Kapitel 1

Algebraische Grundlagen

1.1 Exponential- und Logarithmus-Ausdrücke

Aufgaben zu 1.1:

1. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

   (a) $\dfrac{(18a^2x)^4}{(27ax^2)^5} \cdot \dfrac{(15ax^2)^4}{(20a^3x)^2}$ (b) $\dfrac{0,004 \cdot 10^2 \cdot 0,2^3}{0,2 \cdot 10^{-3} \cdot 16}$

   (c) $\dfrac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[10]{x}}{\sqrt[5]{x^3}}$ (d) $2 \log_{10} x^3 - 3 \log_{10} y^2$

   (e) $(\ln u + 4 \ln v)$

(Lösung s. S. 5)

2. Stellen Sie folgende Formeln nach t um:

   (a) $I = I_0 \left(\exp\left(-\frac{t}{T}\right)\right)$ (b) $I = I_0 \left(1 + 9 \log_9 \frac{t}{T}\right)$

   (c) $I = I_0 \left(e^{\mu t} - 1\right)$

(Lösung s. S. 6)

3. Es sei die Regressionsgerade s gegeben. Bestimmen Sie die Variable T im halblogarithmischen Maßstab aus dem Anstieg der Regressionsgeraden!

$$s = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot T} \cdot \ln \frac{2,25 \cdot t \cdot T}{r^2 \cdot S} \qquad (\dot{V} \text{ist gegeben})$$

(Lösung s. S. 7)

4. Es sei die Regressionsgerade s (siehe Aufgabe 3.) gegeben. Bestimmen Sie den Speicherkoeffizient S für den Fall $s = 0$ bei t_0 und gegebenem r!

(Lösung s. S. 7)

Lösungen zu 1.1:

- **zu Aufgabe 1 (s. S. 4)**

(a)

$$\frac{(18a^2x)^4}{(27ax^2)^5}\cdot\frac{(15ax^2)^4}{(20a^3x)^2}=\frac{18^4a^8x^4\cdot 15^4a^4x^8}{27^5a^5x^{10}\cdot 20^2a^6x^2}$$
$$=\frac{3^8\cdot 2^4\cdot 3^4\cdot 5^4\cdot a^{12}\cdot x^{12}}{3^{15}\cdot 2^4\cdot 5^2\cdot a^{11}\cdot x^{12}}=\frac{5^2}{3^3}a$$

(b)

$$\frac{0,004\cdot 10^2\cdot 0,2^3}{0,2\cdot 10^{-3}\cdot 16}=\frac{2^2\cdot 10^{-3}\cdot 10^2\cdot 2^3\cdot 10^{-3}}{2\cdot 10^{-1}\cdot 10^{-3}\cdot 2^4}=1$$

(c)

$$\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[10]{x}}{\sqrt[5]{x^3}}=\frac{x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{1}{10}}}{x^{\frac{3}{5}}}=\frac{x^{\frac{38}{30}}}{x^{\frac{18}{30}}}=x^{\frac{2}{3}}$$

(d)

$$2\log_{10}x^3-3\log_{10}y^2=\log_{10}x^6-\log_{10}y^6$$
$$=\lg\left(\frac{x^6}{y^6}\right)=6\lg\left(\frac{x}{y}\right)$$

oder

$$2\log_{10}x^3-3\log_{10}y^2=6\lg x-6\lg y$$
$$=6\lg\left(\frac{x}{y}\right)$$

(e)

$$(\ln u+4\ln v)=\ln u+\ln v^4$$
$$=\ln\left(u\cdot v^4\right)$$

- **zu Aufgabe 2 (s. S. 4)**

(a)

$$
\begin{aligned}
I &= I_0(\exp(-\frac{t}{T})) \\
\frac{I}{I_0} &= \exp(-\frac{t}{T}) = e^{-\frac{t}{T}} \\
ln\frac{I}{I_0} &= -\frac{t}{T} \\
t &= -T \cdot \ln\frac{I}{I_0} = T \cdot \ln\frac{I_0}{I}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
I &= I_0\left(1 + 9\log_9\frac{t}{T}\right) \\
\frac{I}{I_0} &= 1 + 9\log_9\frac{t}{T} \\
\frac{I}{I_0} - 1 &= 9\log_9\frac{t}{T} \\
\frac{\left(\frac{I}{I_0}-1\right)}{9} &= \log_9\frac{t}{T} \\
9^{\left(\frac{\frac{I}{I_0}-1}{9}\right)} &= \frac{t}{T} \\
t &= T \cdot \sqrt[9]{9^{\left(\frac{I}{I_0}-1\right)}}
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
I &= I_0\left(e^{\mu t} - 1\right) \\
e^{\mu t} &= \frac{I}{I_0} + 1 \\
\mu t &= \ln\left(\frac{I}{I_0} + 1\right) \\
t &= \frac{1}{\mu}\ln\left(\frac{I}{I_0} + 1\right) \\
t &= \ln\left(\frac{I}{I_0} + 1\right)^{\frac{1}{\mu}} = \ln\sqrt[\mu]{\left(\frac{I}{I_0} + 1\right)}
\end{aligned}
$$

- **zu Aufgabe 3 (s. S. 4)**

$$s = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot T} \cdot \ln \frac{2,25 \cdot t \cdot T}{r^2 \cdot S}$$

$$s = 0,08\frac{\dot{V}}{T} \cdot \ln t + 0,183\frac{\dot{V}}{T} \cdot \ln \frac{2,25 \cdot T}{r^2 \cdot S}$$

$$s_2 - s_1 = 0,08\frac{\dot{V}}{T} \cdot (\ln t_2 - \ln t_1)$$

$$T = 0,08\,\dot{V}\frac{\Delta\,(\ln t)}{\Delta s} \Rightarrow \text{ Anstieg}$$

- **zu Aufgabe 4 (s. S. 4)**

$$s = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot T} \cdot \ln \frac{2,25 \cdot t \cdot T}{r^2 \cdot S}$$

$$s = 0 \Rightarrow \ln\,(1) = 0$$

$$\frac{2,25 \cdot t_0 \cdot T}{r^2 \cdot S} = 1$$

$$\Rightarrow S = \frac{2,25 \cdot t_0 \cdot T}{r^2}$$

1.2 Matrizen

Aufgaben zu 1.2:

1. Bilden Sie mit: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

   folgende Ausdrücke:

   (a) $2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$ (b) $\mathbf{A} - 2\mathbf{B} - 3\mathbf{C}$ (c) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

   (d) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T$ (e) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ (f) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$

   (g) $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C}$ (h) $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ (i) $\mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

(Lösung s. S.9ff)

2. Bilden Sie für die folgenden Matrizen $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T$:

   (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

   (b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$

(Lösung s. S. 14ff)

3. Bilden Sie die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$:

   (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ (b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -4 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

(Lösung s. S.16ff)

Lösungen zu 1.2:

- **zu Aufgabe 1 (s. S. 8)**

(a) Berechnen Sie $2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$:

$$2\mathbf{A} + 3\mathbf{B} = 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}$$

$$2\mathbf{A} + 3\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 14 & -6 \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie $\mathbf{A} - 2\mathbf{B} - 3\mathbf{C}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - 2\mathbf{B} - 3\mathbf{C} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2+2-3 & 1-2-12 \\ 4-4+6 & 3+8+3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{B} - 3\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -13 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$$

(c) Berechnen Sie $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2) & (2 \cdot 1 + 1 \cdot (-4)) \\ (4 \cdot (-1) + 3 \cdot 2) & (4 \cdot 1 + 3 \cdot (-4)) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$$

(d) Berechnen Sie $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$$ siehe Lösung zu Aufgabe 1c

Entsprechend der Vorschrift zur Bildung der Transponierten einer Matrix

$$\mathbf{A}^T = (a_{jk})^T = (a_{kj})$$

erhält man:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$$

(e) Berechnen Sie $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ((-1) \cdot 2 + 1 \cdot 4) & ((-1) \cdot 1 + 1 \cdot 3) \\ (2 \cdot 2 + (-4) \cdot 4) & (2 \cdot 1 + (-4) \cdot 3) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -12 & -10 \end{pmatrix} \neq \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$$

(f) Berechnen Sie $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} \qquad \text{siehe Lösung zu Aufgabe 1c}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) & 0 \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) \\ 2 \cdot 1 + (-8) \cdot (-2) & 2 \cdot 4 + (-8) \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 18 & 16 \end{pmatrix}$$

(g) Berechnen Sie $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C}$:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -12 & -10 \end{pmatrix} \qquad \text{siehe Lösung zu Aufgabe 1e}$$

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -12 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2)) & (2 \cdot 4 + 2 \cdot (-1)) \\ (-12) \cdot 1 + (-10) \cdot (-2) & ((-12) \cdot 4 + (-10) \cdot (-1)) \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 8 & -38 \end{pmatrix}$$

(h) Berechnen Sie $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Entsprechend der Vorschrift zur Bildung der Transponierten einer Matrix

$$\mathbf{A}^T = (a_{jk})^T = (a_{kj})$$

erhält man

$$\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ((-1)\cdot 2 + 2 \cdot 1) & ((-1)\cdot 4 + 2 \cdot 3) \\ (1 \cdot 2 + (-4) \cdot 1) & (1 \cdot 4 + (-4) \cdot 3) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$$

(i) Berechnen Sie $\mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Entsprechend der Vorschrift zur Bildung der Transponierten einer Matrix

$$\mathbf{A}^T = (a_{jk})^T = (a_{kj})$$

erhält man

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+(-1) & 4+2 \\ 1+1 & 3+(-4) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

- **zu Aufgabe 2 (s. S. 8)**

(a) Berechnen Sie $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Entsprechend der Vorschrift zur Bildung der Transponierten einer Matrix

$$\mathbf{A}^T = (a_{jk})^T = (a_{kj})$$

erhält man

$$\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = (2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T = 5$$

(b) Berechnen Sie $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$$

Entsprechend der Vorschrift zur Bildung der Transponierten einer Matrix

$$\mathbf{A}^T = (a_{jk})^T = (a_{kj})$$

erhält man

$$\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) & 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-8) \\ -2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & -2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) & -2 \cdot 3 + 1 \cdot (-8) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -21 \\ -2 & -7 & -14 \end{pmatrix}$$

- **zu Aufgabe 3 (s. S.8)**

Die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ kann genau dann gebildet werden, wenn die Determinante D der Matrix $\mathbf{A}$ ungleich Null ($D \neq 0$) ist. Die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ wird gebildet, indem die Unterdeterminante U_{ij} zum Element a_{ij} durch die Determinante der Matrix $D = \det(\mathbf{A})$ dividiert wird. Mit der Unterdeterminante U_{ji}, zum Element a_{ji} gehörend, ergibt sich:

$$a_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{U_{ji}}{D}$$

Die Berechnung der Determinante von $\mathbf{A}$ erfolgt nach dem Entwicklungssatz von LAPLACE oder nach der Regel von SARRUS (siehe auch Lösung von Gleichungssystemen S. 10).
Daran anschließend müssen die Unterdeterminanten U_{ji} berechnet werden, damit die Elemente a_{ij} der inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ berechnet werden kann.

(a) Berechnen Sie $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 5 = 11$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{11} & -\frac{5}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= 1 \cdot (-1 - 1) - 1(1 - (-1)) + (-1) \cdot (1 - 1)) \\ &= -4 \end{aligned}$$

Daran anschließend müssen die neun Unterdeterminanten berechnet werden, damit die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ berechnet werden kann.
Die Unterdeterminanten ergeben sich entsprechend der Rechenregeln für Determinanten zu

$$\begin{aligned}
U_{11}: &\quad ((-1) \cdot 1) - (1 \cdot 1) &&= -2 \\
U_{12}: &\quad (1 \cdot 1) - ((-1) \cdot 1) &&= 2 \\
U_{13}: &\quad (1 \cdot 1) - ((-1) \cdot (-1)) &&= 0 \\
U_{21}: &\quad (1 \cdot 1) - ((-1) \cdot 1) &&= 2 \\
U_{22}: &\quad (1 \cdot 1) - ((-1) \cdot (-1)) &&= 0 \\
U_{23}: &\quad (1 \cdot 1) - (1 \cdot (-1)) &&= 2 \\
U_{31}: &\quad (1 \cdot 1) - ((-1) \cdot (-1)) &&= 0 \\
U_{32}: &\quad (1 \cdot 1) - ((-1) \cdot 1) &&= 2 \\
U_{33}: &\quad (1 \cdot (-1)) - (1 \cdot 1) &&= -2
\end{aligned}$$

Entsprechend der Regeln zur Bildung der inversen Matrix, die in der Aufgabenstellung wiederholt ist, ergibt sich die Inverse zu

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(c) Berechnen Sie $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -4 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = -8 + 24 - 36 + 24 - 18 + 16 = 2$$

Daran anschließend müssen die neun Unterdeterminanten berechnet werden, damit die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ berechnet werden kann.
Die Unterdeterminanten ergeben sich entsprechend der Rechenregeln für Determinanten zu

$$\begin{aligned}
U_{11}: &\quad ((-2)\cdot 2) - (3\cdot 3) &&= -13 \\
U_{12}: &\quad ((-4)\cdot 2) - (4\cdot 3) &&= -20 \\
U_{13}: &\quad ((-4)\cdot (-2)) - (4\cdot 3) &&= -4 \\
U_{21}: &\quad (2\cdot 2) - (3\cdot 3) &&= -5 \\
U_{22}: &\quad (2\cdot 2) - (4\cdot 3) &&= -8 \\
U_{23}: &\quad (2\cdot 3) - (4\cdot 2) &&= -2 \\
U_{31}: &\quad (2\cdot 3) - (-2\cdot 3) &&= 12 \\
U_{32}: &\quad (2\cdot 3) - ((-4)\cdot 3) &&= 18 \\
U_{33}: &\quad (2\cdot (-2)) - ((-4)\cdot 2) &&= 4
\end{aligned}$$

Entsprechend den Regeln zur Bildung der inversen Matrix, die in der Aufgabenstellung wiederholt ist, ergibt sich die Inverse zu

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & -\left(\frac{-5}{2}\right) & \frac{12}{2} \\ -\left(\frac{-20}{2}\right) & \frac{-8}{2} & -\left(\frac{18}{2}\right) \\ \frac{-4}{2} & -\left(\frac{-2}{2}\right) & \frac{4}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6,5 & 2,5 & 6 \\ 10 & -4 & -9 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.3 Lineare Gleichungssysteme

Aufgaben zu 1.3:

Bestimmen Sie von den folgenden Gleichungssystemen ($\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$) den Lösungsvektor $\mathbf{X}$ auf fünf Arten:

(a) mittels des GAUSSschen Eliminationsverfahrens

(b) mit Hilfe der CRAMERschen Regel

(c) durch Bestimmung von $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R}$ (s.auch S.16ff)

(d) unter Verwendung der $\mathbf{LU}$-Zerlegung

(e) mittels des CHOLESKY-Verfahrens

1.
$$\begin{aligned} \tfrac{x-2}{3} - \tfrac{y+2}{2} &= \tfrac{x-2y}{5} \\ \tfrac{x-y}{6} + \tfrac{3y+2}{4} &= \tfrac{x-2(y-1)}{3} \end{aligned}$$

Lösung s. S. 20

2.
$$\begin{aligned} 3x + y - z &= 2 \\ 2x - y + 4z &= 0 \\ x + 5y - 2z &= 1 \end{aligned}$$

Lösung s. S.27

3.
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung s. S. 37

4.
$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x + 4y + 8z &= 13 \\ 3x + 9y + 27z &= 34 \end{aligned}$$

Lösung s. S.45

5.
$$\begin{aligned} 2x - 4y + 9w &= 25 \\ 3x - 3y - 3z + 11w &= 27 \\ 4x + 6y - 15z + 5w &= -5 \\ 3x + y - 4z + 12w &= 32 \end{aligned}$$

Lösung s. S. 52

6.
$$\begin{aligned} 2x + y - 2z &= 1 \\ x + y + z &= 6 \\ -2x + y - 2z &= -3 \end{aligned}$$

Lösung s. S.67

Lösungen zu 1.3:

- **zu Aufgabe 1 (s. S. 19)**

Zuerst werden die beiden Gleichungen vereinfacht:

Gleichung 1:

$$\begin{aligned}
\frac{x-2}{3} - \frac{y+2}{2} &= \frac{x-2y}{5} \\
\frac{1}{3}x - \frac{2}{3} - \frac{1}{2}y - 1 &= \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y \\
\frac{5}{15}x - \frac{3}{15}x - \frac{5}{10}y + \frac{4}{10}y &= \frac{5}{3} \\
\frac{2}{15}x - \frac{1}{10}y &= \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

$$4x - 3y = 50$$

Gleichung 2:

$$\begin{aligned}
\frac{x-y}{6} + \frac{3y+2}{4} &= \frac{x-2\,(y-1)}{3} \\
\frac{1}{6}x - \frac{1}{6}y + \frac{3}{4}y + \frac{1}{2} &= \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3} \\
-\frac{1}{6}x + \frac{15}{12}y &= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

$$-4x + 30y = 4$$

Damit erhält man das vereinfachte Gleichungssystem:

$$4x - 3y = 50$$

$$-4x + 30y = 4$$

In Matrixschreibweise lautet die Aufgabe:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 30 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 50 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) **GAUSSsches Eliminationsverfahren**

Vereinfachte Ausgangsgleichungen:

$$4x - 3y = 50$$

$$-4x + 30y = 4$$

Zur Elimination müssen nur die beiden Gleichungen addiert werden.
Dann erhält man:

$$27y = 54$$

$$y = 2$$

Setzt man diesen Wert in die erste Gleichung ein, so ergibt sich:

$$4x - 3 \cdot 2 = 50$$

$$x = 14$$

Probe:

$$4 \cdot 14 - 3 \cdot 2 = 50$$

$$-4 \cdot 14 + 30 \cdot 2 = 4$$

(b) **CRAMERsche Regel**

Vereinfachte Ausgangsgleichungen:

$$4x - 3y = 50$$

$$-4x + 30y = 4$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 30 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 50 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$x_i = \frac{D_{x_i}}{D}$$

wobei D die Determinante und D_{x_i} die entsprechende CRAMERsche Determinante ist.

$$D = \det A = \det \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 30 \end{vmatrix} = 4 \cdot 30 - (-4 \cdot (-3)) = 120 - 12$$

$$D = 108$$

$$D_x = \det \begin{vmatrix} 50 & -3 \\ 4 & 30 \end{vmatrix} = 1500 - (-12) = 1512$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{1512}{108} = 14$$

$$D_y = \det \begin{vmatrix} 4 & 50 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 16 - (-200) = 216$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{216}{108} = 2$$

Probe:

$$4 \cdot 14 - 3 \cdot 2 = 50$$

$$-4 \cdot 14 + 30 \cdot 2 = 4$$

(c) **Verwendung der Inversen $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{X}$**

Vereinfachte Ausgangsgleichungen:

$$4x - 3y = 50$$

$$-4x + 30y = 4$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 30 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 50 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Berechnung:

$$D = \det \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 30 \end{vmatrix} = 108$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{30}{108} & \frac{3}{108} \\ \frac{4}{108} & \frac{4}{108} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} & \frac{1}{36} \\ \frac{1}{27} & \frac{1}{27} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} & \frac{1}{36} \\ \frac{1}{27} & \frac{1}{27} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5 \cdot 50}{18} + \frac{4}{36} \\ \frac{50}{27} + \frac{4}{27} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{252}{18} \\ \frac{54}{27} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt die Lösung des Gleichungssystems:

$$x = 14 \qquad y = 2$$

Probe:

$$4 \cdot 14 - 3 \cdot 2 = 50$$

$$-4 \cdot 14 + 30 \cdot 2 = 4$$

(d) **LU-Zerlegung**

Vereinfachte Ausgangsgleichungen:

$$4x - 3y = 50$$

$$-4x + 30y = 4$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 30 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 50 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Berechnung:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

Grundgedanke der $\mathbf{LU}$-Zerlegung ist die Bildung der beiden Dreiecksmatrizen $\mathbf{L}$ (Lower) und $\mathbf{U}$ (Upper).

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

Dabei werden aus Gründen der Eindeutigkeit und der Vereinfachung die Elemente der Hauptdiagonalen der unteren Dreiecksmatrix $\mathbf{L}$ zu Eins gesetzt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 30 \end{pmatrix}$$

Nach Ausmultiplizieren des Matrizenproduktes $\mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$ und anschließendem Elementevergleich mit der $\mathbf{A}$-Matrix erhält man folgende Gleichungen.

$$1 \cdot u_{11} + 0 \cdot 0 = a_{11} = 4 \Rightarrow u_{11} = 4$$

$$1 \cdot u_{12} + 0 \cdot u_{22} = a_{12} = -3 \Rightarrow u_{12} = -3$$

$$l_{21} \cdot u_{11} + 1 \cdot 0 = a_{21} = -4 \Rightarrow l_{21} = -1$$

$$l_{21} \cdot u_{12} + 1 \cdot u_{22} = a_{22} = 30 \Rightarrow u_{22} = 27$$

Damit lauten die beiden Dreiecksmatrizen

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$$

Über die Zwischenlösung $\mathbf{Y}$ lässt sich der Lösungsvektor $\mathbf{X}$ berechnen:
Allgemein gilt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

$$\mathbf{L} \cdot \underbrace{\mathbf{U} \cdot \mathbf{X}}_{Y} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{R}$$

Nach der Multiplikation der Matrizen $\mathbf{L}$ und $\mathbf{Y}$ und dem Elementevergleich mit der rechten Seite $\mathbf{R}$ erhält man:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 50 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 = 50 \Rightarrow y_1 = 50$$

$$-1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 = 4 \Rightarrow y_2 = 54$$

Laut Definition gilt:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$$

Nach der Multiplikation der Matrizen $\mathbf{U}$ und $\mathbf{X}$ und dem Elementevergleich mit der rechten Seite $\mathbf{Y}$ erhält man:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 50 \\ 54 \end{pmatrix}$$

$$4 \cdot x - 3 \cdot y = 50$$

$$0 \cdot x + 27 \cdot y = 54$$

Daraus folgt die Lösung:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x = 14 \qquad y = 2$$

Probe:

$$4 \cdot 14 - 3 \cdot 2 = 50$$

$$-4 \cdot 14 + 30 \cdot 2 = 4$$

(e) **CHOLESKY-Verfahren**

Vereinfachte Ausgangsgleichungen:

$$4x - 3y = 50$$

$$-4x + 30y = 4$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ \\ -4 & 30 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 50 \\ \\ 4 \end{pmatrix}$$

Die Voraussetzung für die Anwendung des CHOLESKY-Verfahrens ist eine symmetrische Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$.Dies ist hier nicht gegeben.
Damit ist das CHOLESKY-Verfahrens nicht anwendbar.

- **zu Aufgabe 2 (s. S. 19)**

(a) **GAUSSsches Eliminationsverfahren**

Ausgangsgleichungen:

$$3x + y - z = 2$$

$$2x - y + 4z = 0$$

$$x + 5y - 2z = 1$$

$$\left|\begin{array}{rrr|l} 1 & 5 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \mid -2 \cdot \text{1. Zeile} \\ \mid -3 \cdot \text{1. Zeile} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & -11 & 8 & -2 \\ 0 & -14 & 5 & -1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \mid \cdot 14 \\ \mid \cdot 11 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & -154 & 112 & -28 \\ 0 & -154 & 55 & -11 \end{array}\right. \quad \mid -1 \cdot \text{2. Zeile}$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & -154 & 112 & -28 \\ 0 & 0 & -57 & 17 \end{array}\right.$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{aligned}
&\text{3. Zeile} \quad \Rightarrow && 0x + 0y - 57z = 17 \\
& && \Rightarrow z = -\tfrac{17}{57} \\
&\text{2. Zeile} \quad \Rightarrow && 0x - 154y + 112 \cdot (-\tfrac{17}{57}) = -28 \\
& && \Rightarrow y = -\tfrac{2}{57} \\
&\text{1. Zeile} \quad \Rightarrow && 1x + 5 \cdot (-\tfrac{2}{57}) - 2 \cdot (-\tfrac{17}{57}) = 1 \\
& && \Rightarrow x = \tfrac{33}{57}
\end{aligned}
$$

Probe:

$$
\begin{aligned}
3 \cdot \frac{33}{57} - \frac{2}{57} + \frac{17}{57} &= 2 \\
2 \cdot \frac{33}{57} + \frac{2}{57} - 4 \cdot \frac{17}{57} &= 0 \\
\frac{33}{57} - 5 \cdot \frac{2}{57} + 2 \cdot \frac{17}{57} &= 1
\end{aligned}
$$

(b) **CRAMERscheRegel**

Ausgangsgleichungen:

$$3x + y - z = 2$$

$$2x - y + 4z = 0$$

$$x + 5y - 2z = 1$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

Als Nebenrechnung werden die Determinanten getrennt berechnet. Dabei kann bei dreireihigen Determinanten auf die Methode der Unterdeterminanten verzichtet werden und über die fiktive Wiederholung der beiden ersten Spalten das Produkt der "Hauptdiagonalen" um das Produkt der "Unterdeterminanten" subtrahiert werden (Regel von SARRUS).

$$D = \det \mathbf{A} = \det \left| \begin{array}{ccc|cc} 3 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & -2 & 1 & 5 \end{array} \right| = 6 + 4 - 10 - 1 - 60 + 4$$

$$D = -57$$

$$D_x = \det \left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & -2 & 1 & 5 \end{array} \right| = 4 + 4 + 0 - 1 - 40 - 0$$

$$D_x = -33$$

$$D_y = \det \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} = 0 + 8 - 2 - 0 - 12 + 8$$

$$D_y = 2$$

$$D_z = \det \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{matrix} = -3 + 0 + 20 + 2 - 0 - 2$$

$$D_z = 17$$

Daraus ergeben sich die Unbekannten des Gleichungssystems:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-33}{-57} = \frac{33}{57}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{2}{-57} = -\frac{2}{57}$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{17}{-57} = -\frac{17}{57}$$

(c) **Verwendung der Inversen $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{X}$**

Ausgangsgleichungen:

$$3x + y - z = 2$$

$$2x - y + 4z = 0$$

$$x + 5y - 2z = 1$$

Die Berechnung der Determinante von $\mathbf{A}$ erfolgt wie bei II) (s. S. 27) beschrieben und liefert
$\det \mathbf{A} = -57$
Daran anschließend müssen die neun Unterdeterminanten berechnet werden, damit anschließend die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ berechnet werden kann.
Die Unterdeterminanten ergeben sich entsprechend der Rechenregeln für Determinanten zu

$$\begin{aligned}
U_{11} &= (-1) \cdot (-2) - 5 \cdot 4 &&= -18 \\
U_{12} &= 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 4 &&= -8 \\
U_{13} &= 2 \cdot 5 - (-1) \cdot 1 &&= 11 \\
U_{21} &= 1 \cdot (-2) - (-1) \cdot 5 &&= 3 \\
U_{22} &= 3 \cdot (-2) - (-1) \cdot 1 &&= -5 \\
U_{23} &= 3 \cdot 5 - 1 \cdot 1 &&= 14 \\
U_{31} &= 1 \cdot 4 - (-1)\,(-1) &&= 3 \\
U_{32} &= 3 \cdot 4 - (-1) \cdot 2 &&= 14 \\
U_{33} &= 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 &&= -5
\end{aligned}$$

Entsprechend den Regeln zur Bildung der inversen Matrix (s.auch S. 16ff) ergibt sich die Inverse zu

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{18}{57} & \frac{3}{57} & \frac{-3}{57} \\ \frac{-8}{57} & \frac{5}{57} & \frac{14}{57} \\ \frac{-11}{57} & \frac{14}{57} & \frac{5}{57} \end{pmatrix}$$

und die Lösung des Gleichungssystems lautet

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{18}{57} & \frac{3}{57} & \frac{-3}{57} \\ \frac{-8}{57} & \frac{5}{57} & \frac{14}{57} \\ \frac{-11}{57} & \frac{14}{57} & \frac{5}{57} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{36}{57} + 0 - \frac{3}{57} \\ \frac{-16}{57} + 0 + \frac{14}{57} \\ \frac{-22}{57} + 0 + \frac{5}{57} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{33}{57} \\ \frac{-2}{57} \\ \frac{-17}{57} \end{pmatrix}$$

bzw., aufgelöst in die einzelnen Unbekannten

$$x = \frac{33}{57} \qquad y = -\frac{2}{57} \qquad z = -\frac{17}{57}$$

(d) **LU-Zerlegung**

Ausgangsgleichungen:

$$3x + y - z = 2$$

$$2x - y + 4z = 0$$

$$x + 5y - 2z = 1$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

Berechnung:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

Grundgedanke der **LU**-Zerlegung ist die Bildung der beiden Dreiecksmatrizen $\mathbf{L}$ (Lower) und $\mathbf{U}$ (Upper).

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

Dabei werden aus Gründen der Eindeutigkeit und der Vereinfachung die Elemente der Hauptdiagonalen der unteren Dreiecksmatrix $\mathbf{L}$ zu Eins gesetzt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Nach Ausmultiplizieren des Matrizenproduktes $\mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$ und anschließendem Elemente-

vergleich mit der $\mathbf{A}$-Matrix erhält man folgende Gleichungen.

$$1 \cdot u_{11} = a_{11} = 3 \Rightarrow u_{11} = 3$$

$$1 \cdot u_{12} = a_{12} = 1 \Rightarrow u_{12} = 1$$

$$1 \cdot u_{13} = a_{13} = -1 \Rightarrow u_{13} = -1$$

$$l_{21} \cdot u_{11} = a_{21} = 2 \Rightarrow l_{21} = \frac{2}{3}$$

$$l_{21} \cdot u_{12} + 1 \cdot u_{22} = a_{22} = -1 \Rightarrow u_{22} = \frac{-5}{3}$$

$$l_{21} \cdot u_{13} + 1 \cdot u_{23} = a_{23} = 4 \Rightarrow u_{23} = \frac{14}{3}$$

$$l_{31} \cdot u_{11} = a_{31} = 1 \Rightarrow l_{31} = \frac{1}{3}$$

$$l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot u_{22} = a_{23} = 5 \Rightarrow l_{32} = \frac{-14}{5}$$

$$l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + 1 \cdot u_{33} = a_{33} = -2 \Rightarrow u_{33} = \frac{57}{5}$$

Damit lauten die beiden Dreiecksmatrizen

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{-14}{5} & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{-5}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & \frac{57}{5} \end{pmatrix}$$

Über die Zwischenlösung $\mathbf{Y}$ lässt sich der Lösungsvektor $\mathbf{X}$ berechnen.
Allgemein gilt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

$$\mathbf{L} \cdot \underbrace{\mathbf{U} \cdot \mathbf{X}}_{Y} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{R}$$

Nach der Multiplikation der Matrizen $\mathbf{L}$ und $\mathbf{Y}$ und dem Elementevergleich mit der rechten Seite $\mathbf{R}$ erhält man:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{-14}{5} & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot y_1 = 2 \Rightarrow y_1 = 2$$

$$\frac{2}{3} \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = \frac{-4}{3}$$

$$\frac{1}{3} \cdot y_1 + \frac{-14}{5} \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 = 1 \Rightarrow y_3 = \frac{17}{5}$$

Laut Definition gilt:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$$

Nach der Multiplikation der Matrizen $\mathbf{U}$ und $\mathbf{X}$ und dem Elementevergleich mit der rechten Seite $\mathbf{Y}$ erhält man:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{-5}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & \frac{57}{5} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{-4}{3} \\ \frac{17}{5} \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 = 2$$

$$\frac{-5}{3} \cdot x_2 + \frac{14}{3} \cdot x_3 = \frac{-4}{3}$$

$$\frac{57}{5} \cdot x_3 = \frac{17}{5}$$

Daraus folgt die Lösung:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{33}{57} \\ -\frac{2}{57} \\ -\frac{17}{57} \end{pmatrix}$$

Probe: siehe bei (a).

(e) **CHOLESKY-Verfahren**

Ausgangsgleichungen:

$$3x + y - z = 2$$

$$2x - y + 4z = 0$$

$$x + 5y - 2z = 1$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Voraussetzung für die Anwendung des CHOLESKY-Verfahrens ist eine symmetrische Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$. Dies ist hier nicht gegeben.
Damit ist das CHOLESKY-Verfahrens nicht anwendbar.

- **zu Aufgabe 3 (s. S. 19)**

(a) **GAUSSsches Eliminationsverfahren**
Ausgangsgleichungen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$2x - z = 1$$

$$2x + 4y - z = 1$$

$$-x + 8y + 3z = 2$$

Aus der ersten und zweiten Gleichung folgt direkt: $y = 0$
Sortiert man die Zeilen neu, so bekommt man folgendes Schema für das GAUSSsche Eliminationsverfahren:

$$\begin{array}{rrr|l|l} 1 & -8 & -3 & -2 & \\ 2 & 4 & -1 & 1 & \mid -2 \cdot \text{1. Zeile} \\ 2 & 0 & -1 & 1 & \mid -2 \cdot \text{1. Zeile} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & -8 & -3 & -2 \\ 0 & 20 & 5 & 5 \\ 0 & 16 & 5 & 5 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{3. Zeile} \quad \Rightarrow \quad 0y + 5z = 5$$

$$\Rightarrow z = 1$$

$$\text{1. Zeile} \quad \Rightarrow \quad x - 3 = -2$$

$$\Rightarrow x = 1$$

(b) **CRAMERscheRegel**

Ausgangsgleichungen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

Als Nebenrechnung werden die Determinanten getrennt berechnet. Dabei kann bei dreireihigen Determinanten auf die Methode der Unterdeterminanten verzichtet werden und über die fiktive Wiederholung der beiden ersten Spalten das Produkt der "Hauptdiagonalen" um das Produkt der "Unterdeterminanten" subtrahiert werden (Regel von SARRUS).

$$\det \mathbf{A} = D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 8 & 3 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$D = 2 \cdot 4 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 \cdot 8$$

$$- (-1) \cdot 4 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) \cdot 8 + 0 \cdot 2 \cdot 3$$

$$D = 20$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 8 & 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$D_x = 20$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$D_y = 0$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 8 & 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$D_z = 20$$

Daraus ergeben sich die Unbekannten des Gleichungssystems:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{20}{20} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{0}{20} = 0$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{20}{20} = 1$$

(c) **Verwendung der Inversen$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{X}$**

Ausgangsgleichungen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

Die Berechnung der Determinante von $\mathbf{A}$ erfolgt wie bei (b) (s.S. 23) beschrieben und liefert $\det \mathbf{A} = 20$
Daran anschließend müssen die neun Unterdeterminanten berechnet werden, damit anschließend die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ berechnet werden kann.
Die Unterdeterminanten ergeben sich entsprechend der Rechenregeln für Determinanten zu

$$\begin{aligned}
U_{11}: &\quad (4 \cdot 3) - (8 \cdot (-1)) &&= 20 \\
U_{12}: &\quad (2 \cdot 3) - ((-1) \cdot (-1)) &&= 5 \\
U_{13}: &\quad (2 \cdot 8) - ((-1) \cdot 4) &&= 20 \\
U_{21}: &\quad (0 \cdot 3) - (8 \cdot (-1)) &&= 8 \\
U_{22}: &\quad (2 \cdot 3) - ((-1) \cdot (-1)) &&= 5 \\
U_{23}: &\quad (2 \cdot 8) - ((-1) \cdot 0) &&= 16 \\
U_{31}: &\quad (0 \cdot (-1)) - (4 \cdot (-1)) &&= 4 \\
U_{32}: &\quad (2 \cdot (-1)) - (2 \cdot (-1)) &&= 0 \\
U_{33}: &\quad (2 \cdot 4) - (2 \cdot 0) &&= 8
\end{aligned}$$

Entsprechend der Regeln zur Bildung der inversen Matrix (s.auch S.16ff) ergibt sich die Inverse zu

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 20 & -8 & 4 \\ -5 & 5 & 0 \\ 20 & -16 & 8 \end{pmatrix}$$

und die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
\mathbf{X} &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0 \\ 1 - \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

bzw. aufgelöst in die einzelnen Unbekannten.

$$x = 1 \qquad y = 0 \qquad z = 1$$

(d) **LU-Zerlegung**

Ausgangsgleichungen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Berechnung:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

Grundgedanke der $\mathbf{LU}$-Zerlegung ist die Bildung der beiden Dreiecksmatrizen $\mathbf{L}$ (Lower) und $\mathbf{U}$ (Upper).

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

Dabei werden aus Gründen der Eindeutigkeit und der Vereinfachung die Elemente der Hauptdiagonalen der unteren Dreiecksmatrix $\mathbf{L}$ zu Eins gesetzt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Nach Ausmultiplizieren des Matrizenproduktes $\mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$ und anschließendem Elementevergleich mit der $\mathbf{A}$-Matrix erhält man folgende Gleichungen.

$$\begin{array}{llll} 1 \cdot u_{11} & & = a_{11} = 3 & \Rightarrow \quad u_{11} = 3 \\ 1 \cdot u_{12} & & = a_{12} = 1 & \Rightarrow \quad u_{12} = 1 \\ 1 \cdot u_{13} & & = a_{13} = -1 & \Rightarrow \quad u_{13} = -1 \\ l_{21} \cdot u_{11} & & = a_{21} = 2 & \Rightarrow \quad l_{21} = \frac{2}{3} \\ l_{21} \cdot u_{12} & +1 \cdot u_{22} & = a_{22} = -1 & \Rightarrow \quad u_{22} = \frac{-5}{3} \\ l_{21} \cdot u_{13} & +1 \cdot u_{23} & = a_{23} = 4 & \Rightarrow \quad u_{23} = \frac{14}{3} \\ l_{31} \cdot u_{11} & & = a_{31} = 1 & \Rightarrow \quad l_{31} = \frac{1}{3} \\ l_{31} \cdot u_{12} & +l_{32} \cdot u_{22} & = a_{23} = 5 & \Rightarrow \quad l_{32} = \frac{-14}{5} \\ l_{31} \cdot u_{13} & +l_{32} \cdot u_{23} \quad +1 \cdot u_{33} & = a_{33} = -2 & \Rightarrow \quad u_{33} = \frac{57}{5} \end{array}$$

Damit lauten die beiden Dreiecksmatrizen

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Über die Zwischenlösung $\mathbf{Y}$ lässt sich der Lösungsvektor $\mathbf{X}$ berechnen.
Allgemein gilt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

$$\mathbf{L} \cdot \underbrace{\mathbf{U} \cdot \mathbf{X}}_{Y} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{R}$$

Nach der Multiplikation der Matrizen $\mathbf{L}$ und $\mathbf{Y}$ und dem Elementevergleich mit der rechten Seite $\mathbf{R}$ erhält man:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot y_1 \qquad\qquad\qquad &= 1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 1 \\ 1 \cdot y_1 \quad +1 \cdot y_2 \qquad &= 1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 0 \\ -\tfrac{1}{2} \cdot y_1 \quad +2 \cdot y_2 \quad +1 \cdot y_3 \quad &= 2 \quad \Rightarrow \quad y_3 = \tfrac{5}{2} \end{aligned}$$

Laut Definition gilt:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$$

Nach der Multiplikation der Matrizen $\mathbf{U}$ und $\mathbf{X}$ und dem Elementevergleich mit der rechten Seite $\mathbf{Y}$ erhält man:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 \qquad\qquad -1 \cdot x_3 &= 1 \\ 4 \cdot x_2 \qquad\qquad &= 0 \\ \tfrac{5}{2} \cdot x_3 &= \tfrac{5}{2} \end{aligned}$$

Daraus folgt die Lösung:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(e) **CHOLESKY-Verfahren**

Ausgangsgleichungen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

Die Voraussetzung für die Anwendung des CHOLESKY-Verfahrens ist eine symmetrische Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$. Dies ist hier nicht gegeben.
Damit ist das CHOLESKY-Verfahrens nicht anwendbar

- **zu Aufgabe 4 (s. S. 19)**

(a) **GAUSSschesEliminationsverfahren**

Ausgangsgleichungen:

$$x + y + z = 3$$

$$2x + 4y + 8z = 13$$

$$3x + 9y + 27z = 34$$

In einer Matrix ähnlichen Form kann man schreiben:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 13 \\ 3 & 9 & 27 & 34 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \mid -2 \cdot \text{1. Zeile} \\ \mid -3 \cdot \text{1. Zeile} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 7 \\ 0 & 6 & 24 & 25 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ \mid -3 \cdot \text{2. Zeile} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

3. Zeile $\quad 6z = 4 \Rightarrow z = \frac{2}{3}$

2. Zeile $\quad 2y + 6 \cdot \frac{2}{3} = 7 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$

1. Zeile $\quad x + \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = 3 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$

(b) **CRAMERscheRegel**

Ausgangsgleichungen:

$$x + y + z = 3$$

$$2x + 4y + 8z = 13$$

$$3x + 9y + 27z = 34$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 34 \end{pmatrix}$$

Als Lösungsweg wird die Entwicklung nach der 1. Zeile ($\Longrightarrow$ Unterdeterminanten) gewählt:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$$

$D = \det A = 1 \cdot (4 \cdot 27 - 9 \cdot 8) - 1 \cdot (2 \cdot 27 - 3 \cdot 8) + 1 \cdot (2 \cdot 9 - 3 \cdot 4)$

$D = 12$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 13 & 4 & 8 \\ 34 & 9 & 27 \end{vmatrix}$$

$D_x = 3 \cdot 4 \cdot 27 - 3 \cdot 8 \cdot 9 - 1 \cdot 13 \cdot 27 + 1 \cdot 8 \cdot 34 - 1 \cdot 4 \cdot 34 + 1 \cdot 13 \cdot 9$

$D_x = 10$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 13 & 8 \\ 3 & 34 & 27 \end{vmatrix} \qquad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 13 \\ 3 & 9 & 34 \end{vmatrix}$$

$$D_y = 18 \qquad D_z = 8$$

Daraus ergeben sich die Unbekannten des Gleichungssystems mit

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6};$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{18}{12} = \frac{2}{3};$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

(c) **Verwendung der Inversen $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{X}$**

Ausgangsgleichungen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D} = 12; \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 34 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
U_{11}: \quad (27 \cdot 4) - (8 \cdot 9) &= 36 \\
U_{12}: \quad (2 \cdot 27) - (3 \cdot 8) &= 30 \\
U_{13}: \quad (2 \cdot 9) - (3 \cdot 4) &= 6 \\
U_{21}: \quad (1 \cdot 27) - (1 \cdot 9) &= 18 \\
U_{22}: \quad (1 \cdot 27) - (1 \cdot 3) &= 24 \\
U_{23}: \quad (1 \cdot 9) - (1 \cdot 3) &= 6 \\
U_{31}: \quad (1 \cdot 8) - (1 \cdot 4) &= 4 \\
U_{32}: \quad (1 \cdot 8) - (1 \cdot 2) &= 6 \\
U_{33}: \quad (1 \cdot 4) - (1 \cdot 2) &= 2
\end{aligned}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 36 & -18 & 4 \\ -30 & 24 & -6 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 - \frac{39}{2} + \frac{34}{3} \\ -\frac{15}{2} + 26 - 17 \\ \frac{3}{2} - \frac{13}{2} + \frac{34}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(d) **LU-Zerlegung**Ausgangsgleichungen:Ausgangsgleichungen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 34 \end{pmatrix}$$

Berechnung:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

Grundgedanke der **LU**-Zerlegung ist die Bildung der beiden Dreiecksmatrizen **L** (Lower) und **U** (Upper).

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

Dabei werden aus Gründen der Eindeutigkeit und der Vereinfachung die Elemente der Hauptdiagonalen der unteren Dreiecksmatrix **L** zu Eins gesetzt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$$

Nach Ausmultiplizieren des Matrizenproduktes $\mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$ und anschließendem Elementevergleich mit der **A**-Matrix erhält man folgende Gleichungen.

$$\begin{array}{llll}
1 \cdot u_{11} & & = a_{11} = 1 & \Rightarrow \quad u_{11} = 1 \\
1 \cdot u_{12} & & = a_{12} = 1 & \Rightarrow \quad u_{12} = 1 \\
1 \cdot u_{13} & & = a_{13} = 1 & \Rightarrow \quad u_{13} = 1 \\
l_{21} \cdot u_{11} & & = a_{21} = 2 & \Rightarrow \quad l_{21} = 2 \\
l_{21} \cdot u_{12} & +1 \cdot u_{22} & = a_{22} = 4 & \Rightarrow \quad u_{22} = 2 \\
l_{21} \cdot u_{13} & +1 \cdot u_{23} & = a_{23} = 8 & \Rightarrow \quad u_{23} = 6 \\
l_{31} \cdot u_{11} & & = a_{31} = 3 & \Rightarrow \quad l_{31} = 3 \\
l_{31} \cdot u_{12} & +l_{32} \cdot u_{22} & = a_{23} = 9 & \Rightarrow \quad l_{32} = 3 \\
l_{31} \cdot u_{13} & +l_{32} \cdot u_{23} \quad +1 \cdot u_{33} & = a_{33} = 27 & \Rightarrow \quad u_{33} = 6
\end{array}$$

Damit lauten die beiden Dreiecksmatrizen

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Über die Zwischenlösung $\mathbf{Y}$ lässt sich der Lösungsvektor $\mathbf{X}$ berechnen.
Allgemein gilt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

$$\mathbf{L} \cdot \underbrace{\mathbf{U} \cdot \mathbf{X}}_{Y} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{R}$$

Nach der Multiplikation der Matrizen $\mathbf{L}$ und $\mathbf{Y}$ und dem Elementevergleich mit der rechten Seite $\mathbf{R}$ erhält man:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 34 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{llll} 1 \cdot y_1 & = 3 & \Rightarrow & y_1 = 3 \\ 2 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 & = 13 & \Rightarrow & y_2 = 7 \\ 3 \cdot y_1 + 3 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 & = 34 & \Rightarrow & y_3 = 4 \end{array}$$

Laut Definition gilt:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$$

Nach der Multiplikation der Matrizen $\mathbf{U}$ und $\mathbf{X}$ und dem Elementevergleich mit der rechten Seite $\mathbf{Y}$ erhält man:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot x_1 \quad +1 \cdot x_2 \quad +1 \cdot x_3 \quad &= 3 \\ 2 \cdot x_2 \quad +6 \cdot x_3 \quad &= 7 \\ 6 \cdot x_3 \quad &= 4 \end{aligned}$$

Daraus folgt die Lösung:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(e) **CHOLESKY-Verfahren**
Ausgangsgleichungen:

$$x + y + z = 3$$

$$2x + 4y + 8z = 13$$

$$3x + 9y + 27z = 34$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 34 \end{pmatrix}$$

Die Voraussetzung für die Anwendung des CHOLESKY-Verfahrens ist eine symmetrische Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$. Dies ist hier nicht gegeben.
Damit ist das CHOLESKY-Verfahrens nicht anwendbar.

- **zu Aufgabe 5 (s. S. 19)**

(a) **GAUSSsches Eliminationsverfahren**

Ausgangsgleichungen:

$$\begin{aligned} 2x - 4y \qquad + 9w &= 25 \\ 3x - 3y \ -3z + 11w &= 27 \\ 4x + 6y - 15z + 5w &= -5 \\ 3x + y \quad -4z + 12w &= 32 \end{aligned}$$

In einer Matrix ähnlichen Form kann man schreiben:

$$\left.\begin{array}{rrrr|l|l} 2 & -4 & 0 & 9 & 25 & \text{vertauschen} \\ 3 & -3 & -3 & 11 & 27 & \text{vertauschen} \\ 4 & 6 & -15 & 5 & -5 & \\ 3 & 1 & -4 & 12 & 32 & \cdot 3 \end{array}\right.$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{rrrr|l|l} 3 & -3 & -3 & 11 & 27 & \\ 2 & -4 & 0 & 9 & 25 & \\ 4 & 6 & -15 & 5 & -5 & -\,5\cdot 1.\text{ Zeile} \\ 9 & 3 & -12 & 36 & 96 & -\,4\cdot 1.\text{ Zeile} \end{array}\right.$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{rrrr|l|l} 3 & -3 & -3 & 11 & 27 & \\ 2 & -4 & 0 & 9 & 25 & \\ -11 & 21 & 0 & -50 & -140 & +\,5,5\cdot 2.\text{ Zeile} \\ -3 & 15 & 0 & -8 & -12 & +\,1,5\cdot 2.\text{ Zeile} \end{array}\right.$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{rrrr|l} 3 & -3 & -3 & 11 & 27 \\ 2 & -4 & 0 & 9 & 25 \\ 0 & -1 & 0 & -0,5 & -2,5 \\ 0 & 9 & 0 & 5,5 & 25,5 \end{array}\right| \quad + 9\cdot 3.\text{ Zeile}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{rrrr|l} 3 & -3 & -3 & 11 & 27 \\ 2 & -4 & 0 & 9 & 25 \\ 0 & -1 & 0 & -0,5 & -2,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right| \quad \Longrightarrow \quad w = 3$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} -y - 0,5 \cdot 3 &= -2,5 \quad \Longrightarrow \quad y = 1 \\ 2x - 4 + 27 &= 25 \quad \Longrightarrow \quad x = 1 \\ 3 - 3 - 3z + 33 &= 27 \quad \Longrightarrow \quad z = 2 \end{aligned}$$

(b) **CRAMERsche Regel**

Ausgangsgleichungen:

$$\begin{aligned} 2x - 4y \qquad + 9w &= 25 \\ 3x - 3y \ -3z + 11w &= 27 \\ 4x + 6y - 15z + 5w &= -5 \\ 3x + y \quad -4z + 12w &= 32 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 9 \\ 3 & -3 & -3 & 11 \\ 4 & 6 & -15 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 12 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 25 \\ 27 \\ -5 \\ 32 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

$$x_i = \frac{D_{xi}}{D}$$

Berechnen der Determinante D (entwickeln nach der ersten Zeile):

$$D = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 & 9 \\ 3 & -3 & -3 & 11 \\ 4 & 6 & -15 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -3 & 11 \\ 6 & -15 & 5 \\ 1 & -4 & 12 \end{vmatrix} - (-4) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & -15 & 5 \\ 3 & -4 & 12 \end{vmatrix} + 0 \cdot \ldots - 9 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 4 & 6 & -15 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} = \quad & 2 \cdot (540 - 15 - 264 + 165 - 60 + 216) \\ & + 4 \cdot (-540 - 45 - 176 + 495 + 60 + 144) \\ & - 9 \cdot (-72 + 135 - 12 + 54 + 45 - 48) \end{aligned}$$

$$= \qquad 1164 - 248 - 918$$

$$D = -2$$

Berechnen der Determinante D_x (entwickeln nach der ersten Zeile):

$$D_x = \begin{vmatrix} 25 & -4 & 0 & 9 \\ 27 & -3 & -3 & 11 \\ -5 & 6 & -15 & 5 \\ 32 & 1 & -4 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= 25 \cdot \begin{vmatrix} 27 & -3 & 11 \\ -5 & -15 & 5 \\ 32 & -4 & 12 \end{vmatrix} - (-4) \cdot \begin{vmatrix} 27 & -3 & 11 \\ -5 & -15 & 5 \\ 32 & -4 & 12 \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} 27 & -3 & -3 \\ -5 & 6 & -15 \\ 32 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$D_x = -2$$

Daraus folgt:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Berechnen der Determinante D_y (entwickeln nach der ersten Zeile):

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 25 & 0 & 9 \\ 3 & 27 & -3 & 11 \\ 4 & -5 & -15 & 5 \\ 3 & 32 & -4 & 12 \end{vmatrix}$$

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 27 & -3 & 11 \\ -5 & -15 & 5 \\ 32 & -4 & 12 \end{vmatrix} - 25 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & -15 & 5 \\ 3 & -4 & 12 \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 27 & -3 \\ 4 & -5 & -15 \\ 3 & 32 & -4 \end{vmatrix}$$

$$D_y = -2$$

Daraus folgt:

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Berechnen der Determinante D_z (entwickeln nach der ersten Zeile):

$$D_z \begin{vmatrix} 2 & -4 & 25 & 9 \\ 3 & -3 & 27 & 11 \\ 4 & 6 & -5 & 5 \\ 3 & 1 & 32 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 27 & 11 \\ 6 & -5 & 5 \\ 1 & 32 & 12 \end{vmatrix} - (-4) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 27 & 11 \\ 4 & -5 & 5 \\ 3 & 32 & 12 \end{vmatrix} + 25 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 12 \end{vmatrix}$$

$$- 9 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & 27 \\ 4 & 6 & -5 \\ 3 & 1 & 32 \end{vmatrix}$$

$$D_z = -4$$

Daraus folgt:

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Berechnen der Determinante D_w(entwickeln nach der ersten Zeile):

$$D_w = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 & 25 \\ 3 & -3 & -3 & 27 \\ 4 & 6 & -15 & -5 \\ 3 & 1 & -4 & 32 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -3 & 27 \\ 6 & -15 & -5 \\ 1 & -4 & 32 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & 27 \\ 4 & -15 & -5 \\ 3 & -4 & 32 \end{vmatrix} - 25 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 4 & 6 & -15 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$D_w = -6$$

Daraus folgt:

$$w = \frac{D_w}{D} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Zusammengefasst ergibt sich also der Lösungsverktor:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(c) **Verwendung der Inversen $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{X}$**

Ausgangsgleichungen:

$$\begin{aligned} 2x - 4y \qquad + 9w &= 25 \\ 3x - 3y \ -3z + 11w &= 27 \\ 4x + 6y - 15z + 5w &= -5 \\ 3x + y \quad -4z + 12w &= 32 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 9 \\ 3 & -3 & -3 & 11 \\ 4 & 6 & -15 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 12 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 25 \\ 27 \\ -5 \\ 32 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

$$D = \det \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 & 9 \\ 3 & -3 & -3 & 11 \\ 4 & 6 & -15 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 12 \end{vmatrix} = -2$$

$$U_{11} = \det \begin{vmatrix} -3 & -3 & 11 \\ 6 & -15 & 5 \\ 1 & -4 & 12 \end{vmatrix} = 582 \qquad U_{12} = \det \begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & -15 & 5 \\ 3 & -4 & 12 \end{vmatrix} = -62$$

$$U_{13} = \det \begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 146 \qquad U_{14} = \det \begin{vmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 4 & 6 & -15 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 102$$

$$U_{21} = \det \begin{vmatrix} -4 & 0 & 9 \\ 6 & -15 & 5 \\ 1 & -4 & 12 \end{vmatrix} = 559 \qquad U_{22} = \det \begin{vmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 4 & -15 & 5 \\ 3 & -4 & 12 \end{vmatrix} = -59$$

$$U_{23} = \det \begin{vmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 140 \qquad U_{24} = \det \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 4 & 6 & -15 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 98$$

$$U_{31} = \det \begin{vmatrix} -4 & 0 & 9 \\ -3 & -3 & 11 \\ 1 & -4 & 12 \end{vmatrix} = 103 \qquad U_{32} = \det \begin{vmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 3 & -3 & 11 \\ 3 & -4 & 12 \end{vmatrix} = -11$$

$$U_{33} = \det \begin{vmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 3 & -3 & 11 \\ 3 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 26 \qquad U_{34} = \det \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & -3 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 18$$

$$U_{41} = \det \begin{vmatrix} -4 & 0 & 9 \\ -3 & -3 & 11 \\ 6 & -15 & 5 \end{vmatrix} = -33 \qquad U_{42} = \det \begin{vmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 3 & -3 & 11 \\ 4 & -15 & 5 \end{vmatrix} = 3$$

$$U_{43} = \det \begin{vmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 3 & -3 & 11 \\ 4 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -8 \qquad U_{44} = \det \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & -3 & -3 \\ 4 & 6 & -15 \end{vmatrix} = -6$$

Damit lautet die inverse von $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 582 & -559 & 103 & 33 \\ 62 & -59 & 11 & 3 \\ 146 & -140 & 26 & 8 \\ -102 & 98 & -18 & -6 \end{pmatrix}$$

Daraus berechnet sich die Lösung des Gleichungssystems zu :

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R}$$

$$\mathbf{X} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 582 & -559 & 103 & 33 \\ 62 & -59 & 11 & 3 \\ 146 & -140 & 26 & 8 \\ -102 & 98 & -18 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ 27 \\ -5 \\ 32 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 25 \cdot 582 - 559 \cdot 27 - 5 \cdot 103 + 32 \cdot 33 \\ 25 \cdot 62 - 59 \cdot 27 - 5 \cdot 11 + 32 \cdot 3 \\ 25 \cdot 146 - 140 \cdot 27 - 5 \cdot 26 + 32 \cdot 8 \\ -25 \cdot 102 + 98 \cdot 27 + 5 \cdot 18 - 32 \cdot 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt die Lösung des Gleichungssystems:

$$x = 1 \qquad y = 1 \qquad z = 2 \qquad w = 3$$

(d) **LU-Zerlegung**

Ausgangsgleichungen:

$$2x - 4y + 9w = 25$$

$$3x - 3y - 3z + 11w = 27$$

$$4x + 6y - 15z + 5w = -5$$

$$3x + y - 4z + 12w = 32$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 9 \\ 3 & -3 & -3 & 11 \\ 4 & 6 & -15 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 12 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 25 \\ 27 \\ -5 \\ 32 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

Grundgedanke der LU-Zerlegung ist die Bildung der beiden Dreiecksmatrizen $\mathbf{L}$ (Lower) und $\mathbf{U}$ (Upper).

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{A};$$

Dabei wird aus Gründen der Eindeutigkeit und der Vereinfachung die Elemente der Hauptdiagonale der unteren Dreiecksmatrix $\mathbf{L}$ zu Eins gesetzt.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 9 \\ 3 & -3 & -3 & 11 \\ 4 & 6 & -15 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 12 \end{pmatrix}$$

wird zerlegt in: $\mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 9 \\ 3 & -3 & -3 & 11 \\ 4 & 6 & -15 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}$$

Laut Definition gilt:

$$l_{11} = 1$$

$$l_{22} = 1$$

$$l_{33} = 1$$

$$l_{44} = 1$$

Berechnung der übrigen Koeffizienten:

$$
\begin{aligned}
&l_{11} \cdot u_{11} + l_{12} \cdot u_{21} + l_{13} \cdot u_{31} + l_{14} \cdot u_{41} = a_{11} \\
&\qquad 1 \cdot u_{11} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 2 \quad \Longrightarrow \quad u_{11} = 2 \\
&l_{11} \cdot u_{12} + l_{12} \cdot u_{22} + l_{13} \cdot u_{32} + l_{14} \cdot u_{42} = a_{12} \\
&\qquad 1 \cdot u_{12} + 0 \cdot u_{22} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = -4 \quad \Longrightarrow \quad u_{12} = -4 \\
&l_{11} \cdot u_{13} + l_{12} \cdot u_{23} + l_{13} \cdot u_{33} + l_{14} \cdot u_{43} = a_{13} \\
&\qquad 1 \cdot u_{13} + 0 \cdot (-3) + 0 \cdot u_{33} + 0 \cdot 0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad u_{13} = 0 \\
&l_{11} \cdot u_{14} + l_{12} \cdot u_{24} + l_{13} \cdot u_{34} + l_{14} \cdot u_{44} = a_{14} \\
&\qquad 1 \cdot u_{14} + 0 \cdot u_{14} + 0 \cdot u_{34} + 0 \cdot u_{44} = 9 \quad \Longrightarrow \quad u_{14} = 9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&l_{21} \cdot u_{11} + l_{22} \cdot u_{21} + l_{23} \cdot u_{31} + l_{24} \cdot u_{41} = a_{21} \\
&l_{21} \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 3 \quad \Longrightarrow \quad l_{21} = \tfrac{3}{2} \\
&l_{21} \cdot u_{12} + l_{22} \cdot u_{22} + l_{23} \cdot u_{32} + l_{24} \cdot u_{42} = a_{22} \\
&\tfrac{3}{2} \cdot (-4) + 1 \cdot u_{22} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = -3 \quad \Longrightarrow \quad u_{22} = 3 \\
&l_{21} \cdot u_{13} + l_{22} \cdot u_{23} + l_{23} \cdot u_{33} + l_{24} \cdot u_{43} = a_{23} \\
&\tfrac{3}{2} \cdot 0 + 1 \cdot u_{23} + 0 \cdot u_{33} + 0 \cdot 0 = -3 \quad \Longrightarrow \quad u_{23} = -3 \\
&l_{21} \cdot u_{14} + l_{22} \cdot u_{24} + l_{23} \cdot u_{34} + l_{24} \cdot u_{44} = a_{24} \\
&\tfrac{3}{2} \cdot 9 + 1 \cdot u_{24} + 0 \cdot u_{34} + 0 \cdot u_{44} = 11 \quad \Longrightarrow \quad u_{24} = -\tfrac{5}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&l_{31} \cdot u_{11} + l_{32} \cdot u_{21} + l_{33} \cdot u_{31} + l_{34} \cdot u_{41} = a_{31} \\
&l_{31} \cdot 2 + l_{32} \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 4 && \Longrightarrow \quad l_{31} = 2 \\
&l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot u_{22} + l_{33} \cdot u_{32} + l_{34} \cdot u_{42} = a_{32} \\
&2 \cdot (-4) + l_{32} \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 6 && \Longrightarrow \quad l_{32} = \tfrac{14}{3} \\
&l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + l_{33} \cdot u_{33} + l_{34} \cdot u_{43} = a_{33} \\
&2 \cdot 0 + \tfrac{14}{3} \cdot (-3) + 1 \cdot u_{33} + 0 \cdot 0 = -15 && \Longrightarrow \quad u_{33} = -1 \\
&l_{31} \cdot u_{14} + l_{32} \cdot u_{24} + l_{33} \cdot u_{34} + l_{34} \cdot u_{44} = a_{34} \\
&2 \cdot 9 + \tfrac{14}{3} \cdot (-\tfrac{5}{2}) + 1 \cdot u_{34} + 0 \cdot u_{44} = 5 && \Longrightarrow \quad u_{34} = -\tfrac{4}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&l_{41} \cdot u_{11} + l_{42} \cdot u_{21} + l_{43} \cdot u_{31} + l_{44} \cdot u_{41} = a_{41} \\
&l_{41} \cdot 2 + l_{42} \cdot 0 + l_{43} \cdot 0 + l_{44} \cdot 0 = 3 && \Longrightarrow \quad l_{41} = \tfrac{3}{2} \\
&l_{41} \cdot u_{12} + l_{42} \cdot u_{22} + l_{43} \cdot u_{32} + l_{44} \cdot u_{42} = a_{42} \\
&\tfrac{3}{2} \cdot (-4) + l_{42} \cdot 3 + l_{43} \cdot 0 + l_{44} \cdot 0 = 1 && \Longrightarrow \quad l_{42} = \tfrac{7}{3} \\
&l_{41} \cdot u_{13} + l_{42} \cdot u_{23} + l_{43} \cdot u_{33} + l_{44} \cdot u_{43} = a_{43} \\
&\tfrac{3}{2} \cdot 0 + \tfrac{7}{3} \cdot (-3) + l_{43} \cdot (-1) + l_{44} \cdot 0 = -4 && \Longrightarrow \quad l_{43} = -3 \\
&l_{41} \cdot u_{14} + l_{42} \cdot u_{24} + l_{43} \cdot u_{34} + l_{44} \cdot u_{44} = a_{44} \\
&\tfrac{3}{2} \cdot 9 + \tfrac{7}{3} \cdot \left(-\tfrac{5}{2}\right) + (-3) \cdot \left(-\tfrac{4}{3}\right) + 1 \cdot u_{44} = 12 && \Longrightarrow \quad u_{44} = \tfrac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Damit lauten die Dreiecksmatrizen:

$$
\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{14}{3} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{7}{3} & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & -3 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}
$$

Über die Zwischenlösung $\mathbf{Y}$ lässt sich der Lösungsvektor $\mathbf{X}$ berechnen:

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

$$\text{mit} \qquad \mathbf{Y} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{X}$$

$$\text{ergibt sich} \qquad \mathbf{L} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{R}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{14}{3} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{7}{3} & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 27 \\ -5 \\ 32 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} l_{11} \cdot y_1 &= r_1 \\ 1 \cdot y_1 = 25 \quad &\Longrightarrow \quad y_1 = 25 \\ l_{21} \cdot y_1 + l_{22} \cdot y_2 &= r_2 \\ \tfrac{3}{2} \cdot 25 + 1 \cdot y_2 = 27 \quad &\Longrightarrow \quad y_2 = -\tfrac{21}{2} \\ l_{31} \cdot y_1 + l_{32} \cdot y_2 + l_{33} \cdot y_3 &= r_3 \\ 2 \cdot 25 + \tfrac{14}{3} \cdot \left(-\tfrac{21}{2}\right) + 1 \cdot y_3 = -5 \quad &\Longrightarrow \quad y_3 = -6 \\ l_{41} \cdot y_1 + l_{421} \cdot y_2 + l_{43} \cdot y_3 + l_{44} \cdot y_4 &= r_4 \\ \tfrac{3}{2} \cdot 25 + \tfrac{7}{3} \cdot \left(-\tfrac{21}{2}\right) - 3 \cdot (-6) + 1 \cdot y_4 = 32 \quad &\Longrightarrow \quad y_4 = 1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 25 \\ -\frac{21}{2} \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & -3 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -\frac{21}{2} \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} u_{44} \cdot x_4 &= y_4 \\ \frac{1}{3} \cdot x_4 &= 1 \qquad \Longrightarrow x_4 = 3 \\ u_{33} \cdot x_3 + u_{34} \cdot x_4 &= y_3 \\ -1 \cdot x_3 + \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot 3 &= -6 \qquad \Longrightarrow x_3 = 2 \\ u_{22} \cdot x_2 + u_{23} \cdot x_3 + u_{24} \cdot x_4 &= y_2 \\ 3 \cdot x_2 + (-3) \cdot 2 + \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot 3 &= -\frac{21}{2} \quad \Longrightarrow x_2 = 1 \\ u_{11} \cdot x_1 + u_{12} \cdot x_2 + u_{13} \cdot x_3 + u_{14} \cdot x_4 &= y_1 \\ 2 \cdot x_1 + (-4) \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 9 \cdot 3 &= 25 \qquad \Longrightarrow x_1 = 1 \end{aligned}$$

Damit hat man die gleiche Lösung erhalten wie bei den anderen Verfahren:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(e) **CHOLESKY-Verfahren**
Ausgangsgleichungen:

$$2x - 4y + 9w = 25$$

$$3x - 3y - 3z + 11w = 27$$

$$4x + 6y - 15z + 5w = -5$$

$$3x + y - 4z + 12w = 32$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 9 \\ 3 & -3 & -3 & 11 \\ 4 & 6 & -15 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 12 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 25 \\ 27 \\ -5 \\ 32 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

Die Voraussetzung für die Anwendung des CHOLESKY-Verfahrens ist eine symmetrische Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$. Dies ist hier nicht gegeben.
Damit ist das CHOLESKY-Verfahrens nicht anwendbar.

- **zu Aufgabe 6 (s. S.19)**

(a) **GAUSSsches Eliminationsverfahren**
Ausgangsgleichungen:

$$2x + y - 2z = 1$$

$$x + y + z = 6$$

$$-2x + y - 2z = -3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{cccc} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ -2 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right|$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \\ \mid -2 \cdot \text{1.Zeile} \\ \mid 2 \cdot \text{1. Zeile} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -4 & -11 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \end{array}\right|$$

3. Zeile $\qquad 3 \cdot y = 9; \Longrightarrow y = 3$

2. Zeile $-1 \cdot y - 4 \cdot z = -11; \Longrightarrow z = 2$

1. Zeile $x + y + z = 6; \Longrightarrow x = 1$

Probe

$$2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 1$$

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 6$$

$$-2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = -3$$

(b) **CRAMERsche Regel**
Ausgangsgleichungen:

$$2x + y - 2z = 1$$

$$x + y + z = 6$$

$$-2x + y - 2z = -3$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$x_i = \frac{D_{xi}}{D}$$

$$D = \det A = \det \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 2 - 2 - 4 - 2 + 2 = -12$$

$$D = -12$$

$$D_x = \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 6 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 3 - 12 - 6 - 1 + 12 = -12$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-12}{-12} = 1$$

$$D_y = \det \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \\ -2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -24 - 2 + 6 - 24 + 6 + 2 = -36$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-36}{-12} = 3$$

$$D_z = \det \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 12 + 1 + 2 - 12 + 3 = -24$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-24}{-12} = 2$$

(c) **Verwendung der Inversen $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{X}$**

Ausgangsgleichungen:

$$2x + y - 2z = 1$$

$$x + y + z = 6$$

$$-2x + y - 2z = -3$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$D = \det \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -12;$$

$$\begin{aligned}
U_{11} &= 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 &&= -3 \\
U_{12} &= 1 \cdot (-2) - 1 \cdot (-2) &&= 0 \\
U_{13} &= 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) &&= 3 \\
U_{21} &= 1 \cdot (-2) - 1 \cdot (-2) &&= 0 \\
U_{22} &= 2 \cdot (-2) - (-2) \cdot (-2) &&= -8 \\
U_{23} &= 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) &&= 4 \\
U_{31} &= 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) &&= 3 \\
U_{32} &= 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) &&= 4 \\
U_{33} &= 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 &&= 1
\end{aligned}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -8 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R} = -\frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -8 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} -3+0-9 \\ 0-48+12 \\ 3-24-3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt die Lösung des Gleichungssystems:

$$x = 1; \qquad y = 3; \qquad z = 2.$$

(d) **LU-Zerlegung**

Ausgangsgleichungen:

$$2x + y - 2z = 1$$

$$x + y + z = 6$$

$$-2x + y - 2z = -3$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

Grundgedanke der LU-Zerlegung ist die Bildung der beiden Dreiecksmatrizen $\mathbf{L}$ (Lower) und $\mathbf{U}$ (Upper).

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{A}$$

Dabei wird aus Gründen der Eindeutigkeit und der Vereinfachung die Elemente der Hauptdiagonale der unteren Dreiecksmatrix $\mathbf{L}$ zu Eins gesetzt.

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Nach Ausmultiplizieren des Matrizenproduktes $\mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$ und anschließendem Elementevergleich mit der $\mathbf{A}$-Matrix erhält man folgende Gleichungen.

$$1 \cdot u_{11} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = a_{11} = 2 => u_{11} = 2$$

$$1 \cdot u_{12} + 0 \cdot u_{22} + 0 \cdot 0 = a_{12} = 1 => u_{12} = 1$$

$$1 \cdot u_{13} + 0 \cdot u_{23} + 0 \cdot u_{33} = a_{13} = -2 => u_{13} = -2$$

$$l_{21} \cdot u_{11} + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = a_{21} = 1 => l_{21} = \frac{1}{2}$$

$$l_{21} \cdot u_{12} + 1 \cdot u_{22} + 0 \cdot 0 = a_{22} = 1 => u_{22} = \frac{1}{2}$$

$$l_{21} \cdot u_{13} + 1 \cdot u_{23} + 0 \cdot u_{33} = a_{23} = 1 => u_{23} = 2$$

$$l_{31} \cdot u_{11} + l_{32} \cdot 0 + 1 \cdot 0 = a_{31} = -2 => l_{31} = -1$$

$$l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot u_{22} + 1 \cdot 0 = a_{32} = 1 => l_{32} = 4$$

$$l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + 1 \cdot u_{33} = a_{32} = 1 => u_{33} = -12$$

Damit lauten die beiden Dreiecksmatrizen

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

Über die Zwischenlösung $\mathbf{Y}$ lässt sich der Lösungsvektor $\mathbf{X}$ berechnen:
Allgemein gilt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

$$\mathbf{L} \cdot \underbrace{\mathbf{U} \cdot \mathbf{X}}_{Y} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{R}$$

Nach der Multiplikation der Matrizen $\mathbf{L}$ und $\mathbf{Y}$ und dem Elementevergleich mit der rechten Seite $\mathbf{R}$ erhält man:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 = 1$$

$$\frac{1}{2} \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 = 6$$

$$-1 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 = -3$$

$$y_1 = 1$$

$$y_2 = \frac{11}{2}$$

$$y_3 = -24$$

Laut Definition gilt:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$$

Nach der Multiplikation der Matrizen $\mathbf{U}$ und $\mathbf{X}$ und dem Elementevergleich mit der rechten Seite $\mathbf{Y}$ erhält man:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{11}{2} \\ -24 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot x + 1 \cdot y - 2 \cdot z = 1$$

$$0 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y + 2 \cdot z = \frac{11}{2}$$

$$0 \cdot x + 0 \cdot y - 12 \cdot z = -24$$

Daraus folgt die Lösung:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(e) **CHOLESKY-Verfahren**

Ausgangsgleichungen:

$$2x + y - 2z = 1$$

$$x + y + z = 6$$

$$-2x + y - 2z = -3$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Die Voraussetzung für die Anwendung des CHOLESKY-Verfahrens ist eine symmetrische Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$.
Zusätzlich muss diese Matrix noch positiv definit sein. Dies wird mit Hilfe der Hauptminoren bestimmt.

$\mathbf{A}$ ist positiv definit, wenn alle Hauptminoren größer Null sind. Der Hauptminor (Hauptunterdeterminante) $\mathbf{A}_0$ ist die Determinante der Matrix die entsteht, wenn man die Null letzten Zeilen und Spalten streicht, also von $\mathbf{A}$ selbst.

$$\mathbf{A}_0 = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2 - 1) - 1 \cdot (-2 + 2) + (-2) \cdot (1 - (-2))$$

$$= -6 + 0 - 6 = -12$$

Damit ist $\mathbf{A}$ nicht positiv definit.

Der Vollständigkeit halber die beiden anderen Hauptminoren:
Der Hauptminor $\mathbf{A}_1$ ist die Determinante der Matrix die durch streichen der letzten Zeile und Spalte entsteht.

$$\mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

Der Hauptminor $\mathbf{A}_2$ ist die Determinante der Matrix die durch streichen der letzten 2 Zeilen und Spalten entsteht.

$$\mathbf{A}_2 = |2| = 2$$

Trotz dem die Voraussetzung der Positiv-Definitheit von $\mathbf{A}$ nicht gegeben ist, lässt sich das Verfahren dennoch anwenden. Als Resultat entstehen imaginäre Einträge in den Matrizen $\mathbf{B}$ und $\mathbf{B}^T$.

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T = \mathbf{A};$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ 0 & b_{22} & b_{32} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Nach Ausmultiplizieren des Matrizenproduktes $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T$ und anschließendem Elementevergleich mit der $\mathbf{A}$-Matrix erhält man folgende Gleichungen:

$$b_{11} \cdot b_{11} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = a_{11} = 2 => b_{11} = \sqrt{2}$$

$$b_{11} \cdot b_{21} + 0 \cdot b_{22} + 0 \cdot 0 = a_{12} = 1 => b_{21} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b_{11} \cdot b_{31} + 0 \cdot b_{32} + 0 \cdot b_{33} = a_{13} = -2 => b_{31} = -\sqrt{2}$$

$$b_{21}^2 + b_{22}^2 + 0 \cdot 0 = a_{22} = 1 => b_{22} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b_{21} \cdot b_{31} + b_{22} \cdot b_{32} + 0 \cdot b_{33} = a_{23} = 1 => b_{32} = 2\sqrt{2};$$

$$b_{31}^2 + b_{32}^2 + b_{33}^2 = a_{33} = -2 => b_{33} = 2\sqrt{-3}$$

Damit lauten die beiden Dreiecksmatrizen:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{-3} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{-3} \end{pmatrix}$$

Über die Zwischenlösung $\mathbf{Y}$ lässt sich der Lösungsvektor $\mathbf{X}$ berechnen:
Allgemein gilt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T$$

$$\mathbf{B} \cdot \underbrace{\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{X}}_{Y} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{R}$$

Nach der Multiplikation der Matrizen $\mathbf{B}$ und $\mathbf{Y}$ und dem Elementevergleich mit der rechten Seite $\mathbf{R}$ erhält man:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{-3} \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{2} \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 = 1$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 = 6$$

$$-\sqrt{2} \cdot y_1 + 2\sqrt{2} \cdot y_2 + 2\sqrt{-3} \cdot y_3 = -3$$

$$y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y_2 = \frac{11}{\sqrt{2}}$$

$$y_3 = -\frac{12}{\sqrt{-3}}$$

Laut Definition gilt:

$$\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$$

Nach der Multiplikation der Matrizen $\mathbf{B}^T$ und $\mathbf{X}$ und dem Elementevergleich mit der rechten Seite $\mathbf{Y}$ erhält man:

$$\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{-3} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{11}{\sqrt{2}} \\ -\frac{12}{\sqrt{-3}} \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{2} \cdot x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y - \sqrt{2} \cdot z = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$0 \cdot x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y + 2\sqrt{2} \cdot z = \frac{11}{\sqrt{2}}$$
$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 2\sqrt{-3} \cdot z = -\frac{12}{\sqrt{-3}}$$

Daraus folgt die Lösung:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

· **Bemerkung**: Wie zu sehen, lässt sich das Verfahren auch anwenden, obwohl die Bedingung der Positiv-Definitheit nicht erfüllt ist. Die imaginären Zahlen heben sich zum Ende der Berechnung gegenseitig auf.