

Teil II

Aufgaben und Lösungen - Partielle Differentialgleichungen der unterirdischen Prozesse

Kapitel 6

Überblick

Zu diesem Kapitel sind keine Übungsaufgaben vorhanden.

Kapitel 7

Horizontale Grundwasserströmungsgleichung

Zu diesem Kapitel sind keine Übungsaufgaben vorhanden.

Kapitel 8

Analytische Lösung der Brunnenanströmung

Aufgaben zu 8:

1. Berechnen Sie die Absenkung s für die Grundwasserbeobachtungsrohre (GWBR) in einer Entfernung r und zu den Zeiten t , die infolge einer Wasserförderung \dot{V} im Brunnen Br für nachfolgenden unendlich ausgedehnten Grundwasserleiter (siehe Abbildung 8.1) auftritt und stellen Sie das Ergebnis grafisch dar.

$$k = 1 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s}; M = 10m; S = 0,001; a = \frac{S}{T} = 0,1 \frac{s}{m^2}$$

$$r_0 = 0,25m; \dot{V} = 0,015 \frac{m^3}{s}; h_n = 16m$$

$$r = 5m; 10m; 20m; 50m$$

$$t = 1min; 2min; 5min; 10min; 20min; 30min; 45min; 60min; 90min; 120min$$

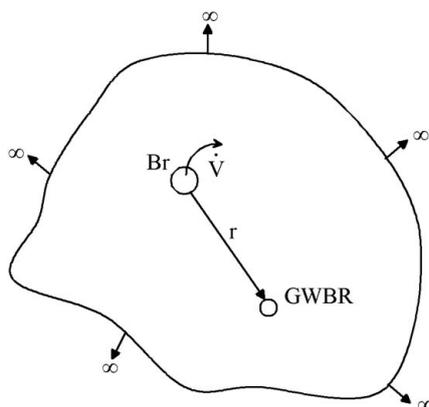


Abbildung 8.1: Unendlich ausgedehnter Grundwasserleiter mit Brunnen und GWBR

(Lösung s. S. 264)

2. Berechnen Sie für den Grundwasserleiter aus Aufgabe 1 (siehe Abbildung 8.1) die Absenkung im GWBR ($r = 10m$) alle 10 Minuten bis maximal 100 Minuten, wenn der Volumenstrom des Förderbrunnens folgender Zeitstaffelung unterliegt, und stellen Sie die Lösung grafisch dar.

Volumenstrom $\left[\frac{m^3}{s}\right]$	0,005	0,010	0,015	0,020	0,025	0,030	0,000
Förderbeginn [min]	0	10	20	30	40	50	60

(Lösung s. S. 270)

3. In einem Grundwasserleiter in der Nähe eines Flusses soll eine Baugrube abgesenkt werden. Die Mitte der Baugrube ist $100m$ vom Fluss entfernt, die Entwässerungsbrunnen $80m$. Es sind drei Brunnen parallel zum Fluss angeordnet, die jeweils $25m$ voneinander entfernt sind. Die Brunnen besitzen einen Durchmesser von $r_0 = 0,3m$ und fördern mit jeweils $\dot{V} = 0,015 \frac{m^3}{s}$.

Der Fluss besitzt eine Breite von $B = 20\text{m}$ und eine Kolmationsschicht von $k' = 3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $M' = 1\text{m}$. (siehe Abbildung 8.2)

Der Grundwasserleiter hat folgende Eigenschaften:

$k = 5 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $n_0 = 0,20$; $h_n = 15\text{m}$; $M = 20\text{m}$.

Wird nach 10 Tagen im Zentrum der Baugrube die Zielabsenkung von $2,5\text{m}$ erreicht?

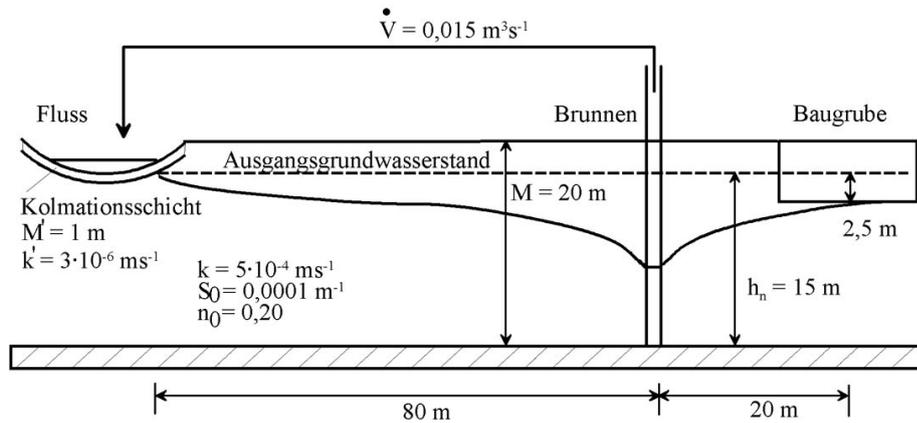


Abbildung 8.2: Grundwasserleiter mit unvollkommenem Fluss, Brunnen und Baugrube

(Lösung s. S.274)

4. Überprüfen Sie mittels der analytischen Lösung der Brunnenanströmung, ob der Mittelpunkt der Baugrube nach einer Zeit von 7 Tagen bei einer Förderleistung von $\dot{V} = 0,01 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$, $r_0 = 0,30\text{m}$ mit einer Sicherheit von $0,5\text{m}$ entwässert ist (siehe Abbildung 8.3).

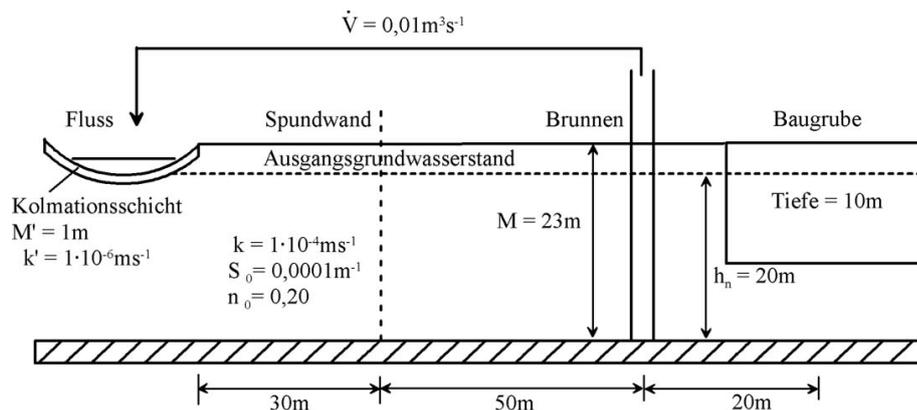


Abbildung 8.3: Grundwasserleiter mit Brunnen und Baugrube, Spundwand und Fluss

(Lösung s. S.278)

5. Bei einem Pumpversuch in einem unendlich ausgedehnten Grundwasserleiter wurden folgende Wasserstände in Abhängigkeit von der Entfernung zum Brunnen nach einer Pumpzeit von 120min gemessen (siehe Abbildung 8.4). Berechnen Sie das Wasserdefizit (Volumen) des Absenkungstrichters, wenn der Grundwasserleiter folgende Kennwerte besitzt:

$$h_n = 16\text{m}, M = 10\text{m}, k = 0,001\frac{\text{m}}{\text{s}}, S_0 = 0,0001\text{m}^{-1}, n_0 = 0,20.$$

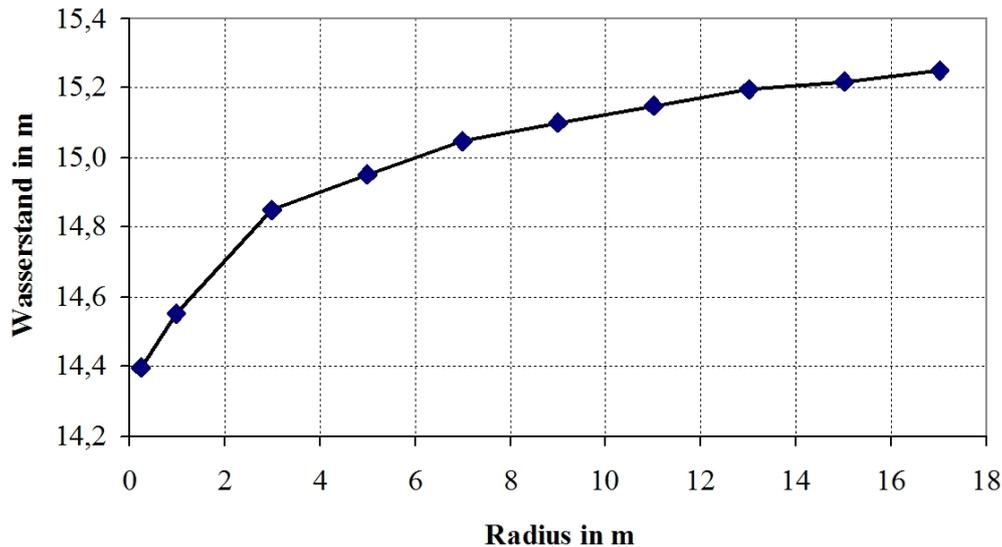


Abbildung 8.4: Grundwasserstand in Abhängigkeit vom Radius

(Lösung s. S. 281)

6. Aus einem Brunnen, der an einem idealen Fluss ($x = 0; -\infty < y < +\infty$) liegt ($Br_{(100\text{m},500\text{m})}$), wird ein konstanter Volumenstrom von $\dot{V} = 25\frac{\text{l}}{\text{s}}$ gefördert. Der Brunnen hat einen Radius von $r_0 = 0,35\text{m}$. Der Grundwasserleiter ist durch folgende Parameter gekennzeichnet:

$$h_n = 15\text{m}, M = 17\text{m}, k = 1 \cdot 10^{-3}\frac{\text{m}}{\text{s}}, S_0 = 0,0002\text{m}^{-1}, n_0 = 0,25.$$

- Berechnen Sie den stationären Endzustand (der Anteil der zeitlichen Funktionalität soll kleiner als 0,001 sein) für den Punkt ($P_{(200\text{m},600\text{m})}$) und
- den Zeitpunkt, ab wann mit ihm zu rechnen ist.

Hinweis: Arbeiten Sie so lange wie möglich mit allgemeinen Formelzeichen.

(Lösung s. S.282)

7. Für ein Uferfiltratswasserwerk (siehe Abbildung 8.5) mit parallelem Strömungsregime ist ein Simulationssystem aufzubauen. Der Fluss soll dabei als idealisierte Randbedingung berücksichtigt werden. Berechnen Sie für diese hydraulischen Verhältnisse den stationären Endzustand auf der Basis der analytischen Lösung der Brunnengleichung.

$$k = 1 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s}; h_{Fl} = 15m; z_{R0} = 15m; S = 0,25; \dot{V} = 50 \frac{l}{s}; q = 0,001 \frac{l}{s \cdot m^2};$$

$$b = 100m; k_{Kolm} = 5 \cdot 10^{-5} \frac{m}{s}; M_{Kolm} = 1m;$$

Ermitteln Sie die Lösung

- mit idealisiertem Fluss und
- unter Berücksichtigung des realen Flusses (Kolmation und Unvollkommenheit).

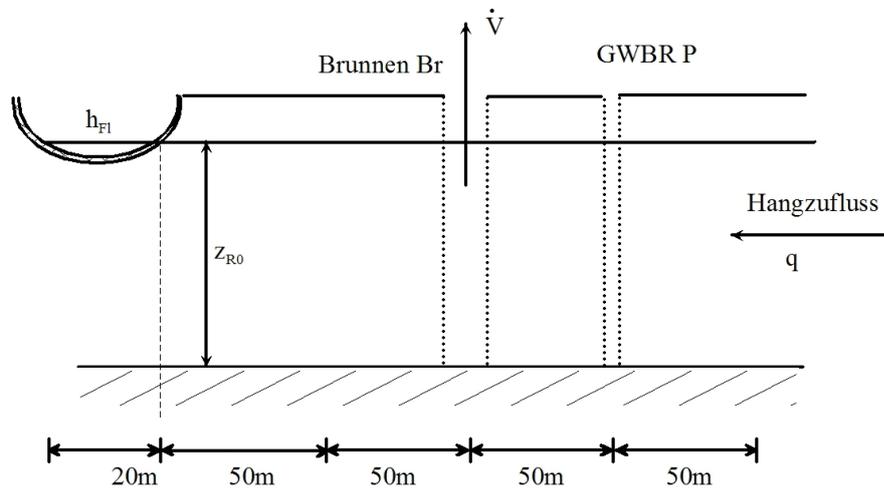


Abbildung 8.5: Grundwasserleiter mit Fluss, Brunnen und Hangzufluss

(Lösung s. S.286)

- In der Geohydraulik werden Pumpversuche zur Bestimmung der Grundwasserleiterparameter eingesetzt. Unter bestimmten Bedingungen kann die Absenkung nach der Formel von THEISS/JAKOB/COOPER

$$s = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi T} \ln \left(\frac{2,25 \cdot T \cdot t}{r^2 \cdot S} \right)$$

ermittelt werden.

Leiten Sie unter Verwendung dieser Formel eine Gleichung zur Bestimmung des k -Wertes für einen Ortspunkt P , der sich in einer Entfernung r vom Brunnen befindet, ab. Die Bestimmung des k -Wertes soll dabei auf der Verwendung der Absenkungswerte s_1 zum Zeitpunkt t_1 und s_2 zum Zeitpunkt t_2 basieren. Das Verhältnis der Messzeiten $t_1 : t_2$ beträgt $1 : 10$.

(Lösung s.S. 291)

- Berechnen Sie die Absenkung im GWBR (siehe Abbildung 8.6) für den Zeitpunkt $t = 10h$, wenn im Brunnen $5h$ lang ein Volumenstrom von $0,2 \frac{m^3}{s}$ gefördert wird und anschließend die Pumpen abgeschaltet werden.

$$h_{t=0} = 10m, M = 15m, k = 0,0001 \frac{m}{s}, S_0 = 0,0001 m^{-1}, n_0 = 0,25$$

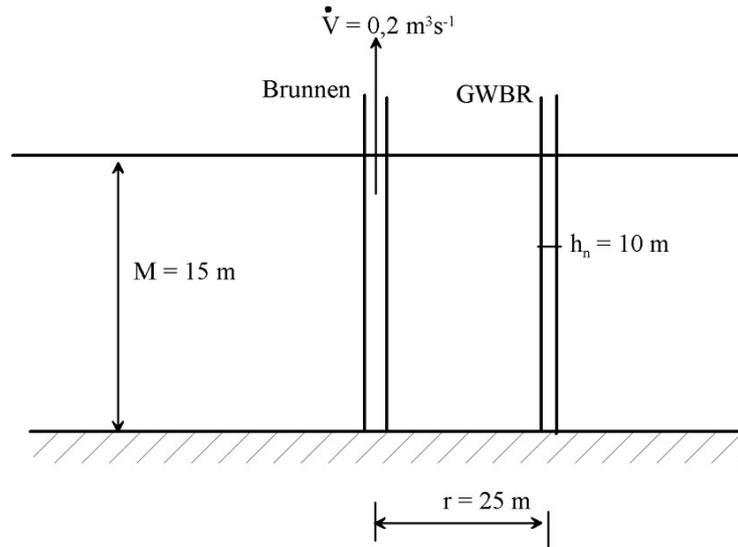


Abbildung 8.6: Unendlich ausgedehnter Grundwasserleiter mit einem Förderbrunnen

(Lösung s. S.292)

10. Berechnen Sie für eine Grundwassergewinnungsanlage auf Uferfiltratbasis die Absenkung am Punkt P nach einem Jahr.

Förderrate je Brunnen: $25 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$

$k = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $h_n = 15 \text{ m}$; $S = 0,25$

$k' = 1 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $M = 1 \text{ m}$; $B = 25 \text{ m}$; $r_1 = 250 \text{ m}$; $r_2 = 500 \text{ m}$; $r_P = 375 \text{ m}$

(Lösung s.S. 294)

11. Aus zwei Brunnen an einem Fluss (ohne Kolmation und vollkommen) wird konstant je $25 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$ gefördert.

Berechnen Sie die Absenkung am Punkt P nach einem Monat und den stationären Endzustand.

Kordinaten:

Brunnen 1: $x = 750 \text{ m}$ $y = 100 \text{ m}$

Brunnen 2: $x = 700 \text{ m}$ $y = 400 \text{ m}$

Punkt P: $x = 1000 \text{ m}$ $y = 500 \text{ m}$

$h_n = 15 \text{ m}$, $n_0 = 0,25$, $k = 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

(Lösung s. S. 297)

12. Berechnen Sie mittels der THEISSchen Brunnengleichung die Grundwasserstandsänderung nach 10 Tagen für folgende schematische Grundwasseranreicherungsanlage (siehe Abbildung 8.7).

Gegeben: $\dot{V} = 0,001 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, $S_0 = 0,001 \text{ m}^{-1}$, $n_0 = 0,25$, $k = 0,001 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

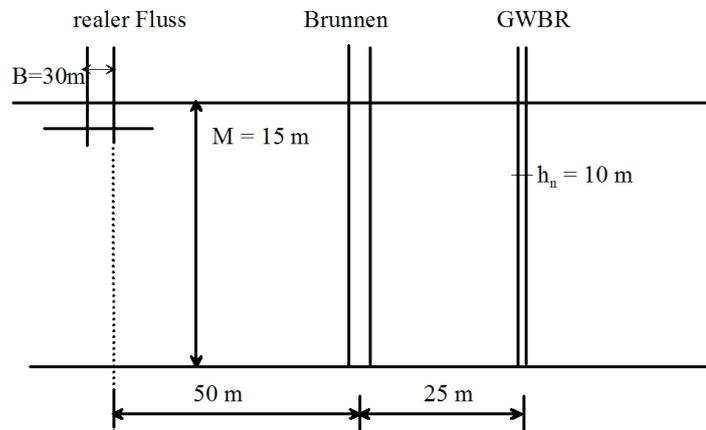


Abbildung 8.7: Realer Fluss mit Entnahmebrunnen (Grundwasseranreicherungsanlage)

(Lösung s.S. 300)

13. Berechnen Sie mittels der THEISSchen Brunnengleichung die Grundwasserstandsänderung nach 10 Tagen für folgende schematische Grundwasseranreicherungsanlage (siehe Abbildung 8.8).

Gegeben: $\dot{V} = 0,001 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, $S_0 = 0,001 \text{ m}^{-1}$, $n_0 = 0,25$, $k = 0,001 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

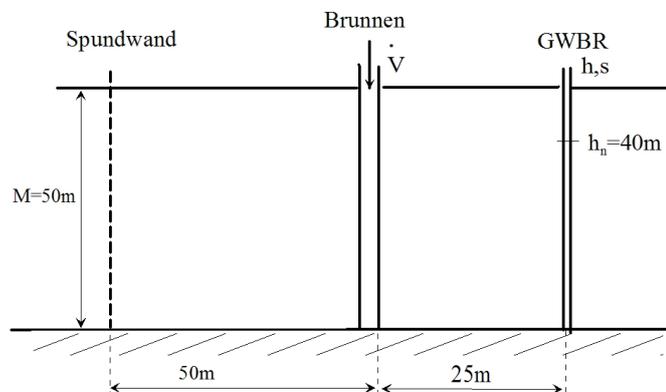


Abbildung 8.8: Grundwasseranreicherungsanlage mit Brunnen und Spundwand

(Lösung s.S. 302)

14. Berechnen Sie die Absenkung am Pegel für den Zeitpunkt $t = 15h$, wenn im Brunnen $10h$ lang ein Volumenstrom von $\dot{V} = 0,1 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ gefördert wird und anschließend die Pumpe abgeschaltet wird (siehe Abbildung 8.9).

Gegeben: $h_{t=0} = 40\text{m}$, $M = 50\text{m}$, $k = 0,0001 \text{ m s}^{-1}$, $S_0 = 0,0001 \text{ m}^{-1}$, $n_0 = 0,25$

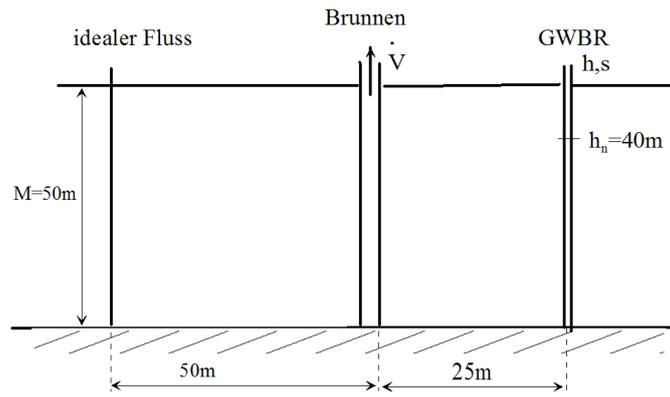


Abbildung 8.9: Uferfiltratanlage mit Brunnen und Fluss

(Lösung s.S.304)

Tabelle 8.1: Brunnenfunktion $W(\sigma)$ für den Bereich $1 \cdot 10^{-12} \leq \sigma \leq 9$

σ Mantis.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Exponent									
$1 \cdot 10^{+00}$	0, 2194	0, 0496	0, 0143	0, 00378	0, 00115	$3, 60 \cdot 10^{-4}$	$1, 16 \cdot 10^{-4}$	$3, 77 \cdot 10^{-5}$	$1, 24 \cdot 10^{-5}$
$1 \cdot 10^{-01}$	1, 8229	1, 2227	0, 9057	0, 7024	0, 5598	0, 4544	0, 3738	0, 3106	0, 2602
$1 \cdot 10^{-02}$	4, 0379	3, 3547	2, 9591	2, 6813	2, 4679	2, 2953	2, 1508	2, 0269	1, 9187
$1 \cdot 10^{-03}$	6, 3315	5, 6394	5, 2349	4, 9482	4, 7261	4, 5448	4, 3916	4, 2591	4, 1423
$1 \cdot 10^{-04}$	8, 6332	7, 9402	7, 5348	7, 2472	7, 0242	6, 8420	6, 6879	6, 5545	6, 4368
$1 \cdot 10^{-05}$	10, 9357	10, 2426	9, 8371	9, 5495	9, 3263	9, 1440	8, 9899	8, 8563	8, 7386
$1 \cdot 10^{-06}$	13, 2383	12, 5451	12, 1397	11, 8520	11, 6289	11, 4465	11, 2924	11, 1589	11, 0411
$1 \cdot 10^{-07}$	15, 5409	14, 8477	14, 4423	14, 1546	13, 9314	13, 7491	13, 5950	13, 4614	13, 3437
$1 \cdot 10^{-08}$	17, 8435	17, 1503	16, 7449	16, 4572	16, 2340	16, 0517	15, 8976	15, 7640	15, 6462
$1 \cdot 10^{-09}$	20, 1460	19, 4529	19, 0474	18, 7598	18, 5366	18, 3543	18, 2001	18, 0666	17, 9488
$1 \cdot 10^{-10}$	22, 4486	21, 7555	21, 3500	21, 0623	20, 8392	20, 6569	20, 5027	20, 3692	20, 2514
$1 \cdot 10^{-11}$	24, 7512	24, 0581	23, 6526	23, 3649	23, 1418	22, 9595	22, 8053	22, 6718	22, 5540
$1 \cdot 10^{-12}$	27, 0538	26, 3607	25, 9552	25, 6675	25, 4444	25, 2620	25, 1079	24, 9744	24, 8566

Lösungen:

- zu Aufgabe 1 (s. S. 256)

Wie aus der Skizze zur Aufgabenstellung zu ersehen ist, handelt es sich um einen gespannten Grundwasserleiter (siehe Abbildung 8.10) ($h_n > M$) Damit können die gegebenen Werte

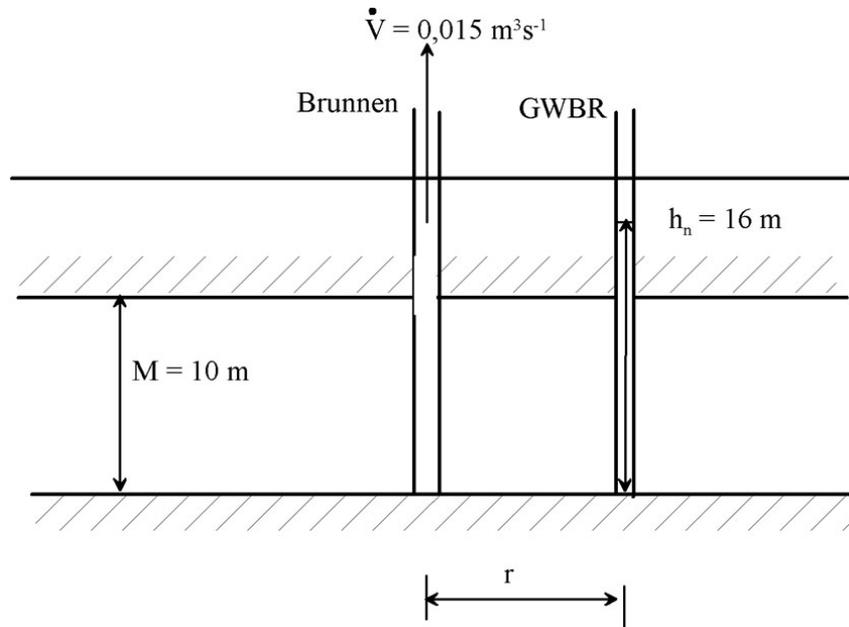


Abbildung 8.10: Gespannter Grundwasserleiter mit Entnahmebrunnen und Grundwasserbeobachtungsrohr

direkt in die THEIS-Formel eingesetzt werden:

$$s_{gesp} = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi T} W(\sigma)$$

mit

$$T = k \cdot M$$

$$\sigma = \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t}$$

und

$$C = e^\gamma$$

$$C \approx 1,7810724$$

$$W(\sigma)_{\text{THEISS}} = -\gamma - \ln(\sigma) + \sigma - \frac{\sigma^2}{2 \cdot 2!} + \frac{\sigma^3}{3 \cdot 3!} - \frac{\sigma^4}{4 \cdot 4!} + \frac{\sigma^5}{5 \cdot 5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{\sigma^n}{n \cdot n!}$$

$$W(\sigma)_{\text{THEISS}} = -\ln(C\sigma) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sigma^n}{n \cdot n!}$$

Die Potenzreihe konvergiert für Werte mit $\sigma < 0,03$ bereits so gut, dass die Glieder mit höheren Potenzen von σ vernachlässigbar kleine Werte liefern. Nach JACOB&COOPER kann $W(\sigma)$ in diesem Fall nur mit der Logarithmus-Funktion berechnet werden, wobei ein Fehler von $< 1\%$ entsteht.

$$W(\sigma)_{\text{JACOB}} = -\ln(C\sigma)$$

$$W(\sigma)_{\text{JACOB}} = \ln\left(\frac{2,246 \cdot T \cdot t}{S \cdot r^2}\right)$$

Für die Wertepaare Abstand $r_2 = 10\text{m}$ und Zeit $t [\text{min}] = 1, 2, 5, 10, 20, 30, 45, 60, 120$ erhält man folgende Ergebnisse (siehe Abbildung 8.11):

Zeit [min]	$\sigma(r_2) = 10\text{m}$	$W(\sigma)_{\text{THEIS}}$	$W(\sigma)_{\text{JACOB}}$	$S_{10\text{mTHEIS}}$	$S_{10\text{mJACOB}}$
1	0,0417	2,6421	2,6009	0,315	0,311
2	0,0208	3,3148	3,2940	0,396	0,393
5	0,0083	4,2186	4,2103	0,504	0,503
10	0,0042	4,9076	4,9035	0,586	0,585
20	0,0021	5,5987	5,5966	0,668	0,668
30	0,0014	6,0035	6,0021	0,717	0,716
45	0,0009	6,4085	6,4075	0,765	0,765
60	0,0007	6,6959	6,6952	0,799	0,799
90	0,0005	7,1012	7,1007	0,848	0,848
120	0,0003	7,3887	7,3884	0,882	0,882

Die Ergebnisse der Näherung nach JACOB weichen nach ca. 30min nicht mehr von der direkten THEIS-Lösung ab. Man erkennt, dass die Absenkung nach THEIS stärker ist, als die nach JACOB. Es ist unangebracht, die Absenkungen mit mehr als drei Kommastellen, d.h. besser als Millimeterbereich, auszurechnen.

Tabelle 8.2: Berechnung der Absenkung als Funktion der Zeit für $r_1 = 5 m$

Zeit [min]	$r_1 \Rightarrow \sigma_{r_1}$	$\mathbf{W}(\sigma)_{\text{THEISS}}$	$\mathbf{W}(\sigma)_{\text{JACOB}}$	$\mathbf{s}_{r_1\text{THEISS}}$	$\mathbf{s}_{r_1\text{JACOB}}$
1	0,0104	3,9976	3,9872	0,477	0,476
2	0,0052	4,6855	4,6803	0,559	0,559
5	0,0021	5,5987	5,5966	0,668	0,668
10	0,0010	6,2908	6,2898	0,751	0,751
20	0,0005	6,9834	6,9829	0,834	0,834
30	0,0003	7,3887	7,3884	0,882	0,882
45	0,0002	7,7941	7,7938	0,930	0,930
60	0,0002	8,0817	8,0814	0,965	0,965
90	0,0001	8,4871	8,4870	1,013	1,013
120	0,0001	8,7748	8,7747	1,047	1,047

Tabelle 8.3: Berechnung der Absenkung als Funktion der Zeit für $r_2 = 10m$

Zeit [min]	$r_2 \Rightarrow \sigma_{r_2}$	$\mathbf{W}(\sigma)_{\text{THEISS}}$	$\mathbf{W}(\sigma)_{\text{JACOB}}$	$\mathbf{s}_{r_2\text{THEISS}}$	$\mathbf{s}_{r_2\text{JACOB}}$
1	0,0417	2,6421	2,6009	0,315	0,311
2	0,0208	3,3148	3,2940	0,396	0,393
5	0,0083	4,2186	4,2103	0,504	0,503
10	0,0042	4,9076	4,9035	0,586	0,585
20	0,0021	5,5987	5,5966	0,668	0,668
30	0,0014	6,0035	6,0021	0,717	0,716
45	0,0009	6,4085	6,4075	0,765	0,765
60	0,0007	6,6959	6,6952	0,799	0,799
90	0,0005	7,1012	7,1007	0,848	0,848
120	0,0003	7,3887	7,3884	0,882	0,882

Tabelle 8.4: Berechnung der Absenkung als Funktion der Zeit für $r_3 = 20\text{ m}$

Zeit [min]	$r_3 \Rightarrow \sigma_{r_3}$	$\mathbf{W}(\sigma)_{\text{THEISS}}$	$\mathbf{W}(\sigma)_{\text{JACOB}}$	$\mathbf{s}_{r_3\text{THEISS}}$	$\mathbf{s}_{r_3\text{JACOB}}$
1	0,1667	1,3746	1,2146	0,164	0,145
2	0,0833	1,9894	1,9077	0,238	0,228
5	0,0333	2,8571	2,8240	0,341	0,337
10	0,0167	3,5338	3,5172	0,421	0,420
20	0,0083	4,2186	4,2103	0,504	0,503
30	0,0056	4,6213	4,6158	0,552	0,551
45	0,0037	5,0249	5,0212	0,600	0,599
60	0,0028	5,3117	5,3089	0,634	0,634
90	0,0019	5,7162	5,7144	0,682	0,682
120	0,0014	6,0035	6,0021	0,717	0,716

Tabelle 8.5: Berechnung der Absenkung als Funktion der Zeit für $r_4 = 50\text{ m}$

Zeit [min]	$r_4 \Rightarrow \sigma_{r_4}$	$\mathbf{W}(\sigma)_{\text{THEISS}}$	$\mathbf{W}(\sigma)_{\text{JACOB}}$	$\mathbf{s}_{r_4\text{THEISS}}$	$\mathbf{s}_{r_4\text{JACOB}}$
1	1,0417	0,2047	-0,6180	0,024	-0,074
2	0,5208	0,5353	0,0752	0,064	0,009
5	0,2083	1,1894	0,9914	0,142	0,118
10	0,1042	1,7861	1,6846	0,213	0,201
20	0,0521	2,4291	2,3777	0,290	0,284
30	0,0347	2,8176	2,7832	0,336	0,332
45	0,0231	3,2117	3,1887	0,383	0,381
60	0,0174	3,4936	3,4763	0,417	0,415
90	0,0116	3,8934	3,8818	0,465	0,463
120	0,0087	4,1782	4,1695	0,499	0,498

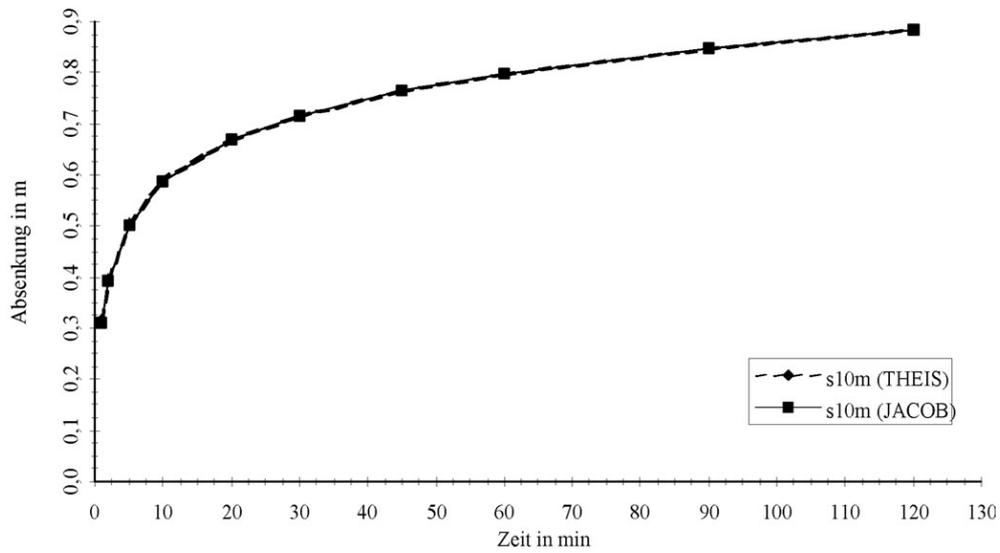


Abbildung 8.11: Absenkung in Abhängigkeit von der Zeit für $r = 10m$

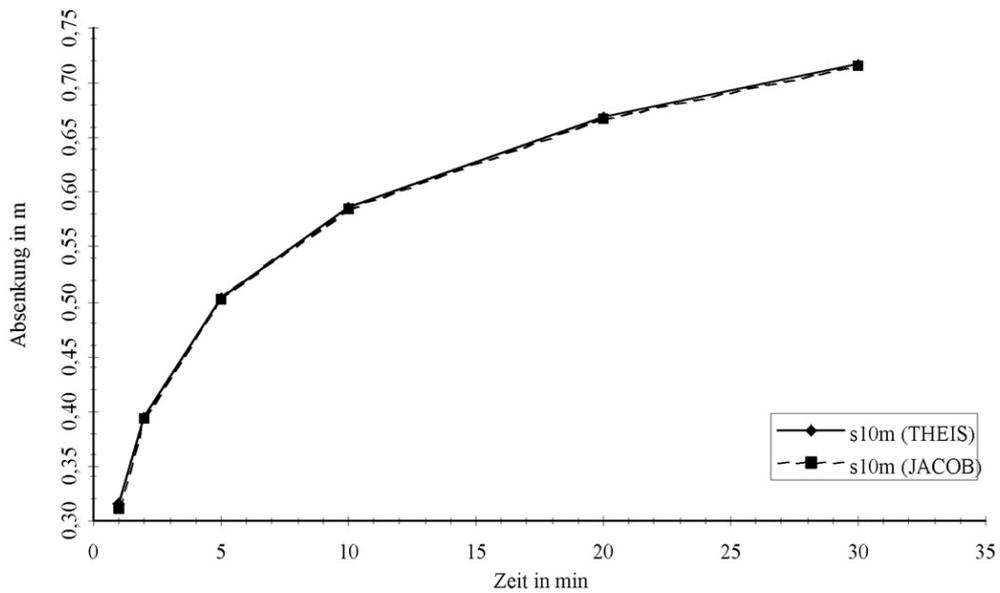


Abbildung 8.12: Absenkung in Abhängigkeit von der Zeit innerhalb der ersten 30min und für $r = 10m$

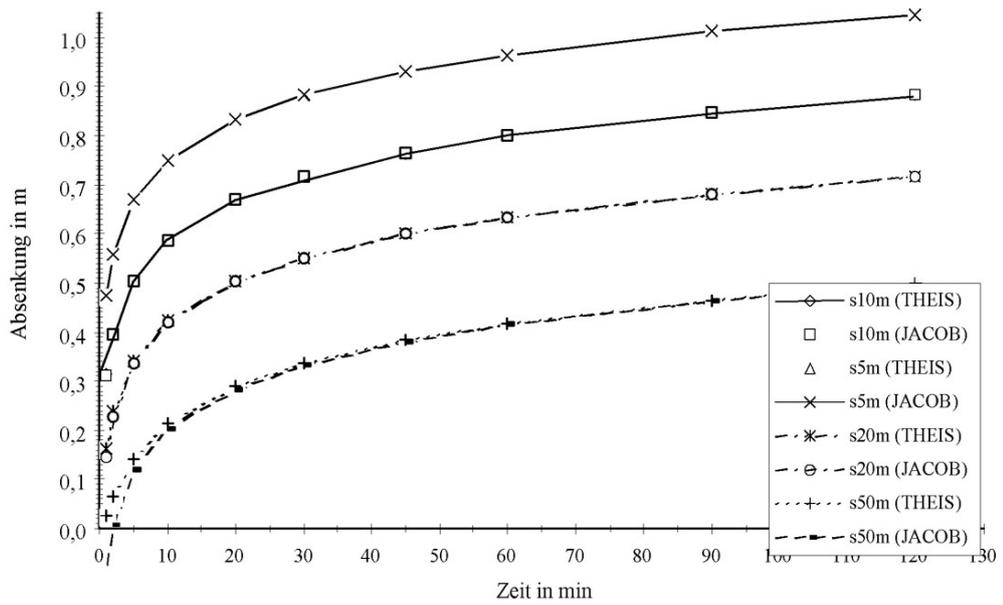


Abbildung 8.13: Absenkung in abhängig von der Zeit und für verschiedene Radien

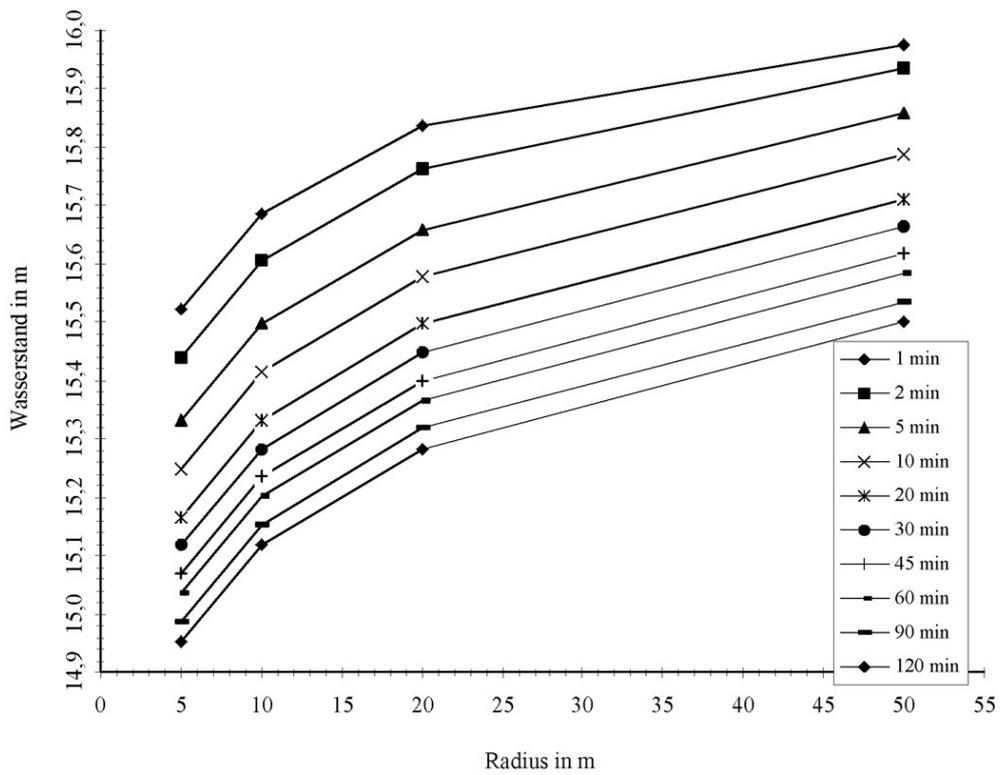


Abbildung 8.14: Absenkung in Abhängigkeit vom Radius und für unterschiedliche Zeiten

• zu Aufgabe 2 (s. S. 256)

Die Absenkung entsprechend Aufgabe 2 wird auf der Basis der Superposition berechnet. Dazu wird die Förderganglinie in einzelne Förderleistungen aufgeteilt, die entsprechend der Voraussetzung zur THEISSchen Lösung bis zur Zeit ∞ fördern. Die Teilförderleistungen beginnen zeitlich jeweils mit den Stufen des Gesamtvolumenstromes. Ab der Zeit 60 min würde so ein Volumenstrom $\frac{dV}{dt} = \sum \frac{dV_n}{dt}$ entstehen. Dieser muss durch eine gleichgroße Infiltration kompensiert werden, damit die Aufgabenstellung $\frac{dV}{dt} = 0$ für $t > 60 \text{ min}$ erfüllt wird.

Die Förderganglinie entsprechend der Aufgabenstellung hat den im Bild dargestellten Verlauf.

Die Berechnung des Absenkungspotentials von veränderlichen Förderganglinien erfolgt nach der folgenden Formel:

$$Z_{Ges.r,t} = \frac{1}{4\pi k} \sum_{i=1}^m \left(\dot{V}_{\text{real},i,t} - \dot{V}_{\text{real},i,t-\tau_i} \right) W_i \left(\frac{r^2 a}{4(t - \tau_i)} \right)$$

Bei dieser Stufenfunktion muss beachtet werden, dass die fiktive Brunnenlaufzeit gegenüber der Realzeit um die Zeit verschoben ist, zu der der entsprechende Sprung einsetzt.

Da es sich hier um einen gespannten Grundwasserleiter handelt, kann die Superposition auch direkt auf die Absenkungswerte angewendet werden:

$$s_{Ges.r,t} = \frac{1}{4\pi T} \sum_{i=1}^m \left(\dot{V}_{\text{real},i,t} - \dot{V}_{\text{real},i,t-\tau_i} \right) W_i \left(\frac{r^2 a}{4(t - \tau_i)} \right)$$

Mit

$$\sigma = \frac{r^2 S}{4T(t - \tau_i)}$$

$$W_\sigma = -\ln(1,781\sigma) + \sigma - \frac{\sigma^2}{2 \cdot 2!} + \frac{\sigma^3}{3 \cdot 3!} - \frac{\sigma^4}{4 \cdot 4!} + \frac{\sigma^5}{5 \cdot 5!} - \dots$$

können σ und W_σ berechnet werden. Dabei ist zu beachten, dass die THEIS-Funktion nur für positive Zeiten definiert ist. Für $t \leq 0$ erhält W_σ den Wert Null. Nach der Ermittlung der W_σ -Werte kann die Superposition der Absenkungsanteile erfolgen. Für den Fall der Infiltration (Wiederanstiegsphase bei $t > 60 \text{ min}$) wird eine negative Förderrate des Brunnens angesetzt. Diese führt zu negativen Absenkungen, d.h. zu einer fiktiven Erhöhung des Grundwasserspiegels während dieser Zeit.

Tabelle 8.6: Absenkung s in Abhängigkeit von der Zeit bei stufenförmiger Förderung und $r = 10 m$

Zeit [min]	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7	
10	0,0042							
20	0,0021	0,0042						
30	0,0014	0,0021	0,0042					
40	0,0010	0,0014	0,0021	0,0042				
50	0,0008	0,0010	0,0014	0,0021	0,0042			
60	0,0007	0,0008	0,0010	0,0014	0,0021	0,0042		
70	0,0006	0,0007	0,0008	0,0010	0,0014	0,0021	0,0042	
80	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0010	0,0014	0,0021	
90	0,0005	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0010	0,0014	
100	0,0004	0,0005	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0010	
Zeit [min]	$W(\sigma_1)$	$W(\sigma_2)$	$W(\sigma_3)$	$W(\sigma_4)$	$W(\sigma_5)$	$W(\sigma_6)$	$W(\sigma_7)$	
10	4,9076							
20	5,5987	4,9076						
30	6,0035	5,5987	4,9076					
40	6,2908	6,0035	5,5987	4,9076				
50	6,5137	6,2908	6,0035	5,5987	4,9076			
60	6,6959	6,5137	6,2908	6,0035	5,5987	4,9076		
70	6,8500	6,6959	6,5137	6,2908	6,0035	5,5987	4,9076	
80	6,9834	6,8500	6,6959	6,5137	6,2908	6,0035	5,5987	
90	7,1012	6,9834	6,8500	6,6959	6,5137	6,2908	6,0035	
100	7,2065	7,1012	6,9834	6,8500	6,6959	6,5137	6,2908	
Zeit [min]	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_{ges}
10	0,1953							0,195
20	0,2228	0,1953						0,418
30	0,2389	0,2228	0,1953					0,657
40	0,2503	0,2389	0,2228	0,1953				0,907
50	0,2592	0,2503	0,2389	0,2228	0,1953			1,166
60	0,2664	0,2592	0,2503	0,2389	0,2228	0,1953		1,433
70	0,2726	0,2664	0,2592	0,2503	0,2389	0,2228	-1,1716	0,339
80	0,2779	0,2726	0,2664	0,2592	0,2503	0,2389	-1,3366	0,229
90	0,2825	0,2779	0,2726	0,2664	0,2592	0,2503	-1,4332	0,176
100	0,2867	0,2825	0,2779	0,2726	0,2664	0,2592	-1,5018	0,144

Tabelle 8.7: Absenkung s in Abhängigkeit von der Zeit bei stufenförmiger Förderung und $r = 5 m$

Zeit[<i>min</i>]	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7	
10	0,0010							
20	0,0005	0,0010						
30	0,0003	0,0005	0,0010					
40	0,0003	0,0003	0,0005	0,0010				
50	0,0002	0,0003	0,0003	0,0005	0,0010			
60	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0005	0,0010		
70	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0005	0,0010	
80	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0005	
90	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	
100	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	
Zeit[<i>min</i>]	$W(\sigma_1)$	$W(\sigma_2)$	$W(\sigma_3)$	$W(\sigma_4)$	$W(\sigma_5)$	$W(\sigma_6)$	$W(\sigma_7)$	
10	6,2908							
20	6,9834	6,2908						
30	7,3887	6,9834	6,2908					
40	7,6763	7,3887	6,9834	6,2908				
50	7,8994	7,6763	7,3887	6,9834	6,2908			
60	8,0817	7,8994	7,6763	7,3887	6,9834	6,2908		
70	8,2358	8,0817	7,8994	7,6763	7,3887	6,9834	6,2908	
80	8,3693	8,2358	8,0817	7,8994	7,6763	7,3887	6,9834	
90	8,4871	8,3693	8,2358	8,0817	7,8994	7,6763	7,3887	
100	8,5924	8,4871	8,3693	8,2358	8,0817	7,8994	7,6763	
Zeit[<i>min</i>]	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_{ges}
10	0,2503							0,250
20	0,2779	0,2503						0,528
30	0,2940	0,2779	0,2503					0,822
40	0,3054	0,2940	0,2779	0,2503				1,128
50	0,3143	0,3054	0,2940	0,2779	0,2503			1,442
60	0,3216	0,3143	0,3054	0,2940	0,2779	0,2503		1,764
70	0,3277	0,3216	0,3143	0,3054	0,2940	0,2779	-1,5018	0,340
80	0,3330	0,3277	0,3216	0,3143	0,3054	0,2940	-1,6672	0,229
90	0,3377	0,3330	0,3277	0,3216	0,3143	0,3054	-1,7639	0,176
100	0,3419	0,3377	0,3330	0,3277	0,3216	0,3143	-1,8326	0,144

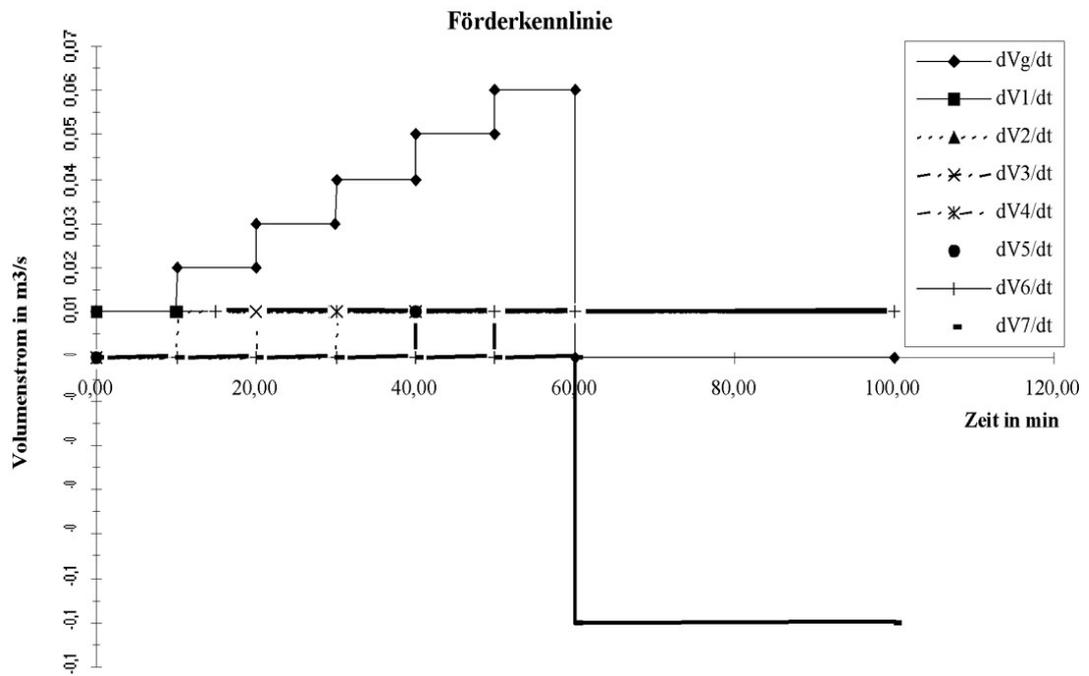


Abbildung 8.15: Förderganglinie und deren Aufteilung in einzelne Förderleistungen

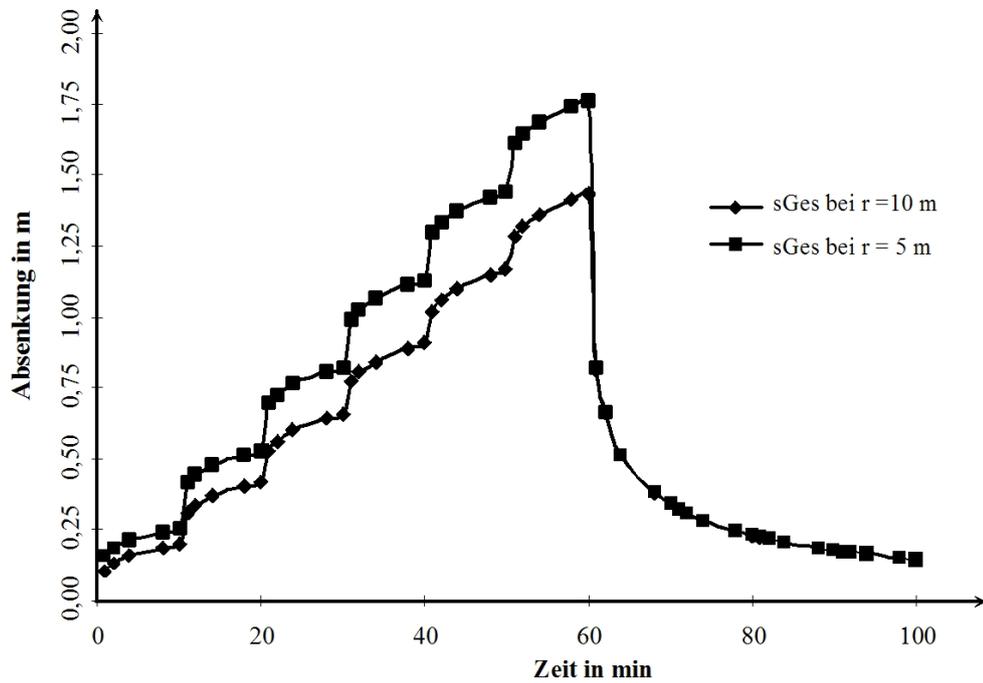


Abbildung 8.16: Absenkung in Abhängigkeit von der Zeit bei stufenförmiger Förderung

• zu Aufgabe 3 (s. S. 256)

Entsprechend der Aufgabenstellung handelt es sich um ungespannte Grundwasserströmungsverhältnisse. Die Einteilung in gespannte und ungespannte Grundwasserleiter richtet sich danach, in welchem Verhältnis der Grundwasserstand $z_{Rt=0}$ bzw. die Piezometerhöhe $h_{t=0}$ im Verhältnis zur Mächtigkeit des Grundwasserleiters steht. Die unterschiedlichen Speicherkoeffizienten sind die Folge davon. Im Zusammenhang mit der analytischen Lösung der Brunnengleichung gelten folgende Beziehungen:

Verhältnis zwischen Grundwasserstand und Mächtigkeit des GWL	$z_{Rt=0} \leq M$	$h_{t=0} > M$
Strömungsverhältnisse	ungespannt	gespannt
Durchströmte Mächtigkeit	$D = z_{Rt=0}$	$D = M$
Transmissibilität	$T = k \cdot z_{Rt=0}$	$T = k \cdot M$
Speicherkoeffizient	$S = n_0 + S_0 \cdot z_{Rt=0}$	$S = S_0 \cdot h_{t=0}$

Der Grundwasserleiter wird auf der einen Seite von einem unvollkommenen Fluss mit kolmatierter Sohle begrenzt. Auf der anderen Seite liegen drei Brunnen symmetrisch zur Baugrube, zwischen dieser und dem Fluss (siehe Abbildung 8.17). Da der unvollkommene Fluss

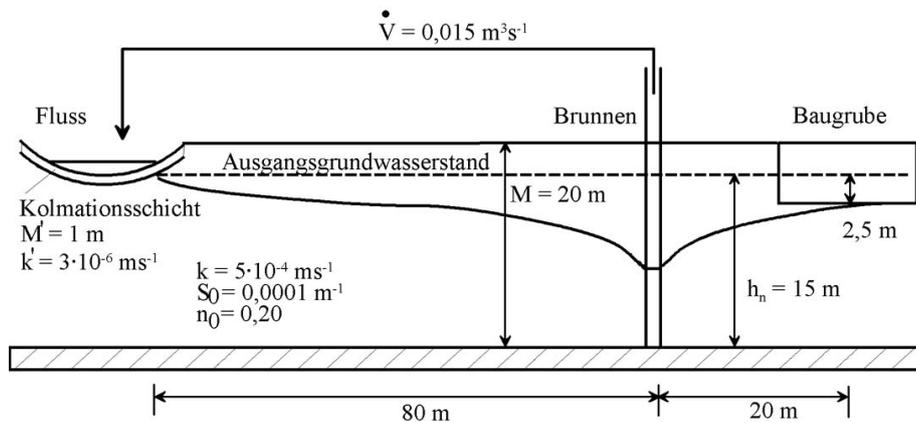


Abbildung 8.17: Grundwasserleiter mit unvollkommenem Fluss und Brunnen

mit kolmatierter Sohle als Randbedingung 3. Art wirkt, muss auf der Basis von Zusatzlängen eine virtuelle Verschiebung des Flusses erfolgen. Damit können die Wirkungen der Kolmationsschicht und die der unvollkommenen Berandung ausgeglichen werden. Danach kann durch die Einführung von virtuellen Brunnen mit der Methode der Spiegung die Wirkung der Randbedingung 1. Art kompensiert werden (siehe Abbildung 8.18).

Die Absenkungspotentiale der sechs Brunnen (drei reale und drei virtuelle (gespiegelte)) werden dann mit der Methode der Superposition überlagert. Da hier ungespannte Grundwasserhältnisse vorliegen, dürfen nicht die Absenkungen, sondern müssen deren Potentiale aufsummiert werden. **Berechnung der Zusatzlängen**

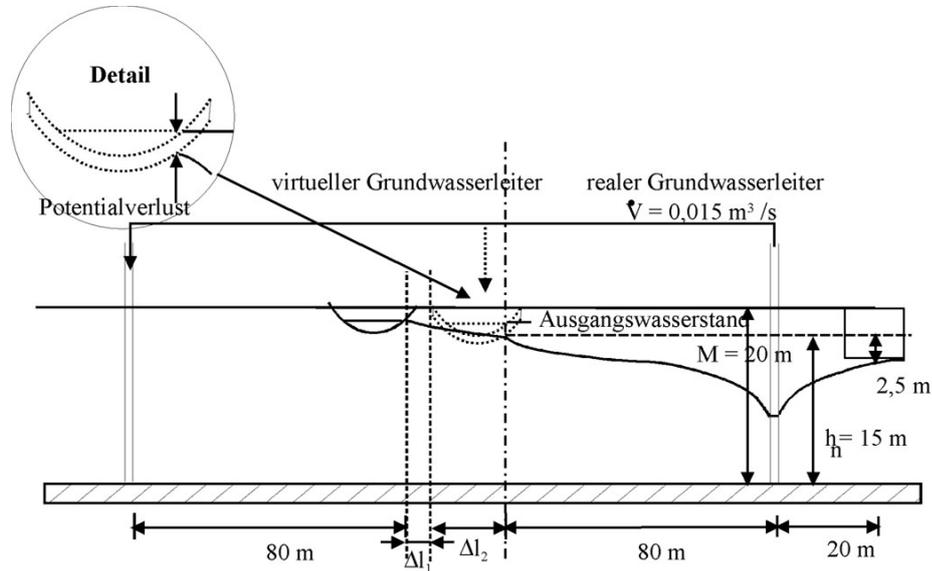


Abbildung 8.18: Detailansicht der Zusatzlängen und virtuellen Brunnen

- Unvollkommenheit

$$\begin{aligned}\Delta l_1 &= f\left(\frac{B}{D}\right) \\ &= f\left(\frac{20}{15}\right) = f(1,333)\end{aligned}$$

aus Diagramm (siehe GRÄBER, LB Systemanalyse, Abschnitt THEISSche Brunnen-gleichung)

$$\frac{\Delta l_1}{D} = 0,43$$

mit $D = z_R = 15 \text{ m}$ ergibt sich

$$\Delta l_1 = 6,45 \text{ m}$$

- Kolmation

$$\begin{aligned}\Delta l_2 &= \sqrt{\frac{k \cdot D \cdot M'}{k'}} \\ &= \sqrt{\frac{5 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 15 \text{ m} \cdot 1 \text{ m}}{3 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}}\end{aligned}$$

$$\Delta l_2 = 50 \text{ m}$$

Berechnung der Absenkung

- Berechnung der Entfernungen (siehe Abbildung 8.19)

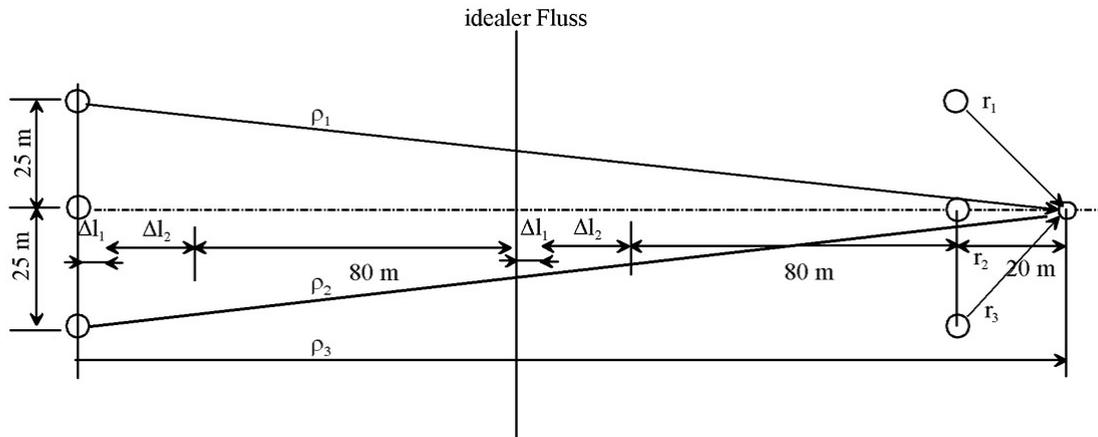


Abbildung 8.19: Schema zur Entfernungsbestimmung der realen und der virtuellen Brunnen

$$r_1^2 = (20m)^2 + (25m)^2 = 1025m^2$$

$$r_2^2 = (20m)^2 = 400m^2$$

$$r_3^2 = (20m)^2 + (25m)^2 = 1025m^2$$

$$\rho_1^2 = (2 \cdot (80m + 50m + 6,45m) + 20m)^2 + (25m)^2 = 86415,41m^2$$

$$\rho_2^2 = (2 \cdot (80m + 50m + 6,45m) + 20m)^2 = 85790,41m^2$$

$$\rho_3^2 = (2 \cdot (80m + 50m + 6,45m) + 20m)^2 + (25m)^2 = 86415,41m^2$$

- Berechnung nach der THEIS-Formel:

Mit den bekannten Formeln erhält man:

$$\sigma = \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t}$$

$$W(\sigma) = -\ln(1,781\sigma) + \sigma - \frac{\sigma^2}{2 \cdot 2!} + \frac{\sigma^3}{3 \cdot 3!} - \frac{\sigma^4}{4 \cdot 4!} + \frac{\sigma^5}{5 \cdot 5!} - \dots$$

$$Z = \frac{\dot{V}}{4\pi k} (W(\sigma r_1) + W(\sigma r_2) + W(\sigma r_3) - W(\sigma r_1) - W(\sigma r_2) - W(\sigma r_3))$$

$$s = z_{Rt=0} - \sqrt{(z_{Rt=0}^2 - 2Z)}$$

In obiger Formel kennzeichnen die positiven $W(\sigma)$ die real existierenden Förderbrunnen, die negativen dagegen die virtuellen Infiltrationsbrunnen, die durch die Spiegelung entstanden sind. Da in diesem Beispiel ungespannte Grundwasserverhältnisse vorliegen, muss die Superposition in der Potentialebene Z erfolgen. Erst dann kann auf Grund der nichtlinearen Beziehung die Rücktransformation in die Originalebene der Absenkung erfolgen.

Entfernung	σ	$W(\sigma)$	Z	s
Brunnen 1	0,0079	4,2705		
Brunnen 2	0,0031	5,2067		
Brunnen 3	0,0079	4,2705		
virt. Brunnen 1	0,6668	-0,3982		
virt. Brunnen 2	0,6620	-0,4019		
virt. Brunnen 3	0,6668	-0,3982		
	Summe:	12,5494	29,9595	2,15

Nach 10 Tagen ist die Sollabsenkung von 2,50m noch nicht erreicht. Es wurde nur eine Absenkung von 2,15m erzielt.

In diesem Beispiel konnte die Näherung nach JACOB&COOPER nicht angewendet werden, da die Bedingung $\sigma \ll 1$ nicht erfüllt ist. An den Zahlenwerten für $\sigma(s)$ sieht man auch, dass die virtuellen Brunnen unter den gegebenen Bedingungen nur einen kleinen Einfluss (< 10%) auf die Gesamtabenkung haben. Dies liegt vor allem auch an der großen Entfernung der realen Brunnen und der Baugrube vom Fluss. Man beachte immer, dass σ quadratisch mit der Entfernung zunimmt, dafür aber $W(\sigma)$ abnimmt und damit auch die Beeinflussung.

• zu Aufgabe 4 (s. S. 256)

Auf Grund der Spundwand reduziert sich das Modell auf einen Grundwasserleiter, der einseitig durch eine Barriere begrenzt ist (siehe Abbildung 8.20). Barrieren werden mittels der Methode der Spiegelung, wobei hier der Förderbrunnen in einen Förderbrunnen gespiegelt wird, berücksichtigt. Das Berechnungsmodell ergibt sich damit zu:

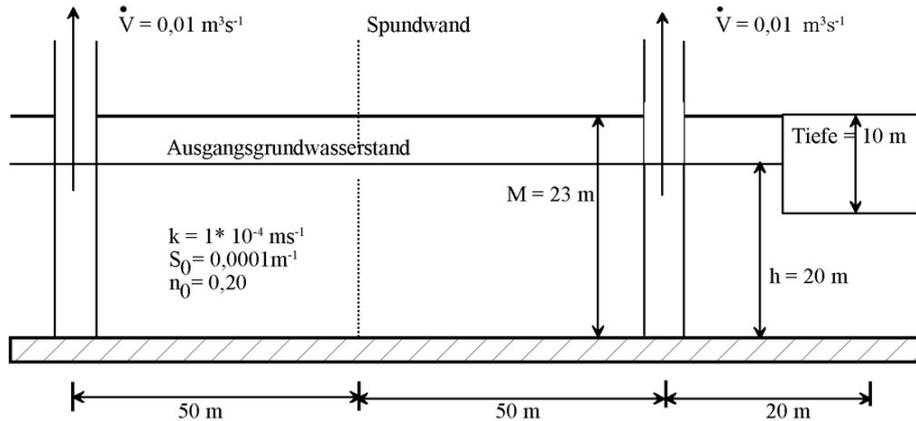


Abbildung 8.20: Lage der virtuellen Brunnen bei der Begrenzung durch eine Barriere

- **Randbedingung:** Barriere \Rightarrow Spiegelung in einen zweiten Förderbrunnen
- **Grundwasserleitertyp:** ungespannt \Rightarrow es ist nur eine Überlagerung der Potentiale Z möglich. Nach der Überlagerung ist dann die Absenkung berechenbar.
- **Grundwasserleiterparameter:**

$$S = n_0; \quad T = k \cdot h_n$$

Berechnung des Potentials Z_1 des realen Brunns

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t} \\ &= \frac{20^2 m^2 \cdot 0,20}{4 \cdot 20m \cdot 0,0001 \frac{m}{s} \cdot 7 \cdot 86.400s} \\ \sigma_1 &= 0,0165 \end{aligned}$$

Da hier $\sigma < 0,03$ gilt, kann die Näherung nach JACOB&COOPER verwendet werden:

$$W(\sigma_1) \approx -\ln(C\sigma) \approx 3,6$$

$$Z_1 = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot k} W(\sigma_1) = \frac{0,01s \cdot m^{-3} \cdot 3,6}{4 \cdot \pi \cdot 0,0001m \cdot s^{-1}}$$

$$Z_1 = 28,66m^2$$

Berechnung des Potentials Z_2 des virtuellen Brunnens

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \frac{\rho^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t} \\ &= \frac{120^2 m^2 \cdot 0,20}{4 \cdot 20m \cdot 0,0001m \cdot s^{-1} \cdot 7 \cdot 86400s}\end{aligned}$$

$$\sigma_2 = 0,595$$

Hier ist $\sigma > 0,03$ und man muss mit der THEIS-Formel rechnen:

$$W(\sigma_2) = -\ln(1,781\sigma) + \sigma - \frac{\sigma^2}{2 \cdot 2!} + \frac{\sigma^3}{3 \cdot 3!} - \dots$$

$$W(\sigma_2) \approx 0,454$$

$$\begin{aligned}Z_2 &= \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot k} W(\sigma_2) \\ &= \frac{0,01s \cdot m^{-3} \cdot 0,454}{4 \cdot \pi \cdot 0,0001m \cdot s^{-1}}\end{aligned}$$

$$Z_2 = 3,58m^2$$

Überlagerung

Die Superposition muss in der Potentialebene durchgeführt werden:

$$Z = Z_1 + Z_2$$

$$Z = 32,24m^2$$

Rücktransformation

Da hier ungespannte Verhältnisse vorliegen, muss die nichtlineare Rücktransformation aus

der Potentialebene in die Originalebene (Wasserstand, bzw. Absenkung) benutzt werden:

$$s = z_{Rt=0} - \sqrt{z_{Rt=0}^2 - 2 \cdot Z}$$

$$s = 20m - \sqrt{400m^2 - 64,48m^2} = 20m - 18,31m$$

$$s = \underline{1,68m}$$

Damit ist die vorgesehene Absenkung von $10,5m$ nicht erreicht!

• zu Aufgabe 5 (s. S. 256)

Da gespannte Grundwasserverhältnisse ($h_n > M$) vorliegen, gilt die THEISSche Brunnenformel und die Absenkung s ergibt sich zu:

$$s = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot k} W_{(\sigma)}$$

Die abgepumpte Wassermenge ist gleich dem zeitlichen Integral des Volumenstroms:

$$V = \int_{t=0}^{t_{\max}} \dot{V} dt \approx \dot{V} t_{\max} = \frac{s \cdot 4 \cdot \pi \cdot T \cdot t_{\max}}{W_{(\sigma)}}$$

Aus den in der Aufgabenstellung angebotenen Kurvenwerten (siehe Abbildung 8.4 auf S. 258) wird als Beispiel der Punkt $r = 10m$ und der Zeitpunkt $t_{max} = 120min$ mit der Absenkung von $s = 0,90m$ gewählt. Für S und T wurde auf Grund der gespannten Grundwasserverhältnisse

$$S = S_0 \cdot M; \quad T = k \cdot M$$

gewählt. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t_{\max}} \\ &= \frac{100m^2 \cdot 0,0001m^{-1} \cdot 10m}{4 \cdot 0,001m \cdot s^{-1} \cdot 10m \cdot 120 \cdot 60s} \\ \sigma &= 0,00035 \end{aligned}$$

Aus Tabelle $W(\sigma)$ (siehe Tabelle 8.1, Seite 263) kann abgelesen werden:

$$W_{(\sigma)} = 7,38$$

Daraus ergibt sich ein Volumenstrom von:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{s \cdot 4 \cdot \pi \cdot T}{W_{(\sigma)}} = \frac{0,90m \cdot 4 \cdot \pi \cdot 0,01m^2 \cdot s^{-1}}{7,38} \\ \dot{V} &= 0,0153 \frac{m^3}{s} \end{aligned}$$

Die Kurvenwerte wurden mit einem Wert von $\dot{V}_{\text{exakt}} = 0,015 \frac{m^3}{s}$ berechnet!

$$V = \dot{V} \cdot t_{\max} = 110,28m^3$$

Das abgepumpte Volumen beträgt damit $110,28m^3$

• zu Aufgabe 6 (s. S. 256)

Hier liegen ungespannte Strömungsverhältnisse ($h_n < M$) in dem Gebiet vor. Der Fluss wird in der THEISSchen Brunnenformel durch eine Spiegelung des Förderbrunnens in einen Infiltrationsbrunnen berücksichtigt. Als Spiegelachse wird das rechte Ufer des Flusses angenommen. Da der Fluss als ideal angesehen wird, muss keine Verschiebung um Zusatzlängen berechnet werden. Da die Superposition nur bei linearen Systemen angewendet werden darf, muss hier die Superposition mit der Potentialdifferenz Z erfolgen und erst danach darf die Rücktransformation durchgeführt werden.

Entsprechend der THEISSchen Brunnenformel gilt:

$$Z_{r,t} = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot W(\sigma); \quad \text{mit} \quad \sigma = \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t}$$

Durch die Anordnung des Spiegelbrunnens und der Superposition erhält man:

$$Z_{P,t} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot k} \left(\dot{V} \cdot W(\sigma_r) + (-\dot{V}) \cdot W(\sigma_\rho) \right)$$

wobei gilt:

$$\sigma_r = \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t}$$

$$\sigma_\rho = \frac{\rho^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t}$$

der Abstand zwischen Förderbrunnen $\mathbf{Br}_{\text{real}}$ und dem GWBR \mathbf{P} wird mit r bezeichnet und der zwischen Spiegelbrunnen $\mathbf{Br}_{\text{virt}}$ und GWBR \mathbf{P} mit ρ (siehe Abbildung 8.21). Diese Entfernungen können mittels des Satzes von PYTHAGORAS aus den Koordinaten des GWBR \mathbf{P} und denen der Brunnen berechnet werden:

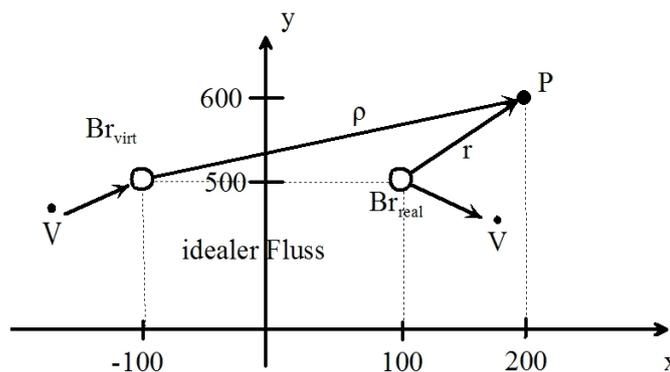


Abbildung 8.21: Lage des virtuellen Brunnens bei einem idealen Fluss als Randbedingung

a. Beachtet man die Näherung der Funktion $W(\sigma)$ nach COOPER&JACOB durch die Logarithmusfunktion für sehr große Zeiten, so erhält man:

$$W(\sigma) \approx -\ln(C \cdot \sigma)$$

$$C \approx 1,78$$

$$Z_{P,t \rightarrow \infty} = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot k} \left(-\ln \left(\frac{1,78 \cdot r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t} \right) + \ln \left(\frac{1,78 \cdot \rho^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t} \right) \right)$$

Nach den Logarithmengesetzen

$$\ln x - \ln y = \ln \frac{x}{y}$$

$$\ln x^n = n \cdot \ln x$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} Z_{P,t \rightarrow \infty} &= \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot k} \left(2 \ln \frac{\rho}{r} \right) = \frac{\dot{V}}{2 \cdot \pi \cdot k} \left(\ln \frac{\rho}{r} \right) \\ Z_{P,t \rightarrow \infty} &= \frac{0,025m^3 \cdot s^{-1}}{2 \cdot \pi \cdot 10^{-3}m \cdot s^{-1}} \cdot \left(\ln \frac{\sqrt{100^2 + 300^2}}{\sqrt{100^2 + 100^2}} \right) \\ &= \frac{0,025m^3 \cdot s^{-1}}{2 \cdot \pi \cdot 10^{-3}m \cdot s^{-1}} \cdot \left(\ln \frac{316,23}{141,42} \right) \\ &= \frac{0,025m^3 \cdot s^{-1} \cdot 0,805}{2 \cdot \pi \cdot 10^{-3}m \cdot s^{-1}} \\ Z_{P,t \rightarrow \infty} &= 3,202m^2 \end{aligned}$$

Aus der Beziehung für ungespannte Grundwasserverhältnisse folgt die Absenkung mit:

$$\begin{aligned} s &= z_{Rt=0} - \sqrt{z_{Rt=0}^2 - 2 \cdot Z_{r,t}} \\ s_{P,t \rightarrow \infty} &= 15m - \sqrt{225m^2 - 2 \cdot 3,202m^2} \\ s_{P,t \rightarrow \infty} &\approx 0,22m \end{aligned}$$

1. b. Hier geht man wieder von der Potentialgleichung aus, ersetzt aber $W(\sigma)$ nicht nur durch das logarithmische Glied der Reihenentwicklung, sondern berücksichtigt

auch noch das zweite, das lineare Glied σ . Die Glieder höherer Ordnung können vernachlässigt werden, da σ in der Nähe des stationären Zustandes auf alle Fälle wesentlich kleiner als eins ist ($s \ll 1$).

Die Potentialgleichung lautet dann:

$$Z_{P,t} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot \left(\dot{V} \cdot W(\sigma_r) + \left(-\dot{V} \right) W(\sigma_\rho) \right)$$

Dabei gilt:

$$\sigma_r = \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t}$$

$$\sigma_\rho = \frac{\rho^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t}$$

$$W(\sigma) = -\ln(1,781\sigma) + \sigma - \frac{\sigma^2}{2 \cdot 2!} + \dots$$

Damit erhält man:

$$Z_{P,t} = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot k} \left(-\ln \left(\frac{1,78 \cdot r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t} \right) + \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t} + \ln \left(\frac{1,78 \cdot \rho^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t} \right) - \frac{\rho^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t} \right)$$

$$Z_{P,t} = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot k} \left(\ln \left(\frac{\rho^2}{r^2} \right) + \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t} - \frac{\rho^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t} \right)$$

$$= \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot k} \left(\ln \left(\frac{\rho^2}{r^2} \right) + \frac{S}{4 \cdot T \cdot t} (r^2 - \rho^2) \right)$$

An dieser Gleichung sieht man, dass eine Zeitabhängigkeit nur im zweiten Summanden auftritt.

Laut Aufgabenstellung soll diese Funktionalität proportional um ein Tausendstel kleiner sein als der zeitunabhängige Teil.

Aus diesem Grund muss gelten:

$$\ln \left(\frac{\rho^2}{r^2} \right) \cdot 0,001 \geq \frac{S}{4 \cdot T \cdot t} |(r^2 - \rho^2)|$$

Aufgelöst nach t :

$$t \geq \frac{S}{4 \cdot T \cdot \ln \left(\frac{\rho^2}{r^2} \right) \cdot 0,001} |(r^2 - \rho^2)|$$

und unter Beachtung, dass $\rho > r$ ist, gilt:

$$\begin{aligned}t &\geq \frac{S}{8 \cdot T \cdot \ln\left(\frac{\rho^2}{r^2}\right) \cdot 0,001} |(r^2 - \rho^2)| \\t &\geq \frac{0,25}{8 \cdot 15m \cdot 0,001m \cdot s^{-1} \cdot 2,055 \cdot 0,001} (1220000 - 20000) \\&= \frac{0,25 \cdot 1200000}{8 \cdot 15m \cdot 0,001m \cdot s^{-1} \cdot 2,055 \cdot 0,001} \\&\geq 1216545012s \\t &\gtrsim 38,5a\end{aligned}$$

Beachtet man das Ergebnis von Aufgabe a) ($s = 55,6cm$), so ist die Forderung nach einer minimalen relativen Änderung von $\varepsilon \leq 0,001$ übertrieben. Lässt man eine Änderung von $\varepsilon \leq 1\%$ zu, so ist dieser Zustand bereits nach ca. 3,85 Jahren, d.h. nach 3 Jahren und 10 Monaten erreicht. In den folgenden 35 Jahren würde sich der Grundwasserspiegel nur um 0,5cm verringern.

• zu Aufgabe 7 (s. S. 256)

Diese Aufgabe kann mit der Brunnengleichung nach THEIS gelöst werden. Da der stationäre Endzustand gefragt ist, kann mit sehr guter Näherung die vereinfachte Lösung von JACOB&COOPER eingesetzt werden. Der Hangzufluss kann dabei näherungsweise als Infiltrationsbrunnen angesetzt werden. Beachtet man in der folgenden Rechnung den Anteil am Absenkungspotential, der durch diesen hervorgerufen wird, so kann man feststellen, dass dieser auch vernachlässigt werden kann.

Auf Grund der ungespannten Verhältnisse muss die Superposition im Potentialraum erfolgen. Erst danach kann die Rücktransformation in die Wasserstands-/Absenkungsebene erfolgen.

a. Entsprechend der Aufgabenstellung handelt es sich hier um eine Zweibrunnenanlage, die an der Flussrandbedingung zu spiegeln ist. Der Hangzufluss soll laut Aufgabenstellung 50m auf der flussabgewandten Seite des GWBR angreifen. Der virtuelle Spiegelbrunnen des als Infiltrationsbrunnen angenommenen Hangzuflusses ist dann 350m vom GWBR entfernt. Rückt der Hangzufluss noch weiter vom Pegel weg, so wird der Einfluss kleiner. Das Potential ergibt sich zu:

$$Z_{(r,t \rightarrow \infty)} = \frac{1}{4\pi k} \left(\dot{V}_{Br} (W(\sigma_{rBr}) - W(\sigma_{\rho Br})) - \dot{V}_{Hang} (W(\sigma_{rHang}) - W(\sigma_{\rho Hang})) \right)$$

Mit der Näherung nach JACOB&COOPER erhält man:

$$\begin{aligned} W(\sigma) &\approx \ln \left(\frac{2,25 \cdot T \cdot t}{r^2 \cdot S} \right) \approx -\ln \left(\frac{1,78 \cdot S \cdot r^2}{4 \cdot t \cdot T} \right) \\ Z_{(r,t \rightarrow \infty)} &= \frac{1}{4\pi k} \left(2\dot{V}_{Br} \ln \left(\frac{\rho_{Br}}{r_{Br}} \right) - 2\dot{V}_{Hang} \ln \left(\frac{\rho_{Hang}}{r_{Hang}} \right) \right) \\ &= \frac{2}{4\pi k} \left(50 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot s^{-1} \ln \left(\frac{250m}{50m} \right) \right. \\ &\quad \left. - 0,001 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot s^{-1} \cdot m^{-2} \cdot 15m \cdot 100m \cdot \ln \left(\frac{350m}{50m} \right) \right) \\ &= \frac{2}{4\pi k} (50 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot s^{-1} \cdot 1,6049 - 0,001 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot s^{-1} \cdot m^{-2} \\ &\quad \cdot 15m \cdot 100m \cdot 1,9459) \\ &= \frac{2 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot s^{-1}}{4\pi k} (80,47 - 2,9189) \\ Z_{(r,t \rightarrow \infty)} &= 12,34 m^2 \end{aligned}$$

Berechnet man das Potential ohne Hangzufluss, so erhält man:

$$Z_{(r,t \rightarrow \infty, \text{ohne Hang})} = \frac{2 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot s^{-1}}{4\pi k} (80,47)$$

$$Z_{(r,t \rightarrow \infty, \text{ohne Hang})} = 12,81 m^2$$

Für den hier vorliegenden Fall des ungespannten Grundwasserleiters muss dieser Potentialwert noch in die Absenkung s umgerechnet werden.

	mit Hangzufluss	ohne Hangzufluss
Wasserstand	$z_R = \sqrt{z_{R0}^2 - 2 \cdot Z}$ $= \sqrt{(225 - 24,68)m}$ $z_R = 14,15m$	$z_R = \sqrt{z_{R0}^2 - 2 \cdot Z}$ $= \sqrt{(225 - 25,62)m}$ $z_R = 14,12m$
Absenkung	$s = z_{R0} - z_R$ $= 15m - 14,15m$ $s = 0,85m$	$s = z_{R0} - z_R$ $= 15m - 14,12m$ $s = 0,88m$

Daran sieht man, dass der Hangzufluss nur eine untergeordnete Bedeutung bei diesem hydraulischen Schema hat.

b. Die Lösung der Aufgabenstellung 7b) erfolgt analog zu a). Der Unterschied besteht nur in der Berücksichtigung der Zusatzlängen, die auf Grund der Kolmationsschicht und der Unvollkommenheit des Flusses zu berücksichtigen sind. Da hier ungespannte Grundwasserhältnisse vorliegen, ergibt sich die durchströmte Mächtigkeit D zu:

$$D = z_{R0} = 15m$$

Für die Unvollkommenheit ergibt sich eine Zusatzlänge aus dem Diagramm von

$$\frac{B}{D} = \frac{20m}{15m} = 1,33 \Rightarrow \frac{\Delta L_1}{D} = 0,43$$

$$\Delta L_1 = 6,45m$$

Für die Zusatzlänge, welche die Kolmationsschicht berücksichtigen soll, ergibt sich:

$$\Delta L_2 = \sqrt{\frac{k \cdot D \cdot M_{Kolm}}{k_{Kolm}}} = \sqrt{\frac{10^{-3}m \cdot s^{-1} \cdot 15m \cdot 1m}{5 \cdot 10^{-5}m \cdot s^{-1}}} = \sqrt{300m^2} = 17,32m$$

Damit wird das Absenkungspotential berechnet zu:

$$Z_{(r,t \rightarrow \infty)} = \frac{1}{4\pi k} \left(\dot{V}_{Br} (W(\sigma_{rBr}) - W(\sigma_{\rho Br})) - \dot{V}_{Hang} (W(\sigma_{rHang}) - W(\sigma_{\rho Hang})) \right)$$

Mit der Näherung nach JACOB&COOPER erhält man:

$$\begin{aligned}
 W(\sigma) &\approx \ln\left(\frac{2,25 \cdot T \cdot t}{r^2 \cdot S}\right) \approx -\ln\left(\frac{1,78 \cdot S \cdot r^2}{4 \cdot t \cdot T}\right) = -\ln(1,78 \cdot \sigma_r) \\
 Z_{(r,t \rightarrow \infty)} &= \frac{1}{4\pi k} \left(2\dot{V}_{Br} \ln\left(\frac{\rho_{Br}}{r_{Br}}\right) - 2\dot{V}_{Hang} \ln\left(\frac{\rho_{Hang}}{r_{Hang}}\right) \right) \\
 &= \frac{2}{4\pi k} \left(50 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot s^{-1} \ln\left(\frac{250+(2 \cdot 23,77)m}{50m}\right) \right) \\
 &\quad - \frac{2}{4\pi k} \left(0,001 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot s^{-1} \cdot m^{-2} \cdot 15m \cdot 100m \cdot \ln\left(\frac{350+(2 \cdot 23,77)m}{50m}\right) \right) \\
 &= \frac{2}{4\pi k} (50 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot s^{-1} \cdot 1,7835 - 0,001 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot s^{-1} \cdot m^{-2} \\
 &\quad \cdot 15m \cdot 100m \cdot 2,07327) \\
 &= \frac{2 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot s^{-1}}{4\pi k} (89,175 - 3,11) \\
 Z_{(r,t \rightarrow \infty)} &= \underline{13,70 m^2}
 \end{aligned}$$

Die Zusatzlängen müssen doppelt berücksichtigt werden, da die Spiegelung an dem virtuellen Flussufer erfolgt, welches dem Pegel zugewandt ist, d.h. es erfolgt erst die virtuelle Verschiebung und danach die Spiegelung.

Berechnet man das Potential ohne Hangzufluss, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 Z_{(r,t \rightarrow \infty, \text{ohne Hang})} &= \frac{2 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot s^{-1}}{4\pi k} (89,175) \\
 Z_{(r,t \rightarrow \infty, \text{ohne Hang})} &= 14,19 m^2
 \end{aligned}$$

Für den hier vorliegenden Fall des ungespannten Grundwasserleiters muss dieser Potentialwert noch in die Absenkung s umgerechnet werden.

	Wasserstand	Absenkung
mit Hangzufluss	$z_R = \sqrt{z_{R0}^2 - 2 \cdot Z}$ $= \sqrt{(225 - 24,68)m}$	$s = z_{R0} - z_R$ $= 15m - 14,15m$
idealer Fluss	$z_R = 14,15m$	$s = 0,85m$
ohne Hangzufluss	$z_R = \sqrt{z_{R0}^2 - 2 \cdot Z}$ $= \sqrt{(225 - 25,62)m}$	$s = z_{R0} - z_R$ $= 15m - 14,12m$
idealer Fluss	$z_R = 14,12m$	$s = 0,88m$
mit Hangzufluss	$z_R = \sqrt{z_{R0}^2 - 2 \cdot Z}$ $= \sqrt{(225 - 27,40)m}$	$s = z_{R0} - z_R$ $= 15m - 14,06m$
realer Fluss	$z_R = 14,06m$	$s = 0,94m$
ohne Hangzufluss	$z_R = \sqrt{z_{R0}^2 - 2 \cdot Z}$ $= \sqrt{(225 - 28,39)m}$	$s = z_{R0} - z_R$ $= 15m - 14,09m$
realer Fluss	$z_R = 14,02m$	$s = 0,91m$

Die grafische Darstellung in Abbildung 8.22 veranschaulicht die Ergebnisse.

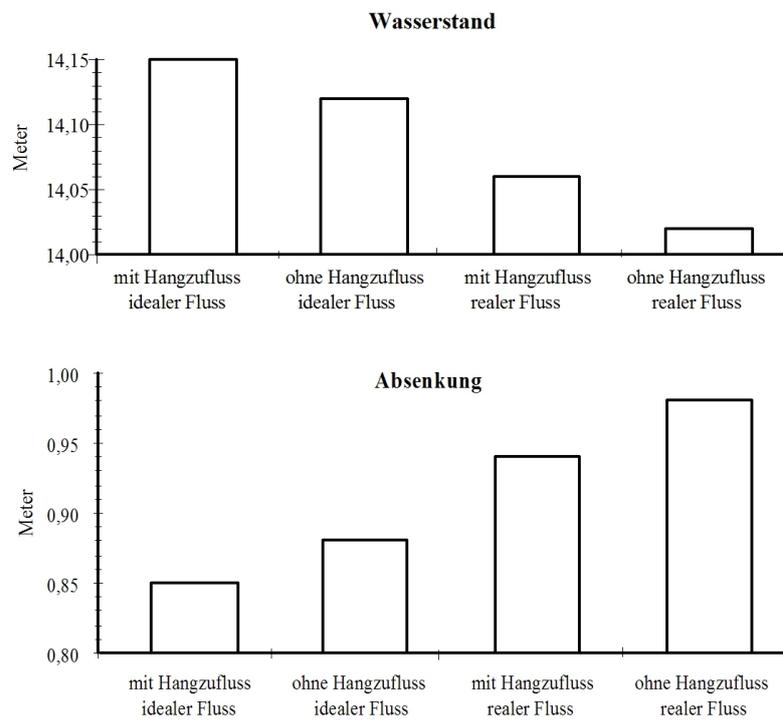


Abbildung 8.22: Abhängigkeit des Grundwasserstandes und der Absenkung vom Hangzufluss

• zu Aufgabe 8 (s. S. 256)

In die gegebene Funktion, die Absenkung für gespannte Grundwasserleiterverhältnisse mit der Näherung nach JACOB&COOPER, setzt man die Messwerte s_1 und s_2 mit den Messzeitpunkten t_1 und t_2 ein:

$$s_1 = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot T} \ln \left(\frac{2,25 \cdot T \cdot t_1}{r^2 \cdot S} \right)$$

$$s_2 = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot T} \ln \left(\frac{2,25 \cdot T \cdot t_2}{r^2 \cdot S} \right)$$

Bildet man nun die Differenz zwischen den beiden Absenkungen, so erhält man:

$$s_2 - s_1 = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot T} \left(\ln \left(\frac{2,25 \cdot T \cdot t_2}{r^2 \cdot S} \right) - \ln \left(\frac{2,25 \cdot T \cdot t_1}{r^2 \cdot S} \right) \right)$$

$$\Delta s = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot T} \ln \left(\frac{t_2}{t_1} \right)$$

Laut Aufgabenstellung beträgt das Verhältnis t_2 zu t_1 :

$$\frac{t_2}{t_1} = 10$$

$$\Delta s = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot T} \ln(10)$$

$$\Delta s \approx \frac{\dot{V} \cdot 2,3}{4 \cdot \pi \cdot T}$$

Aus der gegebenen Formel erkennt man, dass gespannte Grundwasserhältnisse vorliegen müssen, da s und $W(\sigma) \approx -\ln(C\sigma)$ linear zusammenhängen. Bei ungespannten Grundwasserhältnissen lautet die Gleichung unter den gegebenen Bedingungen (Näherung nach JACOB&COOPER):

$$s = z_{Rn} - \sqrt{z_{Rn}^2 - \frac{\dot{V}}{2 \cdot \pi \cdot k} \ln \left(\frac{2,25 \cdot T \cdot t}{r^2 \cdot S} \right)}$$

Unter Beachtung der gespannten Grundwasserhältnisse ergibt sich $T = k \cdot M$, bzw. für den k -Wert:

$$k = \frac{\dot{V} \cdot 2,3}{4 \cdot \pi \cdot M \cdot \Delta s}$$

Man erkennt, dass diese Formel zur Bestimmung des k -Wertes unabhängig von der Entfernung zwischen Brunnen und Beobachtungsrohr ist.

Diese Formel gilt aber nur für gespannte Grundwasserleiterverhältnisse und für Bereiche, in denen die Näherung nach JACOB&COOPER entsprechend kleine Fehler liefert. Wie bei GRÄBER (LB Systemanalyse) gezeigt, gilt für Zeiten

$$t > 8,33 \cdot r^2 \cdot \frac{S}{T}$$

ein Fehler der Näherung nach JACOB&COOPER von kleiner 1%.

• zu Aufgabe 9 (s. S. 256)

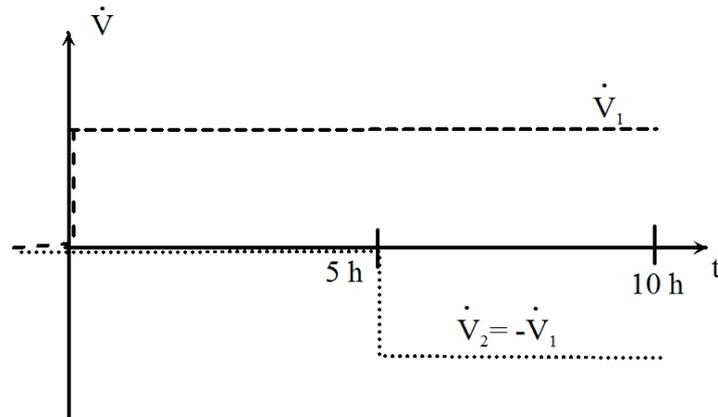


Abbildung 8.23: GWBR mit Förderintervall

Gegeben sind:

$$h_{t=0} = 10m$$

$$M = 15m$$

$$k = 0,0001m \cdot s^{-1} = 0,36m \cdot h^{-1}$$

$$S_0 = 0,0001m^{-1}$$

$$n_0 = 0,25$$

$$\dot{V} = 0,2m^3 \cdot s^{-1}$$

Zu berechnen ist die Absenkung im GWBR für den Zeitpunkt $t = 10h$

$$z_{Rn} = h_n = 10m; \quad z_R < M = 15m \implies \text{ungespannter GWL}$$

$$T = k \cdot z_{Rt=0} = 0,0001 \cdot 10 = 0,001m^2 \cdot s^{-1}$$

$$S = n_0 + S_0 \cdot z_{Rt=0} = 0,25 + 0,0001 \cdot 10 = 0,251$$

$$s_{ungesp} = z_{Rt=0} - z_R = z_{Rn} - \sqrt{z_{Rn}^2 - 2Z}$$

$$Z_{\dot{V}_2} = \frac{\dot{V}_2}{4 \cdot \pi \cdot k} W(\sigma_{\dot{V}_2}) \quad \dot{V}_2 = -0,2m^3 \cdot s^{-1}$$

$$\sigma_{\dot{V}_2} = \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot (t - \tau)} \quad \begin{array}{l} t = 10h \rightarrow \text{reale Zeit} \\ \tau = 5h \rightarrow \text{Startzeit} \end{array}$$

$$\sigma_{\dot{V}_2} = \frac{25^2 \cdot 0,251}{4 \cdot 0,001 \cdot (10 - 5) \cdot 3600} = 2,18$$

$$W(2,18) = W(2) - [W(2) - W(3)] \cdot 0,18$$

$$W(\sigma) = 0,0432$$

$$Z_{\dot{V}_2} = \frac{-0,2 \cdot 0,0432}{4 \cdot \pi \cdot 0,0001} = -6,9m^2$$

$$Z = \frac{\dot{V}_1}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot W(\sigma_{\dot{V}_1})$$

$$\dot{V}_1 = 0,2 \frac{m^3}{s} = 720 \frac{m^3}{h}$$

$$\sigma = \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t}; \quad t = 5h; \quad r = 25m; \quad S = n_0 + S_0 \cdot h_n$$

$$W(\sigma_{\dot{V}_1}) = -\ln(1,781 \cdot \sigma) + \sigma - \frac{\sigma^2}{2 \cdot 2!} + \frac{\sigma^3}{3 \cdot 3!} - \frac{\sigma^4}{4 \cdot 4!} + \dots$$

$$T = k \cdot h_n = 3,6 \frac{m^2}{h}$$

$$\sigma_{\dot{V}_1} = \frac{25^2 \cdot 0,251}{4 \cdot 3,6 \cdot 10} = 1,09$$

$$W(\sigma_{\dot{V}_1}) \approx 0,20 \quad \text{siehe Tabelle 8.1, S. 263}$$

$$\begin{aligned} Z_{\dot{V}_1} &= \frac{\dot{V}_1}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot W(\sigma_{\dot{V}_1}) = \frac{0,2 \cdot 0,2}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-4}} \\ &= \frac{0,00318}{10^{-4}} \approx 31,8m^2 \end{aligned}$$

$$Z = Z_{\dot{V}_1} + Z_{\dot{V}_2} = 31,8 - 6,9 = 24,9m^2$$

$$s = z_{R_n} - \sqrt{z_{R_n}^2 - 2Z} = 10 - \sqrt{100 - 49,8} = 10 - 7,09$$

$$s = 2,91m$$

Die Absenkung im GWBR beträgt 2,91m.

zu Aufgabe 10 (s. S. 256)

Gegeben sind:

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 = 25l \cdot s^{-1} = 0,025m^3 \cdot s^{-1}$$

$$k = 2 \cdot 10^{-3}m \cdot s^{-1}$$

$$D = h_n = 15m$$

$$S = 0,25$$

$$k' = 1 \cdot 10^{-5}m \cdot s^{-1}$$

$$M' = 1m$$

$$B = 25m$$

$$r_1 = 250m$$

$$r_2 = 500m$$

$$r_P = 375m$$

Zu berechnen ist die Absenkung am Punkt P nach einem Jahr.

⇒ Es liegt eine Randbedingung 3. Art vor (siehe Abbildung 8.24); Verschiebung um ΔL_1 ; ΔL_2

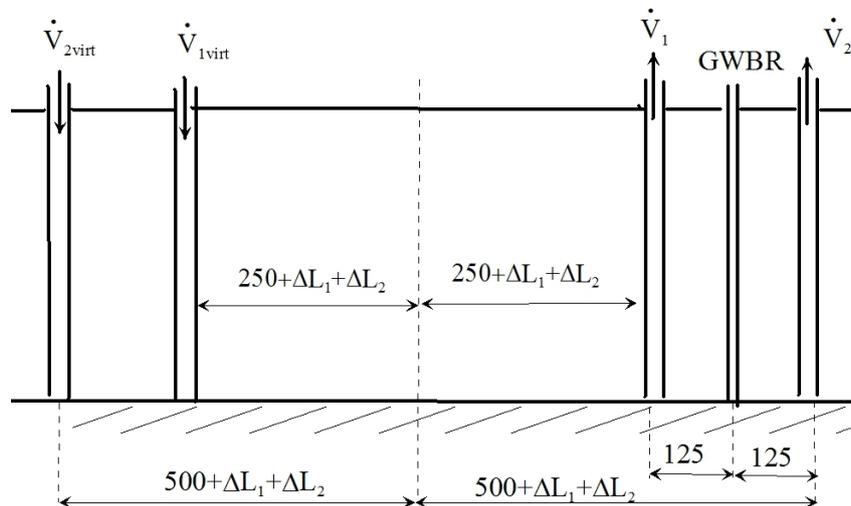


Abbildung 8.24: RB dritter Art → Verschiebung

$$\Delta L_1 = f\left(\frac{B}{D}\right) = f\left(\frac{25}{15}\right) = f(1,667)$$

$$\Delta L_1 = 0,43 \cdot D = 6,45m$$

$$\begin{aligned}\Delta L_2 &= \sqrt{\frac{k \cdot D \cdot M'}{k'}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-3}m \cdot s^{-1} \cdot 15m \cdot 1m}{1 \cdot 10^{-5}m \cdot s^{-1}}}\end{aligned}$$

$$\Delta L_2 = 54,8m$$

$$s = h_n - \sqrt{h_n^2 - 2Z}$$

$$Z = \frac{1}{4\pi \cdot k} \sum_{i=1}^4 \dot{V}_i \cdot W_i(\sigma)$$

$$\sigma_i = \frac{r_i^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t}; \quad T = k \cdot h_n = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 15 = 0,03$$

Es gilt:

$$\dot{V}_{1virt} = \dot{V}_{2virt} = -25l \cdot s^{-1}$$

$$\rho_1 = 2(250 + 6,45 + 54,8) + 125 = 747,5m$$

$$\rho_2 = 2(500 + 6,45 + 54,8) - 125 = 997,5m$$

$$\dot{V}_3 = \dot{V}_{1virt}; \quad \dot{V}_4 = \dot{V}_{2virt}$$

$$r_3 = \rho_1; \quad r_4 = \rho_2$$

$$t = 365 \cdot 24 \cdot 3600 = 31536 \cdot 10^3s$$

$$\sigma_1 = \frac{125^2 \cdot 0,25}{4 \cdot 0,03 \cdot 31536 \cdot 10^3} = 1,03 \cdot 10^{-3}$$

$$W_1(\sigma_1) = 6,31$$

$$\sigma_2 = \sigma_1; \quad W_2 = W_1$$

$$\sigma_3 = \frac{747,5^2 \cdot 0,25}{4 \cdot 0,03 \cdot 31536 \cdot 10^3} = 3,7 \cdot 10^2$$

$$W_3(\sigma_3) = 2,76$$

$$\sigma_4 = \frac{997,5^2 \cdot 0,25}{4 \cdot 0,003 \cdot 31536 \cdot 10^3} = 6,6 \cdot 10^{-2}$$

$$W_4(\sigma_4) = 2,21$$

$$Z = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot 0,25(6,31 + 6,31 - 2,76 - 2,21) = 76,1$$

$$s = 15 - \sqrt{15^2 - 2 \cdot 76,1}$$

$$s = 6,5m$$

Die Absenkung am Punkt P beträgt nach einem Jahr 6,5m.

• zu Aufgabe 11 (s. S. 256)

Gegeben sind:

$$\text{Brunnen 1: } X = 750m \quad Y = 100m$$

$$\text{Brunnen 2: } X = 700m \quad Y = 400m$$

$$\text{Punkt P: } X = 1000m \quad Y = 500m$$

$$h_n = 15m; \quad n_0 = 0,25 \quad k = 0,001$$

Zu berechnen sind die Absenkung am Punkt P nach einem Monat und der stationäre Endzustand.

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 = 25l \cdot s^{-1} = 0,025m^3 \cdot s^{-1}$$

$$t = 30 \cdot 24 \cdot 3600 = 2592 \cdot 10^3 s$$

$$r_1^2 = (1000 - 750)^2 + (500 - 100)^2 = 222.500m^2$$

$$r_2^2 = (1000 - 700)^2 + (500 - 400)^2 = 100.000m^2$$

$$\rho_1^2 = (1000 + 750)^2 + (500 - 100)^2 = 3,3 \cdot 10^6 m^2$$

$$\rho_2^2 = (1000 + 700)^2 + (500 - 400)^2 = 2,9 \cdot 10^6 m^2$$

⇒ Es liegt eine Randbedingung 1. Art vor: (siehe Abbildung 8.25)

$$s = Z_{Rn} - \sqrt{Z_{Rn}^2 - 2Z}; \quad Z_{Rn} = h_n = 15m$$

$$s = n_0 = 0,25$$

$$T = k \cdot h_n = 0,015$$

$$Z = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot \dot{V} \cdot (W_1(\sigma_1) + W_2(\sigma_2) - (W_{1virt}(\sigma_{1virt}) - (W_{2virt}(\sigma_{2virt})))$$

$$\dot{V} = \dot{V}_1 = \dot{V}_2 = -\dot{V}_{1virt} = -\dot{V}_{2virt}$$

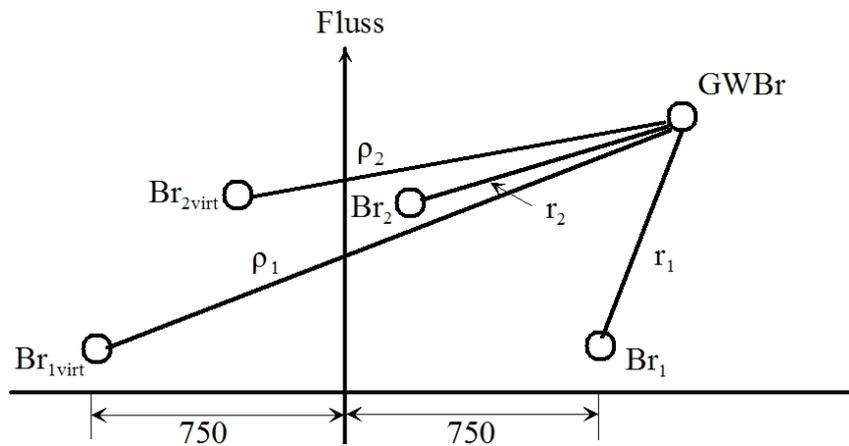


Abbildung 8.25: Zwei Brunnen an einem Fluss

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{r_1^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t} = 3,58 \cdot 10^{-1} & W_1(\sigma_1) &= 0,79 \\ \sigma_2 &= \frac{10^5 \cdot 0,25}{4 \cdot 0,015 \cdot 2592 \cdot 10^3} = 1,61 \cdot 10^{-1} & W_2(\sigma_2) &= 1,46 \\ \sigma_{1virt} &= \frac{32.225 \cdot 10^2 \cdot 0,25}{4 \cdot 0,015 \cdot 2592 \cdot 10^3} = 5,18 & W_{1virt}(\sigma_{1virt}) &= 0,001 \\ \sigma_{2virt} &= \frac{29 \cdot 10^5 \cdot 0,25}{4 \cdot 0,015 \cdot 2592 \cdot 10^3} = 4,66 & W_{2virt}(\sigma_{2virt}) &= 0,00204 \end{aligned}$$

$$Z = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot 0,025 (0,79 + 1,46 - 0,001 - 0,00204) = 4,47$$

$$s = 10 - \sqrt{100 - 2 \cdot 4,47} = 0,48$$

Die Absenkung am Punkt P beträgt nach einem Monat $0,48m$.

Berechnung des stationären Endzustandes:

$$\begin{aligned}z_{stat(r,t=\infty)} &= \frac{\dot{V}_1}{4 \cdot \pi \cdot k} (W_{Br1} - W_{Br1virt}) + \frac{\dot{V}_2}{4 \cdot \pi \cdot k} (W_{Br2} - W_{Br2virt}) \\&= \frac{\dot{V}_1}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot \ln \frac{\rho_1^2}{r_1^2} + \frac{\dot{V}_2}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot \ln \frac{\rho_2^2}{r_2^2} \\&= \frac{0,025}{4 \cdot 3,14 \cdot 0,001} \cdot \ln \frac{3,3 \cdot 10^6}{222.500} + \frac{0,025}{4 \cdot 3,14 \cdot 0,001} \cdot \ln \frac{2,9 \cdot 10^6}{100.000} \\&= 12,1m^2\end{aligned}$$

$$s = z_{Rn} - \sqrt{z_{Rn}^2 - 2z_{stat}} = 10 - \sqrt{10^2 - 2 \cdot 12,1}$$

$$s = 1,29m$$

Der stationäre Endzustand ist nach 1,29m erreicht.

• zu Aufgabe 12 (s. S. 256)

Gegeben sind:

$$\dot{V} = 0,001m^3 \cdot s^{-1}$$

$$S_0 = 0,001m^{-1}$$

$$n_0 = 0,25$$

$$k = 0,001m \cdot s^{-1}$$

$$h_n = 10m; \quad B = 30m; \quad M = 15m; \quad M' = 1m; \quad k' = 1 \cdot 10^{-5}$$

Zu berechnen ist die Grundwasserstandsänderung nach 10 Tagen mittels THEISScher Brunnengleichung.

⇒ Es liegt eine Randbedingung 3. Art vor (siehe Abbildung 8.26):

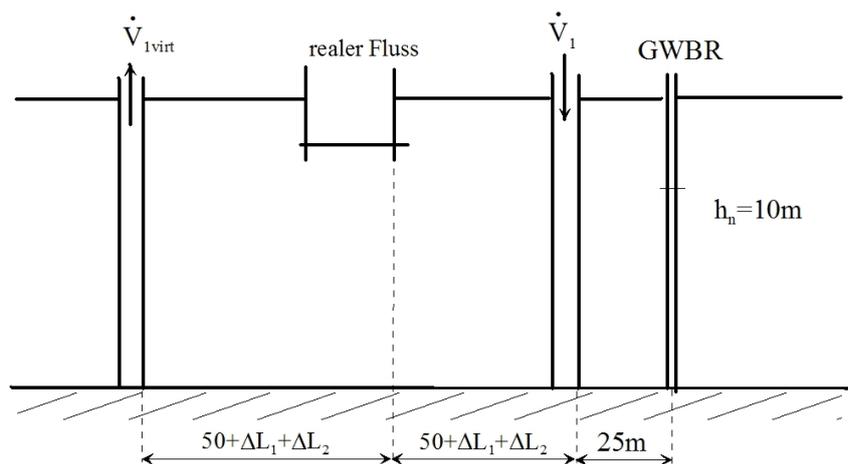


Abbildung 8.26: Grundwasseranreicherungsanlage

$$\Delta L_1 = f\left(\frac{B}{D}\right) = f\left(\frac{30}{10}\right) = f(3); \quad \Delta L_1 = 0,43; \quad D = 4,3$$

$$\Delta L_2 = \sqrt{\frac{0,001 \cdot 10 \cdot 1}{10^{-5}}} = 31,6$$

$$r_1 = 25m$$

$$\rho_1 = 25 + 2(50 + \Delta L_1 + \Delta L_2) = 196,8m$$

$$S = n_0 + S_0 \cdot h_n = 0,26$$

$$T = k \cdot h_n = 0,01$$

$$s = z_{Rn} - \sqrt{z_{Rn}^2 - 2Z}; \quad t = 10d = 10 \cdot 24 \cdot 3600 = 864 \cdot 10^3 s$$

$$Z = \frac{-1}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot (\dot{V}_1 \cdot W_1(\sigma_1) - \dot{V}_{1virt} \cdot W_2(\sigma_2))$$

$$\sigma_1 = \frac{r_1^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot k} = \frac{25^2 \cdot 0,26}{4 \cdot 0,01 \cdot 864 \cdot 1000} = 0,0047 = 4,7 \cdot 10^{-3}$$

$$W_1(\sigma_1) = 4,79$$

$$\sigma_2 = \frac{\rho_1^2 \cdot 0,26}{4 \cdot 0,01 \cdot 864 \cdot 1000} = 2,9 \cdot 10^{-1}; \quad W_2(\sigma_2) = 0,94$$

$$Z = \frac{-1}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot 0,001(4,79 - 0,94) = 0,31$$

$$s = 10 - \sqrt{100 + 0,62} = -0,031$$

Der Grundwasserstand ist nach zehn Tagen um 0,031m.gestiegen.

• zu Aufgabe 13 (s. S.256)

Gegeben sind:

$$\dot{V} = 0,001m^3 \cdot s^{-1}$$

$$S_0 = 0,001m^{-1}$$

$$n_0 = 0,25$$

$$k = 0,001m \cdot s^{-1}$$

$$M = 50m; \quad h_n = 40m$$

Zu berechnen ist die Grundwasserstandsänderung nach 10 Tagen mittels THEISScher Brunnengleichung.

Die schematische Darstellung für die Lösung zeigt Abbildung (8.27).

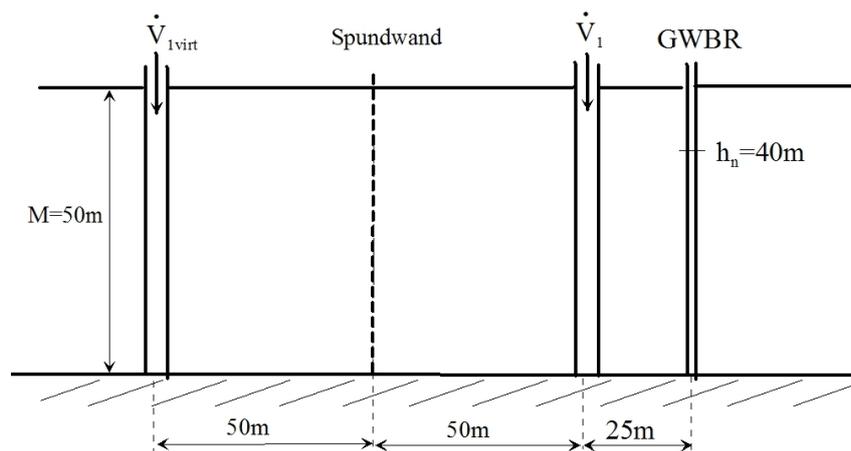


Abbildung 8.27: Schematische Anordnung mit Brunnen und Spundwand

$$s = Z_{Rn} - \sqrt{Z_{Rn}^2 - 2Z}; \quad Z_{Rn} = h_n = 40m$$

$$Z = \frac{-1}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot V(W_1(\sigma_1) + W_2(\sigma_2))$$

$$S = n_0 + S_0 \cdot h_n = 0,29$$

$$T = k \cdot h_n = 0,04$$

$$T = 10d = 10 \cdot 24 \cdot 3600 = 864 \cdot 10^3 s$$

$$r = 25$$

$$\rho = 125$$

$$\sigma_1 = \frac{25^2 \cdot 0,29}{4 \cdot 0,04 \cdot 864 \cdot 10^3} = 1,3 \cdot 10^{-3}; \quad W_1(\sigma_1) = 6,12$$

$$\sigma_2 = \frac{\rho^2 \cdot S}{4 \cdot \pi \cdot T} = 3,3 \cdot 10^{-2}; \quad W_2(\sigma_2) = 2,88$$

$$Z = -\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot 0,001(6,12 + 2,88) = -0,72$$

$$s = 40 - \sqrt{40^2 + 2 \cdot 0,72} = -0,02$$

Der Grundwasserstand hat sich nach zehn Tagen um 0,02m.erhöht.

• zu Aufgabe 14 (s. S. 256)

Gegeben sind:

$$\dot{V} = 0,1m^3 \cdot s^{-1}$$

$$S_0 = 0,0001m^{-1}$$

$$n_0 = 0,25$$

$$k = 0,0001m \cdot s^{-1}$$

$$h_{t=0} = 40m$$

$$M = 50m$$

Zu berechnen ist die Absenkung am Pegel für den Zeitpunkt $t = 15h$.

Es handelt sich hier um einen durch eine Randbedingung 1. Art einseitig begrenzten Grundwasserleiter. Dies führt dazu, dass der reale Brunnen auf Grund des Spiegelungsverfahrens in einen virtuellen überführt werden muss. Dabei wird aus der Exfiltration eine Infiltration. Da hier eine gestufte Förderganglinie vorliegt, dargestellt durch die zwei Phasen Pumpen und Wiederanstieg, müssen zwei Pumpleistungen, Exfiltration und Infiltration, eingeführt werden. Es ergibt sich damit folgende schematische Berechnungsgrundlage (siehe Abbildung 8.28).

Da es sich um ungespannte Grundwasserleiterverhältnisse handelt, muss die Superposition in der Potentialebene durchgeführt werden. Im Einzelnen werden folgende Werte berechnet:

$$\sigma = \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot t \cdot T}$$

$$W(\sigma) = -\ln(1,78 \cdot \sigma) + \sum (-1)^{n+1} \frac{\sigma^n}{n \cdot n!}$$

Des Weiteren gilt:

$$Z = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot W(\sigma)$$

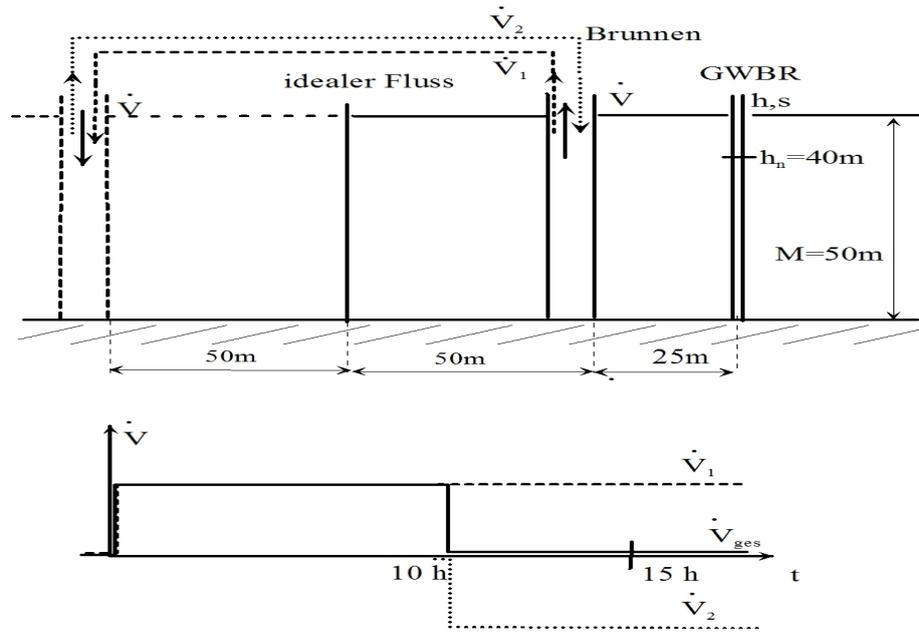


Abbildung 8.28: Grundwasserleiter mit Brunnen und Fluss

	Br_{real1}	Br_{real2}	Br_{virt1}	Br_{virt2}
\dot{V}	$+\dot{V}$	$-\dot{V}$	$-\dot{V}$	$+\dot{V}$
t	$15h$	$5h$	$15h$	$5h$
r	$25m$	$25m$	$125m$	$125m$
σ	0,18	0,54	4,5	13,6
$W(\sigma)$	1,343	0,518	0,0025	≈ 0
Z	106,87	-41,22	-0,199	0

Damit ergibt sich ein Gesamtpotential von:

$$Z_{Ges} = Z_{real1} + Z_{real2} + Z_{virt1} + Z_{virt2}$$

$$Z_{Ges} = 65,45m^2$$

Da es sich hier um ungespannte Grundwasserverhältnisse handelt, folgt die Lage der freien Grundwasseroberfläche zu:

$$z_R = \sqrt{z_{Rt=0}^2 - 2 \cdot Z}$$

$$z_R = 38,33m$$

bzw.

$$s = z_{Rt=0} - z_R$$

$$s = 1,67m$$

Die Absenkung am Pegel beträgt $1,67m$.