll Tabelle 6.6 dienen. Dabei sind a und b voneinander unabhängige Näherungswerte mit den Fehlerschranken Δa bzw. Δb für die in die Rechnung eingehenden Größen x und y .

Wenn für eine Größe keine Messserie gegeben ist, sondern man nur wissen möchte, wie sich kleine Änderungen von Δa_n auf die Zielgröße f auswirken, dann liegt ebenfalls eine Aufgabe der Fehlerrechnung vor. Oft spricht man dann von **Störungsrechnungen** oder **Sensitivitätsanalysen**. Auch hier bietet die Taylorreihenentwicklung eine einfache Lösung. Durch den Abbruch nach den Gliedern der 1. Ordnung erhält man eine Abschätzung des **Größtfehlers**.

Tabelle 6.6: Formeln zur Fehlerberechnung

Rechenart	$f(x, y)$	Schranken für den absoluten Fehler Δf	Schranken für den relativen Fehler $\frac{\Delta f}{ f(x, y) }$
Addieren	$x + y$	$\Delta a + \Delta b$	$\frac{\Delta a + \Delta b}{ a + b }$
Subtrahieren	$x - y$	$\Delta a + \Delta b$	$\frac{\Delta a + \Delta b}{ a - b }$
Multiplizieren	$x \cdot y$	$\Delta a b + \Delta b a $	$\frac{\Delta a}{ a } + \frac{\Delta b}{ b }$
Dividieren	$\frac{x}{y}$	$\frac{\Delta a b + \Delta b a }{b^2}$	$\frac{\Delta a}{ a } + \frac{\Delta b}{ b }$
Potenzieren	x^n	$\Delta a na^{n-1} $	$n \frac{\Delta a}{ a }$
allgemein	$f(x, y)$	$\Delta a f_x(a, b) + \Delta b f_y(a, b) $	$\frac{\Delta a f_x(a, b) + \Delta b f_y(a, b) }{ f(a, b) }$

Beispiele:

An Hand des OHMschen Gesetzes soll die Anwendung der Fehlerschranken gezeigt werden. Dafür soll mittels der Strom-Spannungs-Methode der Widerstand berechnet werden. Folgende Werte sollen gelten:

$$U = 10V, \Delta U/U = 3\%; I = 1mA; \Delta I/I = 5\%;$$

Nach obiger Tabelle 6.6 ist:

$$R = \frac{U}{I} \quad (6.25)$$

$$\left| \frac{\Delta R}{R} \right| = \left| \frac{\Delta U}{U} \right| + \left| \frac{\Delta I}{I} \right|$$

und damit:

$$\frac{\Delta R}{R} = 3\% + 5\% = 8\% \quad (6.26)$$

Der Widerstand kann also nur mit einer Genauigkeit von 8% bestimmt werden!

Weiter Beispiele dafür sind die Wasserstandsmessung über Druckmessverfahren

$$p - p_{atm} = h \cdot \rho \cdot g \quad (6.27)$$

$$\left| \frac{\Delta(p - p_{atm})}{p - p_{atm}} \right| = \left| \frac{\Delta h}{h} \right| + \left| \frac{\Delta \rho}{\rho} \right| + \left| \frac{\Delta g}{g} \right|$$

oder die Echolotmessung

$$s = t \cdot v_{SLuf}/2 \quad (6.28)$$

$$\left| \frac{\Delta s}{s} \right| = \left| \frac{\Delta t}{t} \right| + \left| \frac{\Delta v_{SLuf}}{v_{SLuf}} \right|$$

6.5 Übungsaufgaben

1. Zur Kalibrierung eines Wasserstandsgebers nach dem piezoresistiven Druckmessverfahren wurden folgende Messwerte ermittelt:

$$\begin{aligned} h_1 = 0,10m &\implies U_1 = 0V \\ h_2 = 1,10m &\implies U_2 = 100mV \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Übertragungsverhältnisse für eine beliebige Wasserhöhe h ! Welche Kennlinienfehler besitzt dieser Wandler?

2. In der Geohydraulik werden Pumpversuche zur Bestimmung der Grundwasserleiterparameter eingesetzt. Unter bestimmten Bedingungen kann die Absenkung nach der Formel von THEISS/JAKOB

$$s = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot T} \cdot \ln \left(\frac{2,25 \cdot T \cdot t}{r^2 \cdot S} \right)$$

ermittelt werden. Bei Betrachtung einer Absenkungsdifferenz Δs und eines Zeitverhältnisses von 1:10 ergibt sich:

$$k_f = \left(\frac{2,3 \cdot \dot{V}}{M \cdot 4 \cdot \pi \cdot \Delta s} \right)$$

Berechnen Sie den prozentualen Fehler des k_f -Wertes, wenn der Volumenstrom \dot{V} mit 5% Fehler, die Absenkungsdifferenz Δs mit 1cm bei einem Wert von 50cm und die Mächtigkeit M mit 10cm auf 10m falsch gemessen werden.

3. Bei einem Pumpversuch wurden folgende k_f -Werte [m/s] ermittelt:

0,016	0,0135	0,018	0,014	0,182	0,013	0,018	0,0118	0,017	0,0132
0,017	0,012	0,016	0,014	0,0177	0,0126	0,017	0,0135	0,019	0,0126

Stellen Sie diese Werte in einem Histogramm dar (Klassenbreite 0,002). Ermitteln Sie daraus (grafisch) den Mittelwert des k_f -Wertes.

4. Zur Messung von Wasserinhaltsstoffen soll die Potentiometrie verwendet werden. Beschreiben Sie eine Kalibrierung von potentiometrischen Sonden zur Eliminierung der Kennlinienfehler.
5. Begründen Sie den Einfluss der Anzahl von Messwerten auf die Genauigkeit einer Messung.
Welcher Unterschied besteht dabei zwischen Experimenten unter gleichen Versuchsbedingungen und solchen, bei denen eine Zeitreihe gemessen wurde?
6. Berechnen Sie mittels der Gesetze der Fehlerfortpflanzung den Fehler für das OHMSche Gesetz $R = U/I$, wenn die Spannung mit 3% und der Strom mit 5% falsch gemessen wurden.
7. Der pH-Wert lässt sich mittels der NERNST-Gleichung bestimmen.
Geben Sie die Gleichung zur Berechnung des mittelbaren Fehlers (Fehlerfortplanzung) für den pH-Wert an, wenn eine Spannung gemessen wird.

$$U = \frac{R \cdot T}{F} \cdot (pH - 7)$$

8. Was verstehen Sie unter der Student-Verteilung und wann ist sie anzuwenden?
9. Wie ermitteln Sie ein Histogramm und was kann man daraus ablesen?
10. Am Wasserwerk Torgau sind die Wasserstände an den Pegeln im Abstand von drei Tagen gemessen wurden. Die Brunnen stehen ca. 50m bis 100m vom Elbufer entfernt. Welche Aussagen können Sie über den Quantisierungsfehler machen, wenn man die Auswirkungen einer Hochwasserwelle verfolgen will?
11. Mit einem piezoresistiven Halbleiterdruckwandler mit Einheitsstromausgang soll der Wasserstand on-line in einem Grundwasserbeobachtungsrohr überwacht werden.
Beschreiben Sie den Eichvorgang im praktischen Messeinsatz im Gelände für diese Messkette.
Berechnen Sie die Messgenauigkeit des Halbleiterdruckwandlers, bezogen auf den Wasserstand, wenn der Strom mit 1,5% und die Eichung mit 3% Fehler erfolgte.
Wie groß darf der relative Messfehler von Strom und Wasserstand während der Kalibrierung sein, wenn nur ein Kalibrierungsfehler von 1% auftreten soll (die Höhe des überstauten Wassers beträgt 1m bis 2m)?
12. Bei der Echolotmessung wird die Wasserspiegellage h über die Laufzeit t_s des Ultraschalls bestimmt.

$$v_s = \frac{h}{t_s}$$

Die Schallgeschwindigkeit beträgt $v_s = 343\text{m/s}$ bei 20°C und $v_s = 333\text{m/s}$ bei 0°C . Zur Durchflussmessung mittels Messkastens soll das Echolotprinzip eingesetzt werden. Der Volumenstrom \dot{V} beim REHBOCK-Wehr hängt von der Überfallhöhe h wie folgt ab:

$$\dot{V} = \frac{2}{3}\mu \cdot b \cdot h \cdot \sqrt{2gh}$$

Bestimmen Sie den relativen Fehler des Durchflusses, der auftritt, wenn die Laufzeit des Ultraschalls mit 1% genau gemessen wird und die Temperatur sich im Laufe der Messung um $6,6^{\circ}\text{C}$ ändert. Die Größen m, b und g sollen in erster Näherung als fehlerfrei angenommen werden.

13. Bei einer Untersuchung der Grundwasserströmungsverhältnisse sind folgende Grundwasserstände gemessen worden:

x-Wert [m]	y-Wert [m]	Grundwasserstand [mNN]
0	100	125,0
100	100	130,0
150	100	127,5
250	100	125,0

Skizzieren Sie in einem vertikalen Schnitt dieses Grundwasserprofil.

Mit welcher Genauigkeit der örtlichen Lage können Sie die Isolinien konstruieren?

14. Für die Beurteilung von zufälligen Messfehlern soll ein Histogramm benutzt werden. Woran erkennen Sie, dass im Messprozess zufällige Fehler aufgetreten sind? Zeichnen Sie zu folgender Wasserstandsmessreihe ein Histogramm, definieren Sie den Mittelwert und charakterisieren Sie diese Messreihe (Klassenbreite 0,028).

0,65	0,68	0,72	0,66	0,74	0,70	0,73	0,69	0,67	0,70
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

15. Der Wasserspiegel eines Vorfluters kann sich auf Grund der hydraulischen Situation maximal um 2cm pro Stunde ändern. In Vorbereitung der messtechnischen Erfassung einer Hochwasserwelle soll ein Messterminplan aufgestellt werden.

Mit welchem Zeitintervall muss der Pegel beobachtet werden, damit das Maximum der Hochwasserwelle bezüglich der Höhe mit einem Fehler von max. 1cm erfasst wird?

Wie groß ist der Fehler bezüglich der Zeit?

Wie verändert sich das Zeitintervall, wenn man noch Messungenauigkeiten der Messkette, insbesondere einen Diskretisierungsfehler des eingesetzten ADU von $\pm 0,5\text{cm}$, berücksichtigt?

Fertigen Sie zur Lösung dieser Aufgaben eine Prinzipskizze an.

16. Durch eine Messanordnung erhalten Sie eine Menge M von Messwerten pro Tag. Aus diesen soll zur Datenreduzierung ein Tagesmittelwert gebildet werden.

Messwerte in mg/l :

3,7	4,1	2,8	5,2	4,3	6,7	1,8	3,6	2,9	3,6
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Woran erkennen Sie, dass im Messprozess zufällige bzw. systematische Fehler aufgetreten sind?

Ermitteln Sie zu dieser Messreihe den statistischen und den arithmetischen Mittelwert und erklären Sie deren Unterschiede. Der Messwert soll auf $\pm 0,25\text{mg/l}$ angezeigt werden.

Wie groß ist der relative systematische Fehler, wenn der theoretisch exakte Wert bei $4,5\text{mg/l}$ liegt?

17. Der Volumenstrom in einer Kläranlage soll mittels eines VENTURI-Gerinnes mit Einheitsstromausgang gemessen werden.

Beschreiben und skizzieren Sie die Ermittlung des Übertragungsfaktors an Hand einer Kalibrierung, wenn eine lineare Übertragungsfunktion zu erwarten ist.

18. Stellen Sie zu dieser Messreihe ein Histogramm mit einer Klassenbreite von $0,2$ auf.

2,21	2,18	2,20	2,15	2,20	2,17	2,22
2,23	2,19	2,20	2,21	2,22	2,19	2,20

Ermitteln Sie den statistischen und den arithmetischen Mittelwert.

19. Sowohl die Leitfähigkeits- als auch die potentiometrische Messung liefern temperaturabhängig Messwerte.

$$G_{\delta} = G_{20^{\circ}C} \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\delta)$$

$$U = \frac{R \cdot T}{F} \cdot \ln \left(\frac{C_M}{C_B} \right)$$

Welche wesentlichen Unterschiede bei der Kompensation des Temperatureinflusses müssen gemacht werden?

Wie werden die Arten der Kennlinienfehler genannt?

20. Für die Beurteilung von zufälligen Fehlern soll ein Histogramm benutzt werden. Woran erkennen Sie, dass im Messprozess zufällige Fehler aufgetreten sind? Zeichnen Sie zu folgenden Messreihen (pH-Wert) ein Histogramm (Klassenbreite 0, 2). Definieren Sie den Mittelwert und charakterisieren Sie diese Messreihen!

7,0	7,1	7,2	7,0	6,8	7,3	6,5	7,0	6,9	7,1
7,0	6,9	7,0	6,8	6,9	7,0	7,1	6,9	7,1	7,2
7,3	6,9	7,0	6,8	6,9	7,0	7,1	6,9	7,1	7,2
7,2	7,1	7,2	7,0	6,8	7,3	6,5	6,7	6,9	7,1

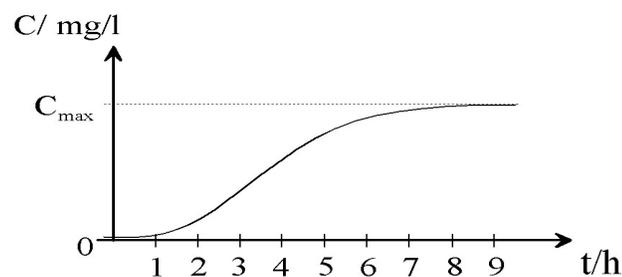
21. Bei der pH-Wert-Messung, wird parallel dazu die Temperatur gemessen.

$$U = \frac{R \cdot T}{F} \cdot \ln (pH - 7)$$

Wieviel Prozent Fehler ergeben sich für den gemessenen pH-Wert, wenn die Temperatur um $1K$ falsch gemessen wird und die Messtemperatur $8^{\circ}C$ betrug? Die Spannung wird mit 1% genau gemessen.

22. Der Wasserspiegel eines Vorfluters kann sich auf Grund der hydraulischen Situation maximal um $2cm$ pro Stunde ändern. In Vorbereitung der messtechnischen Erfassung einer Hochwasserwelle soll ein Messterminplan aufgestellt werden. Mit welchem Zeitintervall muss der Pegel beobachtet werden, damit das Maximum der Hochwasserwelle bezüglich der Höhe mit einem Fehler von max. $1cm$ erfasst wird? Wie groß ist der Fehler bezüglich der Zeit? Wie verändert sich das Zeitintervall, wenn man noch Messungenauigkeiten der Messkette, insbesondere einen Diskretisierungsfehler des eingesetzten ADU von $\pm 0,5cm$, berücksichtigt? Fertigen Sie zur Lösung dieser Aufgaben eine Prinzipskizze an.

23. Die Wasserstandsmessung soll mittels eines piezoresistiven Halbleiterdruckwandlers mit Einheitsstromausgang erfolgen.
Beschreiben und skizzieren Sie die Ermittlung des Übertragungsfaktors an Hand einer Kalibrierung, wenn eine lineare Übertragungsfunktion zu erwarten ist.
24. Für den Einsatz eines Dataloggers zur Erfassung eines Tracer-Versuches soll ein Messkonzept entworfen werden.
Optimieren Sie die Messzeitintervalle, damit Sie mit dem vorhandenem Speicherplatz ein möglichst genaues Abbild der zeitlichen Dynamik des Vorganges erhalten.



- Entwerfen Sie einen Algorithmus zur automatischen Steuerung der Messzeitintervalle. Berechnen Sie den erforderlichen Speicherplatz in Byte für den von Ihnen gewählten Messzyklus, wenn Sie gleichzeitig beachten, dass der verwendete ADU eine Umsatzbreite von 10 Bit besitzt.
25. Berechnen Sie den prozentualen Übertragungsfehler (bezogen auf den Druck), wenn bei der Wasserstandsmessung ein piezoresistiver Druckgeber verwendet wurde.

$$h = \frac{(p - p_{\text{atm}})}{\rho \cdot g}$$

Die Fehler des angezeigten Druckes und der anderen Größen beträgt je 5%.

26. Mittels piezoresistiven Halbleiterdruckwandlers mit Einheitsstromausgang soll der Wasserstand on-line in einem Grundwasserbeobachtungsrohr überwacht werden.
Beschreiben Sie den Kalibrierungsvorgang im praktischen Messeinsatz im Gelände für diese Messkette.
27. Das vertikale Profil von Sauerstoffgehalt, Trübung und Temperatur an einer Stelle einer eingestauten Talsperre soll elektrisch on-line erfasst, gespeichert und grafisch dargestellt werden.
Wovon ist die Geschwindigkeit, mit der Sie das vertikale Profil abfahren, abhängig?
28. Der Wasserstand in einem Grundwasserbeobachtungsrohr soll mittels piezoresistiven Druckwandlers bestimmt werden.

Beschreiben Sie den Kalibrierungsvorgang und geben Sie eine Übertragungsgleichung an, die Ihnen den Wasserstand berechnet.

29. Bei einem Messvorgang haben Sie die Konzentrationsänderung in Abhängigkeit von der Zeit bestimmt. Dieser Vorgang kann mit der LANGMUIR-Isotherme beschrieben werden.

$$C_t = C_0 \cdot (1 - e^{t/\tau})$$

Mit welchem mathematischen Verfahren können Sie die unbekanntenen Werte C_0 und τ bestimmen?

30. Unter welchen Bedingungen lassen sich zufällige Fehler beseitigen?
31. Was müssen Sie beachten, wenn Sie eine Kenngröße mittelbar aus mehreren Messwerten verschiedener Größen nach einer Formel bestimmen?
32. Mit welchem größten Fehler wird der Zeitbereich für eine Temperaturstufe ermittelt, wenn die Temperatur sich sinusförmig ändert?

$$\delta_1 = 32^\circ C(\sin(2\pi t/(360d)) + 12^\circ C; \delta_2 = 32^\circ C(\sin(2\pi t/(720d)) + 12^\circ C$$

33. Bei einer pH-Wert Messung sind folgende Werte ermittelt worden.

pH-Wert 1	6,5	6,8	7,2	6,6	7,5	7,1	7,3	6,9	6,9	6,7	7,1
pH-Wert 2	6,5	6,8	7,2	6,9	7,1	7,2	6,9	6,9	7,0	7,1	7,0

Begründen Sie an Hand eines Histogrammes (Schrittweite 0,1), welche der beiden Messreihen statistisch bessere Ergebnisse liefert.

34. Diskutieren Sie die Fehlerfortpflanzung, die bei der Bestimmung des Wasserstandes mittels eines Relativdruckgebers entsteht.