

Technische Universität Dresden
Fakultät Forst-, Geo- und Hydrowissenschaften

SYSTEMANALYSE IN DER WASSERWIRTSCHAFT
AUFGABEN UND LÖSUNGEN

Peter-Wolfgang Gräber

Sommersemester 2010

Das vorliegende Lehrmaterial ist internes Studienmaterial für die Studiengänge der Fachrichtung Wasserwesen der TU Dresden. Das Material unterliegt den Urheberrechten und ist nur zum Gebrauch für interne Aus- und Weiterbildung innerhalb der TU Dresden gestattet. Jegliche Vervielfältigung, auch auszugsweise, ist nur mit Zustimmung des Verfassers zulässig.

Redaktion und Gestaltung: Prof. Dr.-Ing. habil. Peter-Wolfgang Gräber
TU Dresden
Fakultät Forst-, Geo- und Hydrowissenschaften
Institut für Abfallwirtschaft und Altlasten

Tel.: (03501) 530029

Fax: (03501) 530022

e-mail: peter-wolfgang.graeber@tu-dresden.de

Internet: <http://www.tu-dresden.de/fghh1aa>

Redaktionsschluss: 30.11.2009

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis.....	V
Abbildungsverzeichnis	X
 I Aufgaben und Lösungen - Mathematische Grundlagen	 1
 1 Algebraische Grundlagen	 3
1.1 Exponential- und Logarithmus-Ausdrücke	4
1.2 Matrizen	8
1.3 Lineare Gleichungssysteme	19
2 Vektoralgebra und Analysis	81
3 Interpolationsverfahren	99
4 Optimierungsprobleme	125
5 Gewöhnliche Differentialgleichungen	127
5.1 Aufstellen von Differentialgleichungen	128
5.2 Analytische Methoden	137
5.2.1 DGL erster Ordnung	137
5.2.2 Analytische Methoden - DGL höherer Ordnung	162
5.3 Integraltransformationen	167
5.4 Numerische Methoden	213
5.4.1 Integration	213

5.4.2	Numerische Lösung von Differentialgleichungen	234
II	Aufgaben und Lösungen - Partielle Differentialgleichungen der unterirdischen Prozesse	249
6	Überblick	251
7	Horizontale Grundwasserströmungsgleichung	253
8	Analytische Lösung der Brunnenanströmung	255
9	Numerische Grundwasserströmungsmodelle	307
10	Simulationsprogrammsystem ASM	343
III	Aufgaben und Lösungen - Systemtheorie und Modellierung	349
11	Grundlagen	351
12	Modellbestimmung an Hand von Kenngrößen	353
12.1	Übertragungsfunktionen	354

Tabellenverzeichnis

5.1	Korrespondenztafel LAPLACE-Transformation	170
5.1	Korrespondenztafel - Fortsetzung	171
8.1	Brunnenfunktion $W(\sigma)$ für den Bereich $1 \cdot 10^{-12} \leq \sigma \leq 9$	263
8.2	Berechnung der Absenkung als Funktion der Zeit für $r_1 = 5\text{ m}$	266
8.3	Berechnung der Absenkung als Funktion der Zeit für $r_2 = 10\text{ m}$	266
8.4	Berechnung der Absenkung als Funktion der Zeit für $r_3 = 20\text{ m}$	267
8.5	Berechnung der Absenkung als Funktion der Zeit für $r_4 = 50\text{ m}$	267
8.6	Absenkung s in Abhängigkeit von der Zeit bei stufenförmiger Förderung und $r = 10\text{ m}$	271
8.7	Absenkung s in Abhängigkeit von der Zeit bei stufenförmiger Förderung und $r = 5\text{ m}$	272

Abbildungsverzeichnis

2.1	Darstellung der Konzentrationsverteilung als Äquipotentiallinien	91
2.2	Darstellung der Äquipotentiallinien der Konzentrationsverteilung	93
2.3	Darstellung der Hydroisohypsen	95
5.1	Füllvorgang eines Restloches mit konstantem Volumenstrom	128
5.2	Füllvorgang eines Restloches mit variablem Volumenstrom	128
5.3	Gekoppelte Speicherkaskade	128
5.4	Schematische Darstellung des Grundwasserspiegels mit Blockschaltbild . .	129
5.5	Wasserstandsregelung eines Bewässerungsgrabens	129
5.6	Füllvorgang eines Restloches mit konstantem Volumenstrom	130
5.7	Füllvorgang eines Restloches mit variablem Volumenstrom	131
5.8	Gekoppelte Speicherkaskade	132
5.9	Schema der Grundwasserfließverhältnisse	134
5.10	Wasserstandsregelung eines Bewässerungsgrabens	136
5.11	Schematische Darstellung des Grundwasserspiegels	138
5.12	Füllvorgang eines Restloches	139
5.13	Abhängigkeit des Grundwasserstandes von geohydraulischen Verhältnissen	155
5.14	Grundwasserstandsänderung bei sinusförmiger Hochwasserwelle des Flusses	158
5.15	Prinzipieller Zeitverlauf der Konzentrationsänderung	159
5.16	Schematische Darstellung des Grundwasserspiegels	168
5.17	Füllvorgang eines Restloches	169

5.18	Schema der Grundwasserverhältnisse	198
5.19	Änderung des Grundwasserstandes bei sprunghafter Änderung des Flusswasserstandes	203
5.20	Grundwasserhöhe z_R gegenüber der Flusswasserspiegelhöhe h_{Fl}	208
5.21	Prinzipieller Zeitverlauf der Konzentrationsänderung	210
5.22	Grundwasserstand in Abhängigkeit vom Radius	214
5.23	Numerische Integration mit verschiedenen Verfahren und Schrittweiten . .	217
5.24	Numerische Integration mit verschiedenen Verfahren und Schrittweiten . .	220
5.25	Numerische Integration mit verschiedenen Verfahren und Schrittweiten . .	223
5.26	Entwicklung des Integrals im Intervall 1 bis 1,3 mittels der Rechteck- und Trapezformel	225
5.27	Grundwasserstand in Abhängigkeit vom Radius	232
5.28	Füllvorgang eines Restloches	235
5.29	Verlauf der Lösungsfunktion, Quantisierungsschrittweite als Parameter . . .	237
5.30	Abhängigkeit des Integrationsergebnisses von Quantisierungsschrittweite .	238
5.31	Verlauf der Lösungsfunktion, Quantisierungsschrittweite als Parameter . . .	243
5.32	Verlauf der Lösungsfunktion, Quantisierungsschrittweite als Parameter . . .	245
5.33	Abhängigkeit der Konzentration von der Zeit	246
5.34	Prinzipieller Zeitverlauf der Konzentration	247
8.1	Unendlich ausgedehnter Grundwasserleiter mit Brunnen und GWBR	256
8.2	Grundwasserleiter mit unvollkommenem Fluss, Brunnen und Baugrube . .	257
8.3	Grundwasserleiter mit Brunnen und Baugrube, Spundwand und Fluss . . .	257
8.4	Grundwasserstand in Abhängigkeit vom Radius	258

8.5	Grundwasserleiter mit Fluss, Brunnen und Hangzufluss	259
8.6	Unendlich ausgedehnter Grundwasserleiter mit einem Förderbrunnen . . .	260
8.7	Realer Fluss mit Entnahmehbrunnen (Grundwasseranreicherungsanlage) . .	261
8.8	Grundwasseranreicherungsanlage mit Brunnen und Spundwand	261
8.9	Uferfiltratanlage mit Brunnen und Fluss	262
8.10	Gespannter Grundwasserleiter mit Entnahmehbrunnen und Grundwasserbe- obachtungsrohr	264
8.11	Absenkung in Abhängigkeit von der Zeit für $r = 10m$	268
8.12	Absenkung in Abhängigkeit von der Zeit innerhalb der ersten $30min$ und für $r = 10m$	268
8.13	Absenkung in abhängigkeit von der Zeit und für verschiedene Radien . . .	269
8.14	Absenkung in Abhängigkeit vom Radius und für unterschiedliche Zeiten . .	269
8.15	Förderganglinie und deren Aufteilung in einzelne Förderleistungen	273
8.16	Absenkung in Abhängigkeit von der Zeit bei stufenförmiger Förderung . .	273
8.17	Grundwasserleiter mit unvollkommenem Fluss und Brunnen	274
8.18	Detailansicht der Zusatzlängen und virtuellen Brunnen	275
8.19	Schema zur Entfernungsbestimmung der realen und der virtuellen Brunnen	276
8.20	Lage der virtuellen Brunnen bei der Begrenzung durch eine Barriere	278
8.21	Lage des virtuellen Brunnens bei einem idealen Fluss als Randbedingung .	282
8.22	Abhängigkeit des Grundwasserstandes und der Absenkung vom Hangzufluss	290
8.23	GWBR mit Förderintervall	292
8.24	RB dritter Art \rightarrow Verschiebung	294
8.25	Zwei Brunnen an einem Fluss	298
8.26	Grundwasseranreicherungsanlage	300

8.27	Schematische Anordnung mit Brunnen und Spundwand	302
8.28	Grundwasserleiter mit Brunnen und Fluss	305
9.1	Geschichteter Grundwasserleiter mit stationärem Strömungsregime	308
9.2	Geschichteter Grundwasserleiter mit instationärem Strömungsregime	308
9.3	Einbau eines Tunnelbauwerkes in einem Grundwasserleiter	309
9.4	Deichbauwerk mit Kerndichtung	309
9.5	Grundwasserleiter mit Fluss und Brunnen	310
9.6	Wirkung eines Flusses und eines Hangzuflusses auf den Grundwasserleiter .	311
9.7	Quantisierter Grundwasserleiter mit stationärem Strömungsregime	312
9.8	Iterationsverhalten des Wasserstandes	317
9.9	Quantisierter Grundwasserleiter mit Speicherkapazitäten	318
9.10	Verlauf eines Absenkungsvorganges	319
9.11	Wasserstand in Abhängigkeit von Zeit und Ort	323
9.12	Schematisierung des Grundwasserleiters mit Tunneleinbau	324
9.13	Deich mit Kerndichtung und Quantisierungsschema	328
9.14	Darstellung des quantisierten Grundwasserleiters	331
9.15	Grundwasserstand nach einem Tag	334
9.16	Grundwasserleiter mit Quantisierungsschema	335
9.17	Ankopplung des Flusses über zusätzliche Widerstände	339
10.1	Grundwasserleiter mit Brunnen und Baugrube	345
10.2	Geschichteter Grundwasserleiter mit stationärem Strömungsregime	345
10.3	Geschichteter Grundwasserleiter mit instationärem Strömungsregime	346
10.4	Einbau eines Tunnelbauwerkes in einem Grundwasserleiter	346

10.5 Deichbauwerk mit Kerndichtung	346
12.1 Impulsantwort eines Säulen-Durchlaufversuches	358
12.2 Grundwasserstand in Abhängigkeit vom Radius	359
12.3 Bestimmung der Zeitkonstanten T aus dem Absenkungsverlauf	361
12.4 Absenkungsverlauf bei $\dot{V} = 0,005m^3s^{-1}$	362
12.5 Eingangssignal $\dot{V} = 0,1m^3s^{-1}$	363
12.6 Bestimmung der Zeitkonstante	363
12.7 Konzentrationsverlauf C_{r1}	367
12.8 Konzentrationsverlauf mit ausgewählten Punkten zur Parameterbestimmung	368
12.9 Konzentrationsverlauf C_{r1} mit Bestimmung der Parameter	371
12.10 Konzentrationsverlauf C_{r2} und Parameterbestimmung	372
12.11 Impulsantwort eines Säulen-Durchlaufversuches	374
12.12 Auswertung der Impulsantwort	375
12.13 Antwortsignal eines Pumpversuches	378
12.14 Temperaturverlauf des Fluss- und des Grundwassers in der Fassung	380
12.15 Impulsantwort mit Parameterbestimmung	382

Teil I

Aufgaben und Lösungen - Mathematische Grundlagen

Kapitel 1

Algebraische Grundlagen

1.1 Exponential- und Logarithmus-Ausdrücke

Aufgaben zu 1.1:

1. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

(a) $\frac{(18a^2x)^4}{(27ax^2)^5} \cdot \frac{(15ax^2)^4}{(20a^3x)^2}$ (b) $\frac{0,004 \cdot 10^2 \cdot 0,2^3}{0,2 \cdot 10^{-3} \cdot 16}$

(c) $\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[10]{x}}{\sqrt[5]{x^3}}$ (d) $2 \log_{10} x^3 - 3 \log_{10} y^2$

(e) $(\ln u + 4 \ln v)$

(Lösung s. S. 5)

2. Stellen Sie folgende Formeln nach t um:

(a) $I = I_0 \left(\exp \left(-\frac{t}{T} \right) \right)$ (b) $I = I_0 \left(1 + 9 \log_9 \frac{t}{T} \right)$

(c) $I = I_0 (e^{\mu t} - 1)$

(Lösung s. S. 6)

3. Es sei die Regressionsgerade s gegeben. Bestimmen Sie die Variable T im halb-logarithmischen Maßstab aus dem Anstieg der Regressionsgeraden!

$$s = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot T} \cdot \ln \frac{2,25 \cdot t \cdot T}{r^2 \cdot S} \quad (\dot{V} \text{ ist gegeben})$$

(Lösung s. S. 7)

4. Es sei die Regressionsgerade s (siehe Aufgabe 3.) gegeben. Bestimmen Sie den Speicherkoeffizient S für den Fall $s = 0$ bei t_0 und gegebenem r !

(Lösung s. S. 7)

Lösungen zu 1.1:**• zu Aufgabe 1 (s. S. 4)**

(a)

$$\begin{aligned}\frac{(18a^2x)^4}{(27ax^2)^5} \cdot \frac{(15ax^2)^4}{(20a^3x)^2} &= \frac{18^4 a^8 x^4 \cdot 15^4 a^4 x^8}{27^5 a^5 x^{10} \cdot 20^2 a^6 x^2} \\ &= \frac{3^8 \cdot 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot a^{12} \cdot x^{12}}{3^{15} \cdot 2^4 \cdot 5^2 \cdot a^{11} \cdot x^{12}} = \frac{5^2}{3^3} a\end{aligned}$$

(b)

$$\frac{0,004 \cdot 10^2 \cdot 0,2^3}{0,2 \cdot 10^{-3} \cdot 16} = \frac{2^2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2 \cdot 2^3 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-3} \cdot 2^4} = 1$$

(c)

$$\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[10]{x}}{\sqrt[5]{x^3}} = \frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{10}}}{x^{\frac{3}{5}}} = \frac{x^{\frac{38}{30}}}{x^{\frac{18}{30}}} = x^{\frac{2}{3}}$$

(d)

$$\begin{aligned}2 \log_{10} x^3 - 3 \log_{10} y^2 &= \log_{10} x^6 - \log_{10} y^6 \\ &= \lg \left(\frac{x^6}{y^6} \right) = 6 \lg \left(\frac{x}{y} \right)\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}2 \log_{10} x^3 - 3 \log_{10} y^2 &= 6 \lg x - 6 \lg y \\ &= 6 \lg \left(\frac{x}{y} \right)\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}(\ln u + 4 \ln v) &= \ln u + \ln v^4 \\ &= \ln (u \cdot v^4)\end{aligned}$$

• zu Aufgabe 2 (s. S. 4)

(a)

$$\begin{aligned}I &= I_0(\exp(-\frac{t}{T})) \\ \frac{I}{I_0} &= \exp(-\frac{t}{T}) = e^{-\frac{t}{T}} \\ \ln \frac{I}{I_0} &= -\frac{t}{T} \\ t &= -T \cdot \ln \frac{I}{I_0} = T \cdot \ln \frac{I_0}{I}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}I &= I_0 \left(1 + 9 \log_9 \frac{t}{T} \right) \\ \frac{I}{I_0} &= 1 + 9 \log_9 \frac{t}{T} \\ \frac{I}{I_0} - 1 &= 9 \log_9 \frac{t}{T} \\ \frac{\left(\frac{I}{I_0} - 1\right)}{9} &= \log_9 \frac{t}{T} \\ 9^{\left(\frac{\frac{I}{I_0} - 1}{9}\right)} &= \frac{t}{T} \\ t &= T \cdot \sqrt[9]{9^{\left(\frac{I}{I_0} - 1\right)}}\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}I &= I_0 (e^{\mu t} - 1) \\ e^{\mu t} &= \frac{I}{I_0} + 1 \\ \mu t &= \ln \left(\frac{I}{I_0} + 1 \right) \\ t &= \frac{1}{\mu} \ln \left(\frac{I}{I_0} + 1 \right) \\ t &= \ln \left(\frac{I}{I_0} + 1 \right)^{\frac{1}{\mu}} = \ln \sqrt[\mu]{\left(\frac{I}{I_0} + 1 \right)}\end{aligned}$$

- zu Aufgabe 3 (s. S. 4)

$$s = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot T} \cdot \ln \frac{2,25 \cdot t \cdot T}{r^2 \cdot S}$$
$$s = 0,183 \frac{\dot{V}}{T} \cdot \ln t + 0,183 \frac{\dot{V}}{T} \cdot \ln \frac{2,25 \cdot T}{r^2 \cdot S}$$
$$s_2 - s_1 = 0,183 \frac{\dot{V}}{T} \cdot (\ln t_2 - \ln t_1)$$
$$T = 0,183 \dot{V} \frac{\Delta(\ln t)}{\Delta s} \Rightarrow \text{Anstieg}$$

- zu Aufgabe 4 (s. S. 4)

$$s = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot T} \cdot \ln \frac{2,25 \cdot t \cdot T}{r^2 \cdot S}$$
$$s = 0 \Rightarrow \ln(1) = 0$$
$$\frac{2,25 \cdot t_0 \cdot T}{r^2 \cdot S} = 1$$
$$\Rightarrow S = \frac{2,25 \cdot t_0 \cdot T}{r^2}$$

1.2 Matrizen

Aufgaben zu 1.2:

1. Bilden Sie mit: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

folgende Ausdrücke:

- (a) $2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$ (b) $\mathbf{A} - 2\mathbf{B} - 3\mathbf{C}$ (c) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$
(d) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T$ (e) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ (f) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$
(g) $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C}$ (h) $\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ (i) $\mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

(Lösung s. S.9ff)

2. Bilden Sie für die folgenden Matrizen $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T$:

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$

(Lösung s. S. 14ff)

3. Bilden Sie die inverse Matrix \mathbf{A}^{-1} :

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ (b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -4 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

(Lösung s. S.16ff)

Lösungen zu 1.2:

- zu Aufgabe 1 (s. S. 8)

(a) Berechnen Sie $2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$:

$$2\mathbf{A} + 3\mathbf{B} = 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}$$

$$2\mathbf{A} + 3\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 14 & -6 \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie $\mathbf{A} - 2\mathbf{B} - 3\mathbf{C}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - 2\mathbf{B} - 3\mathbf{C} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 + 2 - 3 & 1 - 2 - 12 \\ 4 - 4 + 6 & 3 + 8 + 3 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A} - 2\mathbf{B} - 3\mathbf{C} &= \begin{pmatrix} 1 & -13 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) Berechnen Sie $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2) & (2 \cdot 1 + 1 \cdot (-4)) \\ (4 \cdot (-1) + 3 \cdot 2) & (4 \cdot 1 + 3 \cdot (-4)) \end{pmatrix} \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(d) Berechnen Sie $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{siehe Lösung zu Aufgabe 1c}$$

Entsprechend der Vorschrift zur Bildung der Transponierten einer Matrix

$$\mathbf{A}^T = (a_{jk})^T = (a_{kj})$$

erhält man:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$$

(e) Berechnen Sie $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ((-1) \cdot 2 + 1 \cdot 4) & ((-1) \cdot 1 + 1 \cdot 3) \\ (2 \cdot 2 + (-4) \cdot 4) & (2 \cdot 1 + (-4) \cdot 3) \end{pmatrix} \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -12 & -10 \end{pmatrix} \neq \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Berechnen Sie $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{siehe Lösung zu Aufgabe 1c}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) & 0 \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) \\ 2 \cdot 1 + (-8) \cdot (-2) & 2 \cdot 4 + (-8) \cdot (-1) \end{pmatrix} \\ (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 18 & 16 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(f) Berechnen Sie $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C}$:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -12 & -10 \end{pmatrix} \quad \text{siehe Lösung zu Aufgabe 1e}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -12 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2)) & (2 \cdot 4 + 2 \cdot (-1)) \\ (-12) \cdot 1 + (-10) \cdot (-2) & ((-12) \cdot 4 + (-10) \cdot (-1)) \end{pmatrix} \\ (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 8 & -38 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(g) Berechnen Sie $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Entsprechend der Vorschrift zur Bildung der Transponierten einer Matrix

$$\mathbf{A}^T = (a_{jk})^T = (a_{kj})$$

erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^T &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ((-1) \cdot 2 + 2 \cdot 1) & ((-1) \cdot 4 + 2 \cdot 3) \\ (1 \cdot 2 + (-4) \cdot 1) & (1 \cdot 4 + (-4) \cdot 3) \end{pmatrix} \\ \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(h) Berechnen Sie $\mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Entsprechend der Vorschrift zur Bildung der Transponierten einer Matrix

$$\mathbf{A}^T = (a_{jk})^T = (a_{kj})$$

erhält man

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 + (-1) & 4 + 2 \\ 1 + 1 & 3 + (-4) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

- **zu Aufgabe 2 (s. S. 8)**

(a) Berechnen Sie $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Entsprechend der Vorschrift zur Bildung der Transponierten einer Matrix

$$\mathbf{A}^T = (a_{jk})^T = (a_{kj})$$

erhält man

$$\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = (2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3)$$
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T = 5$$

(b) Berechnen Sie $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$$

Entsprechend der Vorschrift zur Bildung der Transponierten einer Matrix

$$\mathbf{A}^T = (a_{jk})^T = (a_{kj})$$

erhält man

$$\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) & 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-8) \\ -2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & -2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) & -2 \cdot 3 + 1 \cdot (-8) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -21 \\ -2 & -7 & -14 \end{pmatrix}$$

- **zu Aufgabe 3 (s. S.8)**

Die inverse Matrix \mathbf{A}^{-1} kann genau dann gebildet werden, wenn die Determinante D der Matrix \mathbf{A} ungleich Null ($D \neq 0$) ist. Die inverse Matrix \mathbf{A}^{-1} wird gebildet, indem die Unterdeterminante U_{ij} zum Element a_{ij} durch die Determinante der Matrix $D = \det(\mathbf{A})$ dividiert wird. Mit der Unterdeterminante U_{ji} , zum Element a_{ji} gehörend, ergibt sich:

$$a_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{U_{ji}}{D}$$

Die Berechnung der Determinante von \mathbf{A} erfolgt nach dem Entwicklungssatz von LAPLACE oder nach der Regel von SARRUS (siehe auch Lösung von Gleichungssystemen S. 10).

Daran anschließend müssen die Unterdeterminanten U_{ji} berechnet werden, damit die Elemente a_{ij} der inverse Matrix \mathbf{A}^{-1} berechnet werden kann.

(a) Berechnen Sie \mathbf{A}^{-1} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 5 = 11$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{11} & -\frac{5}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie \mathbf{A}^{-1} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot (-1 - 1) - 1(1 - (-1)) + (-1) \cdot (1 - 1)$$

$$= -4$$

Daran anschließend müssen die neun Unterdeterminanten berechnet werden, damit die inverse Matrix \mathbf{A}^{-1} berechnet werden kann.

Die Unterdeterminanten ergeben sich entsprechend der Rechenregeln für Determinanten zu

$$U_{11} : ((-1) \cdot 1) - (1 \cdot 1) = -2$$

$$U_{12} : (1 \cdot 1) - ((-1) \cdot 1) = 2$$

$$U_{13} : (1 \cdot 1) - ((-1) \cdot (-1)) = 0$$

$$U_{21} : (1 \cdot 1) - ((-1) \cdot 1) = 2$$

$$U_{22} : (1 \cdot 1) - ((-1) \cdot (-1)) = 0$$

$$U_{23} : (1 \cdot 1) - (1 \cdot (-1)) = 2$$

$$U_{31} : (1 \cdot 1) - ((-1) \cdot (-1)) = 0$$

$$U_{32} : (1 \cdot 1) - ((-1) \cdot 1) = 2$$

$$U_{33} : (1 \cdot (-1)) - (1 \cdot 1) = -2$$

Entsprechend der Regeln zur Bildung der inversen Matrix, die in der Aufgabenstellung wiederholt ist, ergibt sich die Inverse zu

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(c) Berechnen Sie \mathbf{A}^{-1} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -4 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = -8 + 24 - 36 + 24 - 18 + 16 = 2$$

Daran anschließend müssen die neun Unterdeterminanten berechnet werden, damit die inverse Matrix \mathbf{A}^{-1} berechnet werden kann.

Die Unterdeterminanten ergeben sich entsprechend der Rechenregeln für Determinanten zu

$$U_{11} : ((-2) \cdot 2) - (3 \cdot 3) = -13$$

$$U_{12} : ((-4) \cdot 2) - (4 \cdot 3) = -20$$

$$U_{13} : ((-4) \cdot (-2)) - (4 \cdot 3) = -4$$

$$U_{21} : (2 \cdot 2) - (3 \cdot 3) = -5$$

$$U_{22} : (2 \cdot 2) - (4 \cdot 3) = -8$$

$$U_{23} : (2 \cdot 3) - (4 \cdot 2) = -2$$

$$U_{31} : (2 \cdot 3) - (-2 \cdot 3) = 12$$

$$U_{32} : (2 \cdot 3) - ((-4) \cdot 3) = 18$$

$$U_{33} : (2 \cdot (-2)) - ((-4) \cdot 2) = 4$$

Entsprechend den Regeln zur Bildung der inversen Matrix, die in der Aufgabenstellung wiederholt ist, ergibt sich die Inverse zu

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & -\left(\frac{-5}{2}\right) & \frac{12}{2} \\ -\left(\frac{-20}{2}\right) & \frac{-8}{2} & -\left(\frac{18}{2}\right) \\ \frac{-4}{2} & -\left(\frac{-2}{2}\right) & \frac{4}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6,5 & 2,5 & 6 \\ 10 & -4 & -9 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.3 Lineare Gleichungssysteme

Aufgaben zu 1.3:

Bestimmen Sie von den folgenden Gleichungssystemen ($\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$) den Lösungsvektor \mathbf{X} auf fünf Arten:

- (a) mittels des GAUSSschen Eliminationsverfahrens
- (b) mit Hilfe der CRAMERSchen Regel
- (c) durch Bestimmung von $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R}$ (s.auch S.16ff)
- (d) unter Verwendung der LU-Zerlegung
- (e) mittels des CHOLESKY-Verfahrens

1.
$$\frac{x-2}{3} - \frac{y+2}{2} = \frac{x-2y}{5}$$
$$\frac{x-y}{6} + \frac{3y+2}{4} = \frac{x-2(y-1)}{3}$$

Lösung s. S. 20

3.
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung s. S. 37

5.
$$2x - 4y + 9w = 25$$
$$3x - 3y - 3z + 11w = 27$$
$$4x + 6y - 15z + 5w = -5$$
$$3x + y - 4z + 12w = 32$$

Lösung s. S. 52

2.
$$3x + y - z = 2$$
$$2x - y + 4z = 0$$
$$x + 5y - 2z = 1$$

Lösung s. S.27

4.
$$x + y + z = 3$$
$$2x + 4y + 8z = 13$$
$$3x + 9y + 27z = 34$$

Lösung s. S.45

6.
$$2x + y - 2z = 1$$
$$x + y + z = 6$$
$$-2x + y - 2z = -3$$

Lösung s. S.67

Lösungen zu 1.3:**• zu Aufgabe 1 (s. S. 19)**

Zuerst werden die beiden Gleichungen vereinfacht:

Gleichung 1:

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{3} - \frac{y+2}{2} &= \frac{x-2y}{5} \\ \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} - \frac{1}{2}y - 1 &= \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y \\ \frac{5}{15}x - \frac{3}{15}x - \frac{5}{10}y + \frac{4}{10}y &= \frac{5}{3} \\ \frac{2}{15}x - \frac{1}{10}y &= \frac{5}{3}\end{aligned}$$

$$4x - 3y = 50$$

Gleichung 2:

$$\begin{aligned}\frac{x-y}{6} + \frac{3y+2}{4} &= \frac{x-2(y-1)}{3} \\ \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}y + \frac{3}{4}y + \frac{1}{2} &= \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6}x + \frac{15}{12}y &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

$$-4x + 30y = 4$$

Damit erhält man das vereinfachte Gleichungssystem:

$$4x - 3y = 50$$

$$-4x + 30y = 4$$

In Matrixschreibweise lautet die Aufgabe:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 30 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 50 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) **GAUSSsches Eliminationsverfahren**

Vereinfachte Ausgangsgleichungen:

$$4x - 3y = 50$$

$$-4x + 30y = 4$$

Zur Elimination müssen nur die beiden Gleichungen addiert werden.
Dann erhält man:

$$27y = 54$$

$$y = 2$$

Setzt man diesen Wert in die erste Gleichung ein, so ergibt sich:

$$4x - 3 \cdot 2 = 50$$

$$x = 14$$

Probe:

$$4 \cdot 14 - 3 \cdot 2 = 50$$

$$-4 \cdot 14 + 30 \cdot 2 = 4$$

(b) CRAMERSche Regel

Vereinfachte Ausgangsgleichungen:

$$4x - 3y = 50$$

$$-4x + 30y = 4$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 30 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 50 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$x_i = \frac{D_{x_i}}{D}$$

wobei D die Determinante und D_{x_i} die entsprechende CRAMERSche Determinante ist.

$$D = \det A = \det \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 30 \end{vmatrix} = 4 \cdot 30 - (-4 \cdot (-3)) = 120 - 12$$

$$D = 108$$

$$D_x = \det \begin{vmatrix} 50 & -3 \\ 4 & 30 \end{vmatrix} = 1500 - (-12) = 1512$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{1512}{108} = 14$$

$$D_y = \det \begin{vmatrix} 4 & 50 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 16 - (-200) = 216$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{216}{108} = 2$$

Probe:

$$4 \cdot 14 - 3 \cdot 2 = 50$$

$$-4 \cdot 14 + 30 \cdot 2 = 4$$

(c) Verwendung der Inversen $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{X}$

Vereinfachte Ausgangsgleichungen:

$$4x - 3y = 50$$

$$-4x + 30y = 4$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 30 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 50 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Berechnung:

$$D = \det \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 30 \end{vmatrix} = 108$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{30}{108} & \frac{3}{108} \\ \frac{4}{108} & \frac{4}{108} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} & \frac{1}{36} \\ \frac{1}{27} & \frac{1}{27} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} & \frac{1}{36} \\ \frac{1}{27} & \frac{1}{27} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5 \cdot 50}{18} + \frac{4}{36} \\ \frac{50}{27} + \frac{4}{27} \end{pmatrix} \\ \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} \frac{252}{18} \\ \frac{54}{27} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus folgt die Lösung des Gleichungssystems:

$$x = 14 \quad y = 2$$

Probe:

$$4 \cdot 14 - 3 \cdot 2 = 50$$

$$-4 \cdot 14 + 30 \cdot 2 = 4$$

(d) LU-Zerlegung

Vereinfachte Ausgangsgleichungen:

$$4x - 3y = 50$$

$$-4x + 30y = 4$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 30 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 50 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Berechnung:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

Grundgedanke der LU-Zerlegung ist die Bildung der beiden Dreiecksmatrizen **L** (Lower) und **U** (Upper).

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

Dabei werden aus Gründen der Eindeutigkeit und der Vereinfachung die Elemente der Hauptdiagonalen der unteren Dreiecksmatrix **L** zu Eins gesetzt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 30 \end{pmatrix}$$

Nach Ausmultiplizieren des Matrizenproduktes **L** · **U** und anschließendem Elementevergleich mit der **A**-Matrix erhält man folgende Gleichungen.

$$1 \cdot u_{11} + 0 \cdot 0 = a_{11} = 4 \Rightarrow u_{11} = 4$$

$$1 \cdot u_{12} + 0 \cdot u_{22} = a_{12} = -3 \Rightarrow u_{12} = -3$$

$$l_{21} \cdot u_{11} + 1 \cdot 0 = a_{21} = -4 \Rightarrow l_{21} = -1$$

$$l_{21} \cdot u_{12} + 1 \cdot u_{22} = a_{22} = 30 \Rightarrow u_{22} = 27$$

Damit lauten die beiden Dreiecksmatrizen

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$$

Über die Zwischenlösung \mathbf{Y} lässt sich der Lösungsvektor \mathbf{X} berechnen:
Allgemein gilt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

$$\mathbf{L} \cdot \underbrace{\mathbf{U} \cdot \mathbf{X}}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{R}$$

Nach der Multiplikation der Matrizen \mathbf{L} und \mathbf{Y} und dem Elementevergleich mit der rechten Seite \mathbf{R} erhält man:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 50 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 = 50 \Rightarrow y_1 = 50$$

$$-1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 = 4 \Rightarrow y_2 = 54$$

Laut Definition gilt:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$$

Nach der Multiplikation der Matrizen \mathbf{U} und \mathbf{X} und dem Elementevergleich mit der rechten Seite \mathbf{Y} erhält man:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 50 \\ 54 \end{pmatrix}$$

$$4 \cdot x - 3 \cdot y = 50$$

$$0 \cdot x + 27 \cdot y = 54$$

Daraus folgt die Lösung:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x = 14 \quad y = 2$$

Probe:

$$4 \cdot 14 - 3 \cdot 2 = 50$$

$$-4 \cdot 14 + 30 \cdot 2 = 4$$

(e) **CHOLESKY-Verfahren**

Vereinfachte Ausgangsgleichungen:

$$4x - 3y = 50$$

$$-4x + 30y = 4$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 30 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 50 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Die Voraussetzung für die Anwendung des CHOLESKY-Verfahrens ist eine symmetrische Koeffizientenmatrix \mathbf{A} . Dies ist hier nicht gegeben.

Damit ist das CHOLESKY-Verfahren nicht anwendbar.

- zu Aufgabe 2 (s. S. 19)

(a) GAUSSsches Eliminationsverfahren

Ausgangsgleichungen:

$$3x + y - z = 2$$

$$2x - y + 4z = 0$$

$$x + 5y - 2z = 1$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ | -2 \cdot 1. \text{ Zeile} \\ | -3 \cdot 1. \text{ Zeile} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & -11 & 8 & -2 \\ 0 & -14 & 5 & -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ | \cdot 14 \\ | \cdot 11 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & -154 & 112 & -28 \\ 0 & -154 & 55 & -11 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ | -1 \cdot 2. \text{ Zeile} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & -154 & 112 & -28 \\ 0 & 0 & -57 & 17 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$3. \text{ Zeile} \Rightarrow 0x + 0y - 57z = 17$$

$$\Rightarrow z = -\frac{17}{57}$$

$$2. \text{ Zeile} \Rightarrow 0x - 154y + 112 \cdot \left(-\frac{17}{57}\right) = -28$$

$$\Rightarrow y = -\frac{2}{57}$$

$$1. \text{ Zeile} \Rightarrow 1x + 5 \cdot \left(-\frac{2}{57}\right) - 2 \cdot \left(-\frac{17}{57}\right) = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{33}{57}$$

Probe:

$$3 \cdot \frac{33}{57} - \frac{2}{57} + \frac{17}{57} = 2$$

$$2 \cdot \frac{33}{57} + \frac{2}{57} - 4 \cdot \frac{17}{57} = 0$$

$$\frac{33}{57} - 5 \cdot \frac{2}{57} + 2 \cdot \frac{17}{57} = 1$$

(b) CRAMERScheRegel

Ausgangsgleichungen:

$$3x + y - z = 2$$

$$2x - y + 4z = 0$$

$$x + 5y - 2z = 1$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

Als Nebenrechnung werden die Determinanten getrennt berechnet. Dabei kann bei dreireihigen Determinanten auf die Methode der Unterdeterminanten verzichtet werden und über die fiktive Wiederholung der beiden ersten Spalten das Produkt der "Hauptdiagonalen" um das Produkt der "Unterdeterminanten" subtrahiert werden (Regel von SARRUS).

$$D = \det \mathbf{A} = \det \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6 + 4 - 10 - 1 - 60 + 4$$

$$D = -57$$

$$D_x = \det \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 + 4 + 0 - 1 - 40 - 0$$

$$D_x = -33$$

$$D_y = \det \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 8 - 2 - 0 - 12 + 8$$

$$D_y = 2$$

$$D_z = \det \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -3 + 0 + 20 + 2 - 0 - 2$$

$$D_z = 17$$

Daraus ergeben sich die Unbekannten des Gleichungssystems:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-33}{-57} = \frac{33}{57}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{2}{-57} = -\frac{2}{57}$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{17}{-57} = -\frac{17}{57}$$

(c) Verwendung der Inversen $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{X}$

Ausgangsgleichungen:

$$3x + y - z = 2$$

$$2x - y + 4z = 0$$

$$x + 5y - 2z = 1$$

Die Berechnung der Determinante von \mathbf{A} erfolgt wie bei II) (s. S. 27) beschrieben und liefert

$$\det \mathbf{A} = -57$$

Daran anschließend müssen die neun Unterdeterminanten berechnet werden, damit anschließend die inverse Matrix \mathbf{A}^{-1} berechnet werden kann.

Die Unterdeterminanten ergeben sich entsprechend der Rechenregeln für Determinanten zu

$$U_{11} = (-1) \cdot (-2) - 5 \cdot 4 = -18$$

$$U_{12} = 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 4 = -8$$

$$U_{13} = 2 \cdot 5 - (-1) \cdot 1 = 11$$

$$U_{21} = 1 \cdot (-2) - (-1) \cdot 5 = 3$$

$$U_{22} = 3 \cdot (-2) - (-1) \cdot 1 = -5$$

$$U_{23} = 3 \cdot 5 - 1 \cdot 1 = 14$$

$$U_{31} = 1 \cdot 4 - (-1) \cdot (-1) = 3$$

$$U_{32} = 3 \cdot 4 - (-1) \cdot 2 = 14$$

$$U_{33} = 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 = -5$$

Entsprechend den Regeln zur Bildung der inversen Matrix (s.auch S. 16ff) ergibt sich die Inverse zu

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{18}{57} & \frac{3}{57} & \frac{-3}{57} \\ \frac{-8}{57} & \frac{5}{57} & \frac{14}{57} \\ \frac{-11}{57} & \frac{14}{57} & \frac{5}{57} \end{pmatrix}$$

und die Lösung des Gleichungssystems lautet

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{18}{57} & \frac{3}{57} & \frac{-3}{57} \\ \frac{-8}{57} & \frac{5}{57} & \frac{14}{57} \\ \frac{-11}{57} & \frac{14}{57} & \frac{5}{57} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{36}{57} + 0 - \frac{3}{57} \\ \frac{-16}{57} + 0 + \frac{14}{57} \\ \frac{-22}{57} + 0 + \frac{5}{57} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{33}{57} \\ \frac{-2}{57} \\ \frac{-17}{57} \end{pmatrix}$$

bzw., aufgelöst in die einzelnen Unbekannten

$$x = \frac{33}{57} \quad y = -\frac{2}{57} \quad z = -\frac{17}{57}$$

(d) **LU-Zerlegung**

Ausgangsgleichungen:

$$3x + y - z = 2$$

$$2x - y + 4z = 0$$

$$x + 5y - 2z = 1$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

Berechnung:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

Grundgedanke der LU-Zerlegung ist die Bildung der beiden Dreiecksmatrizen **L** (Lower) und **U** (Upper).

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

Dabei werden aus Gründen der Eindeutigkeit und der Vereinfachung die Elemente der Hauptdiagonalen der unteren Dreiecksmatrix **L** zu Eins gesetzt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Nach Ausmultiplizieren des Matrizenproduktes **L** · **U** und anschließendem Elemente-

vergleich mit der \mathbf{A} -Matrix erhält man folgende Gleichungen.

$$1 \cdot u_{11} = a_{11} = 3 \Rightarrow u_{11} = 3$$

$$1 \cdot u_{12} = a_{12} = 1 \Rightarrow u_{12} = 1$$

$$1 \cdot u_{13} = a_{13} = -1 \Rightarrow u_{13} = -1$$

$$l_{21} \cdot u_{11} = a_{21} = 2 \Rightarrow l_{21} = \frac{2}{3}$$

$$l_{21} \cdot u_{12} + 1 \cdot u_{22} = a_{22} = -1 \Rightarrow u_{22} = \frac{-5}{3}$$

$$l_{21} \cdot u_{13} + 1 \cdot u_{23} = a_{23} = 4 \Rightarrow u_{23} = \frac{14}{3}$$

$$l_{31} \cdot u_{11} = a_{31} = 1 \Rightarrow l_{31} = \frac{1}{3}$$

$$l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot u_{22} = a_{32} = 5 \Rightarrow l_{32} = \frac{-14}{5}$$

$$l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + 1 \cdot u_{33} = a_{33} = -2 \Rightarrow u_{33} = \frac{57}{5}$$

Damit lauten die beiden Dreiecksmatrizen

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{-14}{5} & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{-5}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & \frac{57}{5} \end{pmatrix}$$

Über die Zwischenlösung \mathbf{Y} lässt sich der Lösungsvektor \mathbf{X} berechnen.

Allgemein gilt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

$$\mathbf{L} \cdot \underbrace{\mathbf{U} \cdot \mathbf{X}}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{R}$$

Nach der Multiplikation der Matrizen \mathbf{L} und \mathbf{Y} und dem Elementevergleich mit der rechten Seite \mathbf{R} erhält man:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{-14}{5} & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot y_1 = 2 \Rightarrow y_1 = 2$$

$$\frac{2}{3} \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = \frac{-4}{3}$$

$$\frac{1}{3} \cdot y_1 + \frac{-14}{5} \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 = 1 \Rightarrow y_3 = \frac{17}{5}$$

Laut Definition gilt:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$$

Nach der Multiplikation der Matrizen \mathbf{U} und \mathbf{X} und dem Elementevergleich mit der rechten Seite \mathbf{Y} erhält man:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{-5}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & \frac{57}{5} \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{-4}{3} \\ \frac{17}{5} \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 = 2$$

$$\frac{-5}{3} \cdot x_2 + \frac{14}{3} \cdot x_3 = \frac{-4}{3}$$

$$\frac{57}{5} \cdot x_3 = \frac{17}{5}$$

Daraus folgt die Lösung:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{33}{57} \\ -\frac{2}{57} \\ -\frac{17}{57} \end{pmatrix}$$

Probe: siehe bei (a).

(e) CHOLSKY-Verfahren

Ausgangsgleichungen:

$$3x + y - z = 2$$

$$2x - y + 4z = 0$$

$$x + 5y - 2z = 1$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Voraussetzung für die Anwendung des CHOLSKY-Verfahrens ist eine symmetrische Koeffizientenmatrix **A**. Dies ist hier nicht gegeben.

Damit ist das CHOLSKY-Verfahrens nicht anwendbar.

- **zu Aufgabe 3 (s. S. 19)**

(a) GAUSSsches Eliminationsverfahren

Ausgangsgleichungen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$2x - z = 1$$

$$2x + 4y - z = 1$$

$$-x + 8y + 3z = 2$$

Aus der ersten und zweiten Gleichung folgt direkt: $y = 0$

Sortiert man die Zeilen neu, so bekommt man folgendes Schema für das GAUSSsche Eliminationsverfahren:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 1 & | -2 \cdot 1. \text{ Zeile} \\ 2 & 0 & -1 & 1 & | -2 \cdot 1. \text{ Zeile} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & -3 & -2 \\ 0 & 20 & 5 & 5 \\ 0 & 16 & 5 & 5 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$3. \text{ Zeile} \Rightarrow 0y + 5z = 5$$

$$\Rightarrow z = 1$$

$$1. \text{ Zeile} \Rightarrow x - 3 = -2$$

$$\Rightarrow x = 1$$

(b) CRAMERScheRegel

Ausgangsgleichungen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

Als Nebenrechnung werden die Determinanten getrennt berechnet. Dabei kann bei dreireihigen Determinanten auf die Methode der Unterdeterminanten verzichtet werden und über die fiktive Wiederholung der beiden ersten Spalten das Produkt der "Hauptdiagonalen" um das Produkt der "Unterdeterminanten" subtrahiert werden (Regel von SARRUS).

$$\det \mathbf{A} = D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 8 & 3 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$D = 2 \cdot 4 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 \cdot 8$$

$$- (-1) \cdot 4 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) \cdot 8 + 0 \cdot 2 \cdot 3$$

$$D = 20$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 8 & 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$D_x = 20$$

$$D_y = \left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \end{array} \right|$$

$$D_y = 0$$

$$D_z = \left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 8 & 2 & -1 & 8 \end{array} \right|$$

$$D_z = 20$$

Daraus ergeben sich die Unbekannten des Gleichungssystems:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{20}{20} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{0}{20} = 0$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{20}{20} = 1$$

(c) Verwendung der Inversen $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{X}$

Ausgangsgleichungen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

Die Berechnung der Determinante von \mathbf{A} erfolgt wie bei (b) (s.S. 23) beschrieben und liefert $\det \mathbf{A} = 20$

Daran anschließend müssen die neun Unterdeterminanten berechnet werden, damit anschließend die inverse Matrix \mathbf{A}^{-1} berechnet werden kann.

Die Unterdeterminanten ergeben sich entsprechend der Rechenregeln für Determinanten zu

$$U_{11} : (4 \cdot 3) - (8 \cdot (-1)) = 20$$

$$U_{12} : (2 \cdot 3) - ((-1) \cdot (-1)) = 5$$

$$U_{13} : (2 \cdot 8) - ((-1) \cdot 4) = 20$$

$$U_{21} : (0 \cdot 3) - (8 \cdot (-1)) = 8$$

$$U_{22} : (2 \cdot 3) - ((-1) \cdot (-1)) = 5$$

$$U_{23} : (2 \cdot 8) - ((-1) \cdot 0) = 16$$

$$U_{31} : (0 \cdot (-1)) - (4 \cdot (-1)) = 4$$

$$U_{32} : (2 \cdot (-1)) - (2 \cdot (-1)) = 0$$

$$U_{33} : (2 \cdot 4) - (2 \cdot 0) = 8$$

Entsprechend der Regeln zur Bildung der inversen Matrix (s.auch S.16ff) ergibt sich die Inverse zu

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 20 & -8 & 4 \\ -5 & 5 & 0 \\ 20 & -16 & 8 \end{pmatrix}$$

und die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0 \\ 1 - \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

bzw. aufgelöst in die einzelnen Unbekannten.

$$x = 1 \quad y = 0 \quad z = 1$$

(d) LU-Zerlegung

Ausgangsgleichungen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Berechnung:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

Grundgedanke der LU-Zerlegung ist die Bildung der beiden Dreiecksmatrizen **L** (Lower) und **U** (Upper).

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

Dabei werden aus Gründen der Eindeutigkeit und der Vereinfachung die Elemente der Hauptdiagonalen der unteren Dreiecksmatrix **L** zu Eins gesetzt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Nach Ausmultiplizieren des Matrizenproduktes **L** · **U** und anschließendem Elementevergleich mit der **A**-Matrix erhält man folgende Gleichungen.

$$1 \cdot u_{11} = a_{11} = 3 \Rightarrow u_{11} = 3$$

$$1 \cdot u_{12} = a_{12} = 1 \Rightarrow u_{12} = 1$$

$$1 \cdot u_{13} = a_{13} = -1 \Rightarrow u_{13} = -1$$

$$l_{21} \cdot u_{11} = a_{21} = 2 \Rightarrow l_{21} = \frac{2}{3}$$

$$l_{21} \cdot u_{12} + 1 \cdot u_{22} = a_{22} = -1 \Rightarrow u_{22} = \frac{-5}{3}$$

$$l_{21} \cdot u_{13} + 1 \cdot u_{23} = a_{23} = 4 \Rightarrow u_{23} = \frac{14}{3}$$

$$l_{31} \cdot u_{11} = a_{31} = 1 \Rightarrow l_{31} = \frac{1}{3}$$

$$l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot u_{22} = a_{32} = 5 \Rightarrow l_{32} = \frac{-14}{5}$$

$$l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + 1 \cdot u_{33} = a_{33} = -2 \Rightarrow u_{33} = \frac{57}{5}$$

Damit lauten die beiden Dreiecksmatrizen

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Über die Zwischenlösung \mathbf{Y} lässt sich der Lösungsvektor \mathbf{X} berechnen.
Allgemein gilt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

$$\mathbf{L} \cdot \underbrace{\mathbf{U} \cdot \mathbf{X}}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{R}$$

Nach der Multiplikation der Matrizen \mathbf{L} und \mathbf{Y} und dem Elementevergleich mit der rechten Seite \mathbf{R} erhält man:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot y_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 1$$

$$1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 0$$

$$-\frac{1}{2} \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 = 2 \Rightarrow y_3 = \frac{5}{2}$$

Laut Definition gilt:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$$

Nach der Multiplikation der Matrizen \mathbf{U} und \mathbf{X} und dem Elementevergleich mit der rechten Seite \mathbf{Y} erhält man:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot x_1 \qquad -1 \cdot x_3 = 1$$

$$4 \cdot x_2 \qquad = 0$$

$$\frac{5}{2} \cdot x_3 = \frac{5}{2}$$

Daraus folgt die Lösung:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(e) **CHOLESKY-Verfahren**

Ausgangsgleichungen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

Die Voraussetzung für die Anwendung des CHOLESKY-Verfahrens ist eine symmetrische Koeffizientenmatrix \mathbf{A} . Dies ist hier nicht gegeben.

Damit ist das CHOLESKY-Verfahrens nicht anwendbar

- zu Aufgabe 4 (s. S. 19)

(a) GAUSSsches Eliminationsverfahren

Ausgangsgleichungen:

$$x + y + z = 3$$

$$2x + 4y + 8z = 13$$

$$3x + 9y + 27z = 34$$

In einer Matrix ähnlichen Form kann man schreiben:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 13 \\ 3 & 9 & 27 & 34 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ | -2 \cdot 1. \text{ Zeile} \\ | -3 \cdot 1. \text{ Zeile} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 7 \\ 0 & 6 & 24 & 25 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ | -3 \cdot 2. \text{ Zeile} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$3. \text{ Zeile} \quad 6z = 4 \Rightarrow z = \frac{2}{3}$$

$$2. \text{ Zeile} \quad 2y + 6 \cdot \frac{2}{3} = 7 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

$$1. \text{ Zeile} \quad x + \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = 3 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

(b) CRAMERScheRegel

Ausgangsgleichungen:

$$x + y + z = 3$$

$$2x + 4y + 8z = 13$$

$$3x + 9y + 27z = 34$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 34 \end{pmatrix}$$

Als Lösungsweg wird die Entwicklung nach der 1. Zeile (\implies Unterdeterminanten)

gewählt:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$$

$$D = \det A = 1 \cdot (4 \cdot 27 - 9 \cdot 8) - 1 \cdot (2 \cdot 27 - 3 \cdot 8) + 1 \cdot (2 \cdot 9 - 3 \cdot 4)$$

$$D = 12$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 13 & 4 & 8 \\ 34 & 9 & 27 \end{vmatrix}$$

$$D_x = 3 \cdot 4 \cdot 27 - 3 \cdot 8 \cdot 9 - 1 \cdot 13 \cdot 27 + 1 \cdot 8 \cdot 34 - 1 \cdot 4 \cdot 34 + 1 \cdot 13 \cdot 9$$

$$D_x = 10$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 13 & 8 \\ 3 & 34 & 27 \end{vmatrix}$$

$$D_y = 18$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 13 \\ 3 & 9 & 34 \end{vmatrix}$$

$$D_z = 8$$

Daraus ergeben sich die Unbekannten des Gleichungssystems mit

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6};$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2};$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

(c) Verwendung der Inversen $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{X}$

Ausgangsgleichungen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = 12; \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 34 \end{pmatrix}$$

$$U_{11} : (27 \cdot 4) - (8 \cdot 9) = 36$$

$$U_{12} : (2 \cdot 27) - (3 \cdot 8) = 30$$

$$U_{13} : (2 \cdot 9) - (3 \cdot 4) = 6$$

$$U_{21} : (1 \cdot 27) - (1 \cdot 9) = 18$$

$$U_{22} : (1 \cdot 27) - (1 \cdot 3) = 24$$

$$U_{23} : (1 \cdot 9) - (1 \cdot 3) = 6$$

$$U_{31} : (1 \cdot 8) - (1 \cdot 4) = 4$$

$$U_{32} : (1 \cdot 8) - (1 \cdot 2) = 6$$

$$U_{33} : (1 \cdot 4) - (1 \cdot 2) = 2$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 36 & -18 & 4 \\ -30 & 24 & -6 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 - \frac{39}{2} + \frac{34}{3} \\ -\frac{15}{2} + 26 - 17 \\ \frac{3}{2} - \frac{13}{2} + \frac{34}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(d) **LU-Zerlegung** Ausgangsgleichungen: Ausgangsgleichungen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 34 \end{pmatrix}$$

Berechnung:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

Grundgedanke der LU-Zerlegung ist die Bildung der beiden Dreiecksmatrizen **L** (Lower) und **U** (Upper).

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

Dabei werden aus Gründen der Eindeutigkeit und der Vereinfachung die Elemente der Hauptdiagonalen der unteren Dreiecksmatrix **L** zu Eins gesetzt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$$

Nach Ausmultiplizieren des Matrizenproduktes **L** · **U** und anschließendem Elementevergleich mit der **A**-Matrix erhält man folgende Gleichungen.

$$1 \cdot u_{11} = a_{11} = 1 \Rightarrow u_{11} = 1$$

$$1 \cdot u_{12} = a_{12} = 1 \Rightarrow u_{12} = 1$$

$$1 \cdot u_{13} = a_{13} = 1 \Rightarrow u_{13} = 1$$

$$l_{21} \cdot u_{11} = a_{21} = 2 \Rightarrow l_{21} = 2$$

$$l_{21} \cdot u_{12} + 1 \cdot u_{22} = a_{22} = 4 \Rightarrow u_{22} = 2$$

$$l_{21} \cdot u_{13} + 1 \cdot u_{23} = a_{23} = 8 \Rightarrow u_{23} = 6$$

$$l_{31} \cdot u_{11} = a_{31} = 3 \Rightarrow l_{31} = 3$$

$$l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot u_{22} = a_{32} = 9 \Rightarrow l_{32} = 3$$

$$l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + 1 \cdot u_{33} = a_{33} = 27 \Rightarrow u_{33} = 6$$

Damit lauten die beiden Dreiecksmatrizen

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Über die Zwischenlösung \mathbf{Y} lässt sich der Lösungsvektor \mathbf{X} berechnen.
Allgemein gilt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

$$\mathbf{L} \cdot \underbrace{\mathbf{U} \cdot \mathbf{X}}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{R}$$

Nach der Multiplikation der Matrizen \mathbf{L} und \mathbf{Y} und dem Elementevergleich mit der rechten Seite \mathbf{R} erhält man:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 34 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot y_1 = 3 \Rightarrow y_1 = 3$$

$$2 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 = 13 \Rightarrow y_2 = 7$$

$$3 \cdot y_1 + 3 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 = 34 \Rightarrow y_3 = 4$$

Laut Definition gilt:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$$

Nach der Multiplikation der Matrizen \mathbf{U} und \mathbf{X} und dem Elementevergleich mit der rechten Seite \mathbf{Y} erhält man:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 3$$

$$2 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 = 7$$

$$6 \cdot x_3 = 4$$

Daraus folgt die Lösung:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(e) **CHOLESKY-Verfahren**

Ausgangsgleichungen:

$$x + y + z = 3$$

$$2x + 4y + 8z = 13$$

$$3x + 9y + 27z = 34$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 34 \end{pmatrix}$$

Die Voraussetzung für die Anwendung des CHOLESKY-Verfahrens ist eine symmetrische Koeffizientenmatrix **A**. Dies ist hier nicht gegeben.

Damit ist das CHOLESKY-Verfahrens nicht anwendbar.

- zu Aufgabe 5 (s. S. 19)

(a) GAUSSsches Eliminationsverfahren

Ausgangsgleichungen:

$$2x - 4y \quad + 9w = 25$$

$$3x - 3y - 3z + 11w = 27$$

$$4x + 6y - 15z + 5w = -5$$

$$3x + y - 4z + 12w = 32$$

In einer Matrix ähnlichen Form kann man schreiben:

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 0 & 9 & 25 & | & \text{vertauschen} \\ 3 & -3 & -3 & 11 & 27 & | & \text{vertauschen} \\ 4 & 6 & -15 & 5 & -5 & & \\ 3 & 1 & -4 & 12 & 32 & | & \cdot 3 \end{array}$$

\Downarrow

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & -3 & 11 & 27 & & \\ 2 & -4 & 0 & 9 & 25 & & \\ 4 & 6 & -15 & 5 & -5 & | & -5 \cdot 1. \text{ Zeile} \\ 9 & 3 & -12 & 36 & 96 & | & -4 \cdot 1. \text{ Zeile} \end{array}$$

\Downarrow

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & -3 & 11 & 27 & & \\ 2 & -4 & 0 & 9 & 25 & & \\ -11 & 21 & 0 & -50 & -140 & | & +5, 5 \cdot 2. \text{ Zeile} \\ -3 & 15 & 0 & -8 & -12 & | & +1, 5 \cdot 2. \text{ Zeile} \end{array}$$

\Downarrow

$$\begin{array}{cccc|c}
 3 & -3 & -3 & 11 & 27 \\
 2 & -4 & 0 & 9 & 25 \\
 0 & -1 & 0 & -0,5 & -2,5 \\
 0 & 9 & 0 & 5,5 & 25,5
 \end{array} \quad \left| \quad + 9 \cdot 3. \text{ Zeile} \right.$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{cccc|c}
 3 & -3 & -3 & 11 & 27 \\
 2 & -4 & 0 & 9 & 25 \\
 0 & -1 & 0 & -0,5 & -2,5 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 3
 \end{array} \quad \Rightarrow \quad w = 3$$

$$\Downarrow$$

$$-y - 0,5 \cdot 3 = -2,5 \Rightarrow y = 1$$

$$2x - 4 + 27 = 25 \Rightarrow x = 1$$

$$3 - 3 - 3z + 33 = 27 \Rightarrow z = 2$$

(b) CRAMERSche Regel

Ausgangsgleichungen:

$$2x - 4y \quad + 9w = 25$$

$$3x - 3y - 3z + 11w = 27$$

$$4x + 6y - 15z + 5w = -5$$

$$3x + y - 4z + 12w = 32$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 9 \\ 3 & -3 & -3 & 11 \\ 4 & 6 & -15 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 12 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 25 \\ 27 \\ -5 \\ 32 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

$$x_i = \frac{D_{xi}}{D}$$

Berechnen der Determinante D (entwickeln nach der ersten Zeile):

$$\begin{aligned} D = \det A &= \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 & 9 \\ 3 & -3 & -3 & 11 \\ 4 & 6 & -15 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 12 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -3 & 11 \\ 6 & -15 & 5 \\ 1 & -4 & 12 \end{vmatrix} - (-4) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & -15 & 5 \\ 3 & -4 & 12 \end{vmatrix} + 0 \cdot \dots - 9 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 4 & 6 & -15 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (540 - 15 - 264 + 165 - 60 + 216) \\ &\quad + 4 \cdot (-540 - 45 - 176 + 495 + 60 + 144) \\ &\quad - 9 \cdot (-72 + 135 - 12 + 54 + 45 - 48) \\ &= 1164 - 248 - 918 \\ D &= -2 \end{aligned}$$

Berechnen der Determinante D_x (entwickeln nach der ersten Zeile):

$$\begin{aligned}
 D_x &= \begin{vmatrix} 25 & -4 & 0 & 9 \\ 27 & -3 & -3 & 11 \\ -5 & 6 & -15 & 5 \\ 32 & 1 & -4 & 12 \end{vmatrix} \\
 &= 25 \cdot \begin{vmatrix} 27 & -3 & 11 \\ -5 & -15 & 5 \\ 32 & -4 & 12 \end{vmatrix} - (-4) \cdot \begin{vmatrix} 27 & -3 & 11 \\ -5 & -15 & 5 \\ 32 & -4 & 12 \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} 27 & -3 & -3 \\ -5 & 6 & -15 \\ 32 & 1 & -4 \end{vmatrix} \\
 D_x &= -2
 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Berechnen der Determinante D_y (entwickeln nach der ersten Zeile):

$$\begin{aligned}
 D_y &= \begin{vmatrix} 2 & 25 & 0 & 9 \\ 3 & 27 & -3 & 11 \\ 4 & -5 & -15 & 5 \\ 3 & 32 & -4 & 12 \end{vmatrix} \\
 &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 27 & -3 & 11 \\ -5 & -15 & 5 \\ 32 & -4 & 12 \end{vmatrix} - 25 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & -15 & 5 \\ 3 & -4 & 12 \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 27 & -3 \\ 4 & -5 & -15 \\ 3 & 32 & -4 \end{vmatrix} \\
 D_y &= -2
 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Berechnen der Determinante D_z (entwickeln nach der ersten Zeile):

$$\begin{aligned}
 D_z &= \begin{vmatrix} 2 & -4 & 25 & 9 \\ 3 & -3 & 27 & 11 \\ 4 & 6 & -5 & 5 \\ 3 & 1 & 32 & 12 \end{vmatrix} \\
 &= 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 27 & 11 \\ 6 & -5 & 5 \\ 1 & 32 & 12 \end{vmatrix} - (-4) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 27 & 11 \\ 4 & -5 & 5 \\ 3 & 32 & 12 \end{vmatrix} + 25 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 12 \end{vmatrix} \\
 &\quad - 9 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & 27 \\ 4 & 6 & -5 \\ 3 & 1 & 32 \end{vmatrix} \\
 D_z &= -4
 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Berechnen der Determinante D_w (entwickeln nach der ersten Zeile):

$$\begin{aligned} D_w &= \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 & 25 \\ 3 & -3 & -3 & 27 \\ 4 & 6 & -15 & -5 \\ 3 & 1 & -4 & 32 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -3 & 27 \\ 6 & -15 & -5 \\ 1 & -4 & 32 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & 27 \\ 4 & -15 & -5 \\ 3 & -4 & 32 \end{vmatrix} - 25 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 4 & 6 & -15 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} \\ D_w &= -6 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$w = \frac{D_w}{D} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Zusammengefasst ergibt sich also der Lösungsvektor:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(c) Verwendung der Inversen $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{X}$

Ausgangsgleichungen:

$$2x - 4y \quad + 9w = 25$$

$$3x - 3y - 3z + 11w = 27$$

$$4x + 6y - 15z + 5w = -5$$

$$3x + y - 4z + 12w = 32$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 9 \\ 3 & -3 & -3 & 11 \\ 4 & 6 & -15 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 12 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 25 \\ 27 \\ -5 \\ 32 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

$$D = \det \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 & 9 \\ 3 & -3 & -3 & 11 \\ 4 & 6 & -15 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 12 \end{vmatrix} = -2$$

$$U_{11} = \det \begin{vmatrix} -3 & -3 & 11 \\ 6 & -15 & 5 \\ 1 & -4 & 12 \end{vmatrix} = 582 \quad U_{12} = \det \begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & -15 & 5 \\ 3 & -4 & 12 \end{vmatrix} = -62$$

$$U_{13} = \det \begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 146 \quad U_{14} = \det \begin{vmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 4 & 6 & -15 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 102$$

$$U_{21} = \det \begin{vmatrix} -4 & 0 & 9 \\ 6 & -15 & 5 \\ 1 & -4 & 12 \end{vmatrix} = 559 \quad U_{22} = \det \begin{vmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 4 & -15 & 5 \\ 3 & -4 & 12 \end{vmatrix} = -59$$

$$U_{23} = \det \begin{vmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 140 \quad U_{24} = \det \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 4 & 6 & -15 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 98$$

$$U_{31} = \det \begin{vmatrix} -4 & 0 & 9 \\ -3 & -3 & 11 \\ 1 & -4 & 12 \end{vmatrix} = 103 \quad U_{32} = \det \begin{vmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 3 & -3 & 11 \\ 3 & -4 & 12 \end{vmatrix} = -11$$

$$U_{33} = \det \begin{vmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 3 & -3 & 11 \\ 3 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 26 \quad U_{34} = \det \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & -3 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 18$$

$$U_{41} = \det \begin{vmatrix} -4 & 0 & 9 \\ -3 & -3 & 11 \\ 6 & -15 & 5 \end{vmatrix} = -33 \quad U_{42} = \det \begin{vmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 3 & -3 & 11 \\ 4 & -15 & 5 \end{vmatrix} = 3$$

$$U_{43} = \det \begin{vmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 3 & -3 & 11 \\ 4 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -8 \quad U_{44} = \det \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & -3 & -3 \\ 4 & 6 & -15 \end{vmatrix} = -6$$

Damit lautet die inverse von \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 582 & -559 & 103 & 33 \\ 62 & -59 & 11 & 3 \\ 146 & -140 & 26 & 8 \\ -102 & 98 & -18 & -6 \end{pmatrix}$$

Daraus berechnet sich die Lösung des Gleichungssystems zu :

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 582 & -559 & 103 & 33 \\ 62 & -59 & 11 & 3 \\ 146 & -140 & 26 & 8 \\ -102 & 98 & -18 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ 27 \\ -5 \\ 32 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 25 \cdot 582 - 559 \cdot 27 - 5 \cdot 103 + 32 \cdot 33 \\ 25 \cdot 62 - 59 \cdot 27 - 5 \cdot 11 + 32 \cdot 3 \\ 25 \cdot 146 - 140 \cdot 27 - 5 \cdot 26 + 32 \cdot 8 \\ -25 \cdot 102 + 98 \cdot 27 + 5 \cdot 18 - 32 \cdot 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus folgt die Lösung des Gleichungssystems:

$$x = 1 \quad y = 1 \quad z = 2 \quad w = 3$$

(d) **LU-Zerlegung**

Ausgangsgleichungen:

$$2x - 4y + 9w = 25$$

$$3x - 3y - 3z + 11w = 27$$

$$4x + 6y - 15z + 5w = -5$$

$$3x + y - 4z + 12w = 32$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 9 \\ 3 & -3 & -3 & 11 \\ 4 & 6 & -15 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 12 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 25 \\ 27 \\ -5 \\ 32 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

Grundgedanke der LU-Zerlegung ist die Bildung der beiden Dreiecksmatrizen **L** (Lower) und **U** (Upper).

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{A};$$

Dabei wird aus Gründen der Eindeutigkeit und der Vereinfachung die Elemente der Hauptdiagonale der unteren Dreiecksmatrix **L** zu Eins gesetzt.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 9 \\ 3 & -3 & -3 & 11 \\ 4 & 6 & -15 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 12 \end{pmatrix}$$

wird zerlegt in: $\mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 9 \\ 3 & -3 & -3 & 11 \\ 4 & 6 & -15 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}$$

Laut Definition gilt:

$$l_{11} = 1$$

$$l_{22} = 1$$

$$l_{33} = 1$$

$$l_{44} = 1$$

Berechnung der übrigen Koeffizienten:

$$l_{11} \cdot u_{11} + l_{12} \cdot u_{21} + l_{13} \cdot u_{31} + l_{14} \cdot u_{41} = a_{11}$$

$$1 \cdot u_{11} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 2 \implies u_{11} = 2$$

$$l_{11} \cdot u_{12} + l_{12} \cdot u_{22} + l_{13} \cdot u_{32} + l_{14} \cdot u_{42} = a_{12}$$

$$1 \cdot u_{12} + 0 \cdot u_{22} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = -4 \implies u_{12} = -4$$

$$l_{11} \cdot u_{13} + l_{12} \cdot u_{23} + l_{13} \cdot u_{33} + l_{14} \cdot u_{43} = a_{13}$$

$$1 \cdot u_{13} + 0 \cdot (-3) + 0 \cdot u_{33} + 0 \cdot 0 = 0 \implies u_{13} = 0$$

$$l_{11} \cdot u_{14} + l_{12} \cdot u_{24} + l_{13} \cdot u_{34} + l_{14} \cdot u_{44} = a_{14}$$

$$1 \cdot u_{14} + 0 \cdot u_{14} + 0 \cdot u_{34} + 0 \cdot u_{44} = 9 \implies u_{14} = 9$$

$$l_{21} \cdot u_{11} + l_{22} \cdot u_{21} + l_{23} \cdot u_{31} + l_{24} \cdot u_{41} = a_{21}$$

$$l_{21} \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 3 \implies l_{21} = \frac{3}{2}$$

$$l_{21} \cdot u_{12} + l_{22} \cdot u_{22} + l_{23} \cdot u_{32} + l_{24} \cdot u_{42} = a_{22}$$

$$\frac{3}{2} \cdot (-4) + 1 \cdot u_{22} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = -3 \implies u_{22} = 3$$

$$l_{21} \cdot u_{13} + l_{22} \cdot u_{23} + l_{23} \cdot u_{33} + l_{24} \cdot u_{43} = a_{23}$$

$$\frac{3}{2} \cdot 0 + 1 \cdot u_{23} + 0 \cdot u_{33} + 0 \cdot 0 = -3 \implies u_{23} = -3$$

$$l_{21} \cdot u_{14} + l_{22} \cdot u_{24} + l_{23} \cdot u_{34} + l_{24} \cdot u_{44} = a_{24}$$

$$\frac{3}{2} \cdot 9 + 1 \cdot u_{24} + 0 \cdot u_{34} + 0 \cdot u_{44} = 11 \implies u_{24} = -\frac{5}{2}$$

$$l_{31} \cdot u_{11} + l_{32} \cdot u_{21} + l_{33} \cdot u_{31} + l_{34} \cdot u_{41} = a_{31}$$

$$l_{31} \cdot 2 + l_{32} \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 4 \quad \implies \quad l_{31} = 2$$

$$l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot u_{22} + l_{33} \cdot u_{32} + l_{34} \cdot u_{42} = a_{32}$$

$$2 \cdot (-4) + l_{32} \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 6 \quad \implies \quad l_{32} = \frac{14}{3}$$

$$l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + l_{33} \cdot u_{33} + l_{34} \cdot u_{43} = a_{33}$$

$$2 \cdot 0 + \frac{14}{3} \cdot (-3) + 1 \cdot u_{33} + 0 \cdot 0 = -15 \quad \implies \quad u_{33} = -1$$

$$l_{31} \cdot u_{14} + l_{32} \cdot u_{24} + l_{33} \cdot u_{34} + l_{34} \cdot u_{44} = a_{34}$$

$$2 \cdot 9 + \frac{14}{3} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + 1 \cdot u_{34} + 0 \cdot u_{44} = 5 \quad \implies \quad u_{34} = -\frac{4}{3}$$

$$l_{41} \cdot u_{11} + l_{42} \cdot u_{21} + l_{43} \cdot u_{31} + l_{44} \cdot u_{41} = a_{41}$$

$$l_{41} \cdot 2 + l_{42} \cdot 0 + l_{43} \cdot 0 + l_{44} \cdot 0 = 3 \quad \implies \quad l_{41} = \frac{3}{2}$$

$$l_{41} \cdot u_{12} + l_{42} \cdot u_{22} + l_{43} \cdot u_{32} + l_{44} \cdot u_{42} = a_{42}$$

$$\frac{3}{2} \cdot (-4) + l_{42} \cdot 3 + l_{43} \cdot 0 + l_{44} \cdot 0 = 1 \quad \implies \quad l_{42} = \frac{7}{3}$$

$$l_{41} \cdot u_{13} + l_{42} \cdot u_{23} + l_{43} \cdot u_{33} + l_{44} \cdot u_{43} = a_{43}$$

$$\frac{3}{2} \cdot 0 + \frac{7}{3} \cdot (-3) + l_{43} \cdot (-1) + l_{44} \cdot 0 = -4 \quad \implies \quad l_{43} = -3$$

$$l_{41} \cdot u_{14} + l_{42} \cdot u_{24} + l_{43} \cdot u_{34} + l_{44} \cdot u_{44} = a_{44}$$

$$\frac{3}{2} \cdot 9 + \frac{7}{3} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + (-3) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + 1 \cdot u_{44} = 12 \quad \implies \quad u_{44} = \frac{1}{3}$$

Damit lauten die Dreiecksmatrizen:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{14}{3} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{7}{3} & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & -3 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Über die Zwischenlösung \mathbf{Y} lässt sich der Lösungsvektor \mathbf{X} berechnen:

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

$$\text{mit} \quad \mathbf{Y} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{X}$$

$$\text{ergibt sich} \quad \mathbf{L} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{R}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{14}{3} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{7}{3} & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 27 \\ -5 \\ 32 \end{pmatrix}$$

$$l_{11} \cdot y_1 = r_1$$

$$1 \cdot y_1 = 25 \implies y_1 = 25$$

$$l_{21} \cdot y_1 + l_{22} \cdot y_2 = r_2$$

$$\frac{3}{2} \cdot 25 + 1 \cdot y_2 = 27 \implies y_2 = -\frac{21}{2}$$

$$l_{31} \cdot y_1 + l_{32} \cdot y_2 + l_{33} \cdot y_3 = r_3$$

$$2 \cdot 25 + \frac{14}{3} \cdot \left(-\frac{21}{2}\right) + 1 \cdot y_3 = -5 \implies y_3 = -6$$

$$l_{41} \cdot y_1 + l_{42} \cdot y_2 + l_{43} \cdot y_3 + l_{44} \cdot y_4 = r_4$$

$$\frac{3}{2} \cdot 25 + \frac{7}{3} \cdot \left(-\frac{21}{2}\right) - 3 \cdot (-6) + 1 \cdot y_4 = 32 \implies y_4 = 1$$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 25 \\ -\frac{21}{2} \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & -3 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -\frac{21}{2} \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_{44} \cdot x_4 = y_4$$

$$\frac{1}{3} \cdot x_4 = 1 \quad \implies x_4 = 3$$

$$u_{33} \cdot x_3 + u_{34} \cdot x_4 = y_3$$

$$-1 \cdot x_3 + \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot 3 = -6 \quad \implies x_3 = 2$$

$$u_{22} \cdot x_2 + u_{23} \cdot x_3 + u_{24} \cdot x_4 = y_2$$

$$3 \cdot x_2 + (-3) \cdot 2 + \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot 3 = -\frac{21}{2} \quad \implies x_2 = 1$$

$$u_{11} \cdot x_1 + u_{12} \cdot x_2 + u_{13} \cdot x_3 + u_{14} \cdot x_4 = y_1$$

$$2 \cdot x_1 + (-4) \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 9 \cdot 3 = 25 \quad \implies x_1 = 1$$

Damit hat man die gleiche Lösung erhalten wie bei den anderen Verfahren:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(e) **CHOLESKY-Verfahren**

Ausgangsgleichungen:

$$2x - 4y + 9w = 25$$

$$3x - 3y - 3z + 11w = 27$$

$$4x + 6y - 15z + 5w = -5$$

$$3x + y - 4z + 12w = 32$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 9 \\ 3 & -3 & -3 & 11 \\ 4 & 6 & -15 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 12 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 25 \\ 27 \\ -5 \\ 32 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

Die Voraussetzung für die Anwendung des CHOLESKY-Verfahrens ist eine symmetrische Koeffizientenmatrix \mathbf{A} . Dies ist hier nicht gegeben.

Damit ist das CHOLESKY-Verfahrens nicht anwendbar.

- zu Aufgabe 6 (s. S.19)

(a) GAUSSsches Eliminationsverfahren

Ausgangsgleichungen:

$$2x + y - 2z = 1$$

$$x + y + z = 6$$

$$-2x + y - 2z = -3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{cccc} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ -2 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right|$$

$$\Downarrow$$

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} | -2 \cdot 1. \text{Zeile} \\ | 2 \cdot 1. \text{Zeile} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -4 & -11 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \end{array} \right|$$

3. Zeile

$$3 \cdot y = 9; \implies y = 3$$

$$\text{2. Zeile} \quad -1 \cdot y - 4 \cdot z = -11; \implies z = 2$$

$$\text{1. Zeile} \quad x + y + z = 6; \implies x = 1$$

Probe

$$2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 1$$

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 6$$

$$-2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = -3$$

(b) CRAMERSche Regel

Ausgangsgleichungen:

$$2x + y - 2z = 1$$

$$x + y + z = 6$$

$$-2x + y - 2z = -3$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$x_i = \frac{D_{xi}}{D}$$

$$D = \det A = \det \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 2 - 2 - 4 - 2 + 2 = -12$$

$$D = -12$$

$$D_x = \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 6 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 3 - 12 - 6 - 1 + 12 = -12$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-12}{-12} = 1$$

$$D_y = \det \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \\ -2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -24 - 2 + 6 - 24 + 6 + 2 = -36$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-36}{-12} = 3$$

$$D_z = \det \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 12 + 1 + 2 - 12 + 3 = -24$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-24}{-12} = 2$$

(c) Verwendung der Inversen $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{X}$

Ausgangsgleichungen:

$$2x + y - 2z = 1$$

$$x + y + z = 6$$

$$-2x + y - 2z = -3$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$D = \det \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -12;$$

$$U_{11} = 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 = -3$$

$$U_{12} = 1 \cdot (-2) - 1 \cdot (-2) = 0$$

$$U_{13} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) = 3$$

$$U_{21} = 1 \cdot (-2) - 1 \cdot (-2) = 0$$

$$U_{22} = 2 \cdot (-2) - (-2) \cdot (-2) = -8$$

$$U_{23} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) = 4$$

$$U_{31} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) = 3$$

$$U_{32} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) = 4$$

$$U_{33} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1$$

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -8 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R} = -\frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -8 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} -3 + 0 - 9 \\ 0 - 48 + 12 \\ 3 - 24 - 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt die Lösung des Gleichungssystems:

$$x = 1; \quad y = 3; \quad z = 2.$$

(d) **LU-Zerlegung**

Ausgangsgleichungen:

$$2x + y - 2z = 1$$

$$x + y + z = 6$$

$$-2x + y - 2z = -3$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

Grundgedanke der LU-Zerlegung ist die Bildung der beiden Dreiecksmatrizen **L** (Lower) und **U** (Upper).

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{A}$$

Dabei wird aus Gründen der Eindeutigkeit und der Vereinfachung die Elemente der Hauptdiagonale der unteren Dreiecksmatrix **L** zu Eins gesetzt.

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nach Ausmultiplizieren des Matrizenproduktes **L** · **U** und anschließendem Elementevergleich mit der **A**-Matrix erhält man folgende Gleichungen.

$$1 \cdot u_{11} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = a_{11} = 2 \Rightarrow u_{11} = 2$$

$$1 \cdot u_{12} + 0 \cdot u_{22} + 0 \cdot 0 = a_{12} = 1 \Rightarrow u_{12} = 1$$

$$1 \cdot u_{13} + 0 \cdot u_{23} + 0 \cdot u_{33} = a_{13} = -2 \Rightarrow u_{13} = -2$$

$$l_{21} \cdot u_{11} + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = a_{21} = 1 \Rightarrow l_{21} = \frac{1}{2}$$

$$l_{21} \cdot u_{12} + 1 \cdot u_{22} + 0 \cdot 0 = a_{22} = 1 \Rightarrow u_{22} = \frac{1}{2}$$

$$l_{21} \cdot u_{13} + 1 \cdot u_{23} + 0 \cdot u_{33} = a_{23} = 1 \Rightarrow u_{23} = 2$$

$$l_{31} \cdot u_{11} + l_{32} \cdot 0 + 1 \cdot 0 = a_{31} = -2 \Rightarrow l_{31} = -1$$

$$l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot u_{22} + 1 \cdot 0 = a_{32} = 1 \Rightarrow l_{32} = 4$$

$$l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + 1 \cdot u_{33} = a_{33} = 1 \Rightarrow u_{33} = -12$$

Damit lauten die beiden Dreiecksmatrizen

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

Über die Zwischenlösung \mathbf{Y} lässt sich der Lösungsvektor \mathbf{X} berechnen:
Allgemein gilt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

$$\mathbf{L} \cdot \underbrace{\mathbf{U} \cdot \mathbf{X}}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{R}$$

Nach der Multiplikation der Matrizen \mathbf{L} und \mathbf{Y} und dem Elementevergleich mit der rechten Seite \mathbf{R} erhält man:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 = 1$$

$$\frac{1}{2} \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 = 6$$

$$-1 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 = -3$$

$$y_1 = 1$$

$$y_2 = \frac{11}{2}$$

$$y_3 = -24$$

Laut Definition gilt:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$$

Nach der Multiplikation der Matrizen \mathbf{U} und \mathbf{X} und dem Elementevergleich mit der rechten Seite \mathbf{Y} erhält man:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{11}{2} \\ -24 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot x + 1 \cdot y - 2 \cdot z = 1$$

$$0 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y + 2 \cdot z = \frac{11}{2}$$

$$0 \cdot x + 0 \cdot y - 12 \cdot z = -24$$

Daraus folgt die Lösung:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(e) CHOLESKY-Verfahren

Ausgangsgleichungen:

$$2x + y - 2z = 1$$

$$x + y + z = 6$$

$$-2x + y - 2z = -3$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Die Voraussetzung für die Anwendung des CHOLESKY-Verfahrens ist eine symmetrische Koeffizientenmatrix \mathbf{A} .

Zusätzlich muss diese Matrix noch positiv definit sein. Dies wird mit Hilfe der Hauptminoren bestimmt.

\mathbf{A} ist positiv definit, wenn alle Hauptminoren größer Null sind. Der Hauptminor (Hauptunterdeterminante) \mathbf{A}_0 ist die Determinante der Matrix die entsteht, wenn man die Null letzten Zeilen und Spalten streicht, also von \mathbf{A} selbst.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 = \det \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2 - 1) - 1 \cdot (-2 + 2) + (-2) \cdot (1 - (-2)) \\ &= -6 + 0 - 6 = -12 \end{aligned}$$

Damit ist \mathbf{A} nicht positiv definit.

Der Vollständigkeit halber die beiden anderen Hauptminoren:

Der Hauptminor \mathbf{A}_1 ist die Determinante der Matrix die durch streichen der letzten Zeile und Spalte entsteht.

$$\mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

Der Hauptminor A_2 ist die Determinante der Matrix die durch streichen der letzten 2 Zeilen und Spalten entsteht.

$$A_2 = |2| = 2$$

Trotz dem die Voraussetzung der Positiv-Definitheit von A nicht gegeben ist, lässt sich das Verfahren dennoch anwenden. Als Resultat entstehen imaginäre Einträge in den Matrizen B und B^T .

$$B \cdot B^T = A;$$

$$\begin{aligned} B \cdot B^T &= \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ 0 & b_{22} & b_{32} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nach Ausmultiplizieren des Matrizenproduktes $B \cdot B^T$ und anschließendem Elementvergleich mit der A -Matrix erhält man folgende Gleichungen:

$$b_{11} \cdot b_{11} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = a_{11} = 2 \Rightarrow b_{11} = \sqrt{2}$$

$$b_{11} \cdot b_{21} + 0 \cdot b_{22} + 0 \cdot 0 = a_{12} = 1 \Rightarrow b_{21} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b_{11} \cdot b_{31} + 0 \cdot b_{32} + 0 \cdot b_{33} = a_{13} = -2 \Rightarrow b_{31} = -\sqrt{2}$$

$$b_{21}^2 + b_{22}^2 + 0 \cdot 0 = a_{22} = 1 \Rightarrow b_{22} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b_{21} \cdot b_{31} + b_{22} \cdot b_{32} + 0 \cdot b_{33} = a_{23} = 1 \Rightarrow b_{32} = 2\sqrt{2};$$

$$b_{31}^2 + b_{32}^2 + b_{33}^2 = a_{33} = -2 \Rightarrow b_{33} = 2\sqrt{-3}$$

Damit lauten die beiden Dreiecksmatrizen:

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{-3} \end{pmatrix} \quad B^T = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{-3} \end{pmatrix}$$

Über die Zwischenlösung \mathbf{Y} lässt sich der Lösungsvektor \mathbf{X} berechnen:

Allgemein gilt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T$$

$$\mathbf{B} \cdot \underbrace{\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{X}}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{R}$$

Nach der Multiplikation der Matrizen \mathbf{B} und \mathbf{Y} und dem Elementevergleich mit der rechten Seite \mathbf{R} erhält man:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{-3} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{2} \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 = 1$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 = 6$$

$$-\sqrt{2} \cdot y_1 + 2\sqrt{2} \cdot y_2 + 2\sqrt{-3} \cdot y_3 = -3$$

$$y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y_2 = \frac{11}{\sqrt{2}}$$

$$y_3 = -\frac{12}{\sqrt{-3}}$$

Laut Definition gilt:

$$\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$$

Nach der Multiplikation der Matrizen \mathbf{B}^T und \mathbf{X} und dem Elementevergleich mit der rechten Seite \mathbf{Y} erhält man:

$$\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{-3} \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{11}{\sqrt{2}} \\ -\frac{12}{\sqrt{-3}} \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{2} \cdot x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y - \sqrt{2} \cdot z = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$0 \cdot x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y + 2\sqrt{2} \cdot z = \frac{11}{\sqrt{2}}$$

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 2\sqrt{-3} \cdot z = -\frac{12}{\sqrt{-3}}$$

Daraus folgt die Lösung:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

· **Bemerkung:** Wie zu sehen, lässt sich das Verfahren auch anwenden, obwohl die Bedingung der Positiv-Definitheit nicht erfüllt ist. Die imaginären Zahlen heben sich zum Ende der Berechnung gegenseitig auf.

Kapitel 2

Vektoralgebra und Analysis

Aufgaben zu 2:

1. Die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind durch ihre Koordinaten gegeben:

$$a_x = 5 \quad b_x = 3 \quad c_x = -6$$

$$a_y = 7 \quad b_y = -4 \quad c_y = -9$$

$$a_z = 8 \quad b_z = 6 \quad c_z = -5$$

Bestimmen Sie die Länge des Vektors $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

(Lösung s.S. 84)

2. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ und $\vec{b} = 3\vec{i} - w\vec{j} + 2\vec{k}$.

Berechnen Sie w so, dass die Vektoren senkrecht zueinander stehen.

(Lösung s. S. 85)

3. Berechnen Sie für $\varphi = xy + yz + zx$ und $\vec{A} = x^2y\vec{i} + y^2z\vec{j} + z^2x\vec{k}$:

$$(a) \vec{A} \cdot \nabla \varphi \quad (b) \varphi \nabla \cdot \vec{A} \quad (c) (\nabla \varphi) \times \vec{A}$$

(Lösung s.S.85)

4. Ein Partikel bewegt sich entlang einer Raumkurve mit den Koordinaten $x = t^3 + 2t$, $y = -3e^{-2t}$, $z = 2 \sin 5t$.

Berechnen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Partikels für eine beliebige Zeit t .

Geben Sie ihren Betrag sowie auch den zurückgelegten Abstand für $t = 0$ und $t = 1$ an.

(Lösung s.S.87)

5. Gegeben ist das skalare Potentialfeld in einem Filter $h = xy + yz + xz$.

- Bestimmen Sie die Filtergeschwindigkeit (Vektor und Betrag)
- Gibt es Quellen- und Senkenaktivität im Filter?
- Ist die Strömung im Filter wirbelfrei?

Gegeben sind $k = 10^{-4} \text{ms}^{-1}$ und $\text{grad}(-k) = 0$.

(Lösung s. S. 89)

6. Eine Schadstofffahne hat sich im Untergrund ausgebreitet. Die Verteilung des Schadstoffes entspricht im Wertebereich $x ::= 0$ bis 10 und $y ::= 0$ bis 10 folgender geometrischen Figur:

$$C(x, y) = 50 - ((x - 5)^2 + (y - 5)^2)$$

- a) Skizzieren Sie die Äquipotentiallinien für die Konzentrationswerte im Bereich von $C(x, y) = 0 \text{ mg}$ bis 50 mg mit einer Schrittweite $\delta C(x, y) = 10$.
- b) Berechnen Sie den Gradienten am Punkt $P(3, 4)$ und bestimmen Sie den Betrag und den Richtungswinkel.

(Lösung s. S.91)

7. Eine Schadstofffahne hat sich im Untergrund ausgebreitet. Die Verteilung des Schadstoffes entspricht im Wertebereich $x ::= 0$ bis 10 und $y ::= 0$ bis 10 folgender geometrischen Figur:

$$C(x, y) = 125 - ((2x - 10)^2 + (y - 5)^2)$$

- a) Skizzieren Sie die Äquipotentiallinien für die Konzentrationswerte im Bereich von $C(x, y) = 0 \text{ mg}$ bis 125 mg mit einer Schrittweite $\delta C(x, y) = 25$.
- b) Berechnen Sie den Gradienten am Punkt $P(5, 10)$ und bestimmen Sie den Betrag und den Richtungswinkel.

(Lösung s. S.93)

8. Der Grundwasserstand eines einseitig durch eine Barriere begrenzten Grundwasserleiters und eines Brunnens soll durch folgende geometrische Figur beschrieben werden:

$$z_R = \frac{1}{2} \frac{(y - 10)^2}{x}$$

- a) Skizzieren Sie die Hydroisohypsen im Bereich von $z_R = 1 \text{ m}$ bis $z_R = 5 \text{ m}$ mit einer Schrittweite $\delta z_R = 1 \text{ m}$ für die Koordinaten $0 \leq x \leq 10$
- b) Berechnen Sie die Filtergeschwindigkeit mit $k = 0,0001 \text{ ms}^{-1}$ am Punkt $P(5, 5)$; bestimmen Sie den Betrag und den Richtungswinkel α .
- c) Ist dieses Feld quell- und senkenfrei?

(Lösung s. S. 95)

9. Der Grundwasserstand einer Grabenanströmung im Grundwasserleiters soll durch folgende geometrische Figur beschrieben werden.

$$z_R = y + 3x$$

- a) Skizzieren Sie die Hydroisohypsen im Bereich von $z_R = 1 \text{ m}$ bis 5 m mit einer Schrittweite $\delta z_R = 1 \text{ m}$.
- b) Berechnen Sie die Filtergeschwindigkeit mit $k = 0,0001 \text{ ms}^{-1}$ am Punkt $P(5, 5)$; bestimmen Sie den Betrag und den Richtungswinkel
- c) Ist dieses Feld quell- und senkenfrei?

Lösungen zu 2:**•zu Aufgabe 1 (s. S. 82)**

Es sind zwei Schreibweisen möglich:

Koordinatenschreibweise:

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} &= (a_x + b_x + c_x) \vec{i} + (a_y + b_y + c_y) \vec{j} + (a_z + b_z + c_z) \vec{k} \\ &= (5 + 3 - 6) \vec{i} + (7 - 4 - 9) \vec{j} + (8 + 6 - 5) \vec{k} \\ \vec{d} &= 2\vec{i} - 6\vec{j} + 9\vec{k}\end{aligned}$$

Matrizenschreibweise:

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}^T \vec{i} + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \vec{j} + \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix} \vec{k} \\ &= \begin{pmatrix} 5 + 3 - 6 & 7 - 4 - 9 & 8 + 6 - 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \\ \vec{d} &= \begin{pmatrix} 2 & -6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \\ \vec{d} &= 2\vec{i} - 6\vec{j} + 9\vec{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\vec{d}| &= \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 9^2} \\ &= \sqrt{121} \\ |\vec{d}| &= 11\end{aligned}$$

- **zu Aufgabe 2 (s. S. 82)**

Wenn zwei Vektoren senkrecht aufeinander stehen, ist ihr Skalarprodukt gleich Null.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{wenn } (\vec{a} \perp \vec{b})$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren errechnet sich aus:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \stackrel{!}{=} a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \stackrel{!}{=} 0$$

Da das Skalarprodukt eine skalare Größe ist, wird aus der Vektorgleichung eine skalare Größengleichung.

Mit den beiden Vektoren erhält man:

$$\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{b} = 3\vec{i} - w\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$2 \cdot 3 + (-3 \cdot -w) + 5 \cdot 2 = 0$$

$$6 + 3w + 10 = 0$$

$$w = -\frac{16}{3}$$

Damit erhält der Vektor \vec{b} folgende Gestalt

$$\vec{b} = 3\vec{i} + \frac{16}{3}\vec{j} + 2\vec{k}$$

- **zu Aufgabe 3 (s. S. 82)**

a. Berechnung des Skalarprodukts der Vektoren \vec{A} und $\nabla\varphi$:

$$\begin{aligned} \nabla\varphi &= \frac{\partial(xy + yz + zx)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial(xy + yz + zx)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial(xy + yz + zx)}{\partial z} \vec{k} \\ &= (y + z) \vec{i} + (x + z) \vec{j} + (x + y) \vec{k} \end{aligned}$$

$$\vec{A} \cdot \nabla\varphi = (x^2 y) \cdot (y + z) + (y^2 z) \cdot (x + z) + (z^2 x) \cdot (x + y)$$

- b. Berechnung des Produkts der Skalarfelder $\nabla \vec{A}$ und φ

Dazu wird zuerst der Gradient $\nabla \vec{A} = \text{div} \vec{A}$ gebildet:

$$\nabla \vec{A} = \frac{\partial (x^2 y)}{\partial x} + \frac{\partial (y^2 z)}{\partial y} + \frac{\partial (z^2 x)}{\partial z}$$

$$\nabla \vec{A} = 2xy + 2yz + 2zx$$

und dann die skalare Multiplikation ausgeführt:

$$\varphi \cdot \nabla \vec{A} = (xy + yz + zx) \cdot (2xy + 2yz + 2zx)$$

$$\varphi \cdot \nabla \vec{A} = 2 \cdot (x^2 y^2 + 2xy^2 z + x^2 yz + y^2 z^2 + 2xyz^2 + x^2 yz + x^2 z^2)$$

- c. Berechnung des Kreuzproduktes der Vektoren $\nabla \varphi$ und \vec{A} :

Das Kreuzprodukt ist definiert zu:

$$\nabla \varphi \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ y+z & x+z & y+x \\ x^2 y & y^2 z & z^2 x \end{pmatrix}$$

Nach den Regeln der Determinantenberechnung wird eine dreireihige Determinante zerlegt in die Summe der Elemente der ersten Zeile, multipliziert mit den dazugehörigen Unterdeterminanten.

$$\nabla \varphi \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (x+z)(z^2 x) - (y+x)(y^2 z) \\ -((y+z)(z^2 x) - (y+x)(x^2 y)) \\ (y+z)(y^2 z) - (x+z)(x^2 y) \end{pmatrix}$$

• **zu Aufgabe 4 (s. S. 82)**

Die Geschwindigkeit \vec{v} ist die Ortsänderung pro Zeiteinheit:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left((t^3 + 2t) \vec{i} - 3e^{-2t} \vec{j} + 2 \sin(5t) \vec{k} \right) \\ \vec{v} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\begin{pmatrix} t^3 + 2t & -3e^{-2t} & 2 \sin(5t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \right) \\ \vec{v} &= \begin{pmatrix} 3t^2 + 2 & 6e^{-2t} & 10 \cos(5t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich der Betrag der Geschwindigkeit zu:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(3t^2 + 2)^2 + (6e^{-2t})^2 + (10 \cos(5t))^2}$$

Die Beschleunigung \vec{a} ist die Änderung der Geschwindigkeit pro Zeiteinheit

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left((3t^2 + 2) \vec{i} + 6e^{-2t} \vec{j} + 10 \cos(5t) \vec{k} \right) \\ \vec{a} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\begin{pmatrix} 3t^2 + 2 & 6e^{-2t} & 10 \cos(5t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \right) \\ \vec{a} &= \begin{pmatrix} 6t & -12e^{-2t} & -50 \sin(5t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich der Betrag der Beschleunigung zu:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(6t)^2 + (-12e^{-2t})^2 + (-50 \sin(5t))^2}$$

Für die Punkte $t = 0$ und $t = 1$ ergeben sich folgende Werte:

t	\vec{v}	$ \vec{v} $	\vec{a}	$ \vec{a} $
0	$2\vec{i} + 6\vec{j} + 10\vec{k}$	11,8322	$-12\vec{j}$	12
1	$5\vec{i} + 0,812\vec{j} + 2,837\vec{k}$	5,80567	$6\vec{i} - 1,624\vec{j} + 47,95\vec{k}$	48,35

Der zurückgelegte Weg s ergibt sich aus dem Integral der Geschwindigkeit über den entsprechenden Zeitraum

$$\begin{aligned}s &= \int_{t=0}^1 |\vec{v}| dt \\s &= \int_{t=0}^1 \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2} dt \\s &= \int_{t=0}^1 \sqrt{(3t^2 + 2)^2 + (6e^{-2t})^2 + (10 \cos(5t))^2} dt\end{aligned}$$

• zu Aufgabe 5 (s. S. 82)

a. Laut Aufgabenstellung ist:

$$h = xy + yz + xz$$

und

$$\text{grad}(-k) = 0$$

$$\vec{v} = \text{grad}(k \cdot h)$$

$$= \nabla (k \cdot h)$$

$$= (\nabla k) \cdot h + k \cdot (\nabla h)$$

Da gilt:

$$\nabla k = 0$$

folgt:

$$\vec{v} = k \cdot (\nabla h)$$

$$\vec{v} = k \cdot \nabla (xy + yz + xz)$$

Mit

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

erhält man:

$$\begin{aligned} \nabla h &= \frac{\partial (xy + yz + xz)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial (xy + yz + xz)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial (xy + yz + xz)}{\partial z} \vec{k} \\ \vec{v} &= k \cdot \begin{pmatrix} y + z & x + z & y + x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$|\vec{v}| = k \cdot \sqrt{(y + z)^2 + (x + y)^2 + (y + x)^2}$$

b. Ein skalar Feld besitzt dann keine Quellen und Senken, wenn die Divergenz gleich Null ist. Die Bilanzgleichung am repräsentativen Einheitsvolumen sagt in diesem Fall aus, dass die Summe der Volumenströme hinein- und herausfließend gleich groß ist.

$$\text{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} \stackrel{?}{=} 0$$

$$\text{div} \vec{v} = \frac{\partial (y + z)}{\partial x} + \frac{\partial (x + z)}{\partial y} + \frac{\partial (y + x)}{\partial z} = 0$$

Daraus folgt, dass das Feld keine Quellen und Senken besitzt.

c. Ein Vektorfeld besitzt dann keine Wirbel, wenn die Rotation gleich null ist.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{v} &= \nabla \times \vec{v} \stackrel{?}{=} \vec{0} \\ \operatorname{rot} \vec{v} &= \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & y+x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(y+x) - \frac{\partial}{\partial z}(x+z) \\ -\left(\frac{\partial}{\partial x}(y+x) - \frac{\partial}{\partial z}(y+z)\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x+z) - \frac{\partial}{\partial y}(y+z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \vec{0} \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass das vorgegebene Potentialfeld auch keine Wirbel besitzt.

• zu Aufgabe 6 (s. S. 82)

a. Zur Aufstellung des Hydroisohypsenplanes wird die Ausgangsfunktion als Funktion von $y = f(x)$ dargestellt. Die Konzentration $C(x, y)$ ist dabei als Parameter zu behandeln
(siehe Abbildung 2.1).

$$C(x, y) = 50 - ((x - 5)^2 + (y - 5)^2)$$

$$y = \sqrt{50 - C - (x - 5)^2} + 5$$

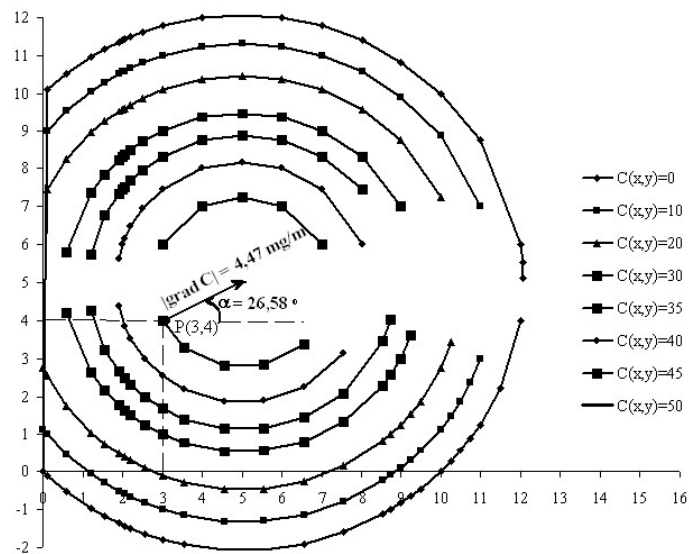


Abbildung 2.1: Darstellung der Konzentrationsverteilung als Äquipotentiallinien

b. Mit

$$\text{grad} = \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} \nabla C(x, y) &= \frac{\partial C(x, y)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial C(x, y)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial C(x, y)}{\partial z} \vec{k} \\ &= \frac{\partial (50 - ((x - 5)^2 + (y - 5)^2))}{\partial x} \vec{i} \\ &\quad + \frac{\partial (50 - ((x - 5)^2 + (y - 5)^2))}{\partial y} \vec{j} \\ &\quad + \frac{\partial (50 - ((x - 5)^2 + (y - 5)^2))}{\partial z} \vec{k} \\ \nabla C(x, y) &= -2(x - 5) \vec{i} - 2(y - 5) \vec{j} \end{aligned}$$

Für den Punkt $P(3, 4)$ ergibt sich ein Konzentrationsgradient von:

$$\nabla C(3, 4) = -2(3 - 5) \vec{i} - 2(4 - 5) \vec{j}$$

$$\nabla C(3, 4) = 4 \vec{i} + 2 \vec{j}$$

Damit ergeben sich folgende Werte für den Betrag und den Richtungswinkel (siehe auch Abbildung 2.1):

$$\begin{aligned} |\nabla C(3, 4)| &= \left| 4 \vec{i} + 2 \vec{j} \right| \\ &= \sqrt{16 + 4} \end{aligned}$$

$$|\nabla C(3, 4)| = 4,47$$

$$\alpha = \arctan \frac{2}{4} = \arctan \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 0,46364 \triangleq 26,58^\circ$$

• zu Aufgabe 7 (s. S. 82)

a. Zur Aufstellung des Hydroisohypsenplanes wird die Ausgangsfunktion als Funktion von $y = f(x)$ dargestellt. Die Konzentration $C(x, y)$ ist dabei als Parameter zu behandeln (siehe Abbildung 2.2).

$$C(x, y) = 125 - ((2x - 10)^2 + (y - 5)^2)$$

$$y = \sqrt{125 - C - (2x - 10)^2} + 5$$

b. Mit

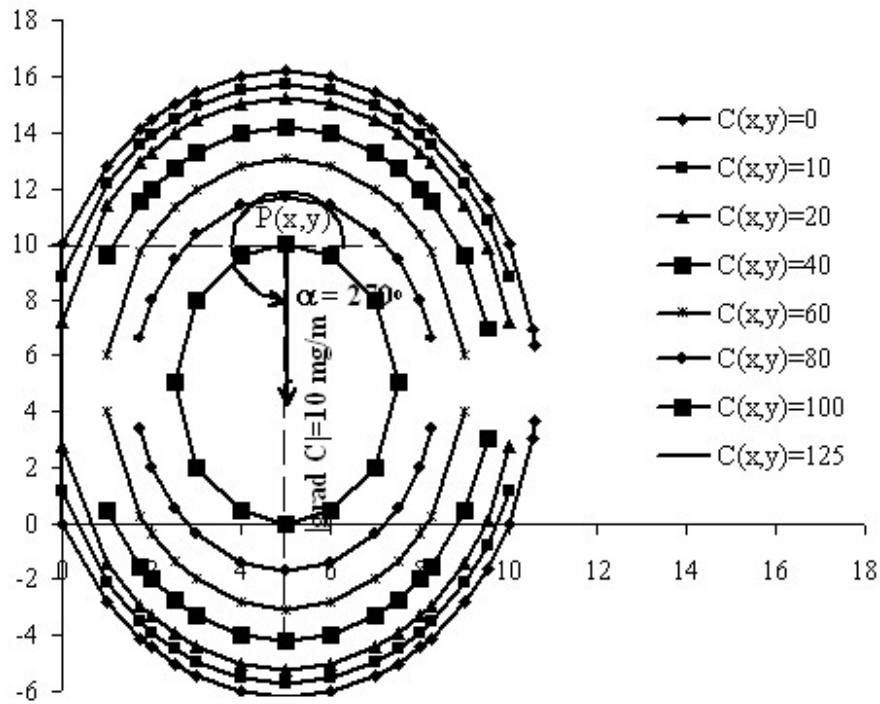


Abbildung 2.2: Darstellung der Äquipotentiallinien der Konzentrationsverteilung

$$\text{grad} = \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} \nabla C(x, y) &= \frac{\partial C(x, y)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial C(x, y)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial C(x, y)}{\partial z} \vec{k} \\ &= \frac{\partial (125 - ((2x - 10)^2 + (y - 5)^2))}{\partial x} \vec{i} \\ &\quad + \frac{\partial (125 - ((2x - 10)^2 + (y - 5)^2))}{\partial y} \vec{j} \\ &\quad + \frac{\partial (125 - ((2x - 10)^2 + (y - 5)^2))}{\partial z} \vec{k} \end{aligned}$$

$$\nabla C(x, y) = -4(2x - 10) \vec{i} - 2(y - 5) \vec{j}$$

Für den Punkt $P(5, 10)$ ergibt sich ein Konzentrationsgradient von:

$$\nabla C(5, 10) = -4(2 \cdot 5 - 10) \vec{i} - 2(10 - 5) \vec{j}$$

$$\nabla C(5, 10) = -10 \vec{j}$$

Damit ergeben sich folgende Werte für den Betrag und den Richtungswinkel (siehe Abbildung 2.2):

$$|\nabla C(x, y)| = \left| -10 \vec{j} \right|$$

$$|\nabla C(x, y)| = 10 \frac{mg}{m}$$

$$\alpha = \arctan \frac{\nabla C(x, y)_y}{\nabla C(x, y)_x}$$

In diesem Fall gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} -\arctan(x) = -\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi \triangleq 270^\circ$

• zu Aufgabe 8 (s. S. 82)

a. Zur Aufstellung des Hydroisohypsenplanes wird die Ausgangsfunktion als Funktion von $y = f(x)$ dargestellt. Die Wasserhöhe $z_R(x, y)$ ist dabei als Parameter zu behandeln (siehe Abbildung 2.3).

$$z_R = \frac{1}{2} \frac{(y - 10)^2}{x}$$

$$y = \sqrt{2 \cdot x \cdot z_R} + 10$$

Wertetabelle für Abbildung 2.3:

x	$z_R=1$	$z_R=2$	$z_R=3$	$z_R=4$	$z_R=5$
10	14,47	16,32	17,75	18,94	20,00
5	13,16	14,47	15,48	16,32	17,07
0	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00
5	6,84	5,53	4,52	3,68	2,93
10	5,53	3,68	2,25	1,06	0,00

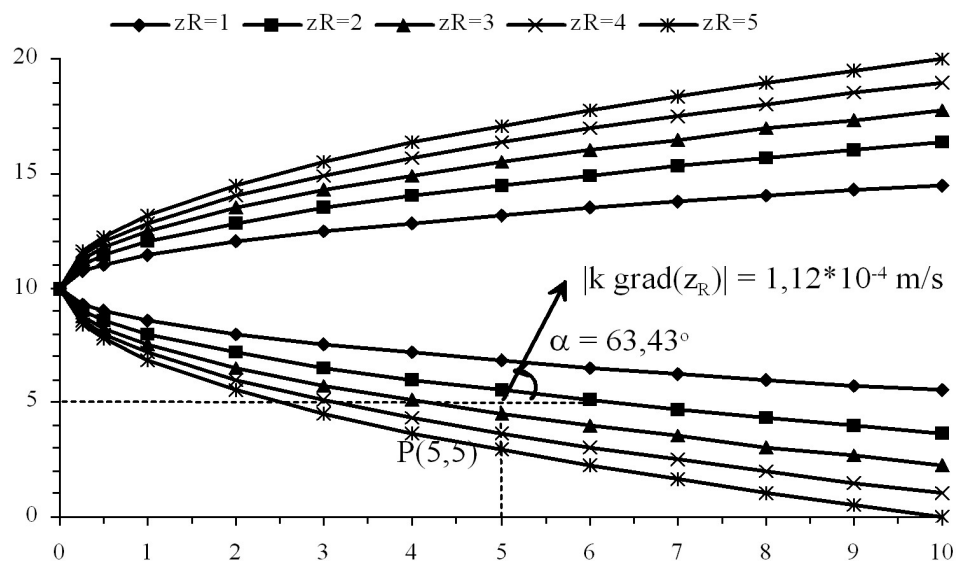


Abbildung 2.3: Darstellung der Hydroisohypsen

b. Die Filtergeschwindigkeit berechnet sich nach dem DARCY-Gesetz zu:

$$\vec{v} = -k \cdot \text{grad}(z_R)$$

Laut Aufgabenstellung ist:

$$z_R = \frac{1}{2} \frac{(y - 10)^2}{x}$$

Mit

$$\text{grad} = \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= -k \cdot \left(\frac{\partial z_R}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z_R}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial z_R}{\partial z} \vec{k} \right) \\ \vec{v} &= -k \cdot \left(-\frac{1}{2} \frac{(y-10)^2}{x^2} \vec{i} + \frac{(y-10)}{x} \vec{j} \right) \end{aligned}$$

Für den angegebenen Punkt $P(5, 5)$ ergibt sich die Filtgergeschwindigkeit zu:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{P(5,5)} &= -k \cdot \left(-\frac{1}{2} \frac{(5-10)^2}{5^2} \vec{i} + \frac{(5-10)}{5} \vec{j} \right) \\ \vec{v}_{P(5,5)} &= -k \cdot \left(-\frac{1}{2} \vec{i} + 1 \vec{j} \right) \end{aligned}$$

Der Geschwindigkeitsvektor liegt im 1. Quadrant (siehe Abbildung 2.3). Der Betrag der Filtergeschwindigkeit beträgt:

$$\begin{aligned} |\vec{v}_{P(5,5)}| &= -k \cdot \left(-\frac{1}{2} \vec{i} - 1 \vec{j} \right) \\ &= 0,0001 \frac{m}{s} \cdot \sqrt{\left(-\frac{1}{2} \right)^2 + (-1)^2} \\ |\vec{v}_{P(5,5)}| &= 0,0001 \frac{m}{s} \cdot 1,12 = 0,000112 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

Der Betrag des Richtungsvektor $\vec{\alpha}$ beträgt:

$$\begin{aligned} |\vec{\alpha}| &= \arctan \frac{v_y}{v_x} = \arctan \frac{-1}{-\frac{1}{2}} \\ &= \arctan(2) \\ |\vec{\alpha}| &= 1,107 \triangleq 63,43^\circ \end{aligned}$$

c. Die Quell- / Senkenfreiheit wird an Hand der Divergenz geprüft.

$$\text{div } \vec{v} = \text{div}(-k \cdot \text{grad}(z_R)) = \nabla \cdot (-k \cdot \nabla z_R) \stackrel{?}{=} 0$$

Entsprechend der Lösung zu Aufgabe 9b ist:

$$\nabla z_R = \left(-\frac{1}{2} \frac{(y-10)^2}{x^2} \vec{i} + \frac{(y-10)}{x} \vec{j} \right)$$

Da hier laut Aufgabenstellung nur geprüft werden soll, ob Divergenz vorliegt oder nicht, kann formal durch k dividiert werden ($k = \text{const.}$) und damit ergibt sich:

$$\nabla \cdot (-k \cdot \nabla z_R) \stackrel{?}{=} 0$$

$$-k \cdot \nabla \cdot \nabla z_R \stackrel{?}{=} 0$$

$$\nabla \cdot \nabla z_R \stackrel{?}{=} 0$$

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{grad}(z_R)) &= \nabla \cdot \left(-\frac{1}{2} \frac{(y-10)^2}{x^2} \vec{i} + \frac{(y-10)}{x} \vec{j} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{2} \frac{(y-10)^2}{x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{(y-10)}{x} \right) \end{aligned}$$

$$\text{div}(\text{grad}(z_R)) = \frac{(y-10)^2}{x^3} + \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \Rightarrow \infty} \left(\frac{(y-10)^2}{x^3} + \frac{1}{x} \right) = 0$$

Da dieser Ausdruck nur für $x \Rightarrow \infty$ verschwindet, besitzt das Feld Quell- bzw. Senkenaktivitäten.

Kapitel 3

Interpolationsverfahren

Aufgaben zu 3:

1. Für die Funktion der Normalverteilung $y(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$, die auszugsweise tabelliert ist:

x	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00
$y(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$	0,2420	0,1942	0,1497	0,1109	0,0790	0,0540

wird der Wert $y(x)$ für $x = 1,5$ gesucht.

(Lösung s.S. 101)

2. Interpolieren Sie die Funktion $y=\sqrt{x}$ für die Werte $x = 1,03$ und $x = 1,26$ an Hand der Tabelle.

x	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30
$y = \sqrt{x}$	1,00000	1,02470	1,04881	1,07238	1,09544	1,11803	1,14017

(Lösung s.S. 112)

3. Durch die drei Stützpunkte $(1, -2)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$, ist eine ganze rationale Funktion möglichst niedrigen Grades zu legen.
Wie ändert sich diese Interpolationsfunktion, wenn man auch noch den Stützpunkt $(4, 4)$ dazunimmt?

(Lösung s.S. 123)

4. Interpolieren Sie oben stehende Aufgaben mittels der Verfahren:

- a) analytische Potenzfunktion
- b) LAGRANGESche Interpolationsformel
- c) NEWTONSche Interpolationsformel
- d) Spline-Funktion

Lösungen zu 3:

- zu Aufgabe 1 (s. S. 100)

a. analytische Potenzfunktion

Der Wert $y = 1,5$ liegt zwischen $x = 1,4$ und $x = 1,6$

x	1,40	1,60	1,80
y	0,1497	0,1109	0,0790

$$P(1,4) \approx y(1,4) = 0,1497 \implies a_0 + a_1 \cdot 1,4 + a_2 \cdot 1,4^2$$

$$P(1,6) \approx y(1,6) = 0,1109 \implies a_0 + a_1 \cdot 1,6 + a_2 \cdot 1,6^2$$

$$P(1,8) \approx y(1,8) = 0,0790 \implies a_0 + a_1 \cdot 1,8 + a_2 \cdot 1,8^2$$

$$X \cdot A = R$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1,4 & 1,96 \\ 1 & 1,6 & 2,56 \\ 1 & 1,8 & 3,24 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 0,1497 \\ 0,1109 \\ 0,0790 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det X = D &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1,6 & 2,56 \\ 1,8 & 3,24 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1,4 & 1,96 \\ 1,8 & 3,24 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1,4 & 1,96 \\ 1,6 & 2,56 \end{vmatrix} \\ &= 0,576 - 1,008 + 0,448 \\ &= 0,016 \end{aligned}$$

Berechnung von D_0 nach Sarrus-Regel:

$$\begin{aligned}\det A_0 = D_0 &= \begin{vmatrix} 0,1497 & 1,4 & 1,96 \\ 0,1109 & 1,6 & 2,56 \\ 0,0790 & 1,8 & 3,24 \end{vmatrix} \\ &= 0,1497 \cdot 1,6 \cdot 3,24 + 1,4 \cdot 2,56 \cdot 0,079 + 1,96 \cdot 0,1109 \cdot 1,8 \\ &\quad - 0,079 \cdot 1,6 \cdot 1,96 - 1,8 \cdot 2,56 \cdot 0,1497 - 3,24 \cdot 0,1105 \cdot 1,4 \\ &= 0,009832\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det A_1 = D_1 &= \begin{vmatrix} 1 & 0,1497 & 1,96 \\ 1 & 0,1109 & 2,56 \\ 1 & 0,0790 & 3,24 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0,1109 & 2,56 \\ 0,0790 & 3,24 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0,1497 & 1,96 \\ 0,0790 & 3,24 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0,1497 & 1,96 \\ 0,1109 & 2,56 \end{vmatrix} \\ &= 0,157076 - 0,330188 + 0,165868 \\ &= -0,007244\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det A_2 = D_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 1,4 & 0,1497 \\ 1 & 1,6 & 0,1109 \\ 1 & 1,8 & 0,0790 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1,6 & 0,1109 \\ 1,8 & 0,0790 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1,4 & 0,1497 \\ 1,8 & 0,0790 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1,4 & 0,1497 \\ 1,6 & 0,1109 \end{vmatrix} \\ &= -0,07322 + 0,15886 - 0,08426 \\ &= 0,00138\end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{D_0}{D} = \frac{0,009832}{0,016} = 0,6145$$

$$a_1 = \frac{D_1}{D} = -\frac{0,007244}{0,016} = -0,45275$$

$$a_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{0,00138}{0,016} = 0,08625$$

$$P(x) = 0,6145 - 0,45275 \cdot x + 0,08625 \cdot x^2$$

$$P(1,50) = 0,6145 - 0,45275 \cdot 1,5 + 0,08625 \cdot 1,5^2$$

$$= \mathbf{0,1294375}$$

Probe:

$$y(1,5) = \frac{e^{-1,5^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = \mathbf{0,1295175}$$

b. LAGRANGESche Interpolationsformel**Lineare Interpolation**

$$P(x) = \frac{1}{2} \cdot (y_0 + y_1);$$

$x_0 = 1,4$	$x_1 = 1,6$
$y_0 = 0,1497$	$y_1 = 0,1109$

$$P(1,5) = \frac{1}{2} \cdot (0,1497 + 0,1109) = \mathbf{0,1303};$$

Quadratische Interpolation

$$P(x) = \frac{3}{8} \cdot y_0 + \frac{3}{4} \cdot y_1 - \frac{1}{8} \cdot y_2;$$

$x_0 = 1,40$	$x_1 = 1,60$	$x_2 = 1,80$
$y_0 = 0,1497$	$y_1 = 0,1109$	$y_2 = 0,0790$

$$P(1,5) = \frac{3}{8} \cdot 0,1497 + \frac{3}{4} \cdot 0,1109 - \frac{1}{8} \cdot 0,079 = \mathbf{0,1294375};$$

Kubische Interpolation

$$P(x) = -\frac{1}{16} \cdot y_{-1} + \frac{9}{16} \cdot y_0 + \frac{9}{16} \cdot y_1 - \frac{1}{16} \cdot y_2;$$

$x_{-1} = 1,2$	$x_0 = 1,4$	$x_1 = 1,6$	$x_2 = 1,8$
$y_{-1} = 0,1942$	$y_0 = 0,1497$	$y_1 = 0,1109$	$y_2 = 0,0790$

$$P(1,5) = -\frac{1}{16} \cdot 0,1942 + \frac{9}{16} \cdot 0,1497 + \frac{9}{16} \cdot 0,1109 - \frac{1}{16} \cdot 0,0790 = \mathbf{0,1295125};$$

c. NEWTONSche Interpolationsformel

$$x_0 = 1,2 \quad y_0 = 0,1942$$

$$\Delta y_0 = -0,0445$$

$$x_1 = 1,4 \quad y_1 = 0,1497 \quad \Delta^2 y_0 = 0,0057$$

$$\Delta y_1 = -0,0388 \quad \Delta^3 y_0 = 0,0012$$

$$x_2 = 1,6 \quad y_2 = 0,1109 \quad \Delta^2 y_1 = 0,0069 \quad \Delta^4 y_0 = -0,0012$$

$$\Delta y_2 = -0,0319 \quad \Delta^3 y_1 = 0$$

$$x_3 = 1,8 \quad y_3 = 0,0790 \quad \Delta^2 y_2 = 0,0069$$

$$\Delta y_3 = -0,025$$

$$x_4 = 2,0 \quad y_4 = 0,0540$$

Quadratische Interpolation

$$\begin{aligned} P_2(x) &= y_1 + \frac{\Delta y_1}{h} \cdot (x - x_1) + \frac{\Delta^2 y_1}{2! \cdot h^2} \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2); \\ P_2(1,5) &= 0,1497 - \frac{0,0388}{0,2} \cdot (1,5 - 1,4) + \frac{0,0069}{2 \cdot 0,04} \cdot (1,5 - 1,4) \cdot (1,5 - 1,6) \\ &= \mathbf{0,1294375} \end{aligned}$$

Kubische Interpolation

$$\Delta^3 y_1 = 0 \quad \implies \quad P_2(x) = P_3(x)$$

d. Spline-Funktion

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1, 0	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
y_i	0, 242	0, 1942	0, 1497	0, 1109	0, 0790	0, 0540

$$h_i = x_{i+1} - x_i = 0, 2$$

$$h_i + h_{i+1} = 0, 4$$

$$a_i = y_i$$

$$c_0 = c_5 = 0$$

$$P_i(x) := a_i + b_i \cdot (x - x_i) + c_i \cdot (x - x_i)^2 + d_i \cdot (x - x_i)^3$$

$$A \cdot C = R$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 \cdot (h_0 + h_1) & h_1 & 0 & 0 \\ h_1 & 2 \cdot (h_1 + h_2) & h_2 & 0 \\ 0 & h_2 & 2 \cdot (h_2 + h_3) & h_3 \\ 0 & 0 & h_3 & 2 \cdot (h_3 + h_4) \end{pmatrix}$$

Somit gilt:

$$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix}$$

$$r_i = \frac{3}{h_i} \cdot (a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}} \cdot (a_i - a_{i-1}) = 15 \cdot (a_{i+1} - 2 \cdot a_i + a_{i-1})$$

$$r_1 = 15 \cdot (0,1497 - 2 \cdot 0,1942 + 0,242) = 0,0495$$

$$r_2 = 15 \cdot (0,1109 - 2 \cdot 0,1497 + 0,1942) = 0,0855$$

$$r_3 = 15 \cdot (0,079 - 2 \cdot 0,1109 + 0,1497) = 0,1035$$

$$r_4 = 15 \cdot (0,054 - 2 \cdot 0,079 + 0,1109) = 0,1035$$

$$R = \begin{pmatrix} 0,0495 \\ 0,0855 \\ 0,1035 \\ 0,1035 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det A = D &= 0,8 \cdot \begin{vmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{vmatrix} - 0,2 \cdot \begin{vmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{vmatrix} \\ &= 0,8 \cdot (0,512 - 0,032 - 0,032) - 0,2 \cdot (0,128 - 0,009) \\ &= 0,3344\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det A_1 = D_1 &= \begin{vmatrix} 0,0495 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0,0855 & 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0,1035 & 0,2 & 0,8 & 0,2 \\ 0,1035 & 0 & 0,2 & 0,8 \end{vmatrix} \\ &= 0,0495 \cdot \begin{vmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{vmatrix} - 0,2 \cdot \begin{vmatrix} 0,0855 & 0,2 & 0 \\ 0,1035 & 0,8 & 0,2 \\ 0,1035 & 0,2 & 0,8 \end{vmatrix} \\ &= 0,022176 - 0,007776 \\ &= 0,0144\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det A_2 = D_2 &= \begin{vmatrix} 0,8 & 0,0495 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,0855 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,1035 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0,1035 & 0,2 & 0,8 \end{vmatrix} \\
&= 0,8 \cdot \begin{vmatrix} 0,0855 & 0,2 & 0 \\ 0,1035 & 0,8 & 0,2 \\ 0,1035 & 0,2 & 0,8 \end{vmatrix} - 0,0495 \cdot \begin{vmatrix} 0,2 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{vmatrix} \\
&= 0,8 \cdot 0,03888 - 0,0495 \cdot 0,12 \\
&= 0,025164
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det A_3 = D_3 &= \begin{vmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,0495 & 0 \\ 0,2 & 0,8 & 0,0855 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,1035 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,1035 & 0,8 \end{vmatrix} \\
&= 0,8 \cdot \begin{vmatrix} 0,8 & 0,0855 & 0 \\ 0,2 & 0,1035 & 0,2 \\ 0 & 0,1035 & 0,8 \end{vmatrix} - 0,2 \cdot \begin{vmatrix} 0,2 & 0,0495 & 0 \\ 0,2 & 0,1035 & 0,2 \\ 0 & 0,1035 & 0,8 \end{vmatrix} \\
&= 0,8 \cdot 0,036 - 0,2 \cdot 0,045 \\
&= 0,0279
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det A_4 = D_4 &= \begin{vmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 & 0,0495 \\ 0,2 & 0,8 & 0,2 & 0,0855 \\ 0 & 0,2 & 0,8 & 0,1035 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,1035 \end{vmatrix} \\
&= 0,8 \cdot \begin{vmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,0855 \\ 0,2 & 0,8 & 0,1035 \\ 0 & 0,2 & 0,1035 \end{vmatrix} - 0,2 \cdot \begin{vmatrix} 0,2 & 0 & 0,0495 \\ 0,2 & 0,8 & 0,1035 \\ 0 & 0,2 & 0,1035 \end{vmatrix} \\
&= 0,8 \cdot 0,04896 - 0,2 \cdot 0,01242 \\
&= 0,036688
\end{aligned}$$

$$c_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{0,0144}{0,3344} = 0,0430622$$

$$c_2 = 0,0752511$$

$$c_3 = 0,083433;$$

$$c_4 = 0,1097009$$

$$b_i = \frac{1}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{h_i}{3}(c_{i+1} - 2 \cdot c_i)$$

$$b_0 = \frac{1}{0,2}(0,1942 - 0,242) - \frac{0,2}{3}(0,0430622 - 2 \cdot 0) = -0,2418708$$

$$b_1 = \frac{1}{0,2}(0,1497 - 0,1942) - \frac{0,2}{3}(0,0752511 - 2 \cdot 0,0430622) = -0,2217751$$

$$b_2 = \frac{1}{0,2}(0,1109 - 0,1497) - \frac{0,2}{3}(0,083433 - 2 \cdot 0,0752511) = -0,1895287$$

$$b_3 = \frac{1}{0,2}(0,0790 - 0,1109) - \frac{0,2}{3}(0,1097009 - 2 \cdot 0,083433) = -0,1556889$$

$$b_4 = \frac{1}{0,2}(0,0540 - 0,0790) - \frac{0,2}{3}(0 - 2 \cdot 0,1097009) = -0,1103732$$

$$d_i = \frac{1}{3 \cdot h_i}(c_{i+1} - c_i)$$

$$d_0 = \frac{1}{0,6}(0,0430622 - 0) = 0,0717703$$

$$d_1 = \frac{1}{0,6}(0,0752511 - 0,0430622) = 0,0536481$$

$$d_2 = \frac{1}{0,6}(0,083433 - 0,0752511) = 0,0136365$$

$$d_3 = \frac{1}{0,6}(0,1097009 - 0,083433) = 0,0422848$$

$$d_4 = \frac{1}{0,6}(0 - 0,1097009) = -0,1828349$$

$$P_0(x) = 0,242 - 0,2418708 \cdot (x - 1) + 0,0717703 \cdot (x - 1)^3$$

$$1,0 \leq x \leq 1,2;$$

$$P_1(x) = 0,1942 - 0,2217751 \cdot (x - 1,2) + 0,0430622 \cdot (x - 1,2)^2$$

$$+ 0,0536481 \cdot (x - 1,2)^3$$

$$1,2 \leq x \leq 1,4$$

$$P_2(x) = 0,1497 - 0,1895287 \cdot (x - 1,4) + 0,0752511 \cdot (x - 1,4)^2$$

$$+ 0,0136365 \cdot (x - 1,4)^3$$

$$1,4 \leq x \leq 1,6$$

$$P_3(x) = 0,1109 - 0,1556889 \cdot (x - 1,6) + 0,083433 \cdot (x - 1,6)^2$$

$$+ 0,0422848 \cdot (x - 1,6)^3$$

$$1,6 \leq x \leq 1,8$$

$$P_4(x) = 0,0790 - 0,1103732 \cdot (x - 1,8) + 0,1097009 \cdot (x - 1,8)^2$$

$$- 0,1828349 \cdot (x - 1,8)^3$$

$$1,8 \leq x \leq 2,0$$

- zu Aufgabe 2 (S.S. 100)

a. analytische Potenzfunktion

I. Interpolation von $\sqrt{1,03}$

Der Wert 1,03 liegt zwischen $x = 1,0$ und $x = 1,05$

x	1,00	1,05	1,10
y	1,00	1,0247	1,04881

$$P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$$

$$P(1,00) \approx y(1,00) = 1,00 \implies a_0 + a_1 \cdot 1,00 + a_2 \cdot 1,00^2$$

$$P(1,05) \approx y(1,05) = 1,0247 \implies a_0 + a_1 \cdot 1,05 + a_2 \cdot 1,05^2$$

$$P(1,10) \approx y(1,10) = 1,04881 \implies a_0 + a_1 \cdot 1,10 + a_2 \cdot 1,10^2$$

$$X \cdot A = R$$
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1,05 & 1,1025 \\ 1 & 1,1 & 1,21 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}; \quad R = \begin{pmatrix} 1,00 \\ 1,0247 \\ 1,04881 \end{pmatrix}$$

$$\det X = D = 0,00025$$

$$\det X_0 = D_0 = \begin{vmatrix} 1,00 & 1 & 1 \\ 1,0247 & 1,05 & 1,1025 \\ 1,04881 & 1,1 & 1,21 \end{vmatrix}$$

$$= 0,0000955$$

$$\det X_1 = D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1,00 & 1 \\ 1 & 1,0247 & 1,1025 \\ 1 & 1,04881 & 1,21 \end{vmatrix}$$

$$= 0,000183975$$

$$\det X_2 = D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1,00 \\ 1 & 1,05 & 1,0247 \\ 1 & 1,1 & 1,04881 \end{vmatrix}$$

$$= -0,0000295$$

$$a_0 = \frac{D_0}{D} = 0,382$$

$$a_1 = \frac{D_1}{D} = 0,7356$$

$$a_2 = \frac{D_2}{D} = -0,118$$

$$P(x) = 0,382 + 0,7356 \cdot x - 0,118 \cdot x^2$$

$$x = 1,03$$

$$P(1,03) = \mathbf{1,0144818}$$

Probe:

$$\sqrt{1,03} = 1,0148892$$

$$a_0 + a_1 + a_2 = 0,9996 \approx 1;$$

II) Interpolation von $\sqrt{1,26}$ Der Wert 1,26 liegt zwischen $x = 1,25$ und $x = 1,30$.

x	1,20	1,25	1,30
y	1,09544	1,11803	1,14017

$$P(1,20) \approx y(1,20) = 1,09544 \implies a_0 + a_1 \cdot 1,20 + a_2 \cdot 1,20^2$$

$$P(1,25) \approx y(1,25) = 1,11803 \implies a_0 + a_1 \cdot 1,25 + a_2 \cdot 1,25^2$$

$$P(1,30) \approx y(1,30) = 1,14017 \implies a_0 + a_1 \cdot 1,30 + a_2 \cdot 1,30^2$$

$$X \cdot A = R$$
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1,2 & 1,44 \\ 1 & 1,25 & 1,5625 \\ 1 & 1,3 & 1,69 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}; \quad R = \begin{pmatrix} 1,09544 \\ 1,11803 \\ 1,14017 \end{pmatrix}$$

$$\det X = D = 0,00025;$$

$$\det X_0 = D_0 = 0,00010457$$

$$\det X_1 = D_1 = 0,000168075$$

$$\det X_2 = D_2 = -0,0000225$$

$$a_0 = \frac{D_0}{D} = 0,4184$$

$$a_1 = \frac{D_1}{D} = 0,6724$$

$$a_2 = \frac{D_2}{D} = -0,09$$

$$P(x) = 0,4184 + 0,6724 \cdot x - 0,09 \cdot x^2$$

$$x = 1,26$$

$$P(1,26) = \mathbf{1,12274}$$

Probe:

$$\sqrt{1,26} = \mathbf{1,1224972}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 = 1,0008 \approx 1$$

b. LAGRANGESche Interpolationsformel**I.) Interpolation von $\sqrt{1,03}$**

$x_0 = 1,00$	$x_1 = 1,05$	$x_2 = 1,10$
$y_0 = 1,00$	$y_1 = 1,0247$	$y_2 = 1,04881$

$$L_0(x) = \frac{(x - 1,05) \cdot (x - 1,1)}{(1 - 1,05) \cdot (1 - 1,1)} = \frac{(x - 1,05) \cdot (x - 1,1)}{0,005}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - 1) \cdot (x - 1,1)}{(1,05 - 1) \cdot (1,05 - 1,1)} = -\frac{(x - 1) \cdot (x - 1,1)}{0,0025}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - 1) \cdot (x - 1,05)}{0,005}$$

$$P(x) = L_0(x) \cdot y_0 + L_1(x) \cdot y_1 + L_2(x) \cdot y_2$$

$$P(x) = \frac{(x - 1,05) \cdot (x - 1,1)}{0,005} + -\frac{(x - 1) \cdot (x - 1,1)}{0,0025} \cdot 1,0247 + \\ + \frac{(x - 1) \cdot (x - 1,05)}{0,005} \cdot 1,04881$$

$$P(1,03) = \mathbf{1,0148908}$$

$$\sqrt{1,03} = \mathbf{1,0148892}$$

II) Interpolation von $\sqrt{1,26}$

$x_0 = 1,20$	$x_1 = 1,25$	$x_2 = 1,30$
$y_0 = 1,09544$	$y_1 = 1,11803$	$y_2 = 1,14017$

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-1,25) \cdot (x-1,3)}{(1,2-1,25) \cdot (1,2-1,3)} = \frac{(x-1,25) \cdot (x-1,3)}{0,005} \\
L_1(x) &= \frac{(x-1,2) \cdot (x-1,3)}{(1,25-1,2) \cdot (1,25-1,3)} = -\frac{(x-1,2) \cdot (x-1,3)}{0,0025} \\
L_2(x) &= \frac{(x-1,2) \cdot (x-1,25)}{(1,3-1,2) \cdot (1,3-1,25)} = \frac{(x-1,2) \cdot (x-1,25)}{0,005} \\
P(x) &= \frac{(x-1,25) \cdot (x-1,3)}{0,005} \cdot 1,09544 - \frac{(x-1,2) \cdot (x-1,3)}{0,0025} \cdot 1,11803 + \\
&\quad + \frac{(x-1,2) \cdot (x-1,25)}{0,005} \cdot 1,14017
\end{aligned}$$

$$P(1,26) = 1,122494$$

$$\sqrt{1,26} = 1,1224972;$$

c. NEWTONsche Interpolationsformel

$x_0 = 1,00$	$y_0 = 1,00$	$\Delta y_0 = 0,0247$		
$x_1 = 1,05$	$y_1 = 1,0247$		$\Delta^2 y_0 = -0,00059$	
		$\Delta y_1 = 0,02411$		$\Delta^3 y_0 = 0,00005$
$x_2 = 1,10$	$y_2 = 1,04881$		$\Delta^2 y_1 = -0,00054$	
		$\Delta y_2 = 0,02357$		$\Delta^3 y_1 = 0,00003$
$x_3 = 1,15$	$y_3 = 1,07238$		$\Delta^2 y_2 = -0,00051$	
		$\Delta y_3 = 0,02306$		$\Delta^3 y_2 = 0,00004$
$x_4 = 1,20$	$y_4 = 1,09544$		$\Delta^2 y_3 = -0,00047$	
		$\Delta y_4 = 0,02259$		$\Delta^3 y_3 = 0,00002$
$x_5 = 1,25$	$y_5 = 1,11803$		$\Delta^2 y_4 = -0,00045$	
		$\Delta y_5 = 0,02214$		
$x_6 = 1,30$	$y_6 = 1,14017$			

I. Interpolation von $\sqrt{1,03}$

Der Wert $x = 1,03$ liegt zwischen x_0 und x_1 , $h_i = x_{i+1} - x_i = 0,05$

Lineare Interpolation

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} \cdot (x - x_0); \\
P_1(1,03) &= 1 + \frac{0,0247}{0,05} \cdot (1,03 - 1) \\
&= 1,01482;
\end{aligned}$$

Quadratische Interpolation

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} \cdot (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! \cdot h^2} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1); \\
P_2(1,03) &= P_1(1,03) - \frac{0,00059}{0,005} \cdot (1,03 - 1) \cdot (1,03 - 1,05) \\
&= \mathbf{1,0148271};
\end{aligned}$$

Kubische Interpolation

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= P_2(x) + \frac{\Delta^3 y_0}{3! \cdot h^3} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2); \\
P_3(1,03) &= P_2(1,03) + \frac{0,00005}{6 \cdot 0,05^3} \cdot (1,03 - 1) \cdot (1,03 - 1,05) \cdot (1,03 - 1,1) \\
&= \mathbf{1,01482738};
\end{aligned}$$

Probe:

$$\sqrt{1,03} = \mathbf{1,0148892};$$

II) Interpolation von $\sqrt{1,26}$ Der Wert $x = 1,26$ liegt zwischen x_3, x_4, x_5 und x_6 .**Lineare Interpolation**Für lineare Interpolation benutzen wir die Punkte x_5 und x_6 .

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= y_5 + \frac{\Delta y_5}{h} \cdot (x - x_5); \\
P_1(1,26) &= 1,11803 + \frac{0,02214}{0,05} \cdot (1,26 - 1,25) \\
&= \mathbf{1,122458};
\end{aligned}$$

Quadratische Interpolation

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= y_4 + \frac{\Delta y_4}{h} \cdot (x - x_4) + \frac{\Delta^2 y_4}{2! \cdot h^2} \cdot (x - x_4) \cdot (x - x_5); \\
P_2(1,26) &= 1,09544 + \frac{0,02259}{0,05} \cdot (1,26 - 1,2) - \frac{0,00045}{0,005} \cdot (1,26 - 1,2) \cdot (1,26 - 1,25) \\
&= \mathbf{1,122494};
\end{aligned}$$

Kubische Interpolation

$$\begin{aligned}P_3(x) &= y_3 + \frac{\Delta y_3}{h} \cdot (x - x_3) + \frac{\Delta^2 y_3}{2! \cdot h^2} \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4) + \\&+ \frac{\Delta^3 y_3}{3! \cdot h^3} \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4) \cdot (x - x_5); \\P_3(1,26) &= 1,07238 + \frac{0,02306}{0,05} \cdot (1,26 - 1,15) - \frac{0,00047}{0,005} \cdot (1,26 - 1,15) \cdot (1,26 - 1,2) + \\&+ \frac{0,00002}{6 \cdot 0,05^3} \cdot (1,26 - 1,15) \cdot (1,26 - 1,2) \cdot (1,26 - 1,25) \\&= \mathbf{1,1224934};\end{aligned}$$

Probe:

$$\sqrt{1,26} = \mathbf{1,1224972};$$

d. Spline-Funktion

$$y(x) = \sqrt{x}$$

i	0	1	2	3	4
x_i	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20
y_i	1,00	1,0247	1,04881	1,07238	1,09544

$$h_i = x_{i+1} - x_i = 0,05; \quad h_i + h_{i+1} = 0,1;$$

$$a_i = y_i; \quad c_0 = c_4 = 0;$$

$$P_i(x) = a_i + b_i \cdot (x - x_i) + c_i \cdot (x - x_i)^2 + d_i \cdot (x - x_i)^3$$

$$A \cdot C = R$$

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} 2 \cdot (h_0 + h_1) & h_1 & 0 \\ h_1 & 2 \cdot (h_1 + h_2) & h_2 \\ 0 & h_2 & 2 \cdot (h_2 + h_3) \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 0,2 & 0,05 & 0 \\ 0,05 & 0,2 & 0,05 \\ 0 & 0,05 & 0,2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}; \quad R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

$$r_i = \frac{3}{h_i} \cdot (a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}} \cdot (a_i - a_{i-1}) = 60 \cdot (a_{i+1} - 2 \cdot a_i + a_{i-1})$$

$$r_1 = 60 \cdot (1,04881 - 2 \cdot 1,0247 + 1) = -0,0354$$

$$r_2 = 60 \cdot (1,07238 - 2 \cdot 1,04881 + 1,0247) = -0,0324$$

$$r_3 = 60 \cdot (1,09544 - 2 \cdot 1,07238 + 1,04881) = -0,0306$$

$$R = \begin{pmatrix} -0,0354 \\ -0,0324 \\ -0,0306 \end{pmatrix}$$

$$\det A = D = \begin{vmatrix} 0,2 & 0,05 & 0 \\ 0,05 & 0,2 & 0,05 \\ 0 & 0,05 & 0,2 \end{vmatrix} = 0,008 - 0,0005 - 0,0005 = 0,007$$

$$\begin{aligned} \det A_1 = D_1 &= \begin{vmatrix} -0,0354 & 0,05 & 0 \\ -0,0324 & 0,2 & 0,05 \\ -0,0306 & 0,05 & 0,2 \end{vmatrix} \\ &= -0,0354 \cdot \begin{vmatrix} 0,2 & 0,05 \\ 0,05 & 0,2 \end{vmatrix} - 0,05 \cdot \begin{vmatrix} -0,0324 & 0,05 \\ -0,0306 & 0,2 \end{vmatrix} \\ &= -0,00108 \end{aligned}$$

$$\det A_2 = D_2 = \begin{vmatrix} 0,2 & -0,0354 & 0 \\ 0,05 & -0,0324 & 0,05 \\ 0 & -0,0306 & 0,2 \end{vmatrix} = -0,000636$$

$$\det A_3 = D_3 = \begin{vmatrix} 0,2 & 0,05 & -0,0354 \\ 0,05 & 0,2 & -0,0324 \\ 0 & 0,05 & -0,0306 \end{vmatrix} = -0,000912$$

$$c_1 = \frac{D_1}{D} = -0,1542857$$

$$c_2 = -0,0908571$$

$$c_3 = -0,1302857$$

$$b_i = \frac{1}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{h_i}{3}(c_{i+1} - 2 \cdot c_i)$$

$$b_0 = \frac{1}{0,05}(1,0247 - 1) - \frac{0,05}{3}(-0,1542857 - 2 \cdot 0)$$

$$= 0,4965714$$

$$b_1 = \frac{1}{0,05}(1,04881 - 1,0247) - \frac{0,05}{3}(-0,0908571 - 2 \cdot (-0,1542857))$$

$$= 0,4785714$$

$$b_2 = \frac{1}{0,05}(1,07238 - 1,04881) - \frac{0,05}{3}(-0,1302857 - 2 \cdot (-0,0908571))$$

$$= 0,4705428$$

$$b_3 = \frac{1}{0,05}(1,09544 - 1,07238) - \frac{0,05}{3}(0 + 2 \cdot 0,1302857)$$

$$= 0,4568571$$

$$d_i = \frac{1}{3 \cdot h_i}(c_{i+1} - c_i)$$

$$d_0 = \frac{1}{0,15}(-0,1542857 - 0) = -1,0285713$$

$$d_1 = \frac{1}{0,15}(-0,0908571 + 0,1542857) = 0,4228573$$

$$d_2 = \frac{1}{0,15}(-0,1302857 + 0,0908571) = -0,2628573$$

$$d_3 = \frac{1}{0,15}(0 + 0,1302857) = 0,8685713$$

$$P_0(x) = 1 + 0,4965714 \cdot (x - 1) - 1,0285713 \cdot (x - 1)^3;$$

$$1,0 \leq x \leq 1,05;$$

$$P_1(x) = 1,0247 + 0,4785714 \cdot (x - 1,05) - 0,1542857 \cdot (x - 1,05)^2 + \\ + 0,4228573 \cdot (x - 1,05)^3;$$

$$1,05 \leq x \leq 1,1;$$

$$P_2(x) = 1,04881 + 0,4705428 \cdot (x - 1,1) - 0,0908571 \cdot (x - 1,1)^2 - \\ - 0,2628573 \cdot (x - 1,1)^3$$

$$1,1 \leq x \leq 1,15;$$

$$P_3(x) = 1,07238 + 0,4568571 \cdot (x - 1,15) - 0,1302857 \cdot (x - 1,15)^2 + \\ + 0,86857134 \cdot (x - 1,15)^3$$

$$1,15 \leq x \leq 1,20;$$

- **zu Aufgabe 3**(s.S. 100)

Gegeben sind die Stützpunkte:

$x_0 = 1$	$x_1 = 2$	$x_2 = 3$	$x_3 = 4$
$y_0 = -2$	$y_1 = 3$	$y_2 = 1$	$y_3 = 4$

Für drei Punkte: x_0, x_1, x_2 . gilt:

$$P(x) = L_0(x) \cdot y_0 + L_1(x) \cdot y_1 + L_2(x) \cdot y_2;$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2)} = \frac{(x - 2) \cdot (x - 3)}{3}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_2)}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2)} = -(x - 1) \cdot (x - 3)$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1)}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)} = \frac{(x - 1) \cdot (x - 2)}{2}$$

$$P(x) = -\frac{2}{3} \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) - 3 \cdot (x - 1) \cdot (x - 3) + \frac{1}{2} \cdot (x - 1) \cdot (x - 2);$$

Für vier Punkte: x_0, x_1, x_2, x_3 gilt:

$$P(x) = L_0(x) \cdot y_0 + L_1(x) \cdot y_1 + L_2(x) \cdot y_2 + L_3(x) \cdot y_3$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2) \cdot (x_0 - x_3)} = -\frac{1}{6} \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4)$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_3)} = \frac{1}{2} \cdot (x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4)$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_3)}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1) \cdot (x_2 - x_3)} = -\frac{1}{2} \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 4)$$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)}{(x_3 - x_0) \cdot (x_3 - x_1) \cdot (x_3 - x_2)} = \frac{1}{6} \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$$

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{3} \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) + \frac{3}{2} \cdot (x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 4) + \frac{2}{3} \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) \end{aligned}$$

Kapitel 4

Optimierungsprobleme

Zu diesem Kapitel sind keine Übungsaufgaben vorhanden.

Kapitel 5

Gewöhnliche Differentialgleichungen

5.1 Aufstellen von Differentialgleichungen

Aufgaben zu 5.1:

1. Der Grundwasserwiederanstieg und damit das Auffüllen der Restlöcher in den ehemaligen Braunkohlentagebauen dauert unter natürlichen Bedingungen zu lange. Deshalb wird versucht durch Fremdeinspeisung den Auffüllvorgang zu beschleunigen. Stellen Sie für den Auffüllvorgang $h_{(1,2)}(t)$, ohne Berücksichtigung des Grundwasserleiters und eventuellen Grundwasserneubildungsraten, die Differentialgleichung auf. In allen Fällen soll die Anfangsbedingung ($h_{t=0(1,2)} = 0$) gelten.
 - a) konstanter Volumenstrom (siehe Abbildung 5.1)
 - b) variabler Volumenstrom (siehe Abbildung 5.2)
 - c) gekoppelte Speicherkaskade (siehe Abbildung 5.3)
 - d) $V_1 + V_2 = const$

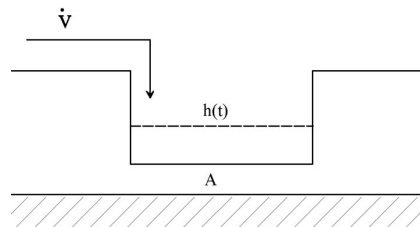


Abbildung 5.1: Füllvorgang eines Restloches mit konstantem Volumenstrom

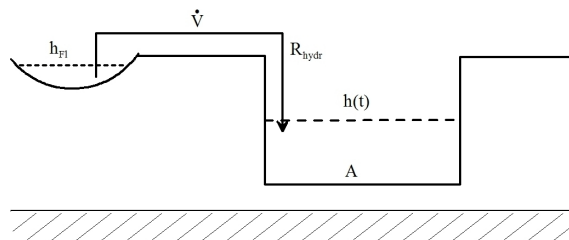


Abbildung 5.2: Füllvorgang eines Restloches mit variablem Volumenstrom

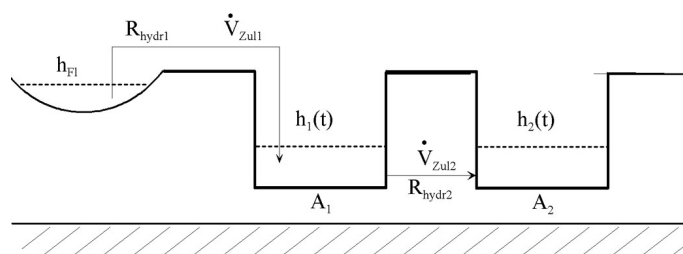


Abbildung 5.3: Gekoppelte Speicherkaskade

(Lösung s. S. 130)

2. Stellen Sie für folgendes hydraulische Schema (siehe Abbildung 5.4) mit zugehörigem Blockmodell die Differentialgleichung auf.

Gehen Sie dabei von linearisierten Verhältnissen und einem homogenen, isotropen Grundwasserleiter mit folgenden Parametern $k = 5 \cdot 10^{-4} \frac{m}{s}$; $n_0 = 0,2$; $z_{Rmittel} = 20m$; $l = 50m$ aus:

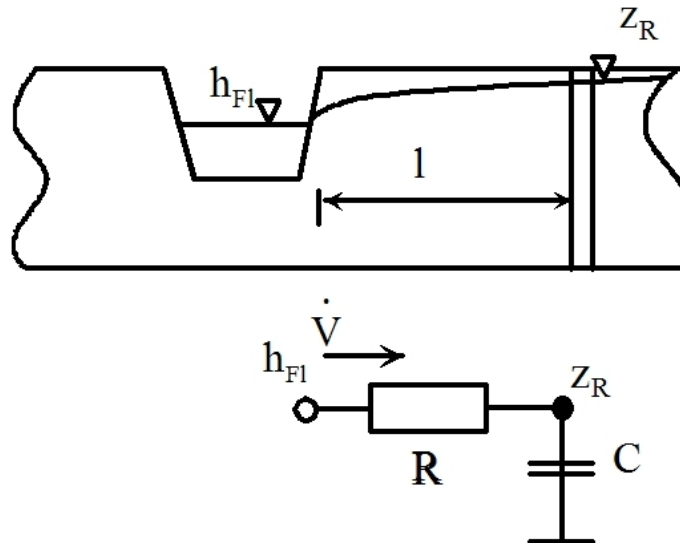


Abbildung 5.4: Schematische Darstellung des Grundwasserspiegels mit Blockschaltbild

(Lösung s. S. 134)

3. Für die Wasserstandsregelung eines Bewässerungsgrabens wird eine Schwimmerregelung eingesetzt (siehe Abbildung 5.5). Stellen Sie die Differentialgleichungen auf, mit

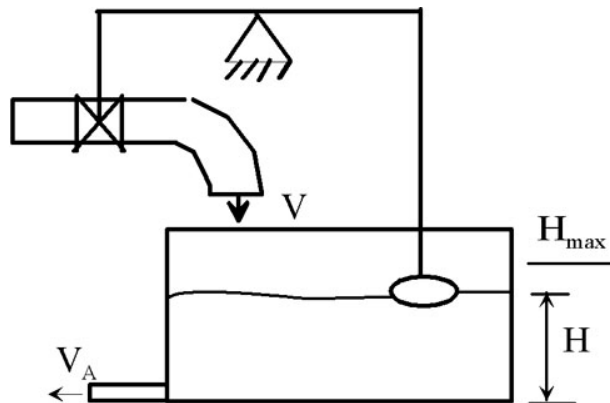


Abbildung 5.5: Wasserstandsregelung eines Bewässerungsgrabens

denen der Wasserstand H berechnet werden kann. Die Fläche des Behälters beträgt A . Der Volumenstrom \dot{V} ist abhängig vom Wasserstand H .

$$\dot{V} = K \cdot \dot{V}_{max} \cdot (H_{max} - H)$$

(Lösung s. S. 135)

Lösungen:

• zu Aufgabe 1 (s. S. 128)

 a. Konstanter Volumenstrom

Das Wasservolumen im Restloch (siehe Abbildung 5.6) berechnet sich zu:

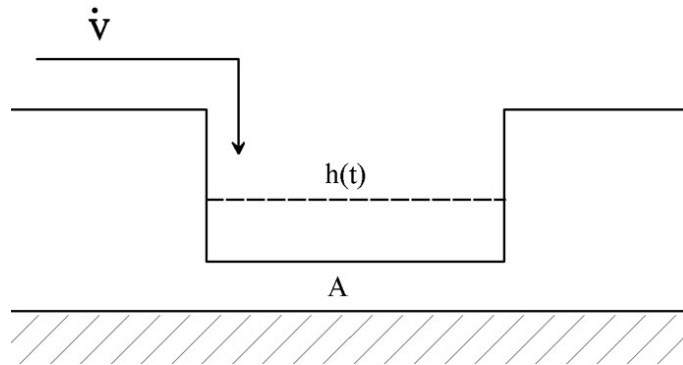


Abbildung 5.6: Füllvorgang eines Restloches mit konstantem Volumenstrom

$$V = A \cdot h$$

Die Änderung des Volumens pro Zeiteinheit ergibt sich zu:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d(A \cdot h)}{dt}$$

Stellt man jetzt die Bilanzgleichung auf, dass die Änderung des Volumens im Restloch dem Zustrom gleich sein muss, so erhält man:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{Zustr} &= \frac{dV_{Restl}}{dt} \\ &= \frac{d(A \cdot h)}{dt} \\ &= h \frac{dA}{dt} + A \frac{dh}{dt} \end{aligned}$$

Für den hier vorliegenden Fall, dass die Füllfläche konstant ist $A = const.$ ergibt sich:

$$A \frac{dh}{dt} = \dot{V}_{Zustr}$$

Bei der Lösung dieser Differentialgleichung müssen die Zeitabhängigkeit des Zustroms beachtet und entsprechende Anfangsbedingungen eingeführt werden.

 b. Variabler Volumenstrom

An Hand des Schemas (siehe Abbildung 5.7) können folgende Bilanz- und Energiegleichungen aufgestellt werden.

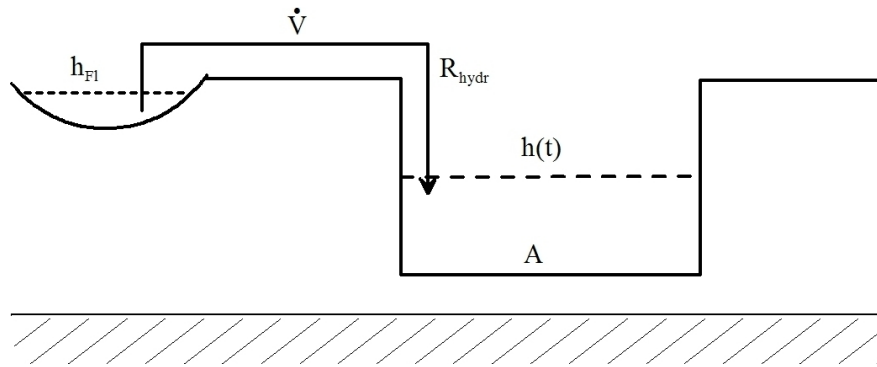


Abbildung 5.7: Füllvorgang eines Restloches mit variablem Volumenstrom

$$\frac{dV}{dt} = \frac{h_{Fl} - h(t)}{R_{hydr}}$$

$$V = A \cdot h(t)$$

$$\frac{dV}{dt} = A \cdot \frac{dh(t)}{dt}$$

Diese beiden Gleichungen werden im Sinn der Bilanzierung gleichgesetzt.

$$\frac{h_{Fl} - h(t)}{R_{hydr}} = A \cdot \frac{dh(t)}{dt}$$

$$R_{hydr} \cdot A \cdot \frac{dh(t)}{dt} + h(t) = h_{Fl}$$

c. Gekoppelte Speicherkaskade

An Hand des Schemas (siehe Abbildung 5.8) können folgende Bilanz- und Energiegleichungen aufgestellt werden.

$$\frac{dV_{Zul1}}{dt} = \frac{h_{Fl} - h_1(t)}{R_{hydr1}}$$

$$V_1 = A_1 \cdot h_1(t)$$

$$\frac{dV_1}{dt} = A_1 \cdot \frac{dh_1(t)}{dt} = \frac{dV_{Zul1}}{dt} - \frac{dV_{Zul2}}{dt}$$

Diese beiden Gleichungen werden im Sinn der Bilanzierung gleichgesetzt.

$$\frac{h_{Fl} - h_1(t)}{R_{hydr1}} = A_1 \cdot \frac{dh_1(t)}{dt}$$

$$R_{hydr1} \cdot A_1 \cdot \frac{dh_1(t)}{dt} + h_1(t) = h_{Fl} \quad (5.1)$$

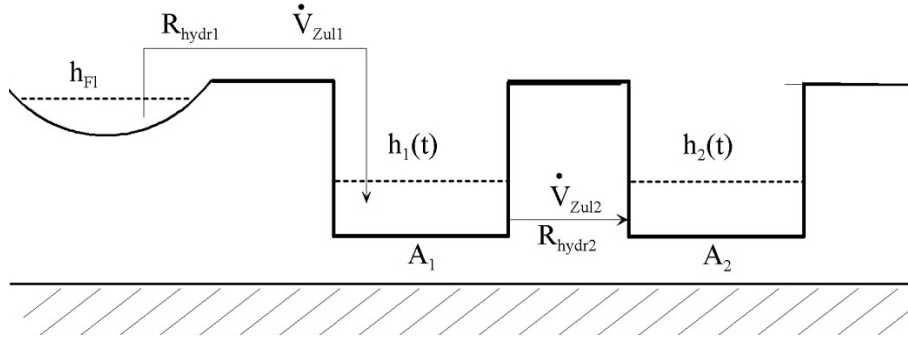


Abbildung 5.8: Gekoppelte Speicherkaskade

Die Flächen sollen hier als konstant angenommen werden. Für den Fall der zeitlich variablen Flächen muss die Differentiation entsprechend Lösung 1a durchgeführt werden. Für das Restloch 2 gilt entsprechend:

$$\begin{aligned}\frac{dV_{Zul2}}{dt} &= \frac{h_1(t) - h_2(t)}{R_{hydr2}} \\ V_2 &= A_2 \cdot h_2(t) \\ \frac{dV_2}{dt} &= A_2 \cdot \frac{dh_2(t)}{dt} = \frac{dV_{Zul2}}{dt}\end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen werden im Sinn der Bilanzierung gleichgesetzt.

$$\begin{aligned}\frac{h_1(t) - h_2(t)}{R_{hydr2}} &= A_2 \cdot \frac{dh_2(t)}{dt} \\ R_{hydr2} \cdot A_2 \cdot \frac{dh_2(t)}{dt} + h_2(t) &= h_1(t)\end{aligned}\tag{5.2}$$

Damit hat man zwei gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung (Gleichungen 5.1 und 5.2) erhalten. Setzt man Gleichung 5.2 in Gleichung 5.1 ein, so erhält man eine Differentialgleichung zweiter Ordnung (siehe Gleichung 5.3). Dabei soll

$$R_{hydrn} \cdot A_n = T_n$$

gesetzt werden:

$$\begin{aligned}R_{hydr1} \cdot A_1 \cdot \frac{dh_1(t)}{dt} + h_1(t) &= h_{Fl} \\ T_1 \cdot \frac{d\left(T_2 \cdot \frac{dh_2(t)}{dt} + h_2(t)\right)}{dt} + \left(T_2 \cdot \frac{dh_2(t)}{dt} + h_2(t)\right) &= h_{Fl} \\ T_1 \cdot T_2 \cdot \frac{d^2h_2(t)}{dt^2} + (T_1 + T_2) \cdot \frac{dh_2(t)}{dt} + h_2(t) &= h_{Fl}\end{aligned}\tag{5.3}$$

d. $V_1 + V_2 = \text{const} = V$

$$h_1 - h_2 = R_{hydrn} \cdot A \cdot \frac{dh_2}{dt}$$

$$V_1 = A_1 \cdot h_1; \quad V_2 = A_2 \cdot h_2$$

$$h_1 = \frac{V - A_2 h_2}{A_1}$$

$$\frac{V}{A_1} - \frac{A_2}{A_1} h_2 - h_2 = R_{hydrn} \cdot A \frac{dh_2}{dt}$$

$$R_{hydrn} \cdot A_2 \frac{dh_2}{dt} + h_2 \left(1 + \frac{A_2}{A_1} \right) = \frac{V}{A_1}$$

• zu Aufgabe 2 (s. S. 128)

Nach den Grundgesetzen der Dynamik und des Massenerhaltungsgesetzes (Bilanzgleichung) können folgende Gleichungen (siehe auch Gesetze der Rohr- und Gerinnehydraulik) für das angegebene Blockschaftbild (siehe Abbildung 5.9) formuliert werden.

In Anlehnung an das DARCY-Gesetz erhält man:

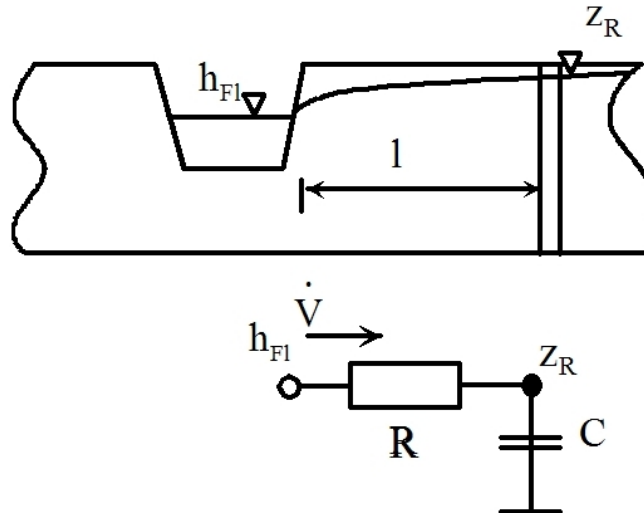


Abbildung 5.9: Schema der Grundwasserfließverhältnisse

$$v_x = k \cdot \frac{\Delta z_R}{\Delta x}$$

$$\dot{V} = A \cdot v = k \cdot b \cdot D \cdot \frac{h_{Fl} - z_R}{l}$$

- b senkrechte Breite des Grundwasserleiters
- l Länge zwischen Fluss und Grundwasserbeobachtungsrohr (GWBR)
- D Durchströmte Mächtigkeit des Strömungsfeldes

Unter Definition eines Strömungswiderstandes

$$R = \frac{l}{k \cdot z_R \cdot b} = \frac{l}{T \cdot b}$$

erhält man:

$$h_{Fl} = \dot{V} \cdot R + z_R$$

Die Bilanzgleichung gibt die gespeicherte oder freigegebene Wassermenge pro Zeiteinheit wieder:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= S \cdot A \frac{dz_R}{dt} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} S_0 \text{ gespannter GWL} \\ n_0 \text{ ungespannter GWL} \end{array} \right\} \cdot l \cdot b \cdot \frac{dz_R}{dt} \\ \dot{V} &= C \cdot \frac{dz_R}{dt}\end{aligned}$$

Damit erhält man folgende DGL

$$h_{Fl} = R \cdot C \frac{dz_R}{dt} + z_R$$

Führt man die Zeitkonstante T_1 , nicht zu Verwechseln mit der Transmissibilität T , ein, so lautet die Differentialgleichung:

$$T_1 = R \cdot C$$

$$T_1 \frac{dz_R}{dt} + z_R = h_{Fl}$$

• **zu Aufgabe 3 (s. S. 128)**

An Hand des Schemas (siehe Abbildung 5.10) können folgende Bilanz- und Energiegleichungen aufgestellt werden. Das Wasservolumen im Behälter berechnet sich zu:

$$V_{Beh} = A \cdot H$$

Die Änderung des Volumens pro Zeiteinheit ergibt sich zu:

$$\frac{dV_{Beh}}{dt} = \frac{d(A \cdot H)}{dt}$$

Stellt man jetzt die Bilanzgleichung auf, dass die Änderung des Volumens im Behälter der Differenz zwischen Zustrom und Abfluss gleich sein muss, so erhält man:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{Zustr} - \dot{V}_A &= \frac{dV_{Beh}}{dt} \\ &= \frac{d(A \cdot H)}{dt} \\ &= H \frac{dA}{dt} + A \frac{dH}{dt}\end{aligned}$$

Für den hier vorliegenden Fall, dass die Füllfläche konstant ist $A = const.$ ergibt sich:

$$A \frac{dH}{dt} = \dot{V}_{Zustr} - \dot{V}_A$$

Bei der Lösung dieser Differentialgleichung müssen die Zeitabhängigkeit des Zustroms beachtet und entsprechende Anfangsbedingungen eingeführt werden.

Laut Aufgabenstellung ist:

$$\dot{V}_{Zustr} = K \cdot \dot{V}_{\max} \cdot (H_{\max} - H)$$

Damit erhält man folgende Differentialgleichung:

$$A \frac{dH}{dt} = K \cdot \dot{V}_{\max} \cdot (H_{\max} - H) - \dot{V}_A$$

$$A \frac{dH}{dt} + K \cdot \dot{V}_{\max} \cdot H = K \cdot \dot{V}_{\max} \cdot H_{\max} - \dot{V}_A$$

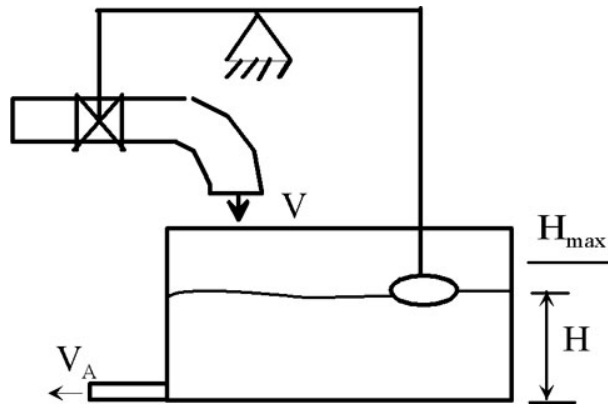


Abbildung 5.10: Wasserstandsregelung eines Bewässerungsgrabens

5.2 Analytische Methoden

5.2.1 DGL erster Ordnung

Aufgaben zu 5.2.1:

1. Geben Sie die allgemeine Lösung folgender DGL an:

a) $y' = (y - 3) \cos x$

b) $y' = e^{x+y}$

c) $y' \sin x = y \ln y$

d) $2xy' + \frac{y^2}{x} = 0$

e) $y' + y + e^x = 0$

f) $y' + \frac{y}{x} = \sin x$

g) $\frac{dx}{dt} + t^2 \cdot x = 2t^2$

h) $y' = -xy^2$ mit $y(0) = 2$

i) $\frac{dx}{dt} + t^2 x = 0$ mit $x(0) = 3$

j) $t \frac{dx}{dt} - x = t^2 \cos t$ mit $x(\pi/2) = \pi$

Für die Aufgabe g ist ein ausführlicher Lösungsweg beschrieben.

(Lösung s. S.140)

2. Für ein System mit einfacher Speicherwirkung gilt die DGL

$$T \dot{x}_a + x_a = K x_e$$

(x_a Ausgangsgröße, x_e Eingangsgröße, T Zeitkonstante, K proportionaler Übertragungsfaktor).

Wie ändert sich die Ausgangsgröße x_a in Abhängigkeit von der Zeit t , wenn gilt:

$$x_e = c \cdot t \quad (c = \text{const.})$$

3. Bestimmen Sie jeweils die allgemeine und die durch Anfangsbedingungen festgelegte spezielle Lösung:

a) $y' = xy + 2x$ mit $y(0) = 2$

b) $y' + x^2 y = x^2$ mit $y(2) = 1$

4. Für das hydraulische Schema (siehe Abbildung 5.11) mit zugehörigem Blockschaltbild gilt die Differentialgleichung:

$$h_{Fl} = R \cdot C \frac{dz_R}{dt} + z_R$$

Dabei ist von linearisierten Verhältnissen und einem homogenen, isotropen Grundwasserleiter mit folgenden Parametern $k = 5 \cdot 10^{-4} \frac{m}{s}$; $n_0 = 0,2$; $z_{Rmittel} = 20m$; $l = 50m$ ausgegangen worden.

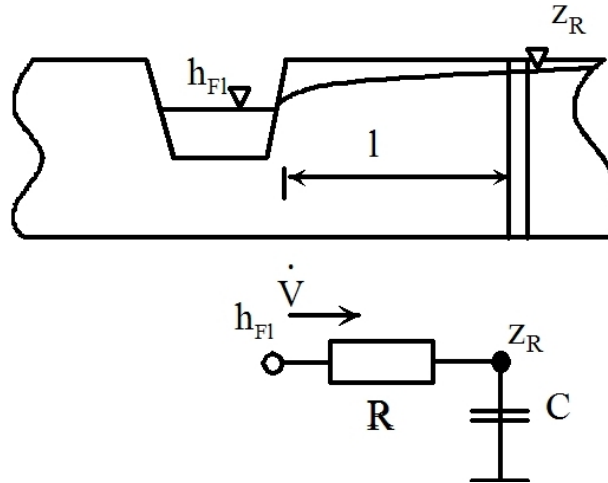


Abbildung 5.11: Schematische Darstellung des Grundwasserspiegels

Berechnen Sie die Änderung des Wasserstandes, wenn sich der Flusswasserspiegel in erster Näherung wie folgt ändert:

- sprunghaft ($h_{Fl} = h_{FL} \cdot \mathbf{1}(t)$)
- sinusförmig ($h_{Fl} = h_{FLm} \sin(\omega \cdot t) + h_{FL0}$, mit $\omega = 2\pi/\tau$ und $\tau = 7$ Tage)

(Lösung s. S.152)

5. Für die Konzentrations C durch Sorption von Schadstoffen an der Bodenmatrix soll folgende DGL gelten:

$$T_1 \dot{C} + C = K$$

wobei T_1 eine Zeitkonstante und K eine Konstante sein sollen.

$$T_1 = 1d^{-1}, K = 100 \frac{mg}{l}$$

Die Konzentrationsänderung zum Zeitpunkt $t = 0$ soll $C(0) = 0$ sein.

- Lösen Sie die DGL mittels der analytischen Methoden und berechnen Sie die Konzentrationsänderung für den Zeitpunkt $t = 1d$.
- Skizzieren Sie den prinzipiellen Zeitverlauf der Konzentrationsänderung.

(Lösung s. S. 159)

6. Der Grundwasserwiederanstieg und damit die Auffüllung der Restlöcher in den ehemaligen Braunkohlentagebauen dauert unter natürlichen Bedingungen zu lange. Deshalb wird mit einer konstanten Fremdeinspeisung der Auffüllvorgang ($h_{t=0} = 0$) beschleunigt. (siehe Abbildung 5.12)

$$A \frac{dh}{dt} = \dot{V}_{Zustr}$$

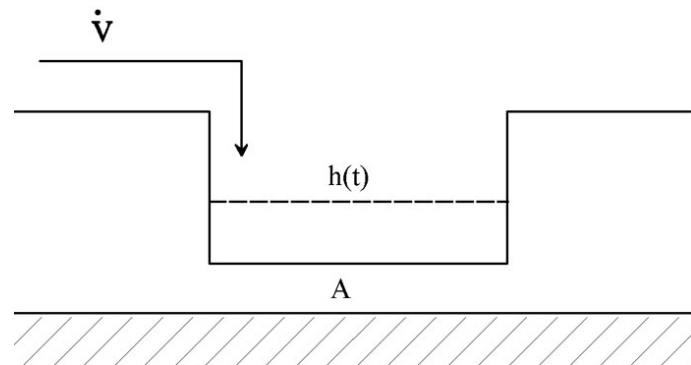


Abbildung 5.12: Füllvorgang eines Restloches

Lösen Sie diese Differentialgleichung mittels analytischer Methoden.

(Lösung s. S. 160)

7. Es ist folgende Differentialgleichung gegeben:

$$\frac{dh}{dt} + k \cdot h = g$$

mit $h_{t=0} = 0$, $g = 0,015 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ und $k = 0,01 \text{ s}^{-1}$

Lösen Sie die Differentialgleichung mittels analytischer Methoden.

(Lösung s. S.161)

Lösungen:• **zu Aufgabe 1 (s. S. 137)**a. Ausgangsgleichung: $y' = (y - 3) \cos x$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (y - 3) \cos x \implies \frac{1}{y - 3} = \cos x dx \\ \int \frac{1}{y - 3} dy &= \int \cos x dx \implies \ln |y - 3| - \ln C = \sin x \\ \ln \frac{|y - 3|}{C} &= \sin x \implies C \cdot e^{\sin x} = y - 3 \\ y &= C \cdot e^{\sin x} + 3\end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned}y' &= (y - 3) \cos x; \quad y = C \cdot e^{\sin x} + 3 \\ y' &= C \cdot \cos x \cdot e^{\sin x} \\ C \cdot \cos x \cdot e^{\sin x} &\stackrel{?}{=} (y - 3) \cos x \\ (y - 3) \cos x &= ((C \cdot e^{\sin x} + 3) - 3) \cos x = C \cdot \cos x \cdot e^{\sin x} \\ y' &\stackrel{!}{=} (y - 3) \cos x\end{aligned}$$

b. Ausgangsgleichung: $y' = e^{x+y}$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= e^x \cdot e^y \\ \int \frac{dy}{e^y} &= \int e^x dx \implies \int e^{-y} dy = e^x - C \\ -e^{-y} &= e^x - C \implies e^{-y} = C - e^x \\ -y &= \ln(C - e^x) \\ y &= \ln \frac{1}{C - e^x}\end{aligned}$$

Probe:

$$y' = e^{x+y}; \quad y = \ln \frac{1}{C - e^x}$$

$$y' = \frac{e^x}{C - e^x}$$

$$e^{x+y} = e^{x + \ln \frac{1}{C - e^x}} = e^x \cdot e^{\ln \frac{1}{C - e^x}}$$

$$= e^x \cdot \frac{1}{C - e^x} = \frac{e^x}{C - e^x}$$

$$y' \stackrel{!}{=} e^{x+y}$$

c. Ausgangsgleichung: $y' \sin x = y \cdot \ln y$

$$\int \frac{dy}{y \ln y} = \int \frac{dx}{\sin x} \Rightarrow \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + \ln C = \ln \left(C \cdot \left| \tan \frac{x}{2} \right| \right)$$

$$\int \frac{d \ln y}{\ln y} = \ln(C \cdot \left| \tan \frac{x}{2} \right|) \Rightarrow \ln |\ln y| = \ln(C \cdot \left| \tan \frac{x}{2} \right|)$$

$$\ln y = C \cdot \left| \tan \frac{x}{2} \right|$$

$$y = e^{C \cdot \left| \tan \frac{x}{2} \right|}$$

Probe:

$$y' \sin x = y \ln y; \quad y = e^{C \cdot \tan\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$y' = C \cdot e^{C \cdot \tan\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\text{Rechte Seite: } y \cdot \ln y = e^{C \cdot \tan\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \ln e^{C \cdot \tan\left(\frac{x}{2}\right)} = C \cdot \tan\left(\frac{x}{2}\right) \cdot e^{C \cdot \tan\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\text{Linke Seite: } y' \cdot \sin x = C \cdot e^{C \cdot \tan\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{\sin x}{2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= C \cdot e^{C \cdot \tan\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = C \cdot e^{C \cdot \tan \frac{x}{2}} \cdot \tan \frac{x}{2}$$

$$y' \sin x \stackrel{!}{=} y \ln y$$

d. Ausgangsgleichung: $2xy' + \frac{y^2}{x} = 0$

$$\begin{aligned}
 2xy' &= -\frac{y^2}{x} \\
 \frac{dy}{dx} &= -\frac{y^2}{2x^2} \implies \int \frac{dy}{y^2} = -\int \frac{dx}{2x^2} + C \\
 -\frac{1}{y} &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{x} \right) + C = \frac{1}{2x} + C \\
 y &= -\frac{2x}{1 + 2Cx}
 \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned}
 2xy' + \frac{y^2}{x} &= 0; \quad y = -\frac{2x}{1 + 2Cx} \\
 y' &= -2 \frac{(1 + 2Cx) - x \cdot 2C}{(1 + 2Cx)^2} = -\frac{2}{(1 + 2Cx)^2} \\
 y^2 &= \frac{4x^2}{(1 + 2Cx)^2} \\
 2xy' + \frac{y^2}{x} &= -\frac{2 \cdot 2x}{(1 + 2Cx)^2} + \frac{4x^2}{x(1 + 2Cx)} = 0
 \end{aligned}$$

e. Ausgangsgleichung: $y' + y + e^x = 0$

$$\begin{aligned}
 y' + y &= -e^x \\
 y' + y = 0 &\implies \frac{dy}{dx} = -y \implies \frac{dy}{y} = -dx \\
 \int \frac{dy}{y} - \ln C &= \int dx \implies \ln \frac{|y|}{C} = -x \implies y = C \cdot e^{-x} \\
 y' &= C' \cdot e^{-x} - C \cdot e^{-x} \implies C' \cdot e^{-x} - C \cdot e^{-x} + C \cdot e^{-x} = -e^x \\
 C' &= -e^{2x} \implies dC = -\int e^{2x} dx + C_1 \implies C = -\frac{1}{2}e^{2x} + C_1 \\
 y &= \left(-\frac{1}{2} \cdot e^{2x} + C_1 \right) e^{-x}
 \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned}
 y' &= \left(-\frac{1}{2} \cdot 2e^{2x} \right) e^{-x} - \left(-\frac{1}{2} \cdot e^{2x} + C_1 \right) e^{-x} + \left(-\frac{1}{2} \cdot e^{2x} + C_1 \right) e^{-x} \\
 &= -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot e^{2x} \cdot e^{-x} = -e^x
 \end{aligned}$$

f. Ausgangsgleichung: $y' + \frac{y}{x} = \sin x$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{x} \\ \int \frac{dy}{y} &= -\int \frac{dx}{x} + \ln C \\ \ln |y| &= \ln \frac{C}{|x|} \\ y &= \frac{C}{x} \Rightarrow y = \frac{C(x)}{x} \Rightarrow y' = \frac{Cx - C}{x^2} \\ \frac{Cx - C}{x^2} + \frac{C}{x^2} &= \sin x \Rightarrow \frac{C'}{x} = \sin x \Rightarrow \frac{dC}{dx} = x \sin x \\ C &= \int x \sin x dx + C_1 = \sin x - x \cos x + C_1 \\ y &= \frac{\sin x}{x} - \cos x + \frac{C_1}{x}\end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned}y' + \frac{y}{x} &= \sin x; \quad y = \frac{\sin x}{x} - \cos x + \frac{C}{x} \\ y' &= \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} + \sin x - \frac{C}{x^2} \\ y' + \frac{y}{x} &= \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} + \sin x - \frac{C}{x^2} + \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} + \frac{C}{x^2} \\ &= \sin x\end{aligned}$$

g. Gegeben ist die inhomogene DGL $\frac{dx}{dt} + t^2 \cdot x = 2t^2$

Variante 1

Zuerst wird die Lösung der homogenen DGL gesucht:

$$\frac{dx_h}{dt} + t^2 \cdot x_h = 0$$

Mittels der Methode der Trennung der Variablen erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{dx_h}{dt} &= -t^2 \cdot x_h \\ \frac{dx_h}{x_h} &= -t^2 \cdot dt \\ \int \frac{1}{x_h} dx_h &= \int -t^2 \cdot dt \\ \ln x_h &= -\frac{1}{3}t^3 + \ln C \\ x_h &= C \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3}\end{aligned}$$

Die partikuläre Lösung wird mittels der Variation der Konstanten erzielt:

$$x_{p(t)} = u(t) \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3}$$
$$\frac{dx_p}{dt} = \frac{du}{dt} \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3} + u \cdot (-t^2) \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3}$$

Wird dieser Ausdruck in die inhomogene DGL eingesetzt, so erhält man eine DGL bezüglich der variierten Konstanten $u(t)$, die mittels der Methode der Trennung der Variablen gelöst wird.

$$\frac{du}{dt} \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3} + (-t^2) \cdot u \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3} + t^2 \cdot u \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3} = 2t^2$$

$$\frac{du}{dt} = 2t^2 \cdot e^{\frac{1}{3}t^3}$$

$$du = 2t^2 \cdot e^{\frac{1}{3}t^3} dt$$

$$\int du = \int 2t^2 \cdot e^{\frac{1}{3}t^3} dt$$

Hier kann der Produktansatz (Variante 1.1) oder die Substitutionsmethode für die Integration (Variante 1.2) genutzt werden.

Variante 1.1

Der Produktansatz (partielle Integration) lautet in allgemeiner Form:

$$\int w \cdot \frac{dv}{dt} dt = w \cdot v - \int v \cdot \frac{dw}{dt} dt$$

Vergleicht man die beiden Integralgleichungen

$$\int du = \int 2t^2 \cdot e^{\frac{1}{3}t^3} dt$$

so kann Folgendes gesetzt werden:

$$w = 1$$

$$\frac{dv}{dt} = t^2 \cdot e^{\frac{1}{3}t^3}$$

$$\implies v = e^{\frac{t^3}{3}}$$

Damit, und unter Beachtung von

$$\frac{d\left(e^{\frac{1}{3}t^3}\right)}{dt} = t^2 \cdot e^{\frac{1}{3}t^3}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int du &= 2 \int \left(t^2 \cdot e^{\frac{1}{3}t^3} \right) \cdot 1 \, dt \\ &= 2 \cdot \left(1 \cdot e^{\frac{1}{3}t^3} - \int \left(e^{\frac{1}{3}t^3} \cdot 0 \right) dt \right)\end{aligned}$$

Mit

$$\int (v') \cdot w \, dt = w \cdot v - \int (v \cdot w') \, dt$$

folgt:

$$u(t) = 2e^{\frac{1}{3}t^3}$$

Dieser Ausdruck, in die partikuläre Lösung eingesetzt, ergibt:

$$x_p = u(t) 2e^{\frac{1}{3}t^3}$$

$$x_p = 2 \cdot e^{\frac{1}{3}t^3} \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3}$$

$$x_p = 2$$

Variante 1.2

Das Integral

$$\int du = \int 2t^2 \cdot e^{\frac{1}{3}t^3} dt$$

kann auch mittels Substitution zur Vereinfachung des Integrals gelöst werden:

$$z = e^{\frac{1}{3}t^3}$$

$$\frac{dz}{dt} = t^2 e^{\frac{1}{3}t^3}$$

$$\int du = 2 \int \frac{dz}{dt} dt$$

$$\int du = 2 \int dz$$

$$u = 2z + C'_{\text{p}}$$

$$u = 2e^{\frac{1}{3}t^3} + C'_{\text{p}}$$

Auch hier wird die Lösung in den partikulären Ansatz eingefügt, und man erhält:

$$x_p = u(t) \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3}$$

$$x_p = 2 + C'_{\text{p}} \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3}$$

Varianten 1.1 und 1.2

Somit ergibt sich bei beiden Varianten die Gesamtlösung als Addition der homogenen und der partikulären Lösung zu:

$$x(t) = x_{p(t)} + x_{h(t)} = 2 + C \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3} \quad (5.4)$$

(für die Variante 1.2 wird C aus $C = C_h + C_p$ gebildet.)

Die Konstante C wird wieder aus der Anfangsbedingung $x_{(t=0)} = x_0$ bestimmt.

$$C = x_0 - 2$$

$$x(t) = 2 + (x_0 - 2) \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3} = 2 \left(1 - e^{-\frac{1}{3}t^3}\right) + x_0 \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3}$$

Variante 2

Die gegebene DGL

$$\frac{dx}{dt} + t^2 \cdot x = 2t^2$$

wird umgeformt zu:

$$\frac{dx}{dt} + t^2 (x - 2) = 0$$

Damit ist die formal inhomogene DGL eigentlich eine homogene, die entsprechend, z. B. nach der Methode der Trennung der Variablen, gelöst werden kann.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= t^2 (2 - x) \\ \int \frac{dx}{2 - x} &= \int t^2 dt \end{aligned}$$

Das Ergebnis dieser Integrale ist, unter Beachtung, dass $e^{\ln x} = x$ gilt:

$$-\ln(2 - x) = \frac{1}{3}t^3 + \ln C$$

$$x(t) = 2 + C \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3}$$

Probe:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= C \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) e^{-\frac{1}{3}t^3} \cdot 3t^2 \\ &= -C \cdot t^2 \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3} \end{aligned}$$

$$-C \cdot t^2 \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3} + 2t^2 + t^2 \cdot C \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3} = 2t^2$$

Damit wird das gleiche Ergebnis wie in Variante 1 (siehe Gleichung 5.4) auf wesentlich kürzerem Weg erzielt. Die Bestimmung der Konstante C erfolgt wie bei Variante 1.

h. Ausgangsgleichung: $y' = -xy^2$ mit $y(0) = 2$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{y^2} &= -x dx \\ \int \frac{dy}{y^2} &= - \int x dx + C \\ -\frac{1}{y} &= -\frac{1}{2}x^2 + C \implies y = \frac{2}{x^2 - 2C} \implies C = -\frac{1}{2} \\ y &= \frac{2}{x^2 + 1}\end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned}y' &= -xy^2; \quad y = \frac{2}{x^2 + 1} \\ y' &= \frac{-2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{4x}{(x^2 + 1)^2} \\ -x \cdot y^2 &= -x \frac{4}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{4x}{(x^2 + 1)^2} \\ y' &\stackrel{!}{=} -xy^2\end{aligned}$$

i. Ausgangsgleichung: $\frac{dx}{dt} + t^2x = 0$ mit $x(0) = 3$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -xt^2 \\ \int \frac{dx}{x} + \ln C &= - \int t^2 dt \\ \ln C |x| &= -\frac{1}{3}t^3 \implies -3 \ln C |x| = t^3 \\ \ln \frac{1}{(C|x|)^3} &= t^3 \implies e^{t^3} = \frac{1}{C^3|x|^3} \\ x &= \frac{1}{C} \sqrt[3]{e^{-t^3}} \implies t = 0; C = \frac{1}{3} \\ x(t) &= 3 \sqrt[3]{e^{-t^3}}\end{aligned}$$

Probe:

$$\frac{dx}{dt} + t^2 x = 0; \quad x(t) = 3\sqrt[3]{e^{-t^3}} = 3 \left(e^{-t^3} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dx}{dt} = x' = 3 \cdot \frac{1}{3} \left(e^{-t^3} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot e^{-t^3} \cdot (-3t^2)$$

$$= -3t^2 \cdot e^{\frac{2}{3}t^3 - t^3} = -3t^2 \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3}$$

$$t^2 x = 3t^2 \left(e^{-t^3} \right)^{\frac{1}{3}} = 3t^2 \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3}$$

$$x' \stackrel{!}{=} t^2 x$$

j. Ausgangsgleichung: $t \frac{dx}{dt} - x = t^2 \cos t$ mit $x(\frac{\pi}{2}) = \pi$

$$t \frac{dx}{dt} = x \implies \frac{dx}{x} = \frac{dt}{t} \implies x = Ct$$

$$\dot{x} = \dot{C}t + C \implies t \left(\dot{C}t + C \right) - Ct = t^2 \cos t$$

$$\dot{C}t^2 = t^2 \cos t \implies \frac{dC}{dt} = \cos t \implies C = \sin t + C_1$$

$$x(t) = t(\sin t + C_1)$$

$$\pi = \frac{\pi}{2}C_1 + \frac{\pi}{2} \sin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}(C_1 + 1); \quad C_1 = 1$$

$$x(t) = t(\sin t + 1)$$

Probe:

$$t \frac{dx}{dt} - x = t^2 \cos t; \quad x(t) = t(\sin t + 1)$$

$$\frac{dx}{dt} = \sin t + 1 + t \cdot \cos t$$

$$t \frac{dx}{dt} = t \cdot \sin t + t + t^2 \cos t = t(\sin t + 1) + t^2 \cos t$$

$$t \frac{dx}{dt} - x = t(\sin t + 1) + t^2 \cos t - t(\sin t + 1)$$

$$= t^2 \cos t$$

• zu Aufgabe 2 (s. S. 137)

Ausgangsgleichung: $T\dot{x}_a + x_a = K \cdot x_e$; mit $x_e = C \cdot t$; $c = \text{const}$

$$T\dot{x}_a + x_a = K \cdot C \cdot t$$

$$T \frac{dx_a}{dt} + x_a = 0 \implies T \frac{dx_a}{dt} = -x_a \implies \frac{dx_a}{x_a} = -\frac{1}{T} dt$$

$$\ln |x_a| - \ln C_1 = -\frac{t}{T}$$

$$x_a = C_1 e^{-\frac{t}{T}}$$

$$\dot{x}_a = \dot{C}_1 e^{-\frac{t}{T}} + C_1 \left(-\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

$$T\dot{C}_1 e^{-\frac{t}{T}} - C_1 e^{-\frac{t}{T}} + C_1 \cdot e^{-\frac{t}{T}} = K \cdot C \cdot t$$

$$\frac{dC_1}{dt} = \frac{K \cdot C \cdot t}{T} e^{\frac{t}{T}}$$

$$C_1 = \frac{K \cdot C}{T} \int t \cdot e^{\frac{t}{T}} dt = \frac{K \cdot C}{T} \cdot \frac{\left(\frac{t}{T} - 1\right)}{\frac{1}{T^2}} \cdot e^{\frac{t}{T}}$$

$$C_1 = K \cdot C (t - T) e^{\frac{t}{T}}$$

$$x_a(t) = K \cdot C (t - T)$$

Probe:

$$T\dot{x}_a + x_a = K \cdot x_e; \quad x_e = C \cdot t$$

$$x_a(t) = K \cdot C (t - T)$$

$$\dot{x}_a = K \cdot C$$

$$T\dot{x}_a + x_a = T \cdot C \cdot K + K \cdot C (t - T)$$

$$= K \cdot C \cdot t; \quad \text{mit } C \cdot t = x_e$$

$$= k \cdot x_e$$

• zu Aufgabe 3 (s. S. 137)

a. Ausgangsgleichung: $y' = xy + 2x$ mit $y(0) = 2$

$$y' = x(y + 2); \implies \frac{dy}{y + 2} = x dx$$

$$\int \frac{d(y + 2)}{y + 2} - \ln C = \int x dx$$

$$\ln \frac{|y + 2|}{C} = \frac{1}{2}x^2 \implies y = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} - 2$$

$$\text{für } x=0 \text{ gilt: } 2 = C - 2 \implies C = 4$$

$$y = 2 \left(2e^{\frac{1}{2}x^2} - 1 \right)$$

Probe:

$$y' = xy + 2x; \quad y = 2 \left(2e^{\frac{1}{2}x^2} - 1 \right)$$

$$y' = 2 \cdot 2e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x = 4xe^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$xy + 2x = 2x \left(2e^{\frac{1}{2}x^2} - 1 \right) + 2x = 4xe^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$y' \stackrel{!}{=} xy + 2x$$

b. Ausgangsgleichung: $y' + x^2y = x^2$ mit $y(1) = 2$

$$\frac{dy}{dx} = x^2(1 - y)$$

$$\frac{dy}{1 - y} = x^2 dx \implies \frac{d(y - 1)}{y - 1} = -x^2 dx$$

$$\int \frac{d(y - 1)}{y - 1} - \ln C = - \int x^2 dx$$

$$\ln \frac{|y - 1|}{C} = -\frac{1}{3}x^3 \implies C \cdot e^{-\frac{1}{3}x^3} + 1 = y$$

$$\text{für } x = 1 \text{ gilt: } C \cdot e^{-\frac{1}{3}} + 1 = 2 \Rightarrow C = e^{\frac{1}{3}}$$

$$y = e^{\frac{1}{3}} \cdot e^{-\frac{1}{3}x^3} + 1 = e^{\frac{1}{3}(1-x^3)} + 1$$

Probe:

$$y' + x^2y = x^2; \quad y = e^{\frac{1}{3}(1-x^3)} + 1$$

$$y' = e^{\frac{1}{3}(1-x^3)} \cdot \frac{1}{3}(-3x^2) = -x^2 e^{\frac{1}{3}(1-x^3)}$$

$$x^2y = x^2 \left(e^{\frac{1}{3}(1-x^3)} + 1 \right) = x^2 e^{\frac{1}{3}(1-x^3)} + x^2$$

$$y' + x^2y = -x^2 e^{\frac{1}{3}(1-x^3)} + x^2 e^{\frac{1}{3}(1-x^3)} + x^2$$

$$= x^2$$

- zu Aufgabe 4 (s. S. 137)

Diese inhomogene DGL wird gelöst, indem zuerst die homogene Lösung bestimmt wird, dann eine partikuläre und anschließend diese beiden Lösungen überlagert werden.

$$h_{Fl} = R \cdot C \frac{dz_R}{dt} + z_R$$

Homogene DGL

$$\begin{aligned} R \cdot C \frac{dz_{Rh}}{dt} + z_{Rh} &= 0 \\ \frac{dz_{Rh}}{dt} &= -\frac{z_{Rh}}{RC} \end{aligned}$$

Für $R \cdot C$ soll die Abkürzung T_1 eingeführt werden: $R \cdot C = T_1$

T_1 trägt die Bezeichnung der Zeitkonstanten und ist nicht mit der Transmissibilität T zu verwechseln. Diese Bezeichnung wird in automatisierungs- und elektrotechnischer Literatur so verwendet und ist entsprechend genormt. In älteren Literaturquellen wird auch oft die Bezeichnung τ verwendet. Die hier eingeführte Zeitkonstante T_1 ist eng mit der geohydraulischen Zeitkonstanten $a = \frac{S}{T}$ (Speicherkoeffizient/Transmissibilität) verwandt und lässt sich in diese überführen (siehe GRÄBER, Lehrscript Systemanalyse, Abschnitt THEISSche Brunnengleichung).

Nach der Methode der Trennung der Variablen lässt sich diese DGL lösen.

$$\begin{aligned} \int \frac{dz_{Rh}}{z_{Rh}} &= -\frac{1}{T_1} \int dt \\ \ln z_{Rh} &= -\frac{t}{T_1} + \ln K_1 \\ z_{Rh} &= K_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \end{aligned}$$

Partikuläre Lösung

Nach der Methode der Variation der Konstanten und der Anwendung der Differentiation auf Produkte (Produktenregel) ergibt sich:

$$\begin{aligned} z_{Rp} &= K_1(t) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \\ \frac{dz_{Rp}}{dt} &= \frac{dK_1}{dt} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \left(-\frac{1}{T_1}\right) \cdot K_1(t) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \end{aligned}$$

Dies wird in die ursprüngliche DGL eingesetzt und man erhält:

$$\begin{aligned}
 h_{Fl} &= R \cdot C \frac{dz_R}{dt} + z_R \\
 h_{Fl} &= T_1 \cdot \left(\frac{dK_1}{dt} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \left(-\frac{1}{T_1} \right) \cdot K_1(t) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \right) + K_1(t) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \\
 h_{Fl} &= T_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \cdot \frac{dK_1}{dt} \\
 \frac{dK_1}{dt} &= \frac{h_{Fl}}{T_1} \cdot e^{+\frac{t}{T_1}}
 \end{aligned}$$

Nach der Methode der Trennung der Variablen erhält man:

$$\begin{aligned}
 \int dK_1 &= \int h_{Fl} \cdot \frac{1}{T_1} \cdot e^{+\frac{t}{T_1}} dt \\
 K_1 &= \int h_{Fl} \cdot \frac{1}{T_1} \cdot e^{+\frac{t}{T_1}} dt
 \end{aligned}$$

Bei der Lösung dieses Integrals müssen jetzt die unterschiedlichen Funktionen des als Randbedingung wirkenden Flusswasserstandes berücksichtigt werden.

Allgemein lässt sich aber die Gesamtlösung der DGL wie folgt entwickeln, wenn beachtet wird, dass sich die allgemeine Lösung aus der Addition der partikulären und der homogenen Lösung ergibt:

$$\begin{aligned}
 z_{Rp} &= K_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \\
 z_{Rp} &= \left[\int h_{Fl} \cdot \frac{1}{T_1} \cdot e^{+\frac{t}{T_1}} dt \right] \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \\
 z_{R(t)} &= z_{Rp}(t) + z_{Rh}(t)
 \end{aligned}$$

Damit lautet die Lösung der DGL:

$$z_{R(t)} = \left[\frac{1}{T_1} \int h_{Fl} \cdot e^{+\frac{t}{T_1}} dt \right] \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + K_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$$

a. Sprunghafte Änderung des Wasserstandes:

$$h_{Fl} = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ h_{Fl} & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 z_R &= \left[\frac{h_{Fl}}{T_1} \int e^{\frac{t}{T_1}} dt \right] \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + K_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \\
 &= h_{Fl} \cdot e^{\frac{t}{T_1}} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + K_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \\
 &= h_{Fl} + K_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}
 \end{aligned}$$

Wenn man sich den ersten Summanden dieser Gleichung anschaut, welcher der partikulären Lösung entspricht, so erkennt man, dass der Wert $z_{Rp} = h_{Fl}$ dem Wasserstand entspricht, der sich im stationären Fall $t \Rightarrow \infty$ einstellt. Man spricht auch davon, dass dies der so genannte eingeschwungene Zustand ist.

Die Konstante K_1 kann wieder aus der Anfangsbedingung ermittelt werden.

$$z_{R,t=0} = 0$$

$$z_{R,t=0} = h_{Fl} + K_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$$

$$K_1 = -h_{Fl}$$

$$z_R = h_{Fl} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right)$$

Die grafische Darstellung des Grundwasserstandes für verschiedene geohydraulische und geometrische Verhältnisse ist in Abbildung 5.13 dargestellt. Dies ist die gleiche Formel, die bei der Methode der experimentellen Prozessanalyse als so genanntes Übertragungsverhalten mit Verzögerung 1. Ordnung bezeichnet wurde. Zu diesem gleichen Ergebnis kommt man mit wesentlich geringerem Aufwand, wenn die Methode der LAPLACE-Transformation angewendet wird (siehe Abschnitt LAPLACE-Transformation, Seite 196ff).

Beachtet man, dass die Zeitkonstante T_1 proportional zur Speicherwirkung des betrachteten Gebietes und umgekehrt proportional zur hydraulischen Leitfähigkeit des Grundwasserleiters wächst, so wird die Abhängigkeit der Grundwasserdynamik von den Bodenparametern deutlich. Besonders hervorgehoben werden soll noch die quadratische Abhängigkeit der Zeitkonstanten T_1 von der Entfernung zum Fluss. Der Quotient $a = \frac{S}{T}$ wird auch als geohydraulische Zeitkonstante bezeichnet und ist über l^2 mit der Zeitkonstanten T_1 verknüpft:

$$T_1 = R \cdot C$$

$$= \frac{l}{k \cdot D \cdot b} \cdot (S \cdot l \cdot b)$$

$$T_1 = \frac{l^2 \cdot S}{k \cdot D}$$

$$T_1 = a \cdot l^2$$

- l Abstand des Berechnungspunktes vom Fluss
- D Durchströmte Mächtigkeit des Grundwasserleiters
- S Speichervermögen des durchströmten Grundwasserleiters
- k Durchlässigkeitskoeffizient des betrachteten Grundwasserleiters

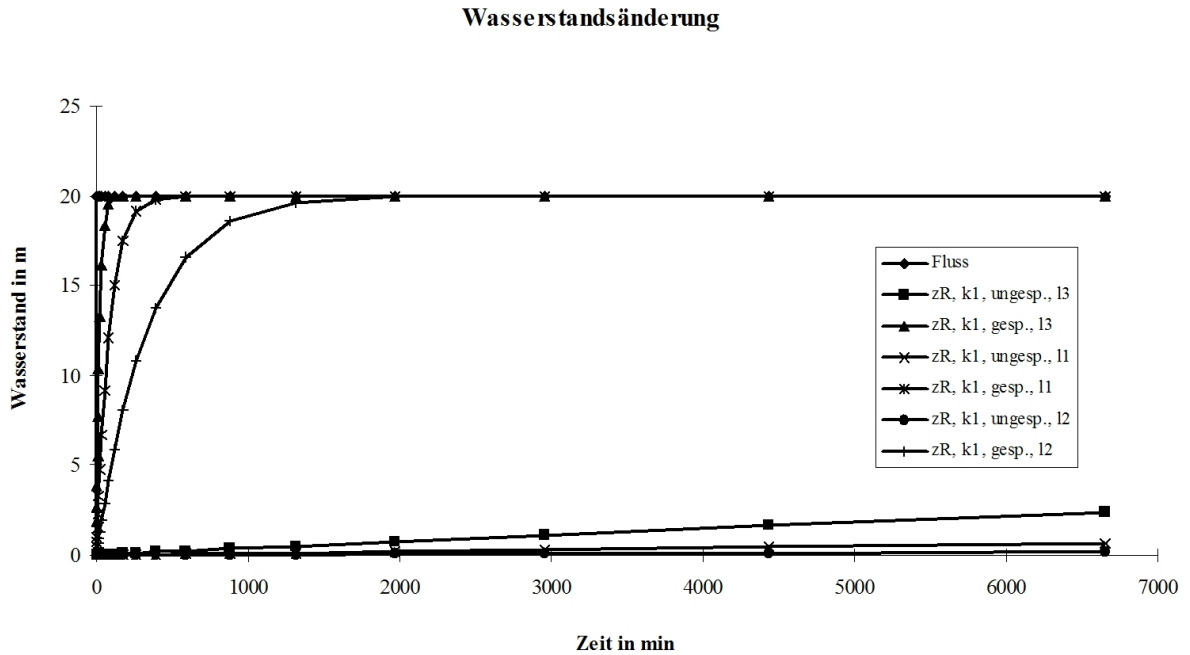


Abbildung 5.13: Abhängigkeit des Grundwasserstandes von geohydraulischen Verhältnissen

b. Sinusförmige Änderung des Wasserstandes

Man kann auch hier von der allgemeinen Lösung der DGL ausgehen und setzt entsprechend der Aufgabenstellung die Funktion h_{FL} ein:

$$z_R = \left[\frac{1}{T_1} \int h_{FL} \cdot e^{+\frac{t}{T_1}} dt \right] \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + K_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$$

Eine sinusförmige Änderung des Flusswasserstandes ergibt sich in erster Näherung bei der Betrachtung des Jahresganges. Auch Hochwasserwellen verlaufen in erster Näherung nach einer Sinusfunktion, wobei meist nur die erste Halbwelle (Intervall von $0 \leq t \leq \pi$) von Interesse ist. Betrachtet man bei dem Jahresgang nur die Änderung des Flusswasserstandes gegenüber einem Mittelwert ($h_{FL0} = 0$), so kann man schreiben:

$$h_{FL} = h_{FLm} \sin(\omega \cdot t)$$

wobei ω die so genannte Kreisfrequenz ist. In unserem Beispiel, bei einer angenommenen Periodizität von 365 Tagen (Jahresgang), wird bei der Untersuchung von Hochwasserwellen

die Dauer der Hochwasser(Halb)welle, bezogen auf den halben Kreisbogen (π), angesetzt. Laut Aufgabenstellung wäre dann $\omega = \frac{2\pi}{T}$ mit $T = 7d$ (siehe Abbildung 5.14).

$$z_R = \left[\frac{1}{T_1} \int h_{FL} \cdot e^{+\frac{t}{T_1}} dt \right] \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + K_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$$

$$z_R = \left[\frac{1}{T_1} \int h_{FLm} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{+\frac{t}{T_1}} dt \right] \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + K_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$$

Laut Integrationstabelle (z. B. BRONSTEIN, Seite 327) gilt:

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} ((a) \sin(bx) - b \cos(bx))$$

und damit erhält man:

$$z_R = \frac{h_{FLm}}{T_1} \frac{e^{\frac{t}{T_1}}}{\left(\left(\frac{1}{T_1} \right)^2 + \omega^2 \right)} \left(\frac{1}{T_1} \sin(\omega \cdot t) - \omega \cos(\omega \cdot t) \right) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + K_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$$

Auch hier kann K_1 aus der Anfangsbedingung bestimmt werden.

$$z_{R,t=0} = \frac{h_{FLm}}{T_1} \frac{e^{\frac{0}{T_1}}}{\left(\left(\frac{1}{T_1} \right)^2 + \omega^2 \right)} \left(\frac{1}{T_1} \sin(\omega \cdot 0) - \omega \cos(\omega \cdot 0) \right) \cdot e^{-\frac{0}{T_1}} + K_1 \cdot e^{-\frac{0}{T_1}}$$

$$z_{R,t=0} = \frac{h_{FLm}}{T_1} \frac{1}{\left(\left(\frac{1}{T_1} \right)^2 + \omega^2 \right)} (-\omega) + K_1 = 0$$

$$K_1 = \frac{h_{FLm}}{T_1} \frac{1}{\left(\left(\frac{1}{T_1} \right)^2 + \omega^2 \right)} (\omega)$$

Damit ergibt sich die Gesamtlösung der DGL zu:

$$z_R = \frac{h_{FLm}}{T_1} \frac{e^{\frac{t}{T_1}}}{\left(\left(\frac{1}{T_1} \right)^2 + \omega^2 \right)} \left(\frac{1}{T_1} \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t) \right) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$$

$$+ \frac{h_{FLm}}{T_1} \frac{1}{\left(\left(\frac{1}{T_1} \right)^2 + \omega^2 \right)} (\omega) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$$

$$z_R = \frac{h_{FLm} \cdot e^{\frac{t}{T_1}}}{(1 + T_1^2 \omega^2)} (\sin(\omega \cdot t) - T_1 \cdot \omega \cos(\omega \cdot t)) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{h_{FLm} \cdot T_1 \cdot \omega}{(1 + T_1^2 \omega^2)} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$$

$$z_R = \frac{h_{FLm} \cdot e^{\frac{t}{T_1}}}{(1 + T_1^2 \omega^2)} \left((\sin(\omega \cdot t) - T_1 \cdot \omega \cos(\omega \cdot t)) + (T_1 \cdot \omega) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \right)$$

$$z_R = \frac{h_{FLm}}{\sqrt{(1 + T_1^2 \omega^2)}} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{(1 + T_1^2 \omega^2)}} \sin(\omega t) - \frac{T_1 \cdot \omega}{\sqrt{(1 + T_1^2 \omega^2)}} \cos(\omega t) \right) \right.$$

$$\left. + \frac{(T_1 \cdot \omega)}{\sqrt{(1 + T_1^2 \omega^2)}} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \right)$$

Die Umformung in der letzten Zeile erfolgt in Vorbereitung der Anwendung bekannter trigonometrischer Relationen.

Setzt man hier $T_1 \cdot \omega = \tan \varphi$, so kann man folgende trigonometrischen Beziehungen verwenden:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} = \cos \varphi$$

$$\frac{\tan \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} = \sin \varphi$$

Dies oben eingesetzt führt zu:

$$z_R = \frac{h_{FLm}}{\sqrt{(1 + T^2 \omega^2)}} \left((\cos \varphi \cdot \sin(\omega \cdot t) - \sin \varphi \cdot \cos(\omega \cdot t)) + \sin \varphi \cdot e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

Dies kann man entsprechend den trigonometrischen Beziehungen (z. B. BRONSTEIN, Seite 155ff) entsprechend umformen:

$$\cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\cos \alpha \cdot \sin \beta - \sin \alpha \cdot \cos \beta = \sin(\beta - \alpha)$$

Damit erhält man

$$z_R = \frac{h_{FLm}}{\sqrt{(1 + T^2 \omega^2)}} \left(\sin(\omega \cdot t - \varphi) + \sin \varphi \cdot e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

$$\text{mit} \quad \varphi = \arctan(\omega \cdot t)$$

Aus diesem Ergebnis kann Folgendes abgelesen werden:

Die sinusförmige Änderung des Flusswasserspiegels setzt sich im Grundwasser fort, wobei man wieder einen instationären und einen quasistationären Zustand unterscheiden kann.

Quasistationärer Zustand (eingeschwungener Zustand) ($t \Rightarrow \infty$)

Unter dieser Bedingung verschwindet der zweite Summand. Das Grundwasser folgt der Sinusschwingung mit einer kleineren Amplitude. Man spricht davon, dass die Welle um den Faktor $\frac{h_{FLm}}{\sqrt{(1 + T^2 \omega^2)}}$ gedämpft wird und dass die Welle eine Phasenverschiebung von $\varphi = \arctan(\omega \cdot t)$ aufweist.

Instationärer Zustand (Übergangsverhalten)

Hier ist insbesondere der zweite Summand in der Lösungsgleichung dominant, d.h. es wird zur quasistationären Lösung ein Teil addiert, der zwischen maximal 1 (bei $t = 0$) und 0 (bei $t \Rightarrow \infty$) in Abhängigkeit von $\varphi = \arctan(\omega \cdot t)$ liegt.

Das Produkt $(\omega \cdot t)$ stellt die Relation der Periodizität (hier: Schnelligkeit) der Wasserstandsänderung und der Zeitkonstanten (hier: Trägheit) des Grundwasserleiters dar. Beachtet man,

dass die Zeitkonstante T_1 proportional zur Speicherwirkung des betrachteten Gebietes und umgekehrt proportional zur hydraulischen Leitfähigkeit des Grundwasserleiters wächst, so wird die Abhängigkeit der Grundwasserdynamik von den Bodenparametern deutlich. Besonders hervorgehoben werden soll noch die quadratische Abhängigkeit der Zeitkonstanten T_1 von der Entfernung zum Fluss:

$$\begin{aligned} T_1 &= R \cdot C \\ &= \frac{1}{k \cdot D \cdot b} \cdot (S \cdot l \cdot b) \\ T_1 &= \frac{l^2 \cdot S}{k \cdot D} \end{aligned}$$

- l Abstand des Berechnungspunktes vom Fluss
- D Durchströmte Mächtigkeit des Grundwasserleiters
- S Speichervermögen des durchströmten Grundwasserleiters
- k Durchlässigkeitskoeffizient des betrachteten Grundwasserleiters

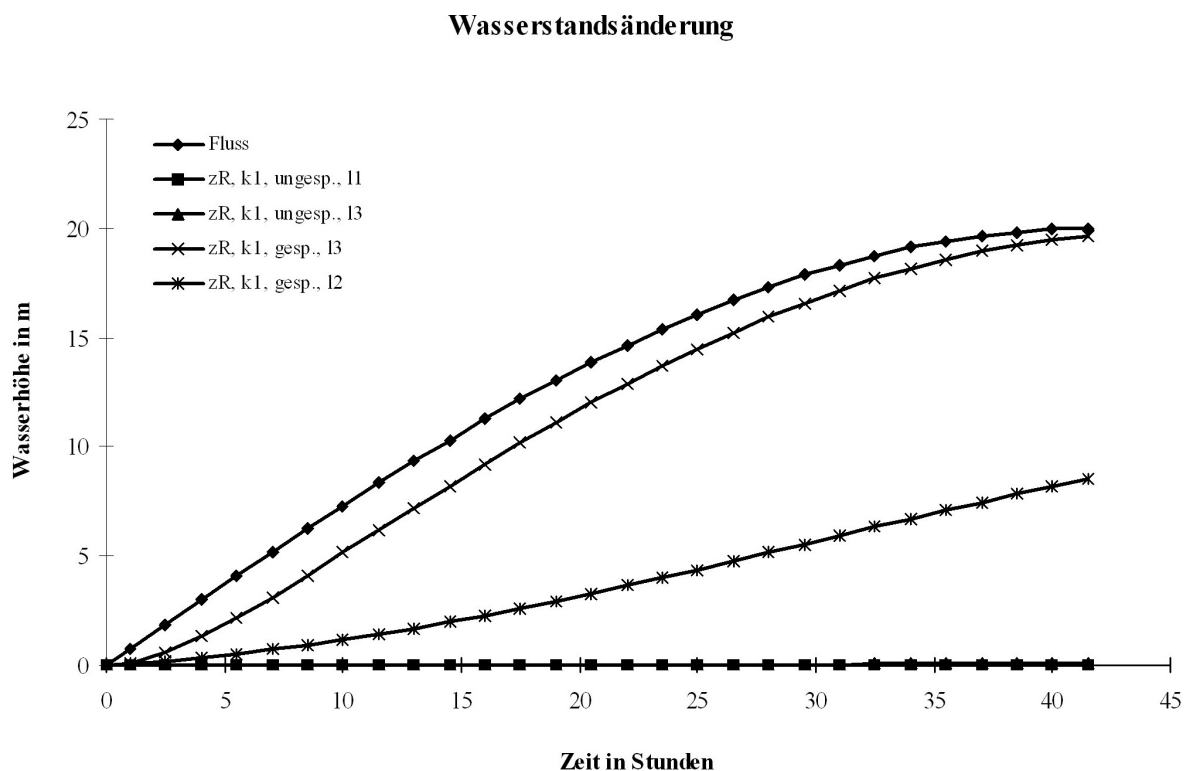


Abbildung 5.14: Grundwasserstandsänderung bei sinusförmiger Hochwasserwelle des Flusses

• zu Aufgabe 5 (s. S. 137)

1. a. Ausgangsgleichung: $T_1 \dot{C} + C = K$ mit $C(0) = 0$

$$T_1 \frac{dC}{dt} = K - C \implies \frac{dC}{C - K} = -\frac{dt}{T_1}$$

$$\ln \frac{|C - K|}{C_1} = -\frac{t}{T_1}$$

$$C = C_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + K; \quad t = 0, \quad C = 0$$

$$C_1 = -K \implies C = K \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right)$$

$$T_1 = 1; \quad t = 1; \quad K = 100$$

$$C = 100 (1 - e^{-1}) \simeq 63,2$$

Probe:

$$T_1 \cdot \dot{C} + C = K$$

$$C(t) = K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right)$$

$$\dot{C} = K \cdot \left(-\frac{1}{T_1}\right) \cdot \left(-e^{-\frac{t}{T_1}}\right) = \frac{K}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}}$$

$$T_1 \cdot \dot{C} + C = T_1 \cdot \frac{K}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} + K \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right)$$

$$= K$$

2. b. Skizze

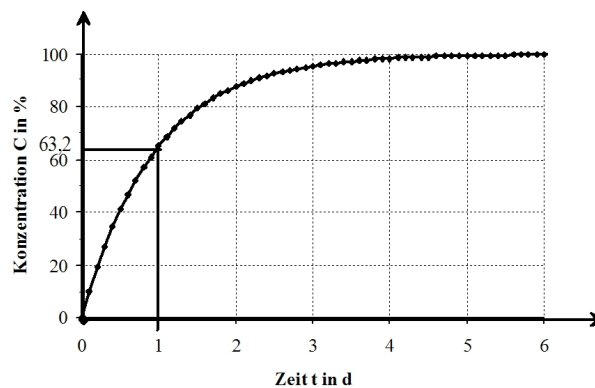


Abbildung 5.15: Prinzipieller Zeitverlauf der Konzentrationsänderung

- zu Aufgabe 6 (s. S. 137)

Ausgangsgleichung: $A \frac{dh}{dt} = \dot{V}_{Zustr}$ mit $h(0) = 0$; $\dot{V} = const$

$$dh = \frac{\dot{V}}{A} dt \implies h = \frac{\dot{V}t}{A} + C; \quad C = 0$$

$$h(t) = \frac{\dot{V}}{A} \cdot t$$

Probe:

$$A \frac{dh}{dt} = \dot{V} \quad h(t) = \frac{\dot{V}}{A} t$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\dot{V}}{A};$$

$$A \frac{dh}{dt} = A \cdot \frac{\dot{V}}{A} = \dot{V}$$

• zu Aufgabe 7 (s. S. 137)

Ausgangsgleichung: $\frac{dh}{dt} + k \cdot h = g$ mit $h_{t=0} = 0$; $g = 0,015m \cdot s^{-1}$ und $k = 0,01s^{-1}$

$$\frac{dh}{dt} + kh = 0$$

$$\frac{dh}{h} = -kdt \Rightarrow \ln \frac{|h|}{C} = -k \cdot t$$

$$h = C \cdot e^{-kt} \Rightarrow \dot{h} = \dot{C} \cdot e^{-kt} - C \cdot k \cdot e^{-kt}$$

$$\dot{C} \cdot e^{-kt} = g \Rightarrow dC = g \int \frac{dt}{e^{-kt}} \Rightarrow C = \frac{g}{k} \cdot e^{kt} + C_1$$

$$h = \frac{g}{k} + C_1 \cdot e^{-kt},$$

für $t = 0$; $h = 0$ gilt: $C_1 = -\frac{g}{k}$

$$h = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt}) \Rightarrow h = 1,5 (1 - e^{-0,01t})$$

Probe:

$$\frac{dh}{dt} + k \cdot h = g; \quad h(t) = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt})$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{g}{k} (-e^{-kt}) \cdot (-k) = g \cdot e^{-kt}$$

$$\frac{dh}{dt} + k \cdot h = g \cdot e^{-kt} + k \frac{g}{k} (1 - e^{-kt})$$

$$= g$$

5.2.2 Analytische Methoden - DGL höherer Ordnung

Aufgaben zu 5.2.2:

Die folgenden DGL sind zu lösen:

1. $yy'' = y'^2$
2. $y'' - y' = e^x$
3. $y'' + 4y' + a_0y = 0$ für $a_0 = 3, 4, 5$

Lösungen:

• zu Aufgabe 1:

$$y \cdot y'' = y'^2; \implies y' = z, \quad y'' = z' \cdot z$$

$$y \cdot z \cdot z' = z^2 \implies \frac{dz}{z dy} = \frac{1}{y} \implies \frac{dz}{z} = \frac{dy}{y}$$

$$z = C_1 y \implies \frac{dy}{dx} = C_1 y \implies \frac{dy}{y} = C_1 dx$$

$$\ln \frac{|y|}{C_2} = C_1 x$$

$$y = C_2 \cdot e^{C_1 x}$$

Probe:

$$y \cdot y'' = y'^2; \quad y = C_2 \cdot e^{C_1 x}$$

$$y' = C_1 \cdot C_2 \cdot e^{C_1 x}; \quad y'' = C_1^2 \cdot C_2 \cdot e^{C_1 x}$$

$$y \cdot y'' = C_2 \cdot e^{C_1 x} \cdot C_1^2 \cdot C_2 \cdot e^{C_1 x} = (C_1 \cdot C_2 \cdot e^{C_1 x})^2$$

$$y'^2 = (C_1 \cdot C_2 \cdot e^{C_1 x})^2; \quad y \cdot y'' \stackrel{!}{=} y'^2$$

• zu Aufgabe 2

$$y'' - y' = e^x$$

man substituiert: $y' = z$, $y'' = z'$

$$\Rightarrow z' - z = e^x$$

$$\text{Annahme: } z = U(x) \cdot V(x)$$

$$\Rightarrow z' = U' \cdot V + U \cdot V'$$

$$\Rightarrow U' \cdot V + U \cdot V' - U \cdot V = e^x$$

$$U' \cdot V + U(V' - V) = e^x; \text{ da } U(V' - V) = 0$$

$$\frac{dV}{dx} = V \Rightarrow V = e^x;$$

$$\frac{dU}{dx} \cdot e^x = e^x \Rightarrow U = x \cdot C_1$$

$$z = e^x (x + C_1)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x(x+C_1)}$$

$$y = \int x \cdot e^x dx + \int C_1 \cdot e^x dx + C_2$$

$$y = (x - 1) e^x + C_1 e^x + C_2$$

Probe:

$$y'' - y' = e^x; \quad y = (x - 1) e^x + C_1 e^x + C_2$$

$$y' = e^x + (x - 1) e^x + C_1 e^x$$

$$y'' = e^x + e^x + (x - 1) e^x + C_1 e^x$$

$$\begin{aligned} y'' - y' &= 2e^x + (x - 1) e^x + C_1 e^x - e^x - (x - 1) e^x - C_1 e^x \\ &= e^x \end{aligned}$$

• zu Aufgabe 3

$$y'' + 4y' + a_0 y = 0 \quad \text{für } a_0 = 3; 4; 5$$

$$\text{für } a_0 = 3 : k^2 + 4k + 3 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2};$$

$$k_1 = -3; \quad k_2 = -1$$

$$y = C_1 \cdot e^{-3x} + C_2 \cdot e^{-x}$$

$$\text{für } a_0 = 4 : k^2 + 4k + 4 = 0 \implies (k + 2)^2 = 0 \implies k_{1,2} = -2$$

$$y = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-2x}$$

$$y = e^{-2x} (C_1 + x \cdot C_2)$$

$$\text{für } a_0 = 5 : k^2 + 4k + 5 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2};$$

$$k_1 = -2 - i, \quad k_2 = -2 + i$$

$$y = e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

Probe:

$$\text{für } a_0 = 3 : y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x}$$

$$y' = -3C_1 e^{-3x} - C_2 e^{-x}$$

$$y'' = 9C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x}$$

$$y'' + 4y' + 3y = 9C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x} - 12C_1 e^{-3x} - 4C_2 e^{-x} + 3C_1 e^{-3x} + 3C_2 e^{-x} = 0$$

$$\text{für } a_0 = 4 : y = e^{-2x} + (C_1 + xC_2)$$

$$y' = -2e^{-2x}(C_1 + xC_2) + e^{-2x} \cdot C_2$$

$$y'' = 4e^{-2x}(C_1 + xC_2) - 2e^{-2x} \cdot C_2 - 2C_2e^{-2x}$$

$$y'' + 4y' + 4y = 4e^{-2x}(C_1 + xC_2) - 4C_2e^{-2x} - 8e^{-2x}(C_1 + xC_2)$$

$$+ 4e^{-2x}C_2 + 4e^{-2x}(C_1 + xC_2)$$

$$= 0$$

$$\text{für } a_0 = 5 : y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

$$y' = -2e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-2x}(C_2 \cos x - C_1 \sin x)$$

$$y'' = 4e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) - 2e^{-2x}(C_2 \cos x - C_1 \sin x)$$

$$+ (-2e^{-2x})(C_2 \cos x - C_1 \sin x) + e^{-2x}(-C_2 \sin x - C_1 \cos x)$$

$$y'' + 4y' + 5y = 3e^{-2x}(C_2 \sin x + C_1 \cos x) - 4e^{-2x}(C_2 \cos x - C_1 \sin x)$$

$$- 8e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 4e^{-2x}(C_2 \cos x - C_1 \sin x)$$

$$+ 5e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

$$= 0$$

5.3 Integraltransformationen

Aufgaben zu 5.3:

1. Lösen Sie folgende DGL mittels der LAPLACE-Transformation:

$$(a) \quad y'(x) + y = 0 \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} y(x) &= f(0) \cdot e^{-x} \\ f(0) &= 1 \rightarrow \text{Anfangsbedingung} \end{aligned}$$

$$(b) \quad y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 4 \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$(c) \quad y''(t) + 16y(t) = 32t \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} y(0) &= 3 \\ y'(0) &= -2 \end{aligned}$$

$$(d) \quad y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 6e^{-2t} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} y(0) &= 3 \\ y'(0) &= 8 \end{aligned}$$

$$(e) \quad y'''(t) + y'(t) = t + 1 \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 1 \\ y''(0) &= 1 \end{aligned}$$

(Lösung s. S. 172)

2. Lösen Sie folgende Gleichungssysteme mittels der LAPLACE-Transformation:

$$(a) \quad \begin{aligned} y'(t) + x(t) &= 0 \\ x'(t) + y(t) &= 1 \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} x(0) &= 0 \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$(b) \quad \begin{aligned} 2x(t) - y(t) - y'(t) &= 4(1 - e^{-t}) \\ 2x'(t) + y(t) &= 2(1 + 3e^{-2t}) \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} x(0) &= 0 \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

(Lösung s. S. 189)

3. Für folgendes hydraulisches Schema (siehe Abbildung 5.16) und zugehöriges Blockmodell gilt die Differentialgleichung

$$h_{Fl} = R \cdot C \frac{dz_R}{dt} + z_R$$

Dabei ist von linearisierten Verhältnissen und einem homogenen, isotropen Grundwasserleiter mit folgenden Parametern auszugehen:

$$k = 5 \cdot 10^{-4} \frac{m}{s}, n_0 = 0,2, z_{R_{mittel}} = 20m, l = 50m$$

Es soll hier also nur die Änderung gegenüber dem stationären Zustand berechnet werden.

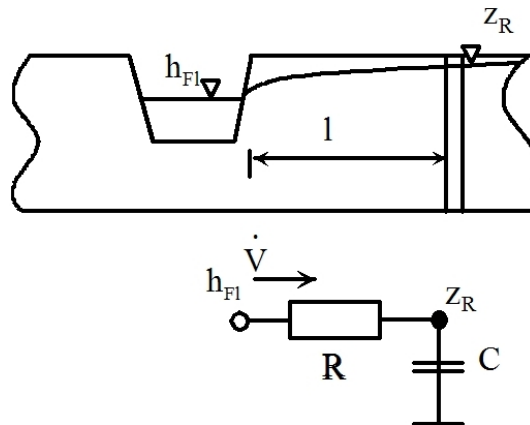


Abbildung 5.16: Schematische Darstellung des Grundwasserspiegels

den.

Berechnen Sie mit Hilfe der LAPLACE-Transformation die Änderung des Wasserstandes, wenn sich der Flusswasserspiegel in erster Näherung wie folgt ändert:

- sprunghaft ($h_{fl} = h_{fl_0} \cdot \mathbf{1}(t)$)
 - sinusförmig ($h_{fl} = h_{fl_a} \sin(\omega \cdot t)$, mit $\omega = 2\pi/\tau$ und $\tau = 7$ Tage).
4. Für die Konzentration C durch Sorption von Schadstoffen an der Bodenmatrix soll folgende DGL gelten:

$$T_1 \dot{C} + C = K$$

wobei T_1 eine Zeitkonstante und K eine Konstante sein sollen. $T_1 = 1d^{-1}$, $K = 100$
Die Konzentrationsänderung zum Zeitpunkt $t = 0$ soll $C(0) = 0$ sein.

- Lösen Sie die DGL mittels der Methode der LAPLACE -Transformation und berechnen Sie die Konzentrationsänderung für den Zeitpunkt $t = 1d$.
- Skizzieren Sie den prinzipiellen Zeitverlauf der Konzentrationsänderung.

(Lösung s. S.209)

5. Der Grundwasserwiederanstieg und damit die Auffüllung der Restlöcher in den ehemaligen Braunkohlentagebauen dauert unter natürlichen Bedingungen zu lange. Deshalb wird der Auffüllvorgang ($h_{t=0} = 0$) mit einer konstanten Fremdeinspeisung beschleunigt (siehe Abbildung 5.17). Die dazugehörige Differentialgleichung lautet:

$$A \frac{dh}{dt} = \dot{V}_{Zustr}$$

Überführen Sie diese Differentialgleichung mittels LAPLACE-Transformation in die Bildebene und lösen Sie diese Gleichung nach der gesuchten Größe auf

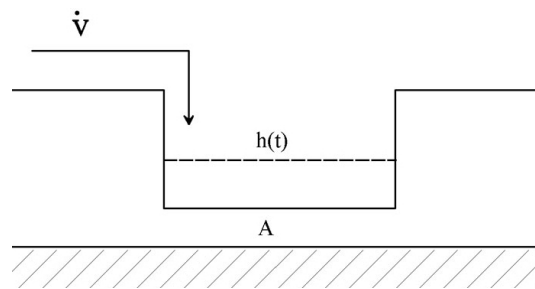


Abbildung 5.17: Füllvorgang eines Restloches

(Lösung s. S. 211)

6. Es ist folgende Differentialgleichung gegeben:

$$\frac{dh}{dt} + k \cdot h = g$$

mit $h_{t=0} = 0$, $g = 0,015 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ und $k = 0,01 \text{ s}^{-1}$

Lösen Sie die Differentialgleichung mittels der LAPLACE-Transformation.

(Lösung s. S. 160)

Lösungen:

Die Gesetze der LAPLACE-Transformation für die Differentiation lauten:

$$\begin{aligned}
 L\{f'(t)\} &= pF(p) - f(0) \\
 L\{f''(t)\} &= p^2F(p) - f(0)p - f'(0) \\
 L\{fn(t)\} &= p^n F(p) - f(0)p^{n-1} - f'(0)p^{n-2} - \dots \\
 &\quad \dots - f^{(n-2)}(0)p - f^{(n-1)}(0)
 \end{aligned}
 \tag{5.5}$$

Tabelle 5.1: Korrespondenztabelle LAPLACE-Transformation

Nr.	$F(p) = L\{f(t)\}$	$f(t) = L^{-1}\{F(p)\}$
1	0	0
2	$\frac{1}{p}$	1
3	$\frac{1}{p^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\frac{1}{(p-\alpha)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\alpha t}$
5	$\frac{1}{(p-\alpha)(p-\beta)}$	$\frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{\beta - \alpha}$
6	$\frac{p}{(p-\alpha)(p-\beta)}$	$\beta \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{\beta - \alpha}$
7	$\frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}$	$\sin \alpha t$
8	$\frac{\alpha \cos \beta + p \sin \beta}{p^2 + \alpha^2}$	$\sin(\alpha t + \beta)$
9	$\frac{p}{p^2 + \alpha^2}$	$\cos \alpha t$
10	$\frac{p \cos \beta - \alpha \sin \beta}{p^2 + \alpha^2}$	$\cos(\alpha t + \beta)$
11	$\frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$	$\sinh \alpha t$
12	$\frac{p}{p^2 - \alpha^2}$	$\cosh \alpha t$
13	$\frac{p^2 + 2\alpha^2}{p(p^2 + 4\alpha^2)}$	$\cos^2 \alpha t$

Tabelle 5.1: Korrespondenztabelle - Fortsetzung

Nr.	$\mathbf{F}(p) = \mathbf{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathbf{L}^{-1}\{\mathbf{F}(p)\}$
14	$\frac{2\alpha^2}{p(p^2+4\alpha^2)}$	$\sin^2 \alpha t$
15	$\frac{p^2-2\alpha^2}{p(p^2-4\alpha^2)}$	$\sinh^2 \alpha t$
16	$\frac{2\alpha^2 p}{p^4+4\alpha^4}$	$\sin \alpha t \sinh \alpha t$
17	$\frac{\alpha(p^2+2\alpha^2)}{p^4+4\alpha^4}$	$\sin \alpha t \cosh \alpha t$
18	$\frac{2\alpha p}{(p^2+\alpha^2)}$	$t \sin \alpha t$
19	$\frac{p^2-\alpha^2}{(p^2+\alpha^2)^2}$	$t \cos \alpha t$
20	$\frac{2\alpha p}{(p^2-\alpha^2)^2}$	$t \sinh \alpha t$
21	$\frac{1}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
22	$\frac{1}{p\sqrt{p}}$	$2 \frac{1}{\sqrt{\frac{t}{\pi}}}$
23	$\frac{1}{\sqrt{p^2+\alpha^2}}$	$J_0(\alpha t)$ (BESSEL-Funktion der Ordnung 0)
24	$\frac{1}{\sqrt{p^2-\alpha^2}}$	$I_0(\alpha t)$ (modifizierte BESSEL -Funktion der Ordnung 0)
25	$\arctan \frac{\alpha}{p}$	$\frac{\sin(\alpha t)}{t}$
26	$\arctan \frac{2\alpha p}{p^2-\alpha^2+\beta^2}$	$\frac{2}{t} \sin(\alpha t) \cdot \cos(\beta t)$

• zu Aufgabe 1 (s. S. 167)

a. Ausgangsgleichung:

$$y'(x) + y = 0 \quad \text{mit} \quad y(x) = f(0) \cdot e^{-x}$$
$$f(0) = 1; \rightarrow \text{Anfangsbedingung}$$

Es gilt:

$$\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$y = f(x)$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation:

Die formale Anwendung der LAPLACE-Transformation führt zu:

$$L \left\{ \frac{dy}{dx} + y \right\} = L \{0\}$$

Entsprechend dem Additions- und Differentiationssatz, bei der LAPLACE-Transformation erhält man:

$$L \{f'(x)\} = pF(p) - f(0)$$

$$L \{f(x)\} = F(p)$$

Daraus folgt:

$$pF(p) - f(0) + F(p) = 0$$

Es ist zu erkennen, dass die Differentialgleichung in eine algebraische Gleichung mit p als unabhängige Variable übergegangen ist.Lösung der algebraischen Gleichung nach $F(p)$:

$$pF(p) + F(p) = f(0)$$

$$F(p)(p+1) = f(0)$$

$$F(p) = f(0) \frac{1}{(p+1)}$$

Rücktransformation und Bestimmung von $y(t)$:

$$L^{-1}\{F(p)\} = L^{-1}\left\{f(0) \frac{1}{(p+1)}\right\}$$

$$y = f(x) = f(0) \cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+1)}\right\}$$

Dabei wird $f(0)$ als Konstante betrachtet, da der Anfangswert $f(0)$ zeitunabhängig ist. Die Rücktransformation kann mittels der Korrespondenz- oder der Residuummethode erfolgen.

Korrespondenz-Methode

Entsprechend Nr. 4 der Korrespondenztabelle (siehe Seite 170) gilt:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(p-a)^n}\right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{at}$$

Vergleicht man die Funktion $F(p)$ mit der Form in der Korrespondenztabelle, so erhält man:

$$n = 1$$

$$a = -1$$

$$t \Rightarrow x$$

Damit ergibt sich die LAPLACE-Rücktransformierte zu:

$$y(x) = f(0) \frac{x^{1-1}}{(1-1)!} \cdot e^{(-1)x}$$

$$y(x) = f(0) \cdot e^{-x}$$

mit

$$x^0 = 1$$

$$0! = 1$$

Man sieht, dass dies das gleiche Ergebnis ist, welches man für die direkte Lösung dieser DGL erhält. Der Faktor $f(0)$ hat hier die gleiche Bedeutung wie die Integrationskonstante C , die sonst über die Anfangsbedingung zu bestimmen ist.

Residuum-Methode

Die Residuum-Methode geht davon aus, dass die allgemein gebrochene rationale Funktion von p in eine Summe von Partialbrüchen der Form

$$\frac{K(p)_n}{(p - p_0)^n}$$

zerlegt wird. Für diese Grundform kann die Rücktransformierte mit

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p - p_0)^n} \right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{p_0 t}$$

angegeben werden. Durch Gleichsetzung der gebrochenen rationalen Funktion $F(p)$ mit der Summe der Partialbrüche und anschließenden Koeffizientenvergleich werden die Funktionen $K(p)_n$ berechnet.

Dabei sind die Polstellen der Partialbrüche die Nullstellen des Nennerpolynomes.

In der vorliegenden Aufgabenstellung besteht die Funktion $F(p)$ bereits aus nur einem Partialbruch, da nur ein Nenner vorhanden ist. Damit kann dieser direkt über die Korrespondenztabelle, wie bereits oben gezeigt, gelöst werden.

Probe:

$$y(0) = C$$

$$y(x) = C \cdot e^{-x}$$

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = -C \cdot e^{-x}$$

$$\frac{dy}{dx} + y = -C \cdot e^{-x} + C \cdot e^{-x}$$

$$= 0$$

b. Ausgangsgleichung:

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 4 \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation:

Die formale LAPLACE-Transformation lautet:

$$L \{ y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) \} = L \{ 4 \}$$

Es gilt:

$$Y = F(p)$$

Unter Beachtung der Korrespondenztabelle (siehe Seite 170, Nr. 2), mit

$$L\{1\} = \frac{1}{p}$$

und des Differentiationssatzes erhält man:

$$p^2 Y - y(0)p - y'(0) - 3pY + 3y(0) + 2Y = \frac{4}{p}$$

Nach Einführung der Anfangsbedingungen ergibt sich:

$$p^2 Y - p - 3pY + 3 + 2Y = \frac{4}{p}$$

Lösung der algebraischen Gleichung nach $F(p)$:

$$Y(p^2 - 3p + 2) - p + 3 = \frac{4}{p}$$

$$Y(p^2 - 3p + 2) = \frac{4}{p} + p - 3$$

$$Y = \frac{\frac{4}{p} + p - 3}{(p^2 - 3p + 2)}$$

$$Y = \frac{p^2 - 3p + 4}{p(p^2 - 3p + 2)}$$

Rücktransformation und Bestimmung von $y(t)$:

Zur Rücktransformation wird die Residuum-Methode angewendet. Dabei muss diese gebrochene rationale Funktion mittels der Methode der Partialbruchzerlegung in eine Summe von gebrochenen Polynomen der Nennernullstellen zerlegt werden. Die Nennernullstellen sind:

$$p_1 = 0$$

$$p^2 - 3p + 2 = 0$$

$$p_{2,3} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2}$$

$$p_2 = 2$$

$$p_3 = 1$$

Damit lautet die Summe der Partialbrüche:

$$Y = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p-1}$$

$$Y = \frac{A \cdot (p-2) \cdot (p-1) + B \cdot p \cdot (p-1) + C \cdot p \cdot (p-2)}{p(p^2 - 3p + 2)}$$

$$Y = \frac{Ap^2 - 3Ap + 2A + Bp^2 - Bp + Cp^2 - 2Cp}{p(p^2 - 3p + 2)}$$

Variante 1

Führt man jetzt den Vergleich der Zählerpolynome durch:

$$p^2 - 3p + 4 = Ap^2 - 3Ap + 2A + Bp^2 - Bp + Cp^2 - 2Cp$$

und setzt die Koeffizienten der jeweiligen Polynomglieder, geordnet nach Potenzen von p , gleich, so erhält man:

$$\begin{array}{ll} p^2 & 1 = A + B + C \\ p^1 & -3 = -3A - B - 2C \\ p^0 & 4 = 2A \\ & A = 2 \\ & B = 1 \\ & C = -2 \end{array}$$

Damit lautet die Partialbruchsumme

$$Y = \frac{2}{p} + \frac{1}{p-2} + \frac{-2}{p-1}$$

Die Rücktransformation kann über die Korrespondenztabelle (siehe Seite 170 Nr. 2 und 4) erfolgen:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{p} \right\} = 1$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{p - \alpha} \right\} = e^{\alpha t}$$

Mit $\alpha_1 = 2$ und $\alpha_2 = 1$ erhält die rücktransformierte Lösung die Form:

$$y(t) = 2 + e^{2t} - 2e^t$$

Variante 2

Dieses Ergebnis kann man auch erzielen, wenn man die komplizierteren Korrespondenzen (siehe Seite 170, Nr. 5 und 6) benutzt. In diesen Fällen kann man folgende teilweise Partialbruchzerlegung durchführen:

$$Y = \frac{A}{p} + \frac{Bp}{(p-2)(p-1)} + \frac{C}{(p-2)(p-1)}$$

$$Y = \frac{A \cdot (p^2 - 3p + 2) + Bp^2 + Cp}{p(p^2 - 3p + 2)}$$

Der Vergleich der Zählerpolynome liefert:

$$p^2 - 3p + 4 = Ap^2 - 3Ap + 2A + Bp^2 + Cp$$

Die Koeffizienten der jeweiligen Polynomglieder, geordnet nach Potenzen von p, lauten:

$$p^2 \quad 1 = A + B$$

$$p^1 \quad -3 = -3A + C$$

$$p^0 \quad 4 = 2A$$

$$A = 2$$

$$B = -1$$

$$C = 3$$

Damit lautet die Partialbruchsumme:

$$Y = \frac{2}{p} - \frac{p}{(p-2)(p-1)} + \frac{3}{(p-2)(p-1)}$$

Die Rücktransformation kann über die Korrespondenztabelle (siehe Seite 170, Nr.2, 5 und 6) erfolgen:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{p} \right\} = 1$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p-\alpha)(p-\beta)} \right\} = \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{\beta - \alpha}$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{p}{(p-\alpha)(p-\beta)} \right\} = \beta \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{\beta - \alpha}$$

Mit

$$\alpha = 1$$

$$\beta = 2$$

ergibt sich:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p-1)(p-2)} \right\} = \frac{e^{2t} - e^t}{2-1}$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p-1)(p-2)} \right\} = e^{2t} - e^t$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{p}{(p-1)(p-2)} \right\} = 2 \frac{e^{2t} - e^t}{2-1}$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{p}{(p-1)(p-2)} \right\} = 2 (e^{2t} - e^t)$$

Damit ergibt sich die Lösung zu

$$y(t) = 2 - 2(e^{2t} - e^t) + 3(e^{2t} - e^t)$$

$$y(t) = 2 + e^{2t} - e^t$$

Probe:

Die Lösung und deren Ableitungen

$$y(t) = 2 + e^{2t} - 2e^t$$

$$y'(t) = 2e^{2t} - 2e^t$$

$$y''(t) = 4e^{2t} - 2e^t$$

erfüllen die Randbedingungen und die Ausgangsdifferentialgleichung:

$$y(0) = 2 + e^{2 \cdot 0} - 2 \cdot e^0$$

$$y(0) = 2 + 1 - 2 = 1$$

$$y'(0) = 2e^{2 \cdot 0} - 2e^0$$

$$y'(0) = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 0$$

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 4$$

$$4e^{2t} - 2e^t - 6e^{2t} + 6e^t + 4 + 2e^{2t} - 4e^t \stackrel{?}{=} 4$$

$$e^{2t}(4 - 6 + 2) + e^t(-2 + 6 - 4) + 4 \stackrel{!}{=} 4$$

c. Ausgangsgleichung:

$$y''(t) + 16y(t) = 32t \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} y(0) &= 3 \\ y'(0) &= -2 \end{aligned}$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation:

$$L\{y''(t) + 16y(t)\} = L\{32t\}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 3$$

$$y'(0) = -2$$

Die Benutzung der Korrespondenztabelle (siehe Seite 170, Nr. 3) zur Transformation führt auf

$$L\left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right\} = \frac{1}{p^n}$$

$$p^2Y - y(0)p - y'(0) + 16Y = 32 \cdot L\left\{\frac{t^{2-1}}{(2-1)!}\right\}$$

$$p^2Y - y(0)p - y'(0) + 16Y = \frac{32}{p^2}$$

Nach Einführung der Anfangsbedingungen folgt:

$$p^2Y - 3p + 2 + 16Y = \frac{32}{p^2}$$

Lösung der algebraischen Gleichung nach $F(p)$:

$$\begin{aligned}Y(p^2 + 16) &= \frac{32}{p^2} + 3p - 2 \\Y &= \frac{32}{p^2(p^2 + 16)} + \frac{3p - 2}{(p^2 + 16)} \\Y &= \frac{3p^3 - 2p^2 + 32}{p^2 \cdot (p^2 + 16)}\end{aligned}\tag{5.6}$$

Rücktransformation und Bestimmung von $y(t)$:

Zur Rücktransformation wird die Residuuum-Methode angewendet. Dabei muss diese gebrochene rationale Funktion mittels der Methode der Partialbruchzerlegung in eine Summe von gebrochenen Polynomen der Nennernullstellen zerlegt werden.

Variante 1

Die Nullstellen des Nennerpolynoms sind:

$$p_{1,2} = 0$$

$$p_{3,4} = \pm\sqrt{-16}$$

Die Zerlegung der gebrochenen Funktion in die Reihe der Partialbrüche ergibt:

$$\begin{aligned}Y &= \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{(p + \sqrt{-16})} + \frac{D}{(p - \sqrt{-16})} \\Y &= \frac{p^3(A + C + D) + p^2(B - C\sqrt{-16} + D\sqrt{-16}) + p^1 16A + p^0 16B}{p^2 \cdot (p^2 + 16)}\end{aligned}$$

Führt man jetzt den Vergleich der Zählerpolynome durch:

$$3p^3 - 2p^2 + 32 = p^3(A + C + D) + p^2(B - C\sqrt{-16} + D\sqrt{-16}) + p^1 16A + p^0 16B$$

und setzt die Koeffizienten der jeweiligen Polynomglieder, geordnet nach Potenzen von p , gleich, so erhält man die Faktoren der Potenzreihe von p :

$$p^3 \quad 3 = (A + C + D)$$

$$p^2 \quad -2 = B - C\sqrt{-16} + D\sqrt{-16}$$

$$p^1 \quad 0 = 16A; \implies A = 0$$

$$p^0 \quad 32 = 16B; \implies B = 2$$

Daraus folgt mit Einführung der komplexen Zahl $\sqrt{-1} = j$:

$$-2 = 2 - 4Cj + 4Dj \implies -4 = -4Cj + 4Dj \implies Cj - Dj = 1$$

$$\begin{array}{lcl} Cj - Dj = 1 & \implies & Cj - Dj = 1 \\ C + D = 3 \mid \cdot j & \implies & Cj + Dj = 3j \end{array} \quad + \quad \implies \quad 2Cj = 3j + 1$$

$$\implies C = \frac{3j+1}{2j}$$

$$D = 3 - C \implies D = 3 - \frac{3j+1}{2j} \implies D = \frac{6j-3j-1}{2j}$$

$$D = \frac{3j-1}{2j}$$

Damit erhält man die Lösung Y in der Bildebene zu:

$$Y = \frac{0}{p} + \frac{2}{p^2} + \frac{\frac{3j+1}{2j}}{(p+4j)} + \frac{\frac{3j-1}{2j}}{(p-4j)}$$

Für die Rücktransformation werden folgende Korrespondenzen (siehe Seite. 170, Nr. 3 und 4) verwendet:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{p^n} \right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$n = 2$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2} \right\} = \frac{t^{2-1}}{(2-1)!} = t$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p-\alpha)^n} \right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\alpha t}$$

$$n = 1$$

$$\alpha_{1,2} = \pm 4j$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p-4j)^1} \right\} = \frac{t^{1-1}}{(1-1)!} e^{4jt} = e^{4jt}$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p-(-4j))^1} \right\} = \frac{t^{1-1}}{(1-1)!} e^{-4jt} = e^{-4jt}$$

Damit erhält man die Lösung in der Zeitebene:

$$y(t) = 2t + \frac{3j+1}{2j} \cdot e^{-4jt} + \frac{3j-1}{2j} \cdot e^{4jt}$$

$$y(t) = 2t + \frac{3}{2} (e^{4jt} + e^{-4jt}) - \frac{1}{2j} (e^{4jt} - e^{-4jt})$$

Mit der EULER-Formel werden die e -Funktionen mit den komplexen Argumenten in trigonometrische Funktionen umgeformt in:

$$\frac{e^{aj} - e^{-aj}}{2j} = \sin a$$
$$\frac{e^{aj} + e^{-aj}}{2} = \cos a$$

$$y(t) = 2t + 3 \cos(4t) - \sin(4t)$$

Variante 2

Die Berechnung kann man sich auch etwas erleichtern, indem man nicht die vollständige Partialbruchzerlegung durchführt, sondern in der Korrespondenztabelle nach komplizierteren Transformationen sucht.

So kann man folgende Rücktransformationskorrespondenzen (siehe Seite 170, Nr. 7 und 9) finden.

$$L^{-1} \left\{ \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2} \right\} = \sin \alpha t$$
$$L^{-1} \left\{ \frac{p}{p^2 + \alpha^2} \right\} = \cos \alpha t$$

Vergleicht man diese Ausdrücke mit der Gleichung 5.6, so erhält man folgende Zerlegung:

$$Y = \frac{3p^3 - 2p^2 + 32}{p^2 \cdot (p^2 + 16)}$$
$$Y = \frac{3p - 2}{(p^2 + 16)} + \frac{32}{p^2 \cdot (p^2 + 16)}$$

Dafür kann man folgende Zerlegung ansetzen:

$$Y = \frac{A}{p^2} + \frac{Bp}{(p^2 + 16)} + \frac{C}{(p^2 + 16)} \quad (5.7)$$
$$Y = \frac{A \cdot (p^2 + 16) + Bp^3 + Cp^2}{p^2 \cdot (p^2 + 16)}$$

Der Vergleich der Zählerpolynome ergibt:

$$3p^3 - 2p^2 + 32 = A \cdot (p^2 + 16) + Bp^3 + Cp^2$$

Daraus folgt der Vergleich der Potenzreihenglieder:

$$p^3 \quad 3 = B$$

$$p^2 \quad -2 = A + C$$

$$p^0 \quad 32 = 16A$$

$$A = 2$$

$$B = 3$$

$$C = -4$$

Daraus folgt bei Einsatz in Gleichung 5.7:

$$Y = \frac{2}{p^2} + \frac{3p}{(p^2 + 16)} - \frac{4}{(p^2 + 16)}$$

Hierauf können die Korrespondenzen (siehe Seite 170, Nr. 3, 7 und 9) angewendet werden:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{p^n} \right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2} \right\} = \sin \alpha t$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{p}{p^2 + \alpha^2} \right\} = \cos \alpha t$$

Mit

$$n = 2$$

$$\alpha = 4$$

ergibt sich:

$$y(t) = 2t + 3 \cos(4t) - \sin(4t)$$

Die ist das gleiche Ergebnis, wie es über die vollständige Partialbruchzerlegung (Gleichung 5.6 erzielt wurde.

Probe:

$$y(t) = 2t + 3 \cos(4t) - \sin(4t)$$

$$y' = 2 + 3(-\sin(4t)) \cdot 4 - 4 \cos 4t$$

$$y'' = -12 \cos(4t) \cdot 4 + 16 \sin(4t)$$

$$-48 \cos(4t) + 16 \sin(4t) + 32t + 48 \cos(4t) - 16 \sin(4t) \stackrel{!}{=} 32t$$

d. Ausgangsgleichung:

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 6e^{-2t} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} y(0) = 3 \\ y'(0) = 8 \end{array}$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation:

Aus der formalen Anwendung der LAPLACE-Transformation und der Differentiationsregel folgt:

$$L\{y''(t) + 4y'(t) + 4y(t)\} = L\{6e^{-2t}\}$$

$$p^2Y - y(0)p - y'(0) + 4pY - 4 \cdot y(0) + 4Y = L\{6e^{-2t}\}$$

Die Benutzung der Korrespondenztabelle (siehe Seite 170, Nr. 4) zur Transformation ergibt:

$$L\left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\alpha t}\right\} = \frac{1}{(p-\alpha)^n}$$

$$\alpha = -2$$

$$n = 1$$

$$L\left\{\frac{t^{1-1}}{(1-1)!}e^{-2t}\right\} = \frac{1}{(p+2)^1}$$

$$L\{e^{-2t}\} = \frac{1}{(p+2)}$$

Nach Einführung der Anfangsbedingungen folgt:

$$p^2Y - 3p - 8 + 4pY - 4 \cdot 3 + 4Y = \frac{6}{(p+2)}$$

Lösung der algebraischen Gleichung nach $F(p)$:

$$\begin{aligned}
 Y(p^2 + 4p + 4) &= \frac{3p^2 + 26p + 46}{p + 2} \\
 Y &= \frac{3p^2 + 26p + 46}{(p + 2)^3} \\
 &= \frac{A}{p + 2} + \frac{B}{(p + 2)^2} + \frac{C}{(p + 2)^3} \\
 &= \frac{A(p + 2)^2 + B(p + 2) + C}{(p + 2)^3} \\
 &= \frac{Ap^2 + p(4A + B) + 4A + 2B + C}{(p + 2)^3}
 \end{aligned}$$

$$p^2 : 3 = A$$

$$p^1 : 26 = 4A + B$$

$$p^0 : 46 = 4A + 2B + C$$

$$B = 14$$

$$C = 46 - 12 - 28 = 6$$

$$Y = \frac{3}{p + 2} + \frac{14}{(p + 2)^2} + \frac{6}{(p + 2)^3}$$

Rücktransformation und Bestimmung von $y(t)$:

Die Rücktransformation kann sofort aus den Korrespondenzen (siehe Seite 170, Nr.4) abgelesen werden:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p - \alpha)^n} \right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\alpha t}; \quad \alpha = -2$$

$$n = 1 \implies e^{-2t}$$

$$n = 2 \implies t \cdot e^{-2t}$$

$$n = 3 \implies \frac{t^2}{2} \cdot e^{-2t}$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p - (-2))^3} \right\} = \frac{t^{3-1}}{(3-1)!} e^{-2t} = \frac{t^2}{2} \cdot e^{-2t}$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p - (-2))^2} \right\} = \frac{t^{2-1}}{(2-1)!} e^{-2t} = t \cdot e^{-2t}$$

$$y(t) = 3e^{-2t} + 14t \cdot e^{-2t} + 3t^2 \cdot e^{-2t}$$

$$y(t) = e^{-2t} (3t^2 + 14t + 3)$$

Probe

Die Lösung und ihre Ableitungen:

$$y(t) = e^{-2t} (3t^2 + 14t + 3)$$

$$y'(t) = -2e^{-2t} (3t^2 + 14t + 3) + e^{-2t} (6t + 14)$$

$$y''(t) = 4e^{-2t} (3t^2 + 14t + 3) - 2e^{-2t} (6t + 14) - 2e^{-2t} (6t + 14) + 6e^{-2t}$$

in die Differentialgleichung eingesetzt, ergibt sich:

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) \stackrel{?}{=} 6e^{-2t}$$

$$\begin{aligned} y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) &= e^{-2t} [4(3t^2 + 14t + 3) - 2(6t + 14) - 2(6t + 14) + 6 \\ &\quad - 8(3t^2 + 14t + 3) + 4(6t + 14) + 4(3t^2 + 14t + 3)] \\ &= 6e^{-2t} \\ 6e^{-2t} &\stackrel{!}{=} 6e^{-2t} \end{aligned}$$

e. Ausgangsgleichung:

$$y'''(t) + y'(t) = t + 1 \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 1 \\ y''(0) &= 1 \end{aligned}$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation:

$$L\{y'''(t) + y'(t)\} = L\{t + 1\}$$

Die Benutzung der Differentiationsregeln und der Korrespondenztabelle (siehe Seite 170, Nr. 2 und 3) zur Transformation führt auf:

$$L\{y'''(t)\} = p^3 Y - y(0)p^2 - y'(0)p - y''(0)$$

$$L\{y'(t)\} = pY - y(0)$$

$$p^3 Y - y(0)p^2 - y'(0)p - y''(0) + pY - y(0) = L\{t\} + L\{1\}$$

$$L\{1\} = \frac{1}{p}$$

$$L\left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right\} = \frac{1}{p^n}$$

$$n = 2$$

$$t = \frac{t^{2-1}}{(2-1)!}$$

$$L\left\{\frac{t^{2-1}}{(2-1)!}\right\} = \frac{1}{p^2}$$

Nach Einführung der Anfangsbedingungen:

$$p^3 Y - p^2 - p - 1 + pY - 1 = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}$$

Lösung der algebraischen Gleichung nach $F(p)$:

$$Yp(p^2 + 1) = \frac{p^4 + p^3 + 2p^2 + p + 1}{p^2} \implies Y = \frac{p^4 + p^3 + 2p^2 + p + 1}{p^3(p^2 + 1)}$$

$$Y = \frac{(p^2 + 1)^2 + p(p^2 + 1)}{p^3(p^2 + 1)} = \frac{p^2 + 1}{p^3} + \frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^2}$$

Rücktransformation und Bestimmung von $y(t)$:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p^n}\right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$n = 1; \implies 1$$

$$n = 2; \implies t$$

$$n = 3; \implies \frac{t^2}{2}$$

$$y(t) = \frac{t^2}{2} + t + 1$$

Probe:

$$y(t) = \frac{t^2}{2} + t + 1$$

$$y' = \frac{1}{2}2t + 1 = t + 1$$

$$y'' = 1; \quad y''' = 0$$

$$0 + t + 1 \stackrel{!}{=} t + 1$$

- zu Aufgabe 2 (s. S. 167)

a. Ausgangsgleichung:

$$\begin{array}{ll} y'(t) + x(t) = 0 & \text{mit } x(0) = 0 \\ x'(t) + y(t) = 1 & y(0) = 0 \end{array}$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation

Die jeweilige Transformation der beiden Gleichungen ergibt:

$$y'(t) + x(t) = 0$$

$$L\{y'(t) + x(t)\} = L\{0\}$$

$$pY - y(0) + X = 0 \quad \text{mit Anfangsbed. } y(0) = 0$$

$$pY + X = 0$$

$$x'(t) + y(t) = 1$$

$$L\{x'(t) + y(t)\} = L\{1\}$$

$$pX - x(0) + Y = \frac{1}{p} \quad \text{mit Anfangsbed. } x(0) = 0$$

$$pX + Y = \frac{1}{p}$$

Lösung der algebraischen Gleichung nach $F(p)$:

Damit hat man zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten X und Y

$$pY + X = 0$$

$$pX + Y = \frac{1}{p}$$

$$X = -pY$$

$$-p^2Y + Y = \frac{1}{p}$$

und erhält die Lösung in der Bildebene

$$Y = \frac{-1}{p(p^2 - 1)}$$

$$X = \frac{1}{(p^2 - 1)}$$

Rücktransformation und Bestimmung von $y(t)$:

Die Rücktransformation soll mittels der Partialbruchzerlegung erfolgen.

$$Y = \frac{-1}{p(p^2 - 1)}$$

$$Y = \frac{-1}{p \cdot (p - 1) \cdot (p + 1)}$$

$$Y = \frac{A}{p} + \frac{B}{(p - 1)} + \frac{C}{(p + 1)}$$

$$Y = \frac{A(p^2 - 1) + B(p^2 + p) + C(p^2 - p)}{p(p^2 - 1)}$$

Aus dem Koeffizientenvergleich der Potenzen von p der Zählerpolynome erhält man:

$$p^2 : \quad 0 = A + B + C$$

$$p^1 : \quad 0 = B - C$$

$$p^0 : \quad -1 = -A$$

Daraus folgt:

$$A = 1; \quad B = \frac{1}{2}; \quad C = \frac{1}{2}$$
$$Y = \frac{1}{p} - \frac{1}{2 \cdot (p - 1)} - \frac{1}{2 \cdot (p + 1)}$$

Unter Ausnutzung der Rücktransformationskorrespondenzen (siehe Seite 170, Nr.7) erhält man

$$L^{-1} \left\{ \frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2} \right\} = \sinh \alpha t$$

$$\alpha = 1$$

$$x(t) = \sinh t$$

$$y(t) = 1 - \cosh t$$

Probe:

$$y' = -\sinh t$$

$$x' = \cosh t$$

$$y' + x = -\sinh t + \sinh t \stackrel{!}{=} 0$$

$$x' + y = \cosh t + 1 - \cosh t \stackrel{!}{=} 1$$

b. Ausgangsgleichung:

$$2x(t) - y(t) - y'(t) = 4(1 - e^{-t}) \quad \text{mit} \quad x(0) = 0$$

$$2x'(t) + y(t) = 2(1 + 3e^{-2t}) \quad y(0) = 0$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation

Die Transformation der ersten Gleichung ergibt

$$L\{2x(t) - y(t) - y'(t)\} = L\{4(1 - e^{-t})\}$$

$$2X - Y - pY + y(0) = L\{4(1 - e^{-t})\}$$

Aus der Korrespondenztabelle (siehe Seite 170, Nr. 5) erhält man

$$L\left\{\frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{\beta - \alpha}\right\} = \frac{1}{(p - \alpha)(p - \beta)}$$

$$\beta = 0$$

$$\alpha = -1$$

$$L\left\{\frac{e^{0t} - e^{-1t}}{0 - (-1)}\right\} = \frac{1}{(p - (-1))(p - 0)}$$

$$L\{1 - e^{-t}\} = \frac{1}{p \cdot (p + 1)}$$

Nach Einführung der Anfangsbedingungen ergibt sich:

$$2X - Y - pY = \frac{4}{p \cdot (p + 1)}$$

Die Transformation der zweiten Gleichung und die Einführung der Anfangsbedingungen ergibt:

$$L\{2x'(t) + y(t)\} = L\{2(1 + 3e^{-2t})\}$$

$$2pX - 2x(0) + Y = L\{2(1 + 3e^{-2t})\}$$

$$2pX + Y = L\{2\} + L\{6e^{-2t}\}$$

Aus der Korrespondenztabelle (siehe Seite 170, Nr. 2 und 5) erhält man:

$$L\{1\} = \frac{1}{p}$$

$$L\left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\alpha t}\right\} = \frac{1}{(p-\alpha)^n}$$

$$n = 1$$

$$\alpha = -2$$

$$L\left\{\frac{t^{1-1}}{(1-1)!}e^{-2t}\right\} = \frac{1}{p-(-2)}$$

$$L\{e^{-2t}\} = \frac{1}{p+2}$$

$$2pX + Y = \frac{2}{p} + \frac{6}{p+2}$$

Lösung der algebraischen Gleichung nach $F(p)$:

Damit sind die zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten X und Y zu lösen.

$$(1) \quad 2X - Y - pY = \frac{4}{p \cdot (p+1)} \quad | \cdot p$$

$$(2) \quad 2pX + Y = \frac{2}{p} + \frac{6}{p+2}$$

$$(1) \quad 2Xp - pY - p^2Y = \frac{4}{p+1}$$

\Downarrow

$$(2) - (1) \quad Y + pY + p^2Y = \frac{2}{p} - \frac{4}{p+1} + \frac{6}{p+2}$$

$$Y(1 + p + p^2) = \frac{2(p+1)(p+2) - 4p(p+2) + 6p(p+1)}{p(p+1)(p+2)}$$

$$\begin{aligned}
Y &= \frac{2(p+1)(p+2) - 4p(p+2) + 6p(p+1)}{p(p+1)(p+2)(p^2+p+1)} \\
Y &= \frac{2p^2 + 6p + 4 - 4p^2 - 8p + 6p^2 + 6p}{p(p+1)(p+2)(p^2+p+1)} = \frac{4p^2 + 4p + 4}{p(p+1)(p+2)(p^2+p+1)} \\
Y &= \frac{4}{p(p+1)(p+2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p+2} \\
&= \frac{A(p+1)(p+2) + Bp(p+2) + Cp(p+1)}{p(p+1)(p+2)} \\
&= \frac{Ap^2 + 3Ap + 2A + Bp^2 + 2Bp + Cp^2 + Cp}{p(p+1)(p+2)} \\
&= \frac{p^2(A+B+C) + p(3A+2B+C) + 2A}{p(p+1)(p+2)}
\end{aligned}$$

Daraus erfolgt der Vergleich der Potenzreihenglieder :

$$p^2 \quad A + B + C = 0$$

$$p^1 \quad 3A + 2B + C = 0$$

$$p^0 \quad 2A = 4$$

$$A = 2$$

$$B + C = -2$$

$$2B + C = -6$$

$$B = -4$$

$$C = 2$$

In die Gleichung eingesetzt, ergibt sich:

$$Y = \frac{2}{p} - \frac{4}{p+1} + \frac{2}{p+2}$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{p} \right\} = 1; \implies L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p - \alpha)^n} \right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\alpha t}$$

$$\alpha = -2$$

$$n = 1$$

Rücktransformation und Bestimmung von $y(t)$:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{p+2} \right\} = e^{-2t}$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{p+1} \right\} = e^{-t}$$

$$Y = 2e^{-2t} - 4e^{-t} + 2$$

$$y(t) = 2(e^{-2t} - 2e^{-t} + 1)$$

Bestimmung von $x(t)$

$$2Xp + \frac{2}{p} + \frac{2}{p+2} - \frac{4}{p+1} = \frac{2}{p} + \frac{6}{p+2}$$

$$2pX = \frac{4}{p+2} + \frac{4}{p+1}$$

$$X = \frac{2}{p(p+2)} + \frac{2}{p(p+1)}$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p-\alpha)(p-\beta)} \right\} = \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{\beta - \alpha}$$

$$\alpha = 0$$

$$\beta = -2$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{p(p+2)} \right\} = \frac{e^{-2t} - 1}{-2}$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{p(p+1)} \right\} = \frac{e^{-t} - 1}{-2} = 1 - e^{-2t} - 2e^{-t}$$

$$x(t) = 1 - e^{-2t} + 2 - 2e^{-t}$$

$$= 3 - e^{-2t} - 2e^{-t}$$

Probe:

$$y' = 2(-2e^{-2t} + 2e^{-t}) = 4e^{-t} - 4e^{-2t}$$

$$x' = 2e^{-2t} + 2e^{-t}$$

$$2x - y - y' = 6 - 2e^{-2t} - 4e^{-t} - 2e^{-2t} + 4e^{-t} - 2 - 4e^{-t} + 4e^{-2t}$$

$$= 4 - 4e^{-t} = 4(1 - e^{-t})$$

$$2x' + y = 4e^{-2t} + 4e^{-t} + 2e^{-2t} - 4e^{-t} + 2$$

$$= 6e^{-2t} + 2 = 2(1 + 3e^{-2t})$$

• zu Aufgabe 3 (s. S. 167)

Ausgangsgleichung:

$$h_{Fl} = R \cdot C \frac{dz_R}{dt} + z_R, \quad \text{mit} \quad k = 5 \cdot 10^{-4} \frac{m}{s}; n_0 = 0,2$$

$$z_{Rmittel} = 20m; l = 50m$$

Dabei ist von linearisierten Verhältnissen und einem homogenen, isotropen Grundwasserleiter mit folgenden Parametern auszugehen:

Variante 1: Aufstellen der Differentialgleichung

Entsprechend der Methoden zur theoretischen Prozessanalyse kann für das hydraulische Schema die Differentialgleichung aufgestellt werden. Der Weg zur Aufstellung dieser Differentialgleichung ist bei den Aufgaben zur theoretischen Prozessanalyse beschrieben (siehe Seite 134).

$$h_{Fl} = R_{hydr} \cdot C \frac{dz_R}{dt} + z_R$$

bzw. umgeformt:

$$\frac{dz_R}{dt} + \frac{z_R}{R_{hydr} \cdot C} = \frac{h_{Fl}}{R_{hydr} \cdot C}$$

Für $R_{hydr} \cdot C$ soll die Abkürzung T_1 eingeführt werden.

T_1 trägt die Bezeichnung der Zeitkonstanten (siehe Abschnitt 12.1 Übertragungsfunktionen, Seite 354ff) und ist nicht mit der Transmissibilität T zu verwechseln. Diese Bezeichnung wird in automatisierungs- und elektrotechnischer Literatur so verwendet und ist entsprechend genormt. In älteren Literaturquellen wird auch oft die Bezeichnung τ verwendet. Die hier eingeführte Zeitkonstante T_1 , ist eng mit der geohydraulischen Zeitkonstanten $a = \frac{S}{T}$ (Speicherkoeffizient/Transmissibilität) verwandt und lässt sich in diese überführen (siehe GRÄBER, Lehrscript Systemanalyse, Abschnitt 8.1 THEISSche Brunnengleichung)

$$R_{hydr} \cdot C = \frac{l}{T \cdot b} \cdot S \cdot l \cdot b = \frac{S}{T} \cdot l^2$$

$$\frac{dz_R}{dt} + \frac{z_R}{T_1} = \frac{h_{Fl}}{T_1}$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation:

Diese Differentialgleichung gilt es, mit den Methoden der LAPLACE-Transformation zu lösen. Wendet man die Rechenregeln entsprechend an, erhält man:

$$L \left\{ \frac{dz_R}{dt} + \frac{z_R}{T_1} \right\} = L \left\{ \frac{h_{Fl}}{T_1} \right\}$$

$$L \left\{ \frac{dz_R}{dt} \right\} + L \left\{ \frac{z_R}{T_1} \right\} = L \left\{ \frac{h_{Fl}}{T_1} \right\}$$

Mit dem Gesetz zur Differentiation,

$$L\{f'(t)\} = pF(p) - f(0)$$

der Variablenzuordnung

$$f(t) = z_R$$

und den Anfangsbedingung soll gelten:

$$f(0) = z_{Rt=0}$$

Damit erhält man:

$$pL\{z_R\} - z_{Rt=0} + \frac{1}{T_1}L\{z_R\} = \frac{1}{T_1}L\{h_{Fl}\}$$

Lösung der algebraischen Gleichung nach $F(p) = L\{z_R\}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_1}L\{h_{Fl}\} + z_{Rt=0} &= L\{z_R\} \cdot \left(p + \frac{1}{T_1}\right) \\ L\{z_R\} &= \frac{\frac{1}{T_1}L\{h_{Fl}\} + z_{Rt=0}}{\left(p + \frac{1}{T_1}\right)} \end{aligned}$$

Berücksichtigt man, dass nur die Änderungen gegenüber dem stationären Ausgangszustand berechnet werden sollen, kann man $z_{Rt=0} = 0$ setzen, und man erhält:

$$\begin{aligned} L\{z_R\} &= \frac{\frac{1}{T_1}L\{h_{Fl}\}}{\left(p + \frac{1}{T_1}\right)} \\ L\{z_R\} &= \frac{L\{h_{Fl}\}}{(pT_1 + 1)} \end{aligned} \tag{5.8}$$

Variante 2:Nutzung der Spannungsteilerregel

Die Gleichung 5.8 kann man auch einfacher erhalten, wenn die aus der Rohrhydraulik oder Elektrotechnik bekannten Regeln wie Maschen- und Knotenpunktsatz sowie Potential-(Spannungs-) Teilerregel benutzt werden.

Auch hier geht man davon aus, dass nur die Änderung gegenüber dem stationären Zustand untersucht wird. Dazu ist es notwendig, neben dem hydraulischen Widerstand

$$R_{hydr} = \frac{l}{k \cdot D \cdot b} = \frac{l}{T \cdot b}$$

und der hydraulischen Kapazität (Speicher)

$$C = S \cdot A$$

einen komplexen kapazitiven Widerstand R_C nach folgenden Gleichungen zu definieren:

$$\begin{aligned}
 G_C &= \frac{1}{R_C} \\
 &= p \cdot S \cdot A \\
 &= p \left\{ \begin{array}{ll} S_0 M & \text{gespannter GWL} \\ n_0 & \text{ungespannter GWL} \end{array} \right\} \cdot l \cdot b \\
 G_C &= p \cdot C
 \end{aligned}$$

bzw.

$$R_C = \frac{1}{pC}$$

Dabei wird p als komplexe Frequenz $p = \sigma + j\omega$ bezeichnet. Dies ist dieselbe unabhängige Variable, die als Basis der LAPLACE-Transformation dient.

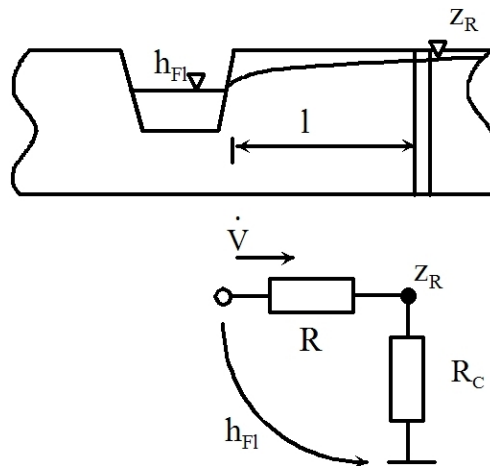


Abbildung 5.18: Schema der Grundwasserverhältnisse

Anwendung der LAPLACE-Transformation:

Nach der Spannungsteilerregel, die besagt, dass sich der Spannungsabfall (Potential- oder Druckabfall) wie die zugehörigen Widerstände verhält, erhält man nachfolgende Gleichungen. Dabei fällt über der Kapazität C die Spannung $L\{z_R\}$ ab. Der Flusswasserstand wirkt sowohl über den hydraulischen Widerstand R_{hydr} als auch über den kapazitiven Widerstand R_C (Reihenschaltung von Widerständen) (siehe Abbildung 5.18):

$$\begin{aligned}
 \frac{L\{z_R\}}{L\{h_{Fl}\}} &= \frac{R_C}{R_{hydr} + R_C} \\
 \frac{L\{z_R\}}{L\{h_{Fl}\}} &= \frac{\frac{1}{pC}}{R_{hydr} + \frac{1}{pC}}
 \end{aligned}$$

Lösung der algebraischen Gleichung nach $F(p) = L\{z_R\}$:

$$L\{z_R\} = L\{h_{Fl}\} \frac{\frac{1}{pC}}{R_{hydr} + \frac{1}{pC}} = \frac{L\{h_{Fl}\}}{pR_{hydr}C + 1}$$

Mit $R_{hydr} \cdot C = T_1$ erhält man:

$$L\{z_R\} = \frac{L\{h_{Fl}\}}{pT_1 + 1} \quad (5.9)$$

Dies ist somit die selbe Gleichung, die man mit der Bilanzmethode über die Differentialgleichung (siehe Gleichung 5.8) erhalten hat.

Variante 1 und 2

Rücktransformation und Bestimmung der $y(t) = z_R(t)$:

Bei der Rücktransformation, d.h. der Suche der Funktion $z_R(t)$, muss man die speziellen Randbedingungen, d.h. die Zeitfunktion des Flusswasserspiegels, berücksichtigen.

a. **Sprungförmige Anregung** ($h_{Fl} = h_{Fl0} \cdot \mathbf{1}(t)$)

Laut Korrespondenztabelle (siehe Seite 170, Nr. 2) ist die LAPLACE-Transformierte des Sprungsignals:

$$L\{h_{Fl}\} = L\{h_{Fl0} \cdot \mathbf{1}(t)\} = h_{Fl0} \cdot \frac{1}{p}$$

Dabei wurde berücksichtigt, dass die Sprungfunktion in den Grenzen des LAPLACE-Integrals (0 bis ∞) den konstanten Wert $\mathbf{1}(t) = 1$ hat:

$$L\{\mathbf{1}(t)\} = L\{f(1)\} = \frac{1}{p}$$

Dies wird in die Gleichung 5.9 eingesetzt und man erhält:

$$\begin{aligned} L\{z_R\} &= \frac{L\{h_{Fl}\}}{pT_1 + 1} \\ L\{z_R\} &= h_{Fl0} \cdot \frac{1}{p(pT_1 + 1)} \\ L\{z_R\} &= \frac{h_{Fl0}}{T_1} \cdot \frac{1}{p\left(p + \frac{1}{T_1}\right)} \end{aligned}$$

Rücktransformation und Bestimmung der $y(t) = z_R(t)$:

Die Rücktransformation kann man hier mittels der Korrespondenztabelle oder der Partialbruchzerlegung durchführen.

Variante Korrespondenztabelle

Aus der Korrespondenztabelle (siehe Seite 170, Nr. 5) erhält man:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(p - \alpha)(p - \beta)}\right\} = \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{\beta - \alpha}$$

Aus dem Vergleich der zu transformierenden Funktion und der Korrespondenztabelle sieht man, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{p\left(p + \frac{1}{T_1}\right)} &= \frac{1}{(p - \alpha)(p - \beta)} \\ \alpha &= 0 \\ \beta &= \frac{1}{T_1} \\ L^{-1}\left\{\frac{1}{p\left(p + \frac{1}{T_1}\right)}\right\} &= \frac{e^{-\frac{1}{T_1}t} - e^{0t}}{-\frac{1}{T_1} - 0} \end{aligned}$$

gesetzt werden kann und man erhält:

$$\begin{aligned}
 L^{-1} \{L\{z_R\}\} &= L^{-1} \left\{ \frac{h_{Fl0}}{T_1} \cdot \frac{1}{p \left(p + \frac{1}{T_1}\right)} \right\} \\
 z_R &= \frac{h_{Fl0}}{T_1} L^{-1} \left\{ \frac{1}{p \left(p + \frac{1}{T_1}\right)} \right\} \\
 z_R &= h_{Fl0} \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right)
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Variante Residuummethode

Ziel der Partialbruchzerlegung ist, die gebrochene rationale Funktion in eine Summe von Brüchen der Nennernullstellen, die Partialbrüche, zu zerlegen. Zuerst werden die Nullstellen des Nenners der Gleichung 5.9 gesucht:

$$\begin{aligned}
 L\{z_R\} &= \frac{h_{Fl0}}{T_1} \cdot \frac{1}{p \left(p + \frac{1}{T_1}\right)} \\
 p_1 &= 0 \\
 p_2 + \frac{1}{T_1} &= 0 \\
 p_2 &= -\frac{1}{T_1} \\
 L\{z_R\} &= \frac{h_{Fl0}}{T_1} \cdot \left(\frac{A}{p - p_1} + \frac{B}{p - p_2} \right) \\
 L\{z_R\} &= \frac{h_{Fl0}}{T_1} \cdot \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{p + \frac{1}{T_1}} \right)
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Die Koeffizienten A und B werden durch Vergleich der gebrochenen Funktion und der Summe der Partialbrüche bestimmt:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{p \left(p + \frac{1}{T_1}\right)} &= \frac{A}{p} + \frac{B}{p + \frac{1}{T_1}} \\
 \frac{1}{p \left(p + \frac{1}{T_1}\right)} &= \frac{\left(p + \frac{1}{T_1}\right) \cdot A + pB}{p \left(p + \frac{1}{T_1}\right)}
 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich bei Vergleich der Koeffizienten der Polynomglieder (Potenzen von p):

$$p^1 \quad 0 = A + B$$

$$p^0 \quad 1 = \frac{A}{T_1}$$

$$A = T_1$$

$$B = -T_1$$

Wird dies in die LAPLACE-transformierte Gleichung 5.11 eingesetzt, so ergibt sich:

$$L\{z_R\} = \frac{h_{F10}}{T_1} \cdot \left(\frac{T_1}{p} - \frac{T_1}{p + \frac{1}{T_1}} \right)$$

und die LAPLACE-Rücktransformierte:

$$\begin{aligned} L^{-1}\{L\{z_R\}\} &= L^{-1}\left\{ \frac{h_{F10}}{T_1} \cdot \left(\frac{T_1}{p} - \frac{T_1}{p + \frac{1}{T_1}} \right) \right\} \\ z_R &= h_{F10} \cdot \left(L^{-1}\left\{ \frac{1}{p} \right\} - L^{-1}\left\{ \frac{1}{\left(p + \frac{1}{T_1}\right)} \right\} \right) \end{aligned}$$

Aus der Korrespondenztabelle (siehe Seite 170, Nr. 3) ergibt sich die Rücktransformation:

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{ \frac{1}{p} \right\} &= 1 \\ L^{-1}\left\{ \frac{1}{(p - \alpha)} \right\} &= \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\alpha t} \end{aligned}$$

$$\alpha = 1$$

$$n = 1$$

$$L^{-1}\left\{ \frac{1}{\left(p + \frac{1}{T_1}\right)} \right\} = e^{-\frac{t}{T_1}}$$

Damit erzielt man die Lösung:

$$z_R = h_{F10} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right) \quad (5.12)$$

Das ist die gleiche Lösung, die man auch über den Weg sofortigen Anwendung der Korrespondenztabelle (siehe Gleichung 5.10) erhalten hat.

Varianten Korrespondenztabelle und Residuummethode

Abbildung 5.19 zeigt die zeitliche Änderung des Grundwasserspiegels bei sprunghafter Änderung des Flusswasserspiegels um $h_{F10} = 20m$ in Abhängigkeit vom Strömungswiderstand R_{hydr} als Funktion der Länge l und der Transmissibilität T , sowie von der Kapazität C als Funktion der Länge l und des Speicherkoeffizienten S . Die Ergebnisse sind die gleichen, die man bei der direkten analytischen Lösung der Differetialgleichung erhalten hat (siehe Lösung Seite 152).

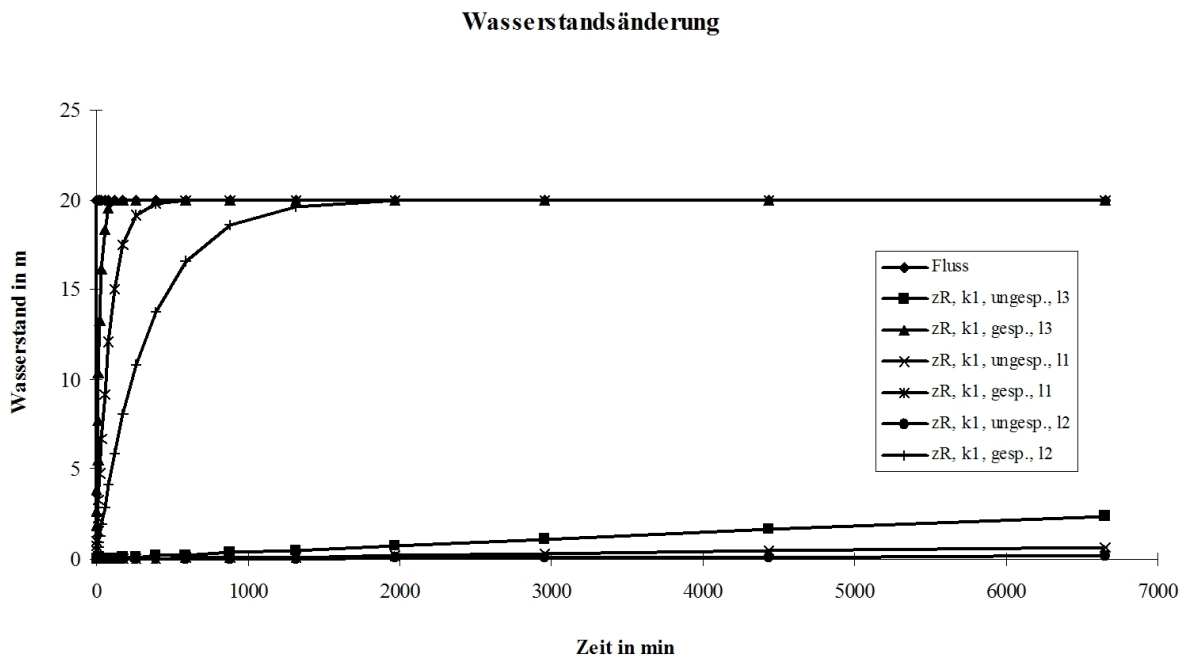


Abbildung 5.19: Änderung des Grundwasserstandes bei sprunghafter Änderung des Flusswasserstandes

b. **Sinusförmige Anregung** ($h_{Fl} = h_{Fl0} \sin(\omega t)$, mit $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ und $t = 7d$)

Laut Korrespondenztabelle (siehe Seite 170, Nr. 7) ist die LAPLACE-Transformierte der Sinusschwingung:

$$L\{\sin(\alpha t)\} = \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}$$

$$L\{h_{Fl}\} = L\{h_{Fl0} \sin(\omega t)\} = h_{Fl0} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

Dies wird in die Gleichung 5.11, Seite 201, eingesetzt, und man erhält:

$$L\{z_R\} = \frac{L\{h_{Fl}\}}{pT + 1}$$

$$L\{z_R\} = \frac{h_{Fl}\omega}{[(p^2 + \omega^2)(pT + 1)]}$$

Rücktransformation und Bestimmung von $y(t) = z_R(t)$

Als Rücktransformation sollen hier die Residuummethode mit der Partialbruchzerlegung benutzt werden. Diese sind einfach zu handhaben, wenn es sich, wie in diesem Falle, um eine rationale Funktion handelt.

Partialbruchmethode

$$L\{z_R\} = \frac{h_{Fl}\omega}{[(p^2 + \omega^2)(pT + 1)]}$$

$$L^{-1}\{L\{z_R\}\} = L^{-1}\left\{\frac{h_{Fl}\omega}{[(p^2 + \omega^2)(pT + 1)]}\right\}$$

$$z_R = L^{-1}\left\{\frac{h_{Fl}\omega}{T} \frac{1}{[(p + j\omega)(p - j\omega)(p - p_1)]}\right\}$$

Mit

$$p_1 = -\frac{1}{T_1}$$

und

$$(a^2 - b^2) = (a + b) \cdot (a - b)$$

$$\sqrt{(-b^2)} = \sqrt{(-1)} \cdot b = jb$$

$$(a^2 + b^2) = (a^2 - (-b^2))$$

$$= (a + \sqrt{(-b^2)}) (a - \sqrt{(-b^2)})$$

$$(a^2 + b^2) = (a + jb)(a - jb)$$

erhält man:

$$z_R = L^{-1} \left\{ h_{Fl} \frac{\frac{\omega}{T_1}}{\left[(p + j\omega)(p - j\omega) \left(p + \frac{1}{T_1} \right) \right]} \right\}$$

Als Partialbruchsumme geschrieben:

$$z_R = h_{Fl} L^{-1} \left\{ \frac{A_1}{(p + j\omega)} + \frac{A_2}{(p - j\omega)} + \frac{A_3}{\left(p + \frac{1}{T_1} \right)} \right\}$$

Die Koeffizienten A_1 , A_2 und A_3 erhält man durch Multiplikation dieser Summanden mit dem Hauptnenner und anschließendem Koeffizientenvergleich gleichwertiger Potenzen von p :

$$p : A_1 (p - j\omega) \left(p + \frac{1}{T_1} \right) + A_2 (p + j\omega) \left(p + \frac{1}{T_1} \right) + A_3 (p + j\omega) (p - j\omega) = \frac{\omega}{T_1}$$

$$p^2: \quad A_1 \quad \quad \quad + \quad A_2 \quad \quad \quad + \quad A_3 \quad = 0$$

$$p^1: \quad A_1 \left(-j\omega + \frac{1}{T_1} \right) + \quad A_2 \left(+j\omega + \frac{1}{T_1} \right) + \quad 0 \quad = 0$$

$$p^0: \quad A_1 \left(-\frac{j\omega}{T_1} \right) \quad \quad + \quad A_2 \left(+\frac{j\omega}{T_1} \right) \quad \quad + \quad A_3 \omega^2 \quad = \frac{\omega}{T_1}$$

Damit hat man drei Gleichungen für die drei Unbekannten A_1 , A_2 und A_3 . Die erste Gleichung kann nach A_3 aufgelöst werden und in die dritte eingesetzt werden. Dann erhält man zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten:

$$A_1 \left(-j\omega + \frac{1}{T_1} \right) + A_2 \left(+j\omega + \frac{1}{T_1} \right) = 0$$

$$A_1 \left(-\omega^2 - \frac{j\omega}{T_1} \right) + A_2 \left(-\omega^2 + \frac{j\omega}{T_1} \right) = \frac{\omega}{T_1}$$

Wird die erste Zeile mit $j\omega$ multipliziert, so erhält man:

$$A_1 \left(-j\omega + \frac{1}{T_1} \right) + A_2 \left(+j\omega + \frac{1}{T_1} \right) = 0 \quad | \cdot j\omega$$

$$A_1 \left(\omega^2 + \frac{j\omega}{T_1} \right) + A_2 \left(-\omega^2 + \frac{j\omega}{T_1} \right) = 0$$

Diese Gleichung kann mit der oben dargestellten zweiten Gleichung addiert werden:

$$\begin{aligned} A_1 \left(\omega^2 + \frac{j\omega}{T_1} \right) + A_2 \left(-\omega^2 + \frac{j\omega}{T_1} \right) &= 0 \\ -A_1 \left(\omega^2 + \frac{j\omega}{T_1} \right) + A_2 \left(-\omega^2 + \frac{j\omega}{T_1} \right) &= \frac{\omega}{T_1} \end{aligned}$$

und man erhält:

$$\begin{aligned} 2A_2 \left(-\omega^2 + \frac{j\omega}{T_1} \right) &= \frac{\omega}{T_1} \\ A_2 &= \frac{\omega}{2T_1} \frac{1}{\left(-\omega^2 + \frac{j\omega}{T_1} \right)} \end{aligned}$$

Dies in die obere Gleichung eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} A_1 \left(\omega^2 + \frac{j\omega}{T_1} \right) + A_2 \left(-\omega^2 + \frac{j\omega}{T_1} \right) &= 0 \\ A_1 \left(\omega^2 + \frac{j\omega}{T_1} \right) &= -\frac{\omega}{2T_1} \\ A_1 &= -\frac{\omega}{2T_1} \frac{1}{\left(\omega^2 + \frac{j\omega}{T_1} \right)} \end{aligned}$$

Damit wird A_3 zu:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= 0 \\ A_3 &= -A_1 - A_2 \\ A_3 &= \frac{\omega}{2T_1} \frac{1}{\left(\omega^2 + \frac{j\omega}{T_1} \right)} - \frac{\omega}{T_1} \frac{1}{\left(-\omega^2 + \frac{j\omega}{T_1} \right)} \\ &= \frac{1}{2\omega T_1} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{j}{\omega T_1} \right)} - \frac{1}{\left(-1 + \frac{j}{\omega T_1} \right)} \right) \\ A_3 &= \frac{1}{2\omega T_1} \left(\frac{2}{-\left(\frac{1}{\omega T_1} \right)^2 - 1} \right) = \frac{\omega}{T_1} \frac{1}{\left(\omega^2 + \frac{1}{T_1} \right)} \end{aligned}$$

Diese drei Faktoren A_1 , A_2 und A_3 in die Partialbruchgleichung eingesetzt, ergibt:

$$A_1 = -\frac{\omega}{2T_1} \frac{1}{\left(\omega^2 + \frac{j\omega}{T_1}\right)}$$

$$A_2 = \frac{\omega}{2T_1} \frac{1}{\left(-\omega^2 + \frac{j\omega}{T_1}\right)}$$

$$A_3 = \frac{\omega}{T_1} \frac{1}{\left(\omega^2 + \frac{1}{T_1}\right)}$$

$$z_R = h_{Fl} L^{-1} \left\{ \frac{A_1}{(p + j\omega)} + \frac{A_2}{(p - j\omega)} + \frac{A_3}{\left(p + \frac{1}{T_1}\right)} \right\}$$

Daraus ergibt sich unter Einbeziehung der EULERSchen Formel:

$$z_{R1}(t) = \frac{h_{Fl0} \cdot \omega_0}{R_{hydr} C} \left[\frac{e^{\frac{t}{RC}}}{\left(\frac{1}{R_{hydr} C}\right)^2 + \omega_0^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{R_{hydr} C}\right)^2 + \omega_0^2} \cos \left(\omega_0 t - \arctan \frac{\omega_0}{R_{hydr} C} \right) \right]$$

Man erkennt (siehe Abbildung 5.20), dass die Grundwasserhöhe z_R gegenüber der Flusswasserspiegelhöhe h_{Fl} kleiner (gedämpft) sowie phasenverschoben (zeitverschoben) ist.

Dämpfung:
$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R_{hydr} C}\right)^2 + \omega_0^2}}$$

Phasenverschiebung:
$$\arctan \frac{\omega_0}{R_{hydr} C}$$

Allgemein

Dieses Beispiel soll genügen, um zu zeigen, dass die LAPLACE-Transformation für lineare instationäre Probleme sehr gut anwendbar ist. Bei komplizierteren Systemen, bei denen die Anzahl der Polstellen groß wird oder die Erregerfunktion nicht mehr rational ist, ergeben sich rechentechnische Schwierigkeiten. Die LAPLACE-Transformation ist nicht anwendbar, wenn kein geschlossener analytischer Ausdruck für die Erregerfunktion aufgestellt werden kann, z. B. wenn nur einzelne Stichprobenwerte (Abtastwerte) existieren oder wenn die Systemparameter oder die Erregerfunktion nichtlinearen Charakter besitzen.

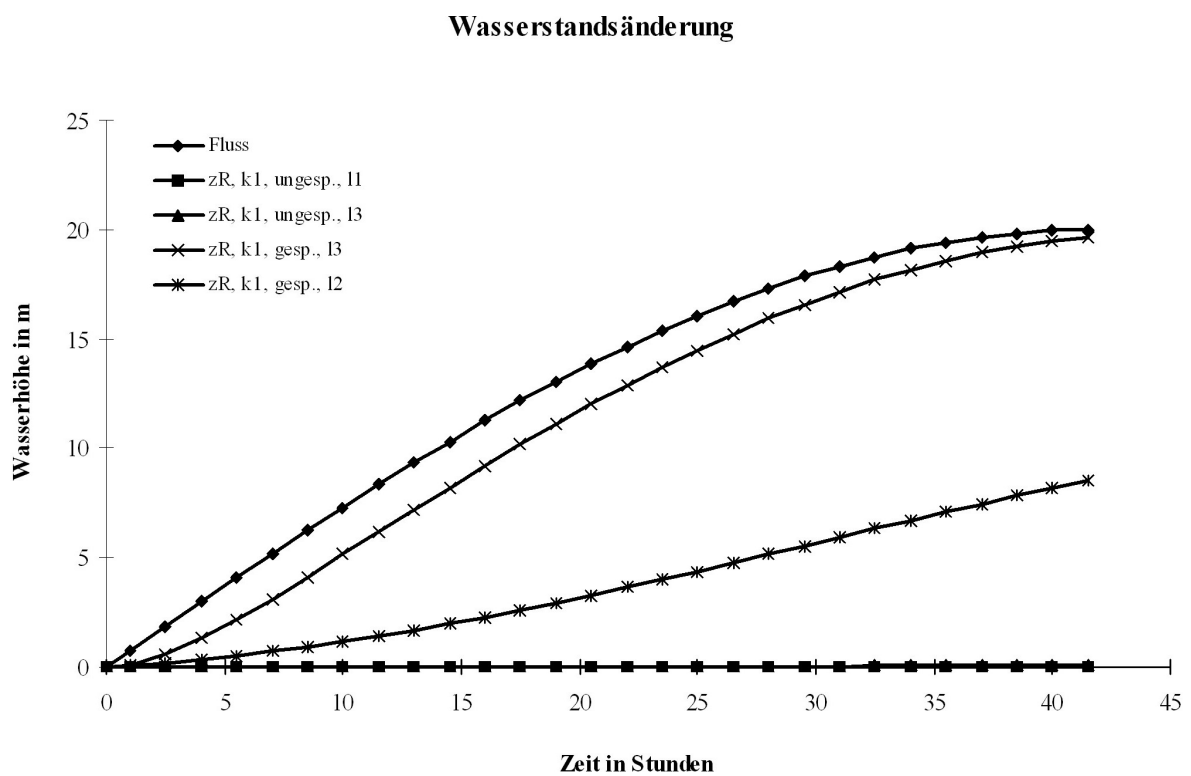


Abbildung 5.20: Grundwasserhöhe z_R gegenüber der Flusswasserspiegelhöhe h_{Fl}

• zu Aufgabe 4 (s. S. 167)

a. Ausgangsgleichung:

$$T_1 \dot{C} + C = K \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} T_1 = 1d^{-1}; K = 100 \\ t = 0; C(0) = 0 \end{array}$$

$$L \left\{ T_1 \dot{C} + C \right\} = L \{ K \}$$

$$L \left\{ \dot{C} \right\} = pY - C(0);$$

$$\text{für } C(0) = C \text{ gilt: } L \{ C \} = Y$$

$$L \{ K \} = \frac{K}{p}$$

$$T_1 pY + Y = \frac{K}{p}; \quad Y(p+1) = \frac{K}{p}$$

$$\text{für } T_1 = 1 \text{ gilt: } Y = \frac{K}{p(p+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} = \frac{Ap + A + Bp}{p(p+1)}$$

$$A = K; \quad B = -K$$

$$Y = \frac{K}{p} - \frac{K}{p+1}$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{K}{p} \right\} = K; \quad L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p-\alpha)^n} \right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{\alpha t}$$

$$\alpha = -1; \quad n = 1$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{p+1} \right\} = e^{-t}$$

$$C(t) = K - K \cdot e^{-t} = K (1 - e^{-t})$$

b. Skizze (siehe Abbildung 5.21)

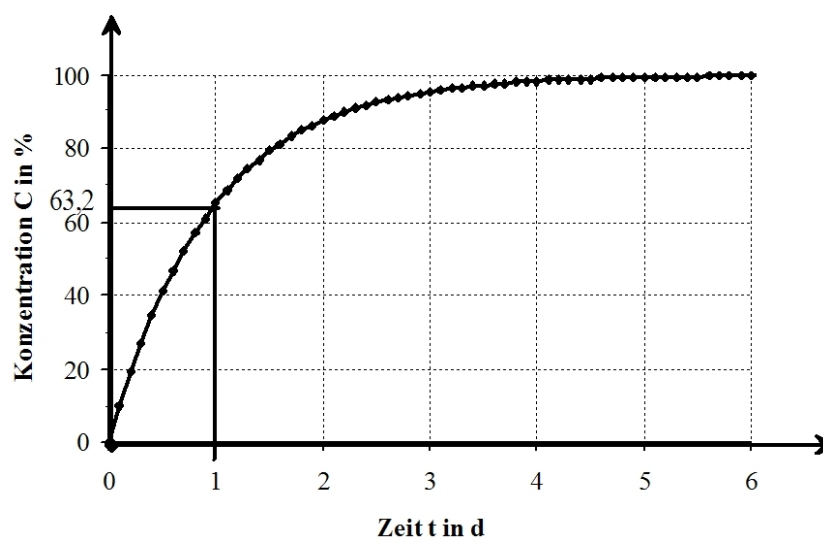


Abbildung 5.21: Prinzipieller Zeitverlauf der Konzentrationsänderung

• zu Aufgabe 5 (s. S. 167)

Ausgangsgleichung:

$$A = \frac{dh}{dt} = \dot{V}_{Zustr} \quad \text{mit } h_{t=0} = 0; \quad \dot{V} = \text{const}$$

$$A \cdot L \left\{ \dot{h} \right\} = L \left\{ \dot{V} \right\}$$

$$L \left\{ \dot{V} \right\} = \frac{\dot{V}}{p}$$

$$L \left\{ \dot{h} \right\} = Yp + h(0) \implies AYp = \frac{\dot{V}}{p} \implies Y = \frac{\dot{V}}{Ap^2}$$

$$L^{-1} = \left\{ \frac{1}{p^n} \right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

für $n = 2$ gilt: $L^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2} \right\} = t$

$$h = \frac{\dot{V}}{A} t$$

• zu Aufgabe 6 (s. S. 167)

Ausgangsgleichung:

$$\frac{dh}{dt} + k \cdot h = g \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} h_{t=0} &= 0; & g &= 0,015m \cdot s^{-1} \\ k &= 0,01s^{-1} \end{aligned}$$

$$L \left\{ \dot{h} + kh \right\} = L \{g\}$$

$$L \left\{ \dot{h} \right\} + L \{kh\} = L \{g\}$$

$$L \left\{ \dot{h} \right\} = pY + h(0)$$

$$L \{h\} = Y$$

$$L \{g\} = \frac{g}{p}$$

$$pY + kY = \frac{g}{p} \implies Y = \frac{g}{p(p+k)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+k}$$

$$\frac{Ap + Ak + Bp}{p(p+k)} = \frac{p(A+B) + Ak}{p(p+k)}$$

$$g = A \cdot k \implies A = \frac{g}{k}; \quad B = -\frac{g}{k}$$

$$Y = \frac{g}{k \cdot p} - \frac{g}{k \cdot (p+k)}$$

$$L^{-1} = \left\{ \frac{1}{p} \right\} = 1$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p-2)^n} \right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{2t}$$

$$\text{für } n=2 \text{ gilt: } 2 = -k \implies L^{-1} \left\{ \frac{1}{p+k} \right\} = e^{-kt}$$

$$h(t) = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt})$$

5.4 Numerische Methoden

5.4.1 Integration

Aufgaben zu 5.4.1:

1. Berechnen Sie unter Verwendung der Rechteck- und Trapezregel das Integral

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

mit den Schrittweiten $h = 0,1$ und $0,01$

(Lösung s. S.215)

2. Berechnen Sie folgende Integrale. Verwenden Sie dabei mindestens zwei numerische Verfahren und zwei unterschiedliche Schrittweiten und vergleichen Sie die Ergebnisse:

a) $\int_{-1}^1 e^{(-x)^2} dx$

b) $\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx$

(Lösung s. S.218)

3. Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_1^{1,3} \sqrt{x} dx$$

mittels Rechteckregel, Trapezregel und der drei NEWTONschen Formeln und vergleichen Sie die Ergebnisse.

(Lösung s. S.224)

4. Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_1^{10} \frac{1}{x} dx$$

näherungsweise.

Wählen Sie dazu $h = 1$. Verwenden Sie für das Intervall $[1, 9]$ die SIMPSONsche Regel und für das Intervall $[9, 10]$ die Trapezregel.

(Lösung s. S. 228)

5. Eine Messreihe der Spezifischen Wärme c des Al_2O_3 in Abhängigkeit von der Temperatur T liefert die in der Tabelle aufgeführten Werte.

Ermitteln Sie die Wärmemenge

$$Q = \int_{-200}^{1000} c(T) dT$$

die man einem Gramm Al_2O_3 zuführen muss, um es von -200°C auf 1000°C zu erwärmen.

Die Integration ist numerisch nach

- der Trapezregel
- der SIMPSONschen Regel

mit der Schrittweite $h = 200^\circ\text{C}$ durchzuführen.

$T [^\circ\text{C}]$	-260	-200	-100	0	100	200	300	400	600	800	1000
$c[\frac{\text{c}}{\text{g}\cdot\text{K}}]$	0	0,04	0,012	0,18	0,22	0,24	0,25	0,26	0,27	0,275	0,28

(Lösung s. S. 230)

6. Bei einem Pumpversuch wurden folgende Grundwasserstände gemessen.
(siehe Abbildung 5.22)

Berechnen Sie das Wasserdefizit (Volumen) des Absenkungstrichters, wenn der Grundwasserleiter folgende Kennwerte besitzt:

$$h_n = 16\text{m}, M = 10\text{m}, k = 0,001\text{m} \cdot \text{s}^{-1}, S_0 = 0,0001\text{m}^{-1}, n_0 = 0,20$$

Benutzen Sie dazu die Methode der numerischen Integration!

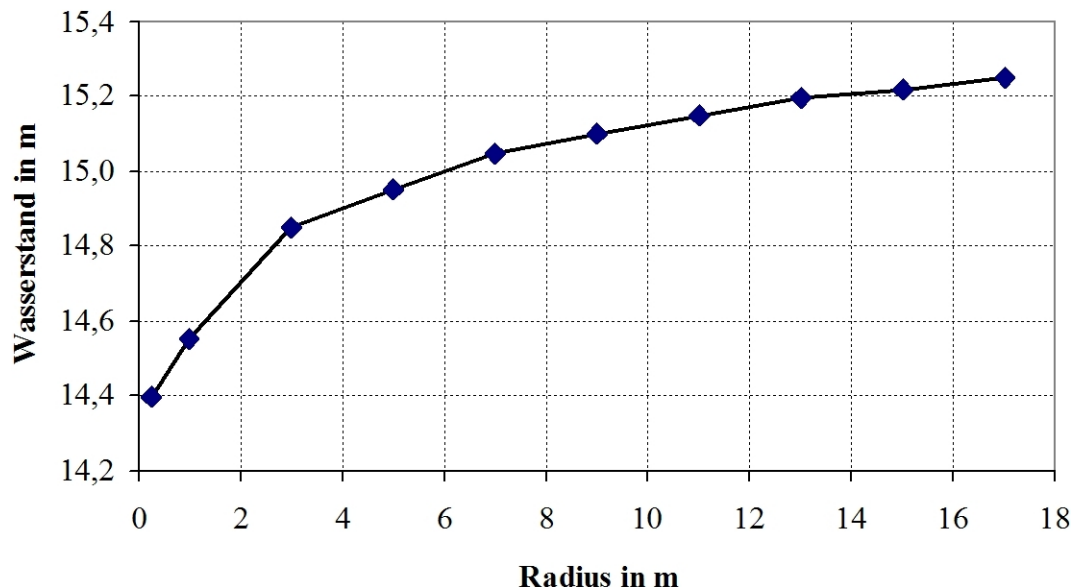


Abbildung 5.22: Grundwasserstand in Abhängigkeit vom Radius

(Lösung s. S.231)

Lösungen:**• zu Aufgabe 1 (s. S. 213)**

Die numerische Berechnung von Integralen erfolgt bei der Rechteckregel mittels der Formel:

$$F_{links} = \int_a^b y(x) dx \approx \sum_{n=0}^m (|x_n - x_{n-1}|) \cdot y_n \quad (\text{für } m \text{ Teilintervalle})$$

Bei der Verwendung der Trapezregel wird das Integral wie folgt berechnet:

$$F = \int_a^b y(x) dx \approx \sum_{n=0}^m (|x_n - x_{n+1}|) \cdot \left(\frac{y_n + y_{n+1}}{2} \right) \quad (\text{für } m \text{ Teilintervalle})$$

Die analytische Lösung des Integrals ist:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx &= [\ln(1+x)]_0^1 \\ &= \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \\ &= 0,6931 \end{aligned}$$

Schritte	Funktion	Rechteckregel		Trapezregel	
		Teilfläche	Summe	Teilfläche	Summe
0,00	$f\left(\frac{1}{(1+x)}\right)$	0,1000	0,1000	0,09545	0,0955
0,10		0,0909	0,1909	0,08712	0,1826
0,20		0,0833	0,2742	0,08013	0,2627
0,30		0,0769	0,3512	0,07418	0,3369
0,40		0,0714	0,4226	0,06905	0,4059
0,50		0,0667	0,4893	0,06458	0,4705
0,60		0,0625	0,5518	0,06066	0,5312
0,70		0,0588	0,6106	0,05719	0,5884
0,80		0,0556	0,6661	0,05409	0,6425
0,90		0,0526	0,7188	0,05132	0,6938
1,00					

Ergebnisszusammenfassung:

Schrittweite	Rechteckregel	rel. Fehler	Trapezregel	rel Fehler	analytische Lösung
0,1	0,7188	0,03697	0,6938	0,0009	
0,01	0,6957	0,00362	0,6932	0,000009	
					0,6931

In Abbildung 5.23 ist die Bildung des Integrales für verschiedene Schrittweiten und für die Rechteck- und die Trapezregel dargestellt. Man erkennt, dass der Fehler abhängig von der verwendeten Methode und von der Schrittweite ist. Die Trapezregel liefert schon bei einer Schrittweite von $h = 0,1(a - b)$ sehr brauchbare Werte mit einem Fehler von $< 0,1\%$.

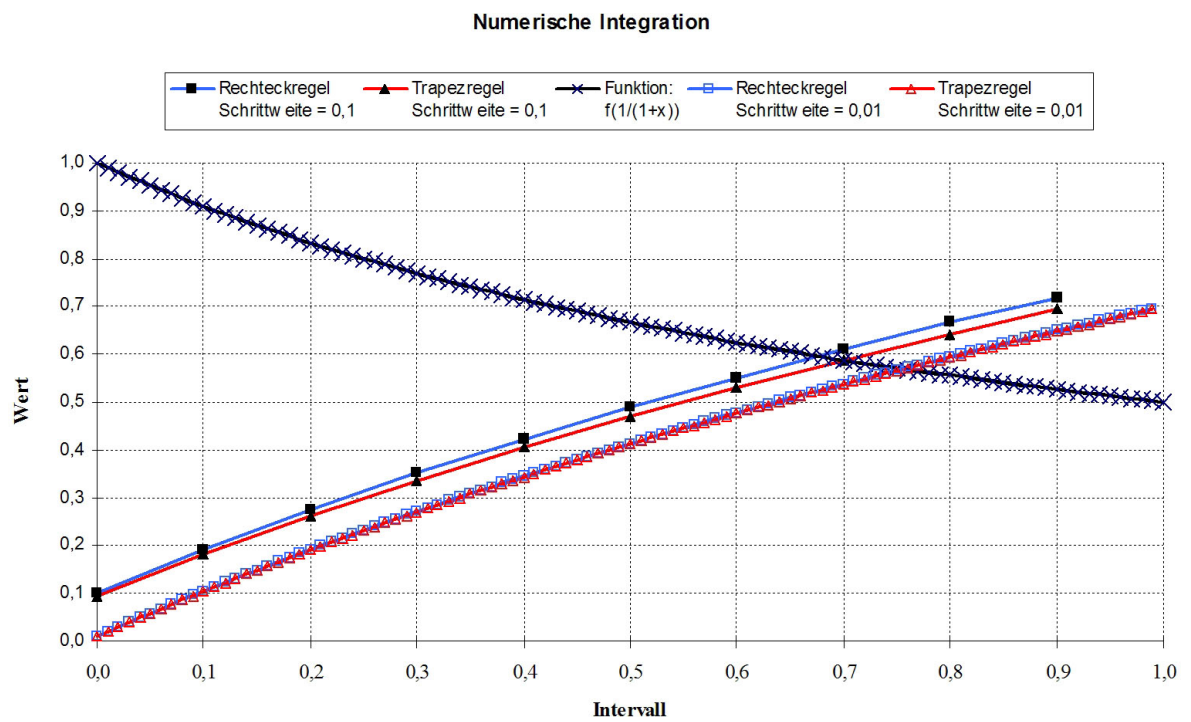


Abbildung 5.23: Numerische Integration mit verschiedenen Verfahren und Schrittweiten

- zu Aufgabe 2 (s. S. 213)

(a)

Die numerische Berechnung von Integralen erfolgt bei der Rechteckregel mittels der Formel:

$$F_{links} = \int_a^b y(x) dx \approx \sum_{n=0}^m (|x_n - x_{n-1}|) \cdot y_n \quad (\text{für } m \text{ Teilintervalle})$$

Bei der Verwendung der Trapezregel wird das Integral wie folgt berechnet:

$$F = \int_a^b y(x) dx \approx \sum_{n=0}^m (|x_n - x_{n+1}|) \cdot \left(\frac{y_n + y_{n+1}}{2} \right) \quad (\text{für } m \text{ Teilintervalle})$$

Die analytische Lösung des Integrals ist:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 e^{(-x)^2} dx &\approx 2 \int_0^1 \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{30} \right) dx \\ &= 2 \left[x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{210}x^7 \right]_0^1 \\ &= 2,871 \end{aligned}$$

Schritte	Funktion:	Rechteckregel		Trapezregel	
x	$f(e^{(-x)^2})$	Teilfläche	Summe	Teilfläche	Summe
-1,00	2,72	0,2718	0,2718	0,2483	0,2483
-0,90	2,25	0,2248	0,4966	0,2072	0,4555
-0,80	1,90	0,1896	0,6863	0,1764	0,6320
-0,70	1,63	0,1632	0,8495	0,1533	0,7853
-0,60	1,43	0,1433	0,9928	0,1359	0,9211
-0,50	1,28	0,1284	1,1212	0,1229	1,0440
-0,40	1,17	0,1174	1,2386	0,1134	1,1574
-0,30	1,09	0,1094	1,3480	0,1067	1,2641
-0,20	1,04	0,1041	1,4521	0,1025	1,3667
-0,10	1,01	0,1010	1,5531	0,1005	1,4672
0,00	1,00	0,1000	1,6531	0,1005	1,5677
0,10	1,01	0,1010	1,7541	0,1025	1,6702
0,20	1,04	0,1041	1,8582	0,1067	1,7770
0,30	1,09	0,1094	1,9676	0,1134	1,8904
0,40	1,17	0,1174	2,0849	0,1229	2,0132
0,50	1,28	0,1284	2,2133	0,1359	2,1491
0,60	1,43	0,1433	2,3567	0,1533	2,3024
0,70	1,63	0,1632	2,5199	0,1764	2,4788
0,80	1,90	0,1896	2,7096	0,2072	2,6860
0,90	2,25	0,2248	2,9343	0,2483	2,9343
1,00	2,72				

Ergebniszusammenfassung:

Schrittweite	Rechteck	Fehler	Trapez	Fehler
0,1	2,9343	0,06	2,9343	0,06
0,01	2,8985	0,03	2,8987	0,03
analytisch	2,871			

In Abbildung 5.24 ist die Bildung des Integrales für verschiedene Schrittweiten und für die Rechteck- und die Trapezregel dargestellt. Man erkennt, dass der Fehler abhängig von der verwendeten Methode, von der Schrittweite und von den Ordinatenwert ist. Die Trapezregel liefert schon bei einer Schrittweite von $h = 0,1(a - b)$ sehr brauchbare Werte mit einem Fehler von $< 0,1\%$.

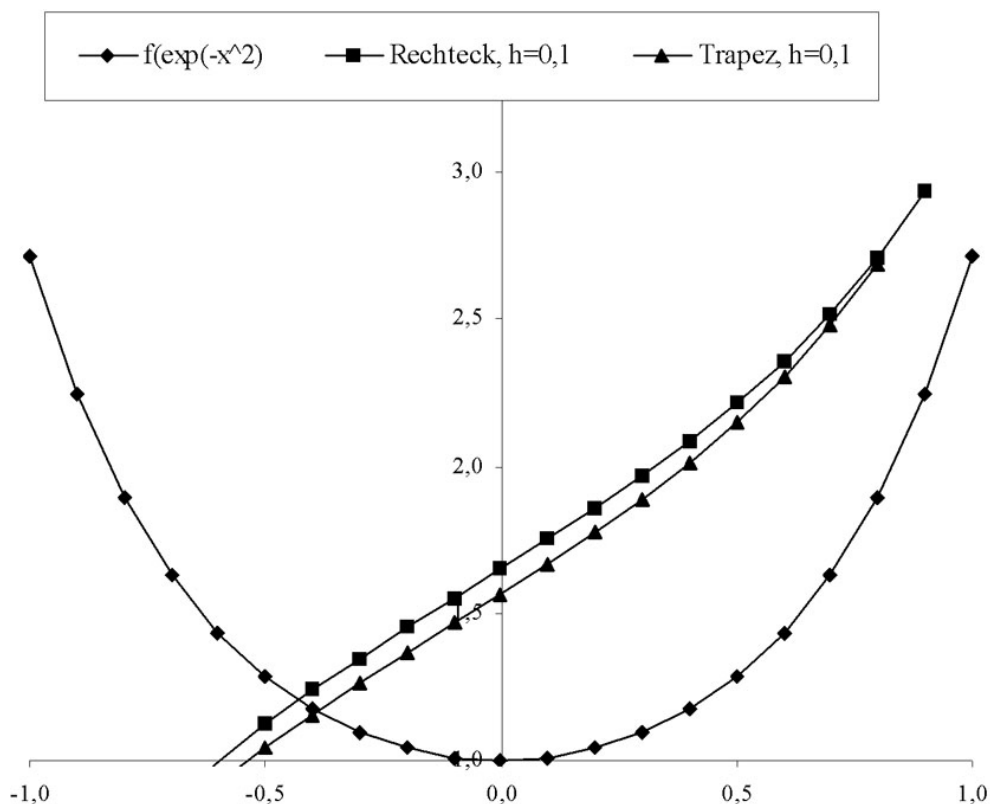


Abbildung 5.24: Numerische Integration mit verschiedenen Verfahren und Schrittweiten

(b)

Die numerische Berechnung von Integralen erfolgt bei der Rechteckregel mittels der Formel:

$$F_{links} = \int_a^b y(x) dx \approx \sum_{n=0}^m (|x_n - x_{n-1}|) \cdot y_n \text{ (für } m \text{ Teilintervalle)}$$

Bei der Verwendung der Trapezregel wird das Integral wie folgt berechnet:

$$F = \int_a^b y(x) dx \approx \sum_{n=0}^m (|x_n - x_{n+1}|) \cdot \left(\frac{y_n + y_{n+1}}{2} \right) \text{ (für } m \text{ Teilintervalle)}$$

Die analytische Lösung des Integrals ist:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx &= \left[\ln x + \frac{x}{1 \cdot 1!} + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \cdots + \frac{x^n}{n \cdot n!} \right]_1^2 \\ &\approx \left(\ln 2 + \frac{2}{1} + \frac{4}{4} + \frac{8}{18} + \frac{16}{96} + \cdots \right) \\ &\quad - \left(\ln 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{18} + \frac{1}{96} + \cdots \right) \\ &\approx 3,05955719 \end{aligned}$$

Schritte	Funktion:	Rechteckregel		Trapezregel	
		Teilfläche	Summe	Teilfläche	Summe
x	$f(x) = \frac{e^x}{x}$				
1, 00	2, 72	0, 2718	0, 2718	0, 2725	0, 2725
1, 10	2, 73	0, 2731	0, 5449	0, 2749	0, 5474
1, 20	2, 77	0, 2767	08216	0, 2795	0, 8268
1, 30	2, 82	0, 2823	1, 1039	0, 2860	1, 1128
1, 40	2, 90	0, 2897	1, 3935	0, 2942	1, 4070
1, 50	2, 99	0, 2988	1, 6923	0, 3042	1, 7112
1, 60	3, 10	0, 3096	2, 0019	0, 3158	2, 0269
1, 70	3, 22	0, 3220	2, 3239	0, 3290	2, 3560
1, 80	3, 36	0, 3361	2, 6600	0, 3440	2, 7000
1, 90	3, 52	0, 3519	3, 0118	0, 3607	3, 0607
2, 00	3, 69				

Ergebniszusammenfassung:

Schrittweite	Rechteck- regel	rel. Fehler	Trapez- regel	rel Fehler	analytische Lösung
0, 1	0, 3519	0, 016	3, 0607	0, 0004	
0, 01	3, 0543	0, 0017	3, 0591	0, 0001	
					3, 05955719

In Abbildung 5.25 ist die Bildung des Integrals für verschiedene Schrittweiten und für die Rechteck- und die Trapezregel dargestellt. Man erkennt, dass der Fehler abhängig von der verwendeten Methode, von der Schrittweite und vom Ordinatenwert ist. Die Trapezregel liefert schon bei einer Schrittweite von $h = 0,1 \cdot (a - b)$ sehr brauchbare Werte mit einem Fehler von $< 0,1\%$.

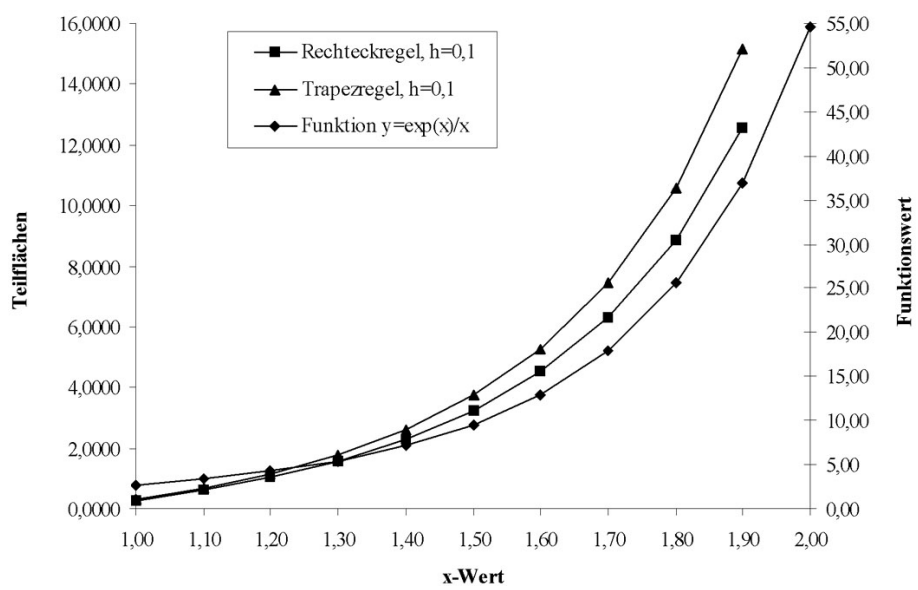


Abbildung 5.25: Numerische Integration mit verschiedenen Verfahren und Schrittweiten

• zu Aufgabe 3 (s. S. 213)

Die numerische Berechnung von Integralen erfolgt bei der Rechteckregel mittels der Formel:

$$F_{links} = \int_a^b y(x) dx \approx \sum_{n=0}^m (|x_n - x_{n-1}|) \cdot y_n \quad (\text{für } m \text{ Teilintervalle})$$

Bei der Verwendung der Trapezregel wird das Integral wie folgt berechnet:

$$F = \int_a^b y(x) dx \approx \sum_{n=0}^m (|x_n - x_{n+1}|) \cdot \left(\frac{y_n + y_{n+1}}{2} \right) \quad (\text{für } m \text{ Teilintervalle})$$

Die analytische Lösung des Integrals ist:

$$\begin{aligned} \int_1^{1,3} \sqrt{x} dx &= \left[2 \cdot \sqrt{x^3} \right]_1^{1,3} \\ &= 2 \cdot (\sqrt{2,197} - \sqrt{1}) \\ &= 0,3215 \end{aligned}$$

Schritte	Funktion:	Rechteckregel		Trapezregel	
x	f(√(x))	Teilfläche	Summe	Teilfläche	Summe
1,00	1,00	0,0300	0,0300	0,0302	0,0302
1,03	1,01	0,0304	0,0604	0,0307	0,0609
1,06	1,03	0,0309	0,0913	0,0311	0,0920
1,09	1,04	0,0313	0,1227	0,0315	0,1235
1,12	1,06	0,0317	0,1544	0,0320	0,1555
1,15	1,07	0,0322	0,1866	0,0324	0,1879
1,18	1,09	0,0326	0,2192	0,0328	0,2207
1,21	1,10	0,0330	0,2522	0,0332	0,2539
1,24	1,11	0,0334	0,2856	0,0336	0,2875
1,27	1,13	0,0338	0,3194	0,0340	0,3215
1,30	1,14				

Ergebniszusammenfassung der Rechteck- und Trapezregel:

Schrittweite	Rechteck- regel	rel. Fehler	Trapez- regel	rel Fehler	analytische Lösung
0,03	0,3194	0,0066	0,3215	0,000014	
					0,3215

In Abbildung 5.26 ist die Bildung des Integrals für verschiedene Schrittweiten und für die Rechteck- und die Trapezregel dargestellt. Man erkennt, dass der Fehler abhängig von der verwendeten Methode ist.

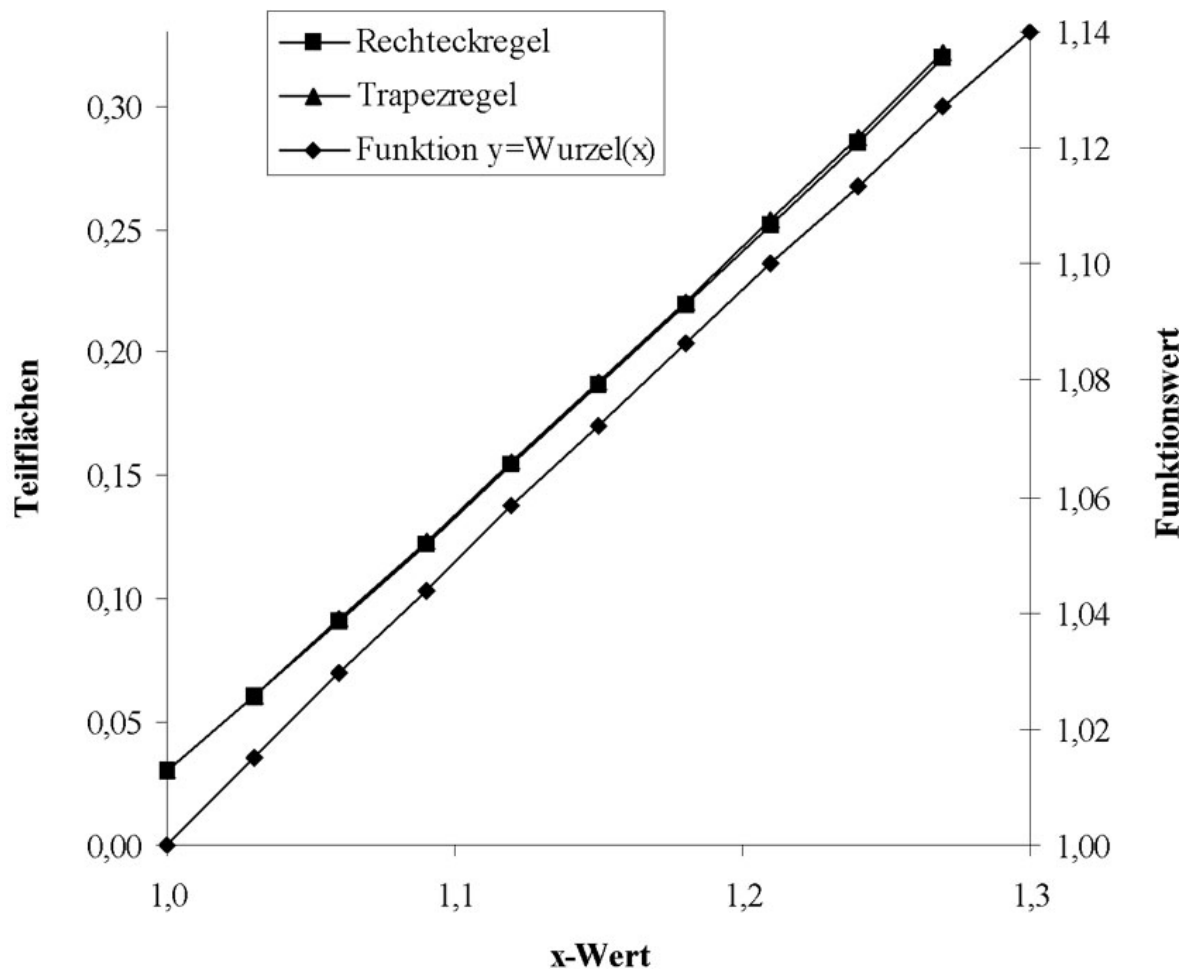


Abbildung 5.26: Entwicklung des Integrals im Intervall 1 bis 1,3 mittels der Rechteck- und Trapezformel

Bei der NEWTONSchen Formel wird die NEWTONSche Interpolationsfunktion mit folgenden Ergebnissen integriert:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx &\approx \frac{h_1}{2} (y_0 + y_1) && 2 \text{ Stützstellen} \quad \text{lineare Interpolation} \\ \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx &\approx \frac{h_2}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) && 3 \text{ Stützstellen} \quad \text{quadratische Interpolation} \\ \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx &\approx \frac{3h_3}{8} (y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) && 4 \text{ Stützstellen} \quad \text{kubische Interpolation} \end{aligned}$$

Je nach verwendeter NEWTONscher Formel wird das Integrationsintervall in unterschiedliche Schrittweiten h_n eingeteilt. Man erhält damit folgende Ergebnisse:

NEWTONSche Formel - 2 Stützstellen:

$h = 0,3$	$f = \sqrt{x}$	F
$a = 1$	1	0,321026314
$b = 1,3$	1,140175425	

NEWTONSche Formel - 3 Stützstellen:

$h = 0,15$	$f = \sqrt{x}$	F
$a = 1$	1	0,321484877
$x_1 = 1,15$	1,072380529	
$b = 1,3$	1,140175425	

NEWTONSche Formel - 4 Stützstellen:

$h = 0,1$	$f = \sqrt{x}$	F
$a = 1$	1	0,321485149
$x_1 = 1,1$	1,048808848	
$x_1 = 1,2$	1,095445115	
$b = 1,3$	1,140175425	

Ergebniszusammenfassung:

	Schrittweite	Integral	rel. Fehler
NEWTONsche Formel - 2 Stützstellen	0,30	0,3210	0,0014280
NEWTONsche Formel - 3 Stützstellen	0,15	0,3215	0,0000015
NEWTONsche Formel - 4 Stützstellen	0,10	0,3215	0,0000007
Rechteckformel	0,03	0,3194	0,0065550
Trapezformel	0,03	0,3215	0,0000140
analytische Lösung		0,3215	

In dieser Tabelle ist zu erkennen, dass die Genauigkeit der NEWTONschen Formel mit 4 Stützstellen am höchsten ist. Dabei übertrifft die Genauigkeit dieses Verfahrens die Trapezregel um zwei Zehnerpotenzen mit einem Rechenaufwand, der nur ein Drittel beträgt.

• zu Aufgabe 4 (s. S. 213)

Das Integral

$$\begin{aligned} F &= \int_1^{10} \frac{1}{x} dx \\ &= \int_1^9 \frac{1}{x} dx + \int_9^{10} \frac{1}{x} dx \end{aligned}$$

soll im Intervall $x = [1, 9]$ mittels SIMPSONscher Regel und im Intervall $x = [9, 10]$ mittels der Trapezregel berechnet werden.

a. Berechnung des Integrals von $x = [1, 9]$ mittels SIMPSONscher Regel:

Die SIMPSONsche Regel lautet:

$$F_{simps} = \int_{x_0}^{x_{2k}} f(x) dx = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k})$$

Zu beachten ist:

- Die Stützstellen müssen äquidistant (konstante Schrittweite h) sein.
- Die Anzahl der Stützstellen x_n muss ungerade sein ($n = 0 \dots 2k$).

Laut Aufgabenstellung soll die Schrittweite $\Delta x = 1$ sein. Damit ergeben sich einschließlich der Integrationsgrenzen 9 Stützstellen. Das Integral wird demzufolge angenähert durch:

$$\begin{aligned} F_{simps} &= \frac{\Delta x}{3} \cdot \left(\frac{1}{x_0} + \frac{4}{(x_0 + \Delta x)} + \frac{2}{(x_0 + 2 \cdot \Delta x)} + \frac{4}{(x_0 + 3 \cdot \Delta x)} + \frac{2}{(x_0 + 4 \cdot \Delta x)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{(x_0 + 5 \cdot \Delta x)} + \frac{2}{(x_0 + 6 \cdot \Delta x)} + \frac{4}{(x_0 + 7 \cdot \Delta x)} + \frac{1}{(x_0 + 8 \cdot \Delta x)} \right) \end{aligned}$$

$$F_{simps} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{4}{2} + \frac{2}{3} + \frac{4}{4} + \frac{2}{5} + \frac{4}{6} + \frac{2}{7} + \frac{4}{8} + \frac{1}{9} \right)$$

$$F_{simps} = 2,21005291$$

Die analytische Lösung liefert:

$$\begin{aligned} F_{analyt} &= \int_1^9 \frac{1}{x} dx \\ &= [\ln(x)]_1^9 \end{aligned}$$

$$F_{analyt} = 2,197224577$$

Damit ergibt sich bei der SIMPSON-Regel mit 9 Stützstellen ein Fehler von:

$$\varepsilon = \left| \frac{F_{simps} - F_{analyt}}{F_{analyt}} \right|$$

$$\varepsilon = 0,00584$$

b. Berechnung des Integrals von $x = [9, 10]$ mittels Trapezregel:

Die Trapezregel lautet:

$$F_{trap} = \Delta x \cdot \frac{(f(a) + f(b))}{2}$$

Mit den laut Aufgabenstellung vorgegebenen Werten erhält man:

$$F_{trap} = 1 \cdot \frac{\frac{1}{9} + \frac{1}{10}}{2}$$

$$F_{trap} = 0,105555556$$

Die analytische Lösung berechnet sich zu:

$$\begin{aligned} F_{analyt} &= \int_9^{10} \frac{1}{x} dx \\ &= [\ln(x)]_9^{10} \end{aligned}$$

$$F_{analyt} = 0,105360516$$

Damit ergibt sich bei der Trapezregel mit 2 Stützstellen ein Fehler von:

$$\varepsilon = \left| \frac{F_{trap} - F_{analyt}}{F_{analyt}} \right|$$

$$\varepsilon = 0,001851167$$

Die Summe der beiden Integrale liefert:

$$F \approx F_{simps} + F_{trap}$$

$$= 2,21005291 + 0,105555556$$

$$F \approx 2,315608466$$

Die analytische Lösung wird ermittelt zu:

$$\begin{aligned} F &= \int_1^{10} \frac{1}{x} dx \\ &= [\ln(x)]_1^{10} \end{aligned}$$

$$F = 2,302585093$$

Damit ergibt sich ein Gesamtfehler von:

$$\varepsilon = \left| \frac{(F_{simps} + F_{trap}) - F}{F} \right|$$

$$\varepsilon = 0,005655979$$

• zu Aufgabe 5 (s. S. 213)

a. Bei der Verwendung der Trapezregel wird das Integral wie folgt berechnet:

$$F = \int_a^b y(x) dx \approx \sum_{n=0}^m (|x_n - x_{n+1}|) \cdot \left(\frac{y_n + y_{n+1}}{2} \right) \quad (\text{für } m \text{ Teilintervalle})$$

Entsprechend der Aufgabenstellung ist eine Schrittweite von $\Delta T = 200^\circ C$ zu verwenden. Damit wird das Integral angenähert durch:

$$Q = \Delta T \sum_{n=1}^7 \frac{c_n + c_{n+1}}{2}$$

wobei gilt:

$$c_1 = c_{(-200^\circ C)}$$

$$c_7 = c_{(1000^\circ C)}$$

$$\begin{aligned} Q &= 200^\circ C \cdot \left(\frac{c_{(-200^\circ C)}}{2} + c_{(0^\circ C)} + c_{(200^\circ C)} + c_{(400^\circ C)} + c_{(600^\circ C)} + c_{(800^\circ C)} + \frac{c_{(1000^\circ C)}}{2} \right) \\ &= 200^\circ C \cdot (0,02 + 0,18 + 0,24 + 0,26 + 0,27 + 0,275 + 0,14) \end{aligned}$$

$$Q = 277$$

b. Die SIMPSONSche Regel lautet:

$$F_{simps} = \int_{x_0}^{x_{2k}} f(x) dx = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k})$$

Zu beachten ist:

- Die Stützstellen müssen äquidistant (konstante Schrittweite h) sein.

- Die Anzahl der Stützstellen x_n muss ungerade sein ($n = 0 \dots 2k$).

Entsprechend der Aufgabenstellung ist eine Schrittweite von $\Delta T = 200^\circ C$ zu verwenden. Damit werden bei der SIMPSONSchen Regel 7 Stützstellen verwendet.

$$\begin{aligned} Q &= \frac{200^\circ C}{3} \cdot (c_{(-200^\circ C)} + 4 \cdot c_{(0^\circ C)} + 2 \cdot c_{(200^\circ C)} + \\ &\quad 4 \cdot c_{(400^\circ C)} + 2 \cdot c_{(600^\circ C)} + 4 \cdot c_{(800^\circ C)} + c_{(1000^\circ C)}) \\ &= 66,67^\circ C \cdot (0,04 + 0,72 + 0,48 + 1,04 + 0,54 + 1,1 + 0,28) \\ Q &= 280 \end{aligned}$$

- zu Aufgabe 6 (s. S. 213)

Für den vorliegenden Fall wird anhand der ursprünglichen Messwerte folgende Tabelle der Funktion aufgestellt (siehe auch Abbildung 5.27). Es ist nicht sinnvoll interpolierte Werte zu benutzen, da diese Interpolation Ungenauigkeiten in die Berechnung bringt.

Radius [m]	Wasserstand [m]	Absenkung [m]	Teilvolumen [m ³]
0,3	14,40	1,60	4,36
1,0	14,55	1,45	32,67
3,0	14,85	1,15	55,29
5,0	14,95	1,05	75,40
7,0	15,05	0,95	92,99
9,0	15,10	0,90	109,96
11,0	15,15	0,85	124,41
13,0	15,20	0,80	138,98
15,0	15,22	0,78	153,81
17,0	15,25	0,75	

Zur Berechnung des Wasservolumens, welches abgepumpt wurde, geht man von dem Volumen des Absenkungstrichters aus. Dazu ist die Höhe der Absenkung notwendig:

$$s = h_{t=0} - h(t)$$

Das Volumen wird berechnet, indem ein rotationssymmetrischer Absenkungstrichter angenommen wird. Der Längsschnitt ergibt sich aus der Fläche, die von der Absenkungskurve und von der x-Achse eingeschlossen wird. Entsprechend der vorliegenden Quantisierung kann das Volumen als Summe einzelner Hohlzylinder betrachtet werden, wobei, ähnlich wie bei der Integrationsformel, von rechteckigen oder trapezförmigen Hohlzylinderlängsschnittflächen auszugehen ist.

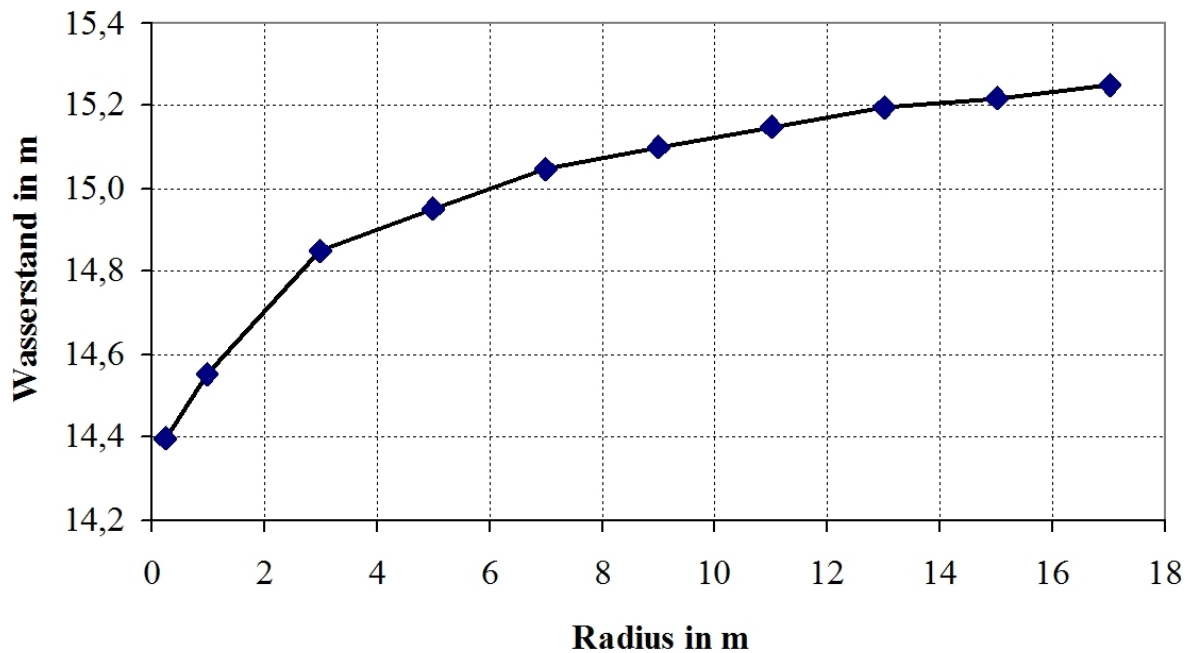


Abbildung 5.27: Grundwasserstand in Abhängigkeit vom Radius

Rechteckiger Querschnitt:

$$V_{Hohlz.} = V_{zyl-au\ddot{a}u\ddot{e}n} - V_{zyl-innen}$$

$$= \pi \cdot s \cdot r_2^2 - \pi \cdot s \cdot r_1^2$$

$$V_{Hohlz.} = \pi \cdot s \cdot (r_2^2 - r_1^2)$$

Auf das Quantisierungsschema bezogen:

$$V_{Hohlz.} = \pi \sum s_n \cdot (r_{n+1}^2 - r_n^2)$$

Bei trapezförmigen Längsschnitt wird die Fläche nach dem Trapezgesetz berechnet:

$$V_{Hohlz.} = \pi \sum \left(\frac{s_n + s_{n+1}}{2} \right) \cdot (r_{n+1}^2 - r_n^2)$$

Da bekannt ist, dass die Trapezformel genauere Werte liefert, soll diese im Weiteren benutzt werden. Die einzelnen Teilvolumina sind in der Tabelle aufgeführt. Als Gesamtvolumen des Absenkungstrichter ergibt sich:

$$V_{Hohlz.} = 787,87$$

Da das Wasservolumen entsprechend dem gravimetrischen Speichervermögen nur ein Bruchteil des Trichters ausmacht, muss das Volumen des Hohlzylinders mit dem Speicherkoeffizienten multipliziert werden.

$$V_{Wasser} = S \cdot V_{Hohlz.}$$

Laut Aufgabenstellung handelt es sich hier um gespannte Grundwasserleiterverhältnisse und damit gilt:

$$\begin{aligned}V_{Wasser} &= S_0 \cdot M \cdot V_{Hohlz.} \\&= 0,0001m^{-1} \cdot 10m \cdot 787,87 \\V_{Wasser} &= 0,78787m^3\end{aligned}$$

5.4.2 Numerische Lösung von Differentialgleichungen

Aufgaben zu 5.4.2:

1. Lösen Sie folgende Differentialgleichung mittels numerischer Methoden, indem Sie bis $x = 1$ mit wenigen Intervallen, z.B. 0,5; 0,2 und 0,1 rechnen.

$$y' = -xy^2 \quad \text{mit} \quad y(0) = 2$$

- a) Wenden Sie die einfache EULERSche Methode an. Konvergieren die Ergebnisse gegen den exakten Lösungswert $y(1) = 1$?
- b) Wenden Sie das RUNGE-KUTTA-Verfahren 4. Ordnung und ein Predictor- Corrector-Verfahren auf die Differentialgleichung an und vergleichen Sie wieder die Ergebnisse.

(Lösung s. S. 236)

2. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} + t^2 x = 0 \quad \text{mit} \quad x(0) = 3$$

für den Punkt $t = 3$ nach dem EULER-Verfahren. Benutzen Sie dabei Schrittweiten von $\Delta t = 0,1$; $0,05$ und $0,01$.

(Lösung s. S.242)

3. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$t \frac{dx}{dt} - x = t^2 \cos t \quad \text{mit} \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

für den Punkt $t = 2\pi$ nach dem EULER-Verfahren. Benutzen Sie dabei Schrittweiten von $\Delta t = 0,1\pi$ und $\Delta t = 0,05\pi$.

(Lösung s. S. 244)

4. Für die Konzentration C durch Sorption von Schadstoffen an der Bodenmatrix soll folgende DGL gelten:

$$T_1 \dot{C} + C = K$$

wobei T_1 eine Zeitkonstante und K eine Konstante sein sollen. $T_1 = 1d^{-1}$, $K = 100$
Die Konzentrationsänderung zum Zeitpunkt $t = 0$ soll $C(0) = 0$ sein.

- a) Lösen Sie die DGL mittels EULER-Verfahrens ($h = 0,1d$) und berechnen Sie die Konzentration für den Zeitpunkt $t = 1d$.
- b) Skizzieren Sie den prinzipiellen Zeitverlauf der Konzentration.

(Lösung s. S.246)

5. Der Grundwasserwiederanstieg und damit die Auffüllung der Restlöcher in den ehemaligen Braunkohlentagebauen dauert unter natürlichen Bedingungen zu lange. Deshalb wird der Auffüllvorgang mit einer konstanten Fremdeinspeisung ($h_{t=0} = 0$) beschleunigt (siehe Abbildung 5.1).

Stellen Sie für den Auffüllvorgang $h(t)$, ohne Berücksichtigung des Grundwasserleiters und einer Grundwasserneubildungsrate, die Differentialgleichung auf.

Beschreiben Sie die Lösung mittels numerischer Methoden.

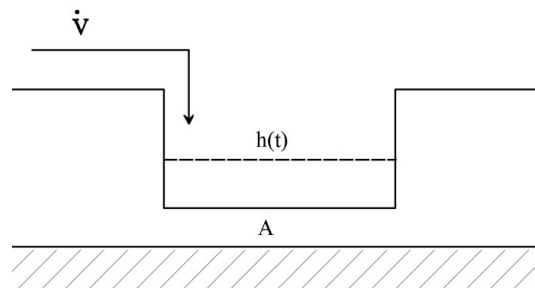


Abbildung 5.28: Füllvorgang eines Restloches

(Lösung s. S. 248)

6. Es ist folgende Differentialgleichung gegeben:

$$\frac{dh}{dt} + k \cdot h = g$$

mit $h_{t=0} = 0$, $g = 0,015m \cdot s^{-1}$ und $k = 0,01s^{-1}$

Lösen Sie die Differentialgleichung mittels numerischer Methoden.

(Lösung s. S.248)

Lösungen:**• zu Aufgabe 1 (s. S. 234)**

- (a) Entsprechend der EULERSchen-Methode wird die Lösung der Differentialgleichung auf die schrittweise Lösung einer algebraischen Gleichung überführt. Je nachdem, ob nur mit einem Intervall zwischen Ober- und Untergrenze (b bzw. a) oder mit n Teilintervallen gearbeitet wird, erhält man:

$$\begin{aligned}y_b &= y_a + \int_a^b f(x, y) dx \approx y_a + f(a, y_a) \cdot (b - a) \\&\approx y_a + f(a, y_a) \cdot h \\y_{n+1} &= y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y) dx \approx y_n + f(x_n, y_n) \cdot (x_{n+1} - x_n) \\&\approx y_n + f(x_n, y_n) \cdot \Delta x_n\end{aligned}$$

Dabei gilt $h = b - a$ und $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$.

Für die Lösung der vorliegenden Differentialgleichung bedeutet dies:

$$y' = -xy^2$$

$$y_{n+1} = y_n - x_n \cdot y_n^2 \cdot \Delta x_n$$

Bei Einsetzen der vorgegebenen Anfangsbedingung $y(0) = 2$ und des zu berechnenden Wertes $y_{(x=1)}$ erhält man die in Abbildung 5.29 gezeigte Entwicklung der Lösung in Abhängigkeit von der Zeitschrittweite ($\Delta x = 0,05; 0,1; 0,2; 0,5$).

Die analytische Lösung dieser Differentialgleichung ist im Abschnitt 5.2.1 "Analytische Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen" (Seite 147) dargelegt. Die Lösung an der Stelle $x = 1$

$$y(1) = 1$$

ist zum Vergleich mit angegeben. In Abbildung 5.30 ist die Abhängigkeit der Lösung von der Zeitschrittweite dargestellt. Darin ist zu erkennen, dass die Lösung des EULER-Verfahrens für diese Aufgabe sehr gut gegen den Wert der analytischen Lösung $y(1) = 1$ konvergiert.

Die analytische Lösung lautet:

$$y = \frac{2}{x^2 + 1}$$

Δx	0,05	0,1	0,2	0,5	1	analytisch
$y(x = 1)$	1,0036	1,0073	1,0141	1	2	1
rel. Fehler ($x = 1$)	0,0036	0,0073	0,0141	0	1	
abs. Fehler ($x = 1$)	0,0036	0,0073	0,0141	0	1	

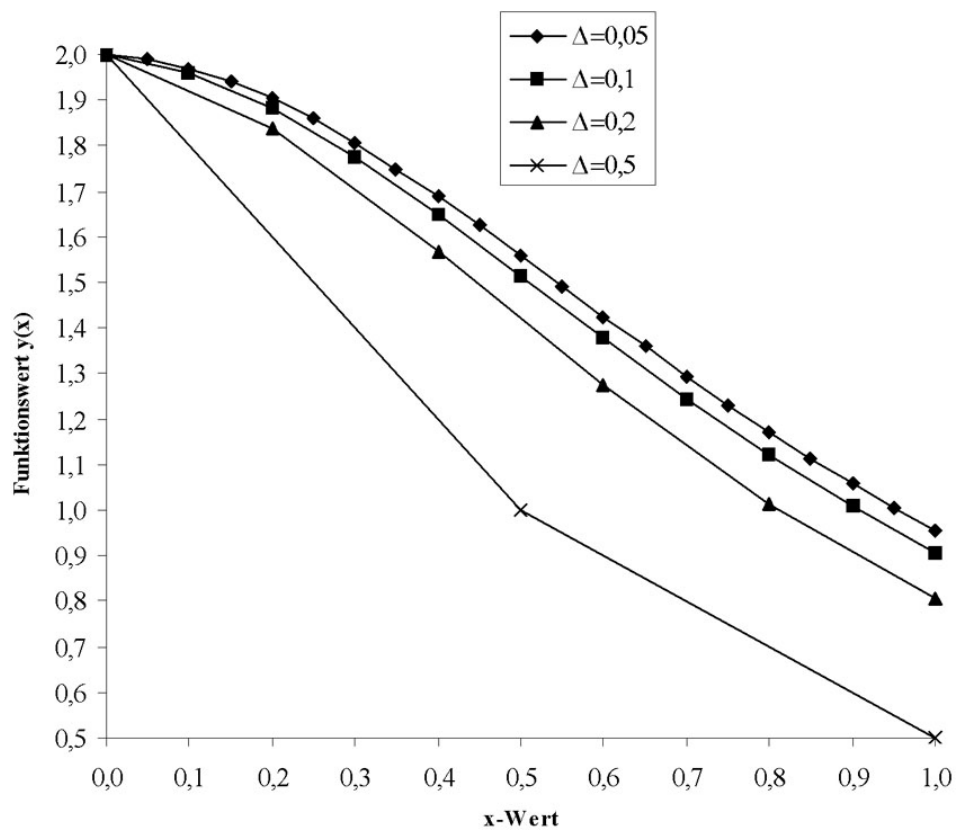


Abbildung 5.29: Verlauf der Lösungsfunktion, Quantisierungsschrittweite als Parameter

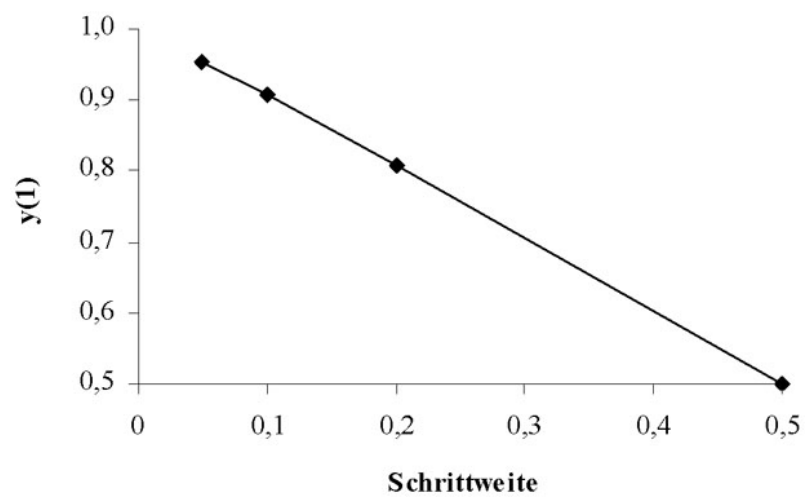


Abbildung 5.30: Abhängigkeit des Integrationsergebnisses von Quantisierungsschrittweite

- (b) Das einfachste Verfahren, welches sich vom EULER-Verfahren hinsichtlich der Genauigkeit unterscheidet, ist das RUNGE-KUTTA-Verfahren 2. Ordnung. In diesem Fall ist:

$$y_b = y_a + k_2$$

$$k_1 = h \cdot f(x_a, y_a)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_a + \frac{1}{2}h, y_a + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$\text{mit : } h = b - a$$

Für die Lösung der vorliegenden Differentialgleichung bedeutet dies:

$$y' = -xy^2$$

$$y_b = y_a + k_2$$

$$k_1 = h \cdot (-a \cdot y_a^2)$$

$$k_2 = h \cdot \left(-\left(a + \frac{h}{2}\right) \cdot \left(y_a + \frac{k_1}{2}\right)^2\right)$$

Für $a = 0$, $b = 1$ und $h = 1$ ergeben sich folgende Werte:

y_a	k_1	k_2	y_b
2	0	-2	0

Für $a = 0$, $b = 1$ und $h = 0,5$ ergeben sich folgende Werte:

y_n	k_1	k_2	y_{n+1}
2	0	-0,5	1,5
1,5	-0,5625	-0,557	0,943

Das RUNGE-KUTTA-Verfahren 4. Ordnung stellt ein häufig benutztes Verfahren dar, welches einen guten Kompromiss zwischen Genauigkeit und numerischem Aufwand darstellt. Für die allgemeine Form:

$$y_b = y_a + k$$

schreibt man beim RUNGE-KUTTA-Verfahren 4. Ordnung:

$$k = \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = h \cdot f(a, y_a)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(a + \frac{h}{2}, y_a + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(a + \frac{h}{2}, y_a + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h \cdot f(a + h, y_a + k_3)$$

$$\text{mit : } h = |b - a|$$

Für die Lösung der vorliegenden Differentialgleichung bedeutet dies:

$$y' = -xy^2$$

$$y_{n+1} = y_n - x_n \cdot y_n^2 \cdot \Delta x$$

Für $a = 0$, $b = 1$ und $h = 1$ ergeben sich folgende Werte:

y_a	k_1	k_2	k_3	k_4	y_b
2	0	-2	-0,5	-2,25	0,792

Für $a = 0$, $b = 1$ und $h = 0,5$ ergeben sich folgende Werte:

y_n	k_1	k_2	k_3	k_4	y_{n+1}
2	0	-0,5	-0,383	-0,654	1,597
1,597	-0,637	-0,613	-0,625	-0,473	0,9994

Bei Einsetzen der vorgegebenen Anfangsbedingung $y(0) = 2$ und des zu berechnenden Wertes $y_{(x=1)}$ erhält man die in Abbildung 5.29 gezeigte Entwicklung der Lösung in Abhängigkeit von der Zeitschrittweite ($\Delta x = 0,05; 0,1; 0,2; 0,5$).

Die analytische Lösung dieser Differentialgleichung ist im Abschnitt 5.2.1 "Analytische Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen" s. S. 147 dargelegt.

Die analytische Lösung

$$y(1) = 1$$

ist zum Vergleich mit dargestellt.

		$y(x = 1)$	rel. Fehler ($x = 1$)	abs. Fehler ($x = 1$)
EULER	$\Delta x = 0,5$	0,5	0,5	0,5
EULER	$\Delta x = 0,2$	0,808	0,192	0,192
EULER	$\Delta x = 0,1$	0,906	0,094	0,094
EULER	$\Delta x = 0,05$	0,953	0,047	0,047
R-K-2. O.	$\Delta x = 1$	0	1	1
R-K-2. O	$\Delta x = 0,5$	0,943	0,057	0,057
R-K-4. O	$\Delta x = 1$	0,792	0,208	0,208
R-K-4. O	$\Delta x = 0,5$	0,9994	0,0006	0,0006
analytisch		1		

- zu Aufgabe 2 (s. S. 234)

Entsprechend der EULERSchen Methode wird die Lösung der Differentialgleichung auf die schrittweise Lösung einer algebraischen Gleichung überführt. Je nachdem, ob nur mit einem Intervall zwischen Ober- und Untergrenze (b bzw. a) oder mit n Teilintervallen gearbeitet wird, erhält man:

$$\begin{aligned}y_b &= y_a + \int_a^b f(x, y) dx \approx y_a + f(a, y_a) \cdot (b - a) \\&\approx y_a + f(a, y_a) \cdot h \\y_{n+1} &= y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y) dx \approx y_n + f(x_n, y_n) \cdot (x_{n+1} - x_n) \\&\approx y_n + f(x_n, y_n) \cdot \Delta x_n\end{aligned}$$

Für die Lösung der vorliegenden Differentialgleichung bedeutet dies:

$$\frac{dx}{dt} + t^2 x = 0$$

$$x_{n+1} = x_n - t_n^2 \cdot x_n \cdot \Delta t$$

Bei Einsetzen der vorgegebenen Anfangsbedingung $x(0) = 3$ und des zu berechnenden Wertes $x_{(t=3)}$ erhält man die in Abbildung 5.31 gezeigte Entwicklung der Lösung in Abhängigkeit von der Zeitschrittweite ($\Delta t = 0,1; 0,05; 0,01$).

Die analytische Lösung dieser Differentialgleichung ist im Abschnitt 5.2.1 "Analytische Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen" (Seite 147) dargelegt. Die analytische Lösung

$$x = 3e^{-\frac{1}{3}t^3}$$

ist zum Vergleich mit dargestellt. Man erkennt, dass die Abweichung sehr stark von dem Kurvenverlauf bzw. dem zu berechnenden Wert abhängt.

	$\Delta t = 0,1$	$\Delta t = 0,05$	$\Delta t = 0,01$	analytisch
$x(t = 3)$	0,0000007	0,0000568	0,0002739	0,0003702
rel. Fehler ($t = 3$)	0,998	0,847	0,260	
abs. Fehler ($t = 3$)	0,0004	0,0003	0,0001	
$x(t = 1,5)$	0,78	0,88	0,96	0,97
rel. Fehler ($t = 1,5$)	0,194	0,096	0,019	
abs. Fehler ($t = 1,5$)	0,189	0,093	0,018	

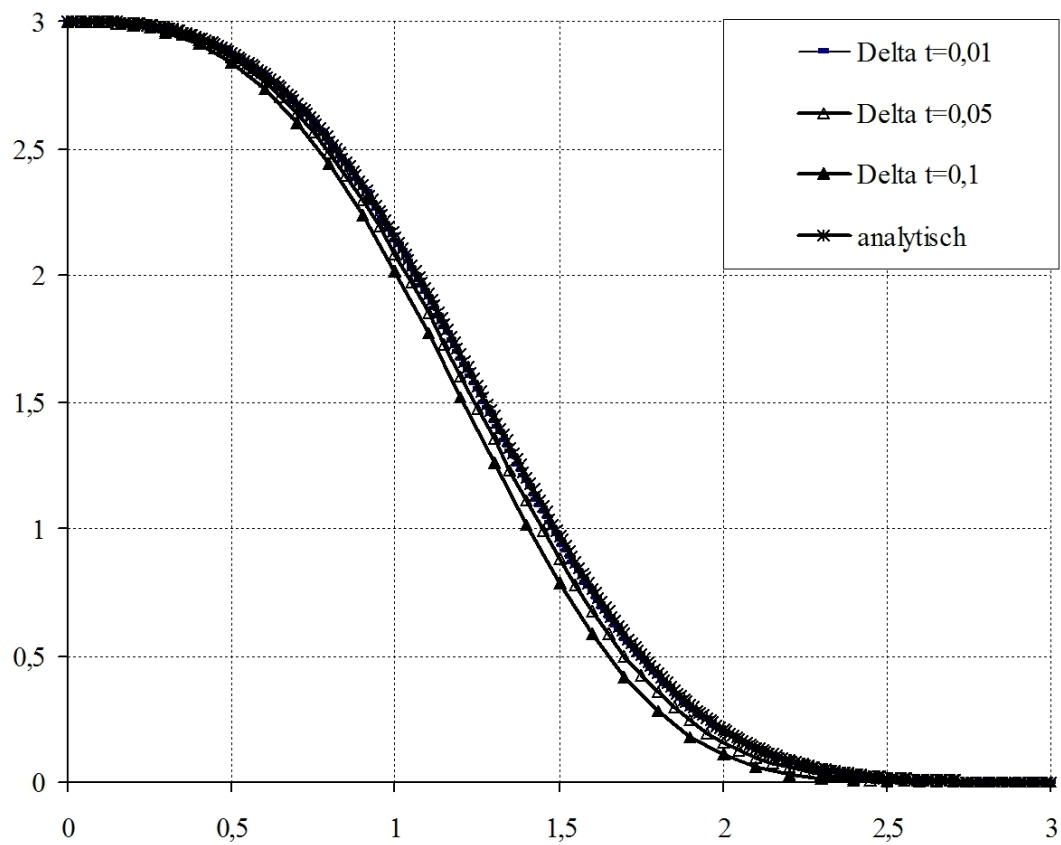


Abbildung 5.31: Verlauf der Lösungsfunktion, Quantisierungsschrittweite als Parameter

- zu Aufgabe 3 (s. S. 234)

Entsprechend der EULER-Methode wird die Lösung der Differentialgleichung auf die schrittweise Lösung einer algebraischen Gleichung überführt. Je nachdem, ob nur mit einem Intervall zwischen Ober- und Untergrenze (b bzw. a) oder mit n Teilintervallen gearbeitet wird, erhält man:

$$\begin{aligned}y_b &= y_a + \int_a^b f(x, y) dx \approx y_a + f(a, y_a) \cdot (b - a) \\&\approx y_a + f(a, y_a) \cdot h \\y_{n+1} &= y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y) dx \approx y_n + f(x_n, y_n) \cdot (x_{n+1} - x_n) \\&\approx y_n + f(x_n, y_n) \cdot \Delta x_n\end{aligned}$$

Für die Lösung der vorliegenden Differentialgleichung bedeutet dies:

$$\begin{aligned}t \frac{dx}{dt} - x &= t^2 \cos t \\x_{n+1} &= x_n + \left(t_n \cos t_n + \frac{1}{t_n} x_n \right) \cdot \Delta t\end{aligned}$$

Bei Einsetzen der vorgegebenen Anfangsbedingung $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ und des zu berechnenden Wertes $x_{(t=2\pi)}$ erhält man die in Abbildung 5.31 gezeigte Entwicklung der Lösung in Abhängigkeit von der Zeitschrittweite ($\Delta t = 0, 1\pi$ und $0, 05\pi$).

Die analytische Lösung dieser Differentialgleichung ist im Abschnitt 5.2.1 "Analytische Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen", Seite 148 dargelegt. Die analytische Lösung

$$x = t(1 + \sin t)$$

ist zum Vergleich mit dargestellt. Man erkennt, dass die Abweichung sehr stark von dem Kurvenverlauf, bzw. dem zu berechnenden Wert abhängt.

	$\Delta t = 0,1\pi$	$\Delta t = 0,05\pi$	analytisch
$x(t = 2\pi)$	6,337	6,244	6,283
rel. Fehler ($t = 2\pi$)	0,0085	0,0062	
abs. Fehler ($t = 2\pi$)	0,0534	0,0388	
$x(t = 3,45)$	1,386	1,853	2,388
rel. Fehler ($t = 3,45$)	0,420	0,224	
abs. Fehler ($t = 3,45$)	1,002	0,534	

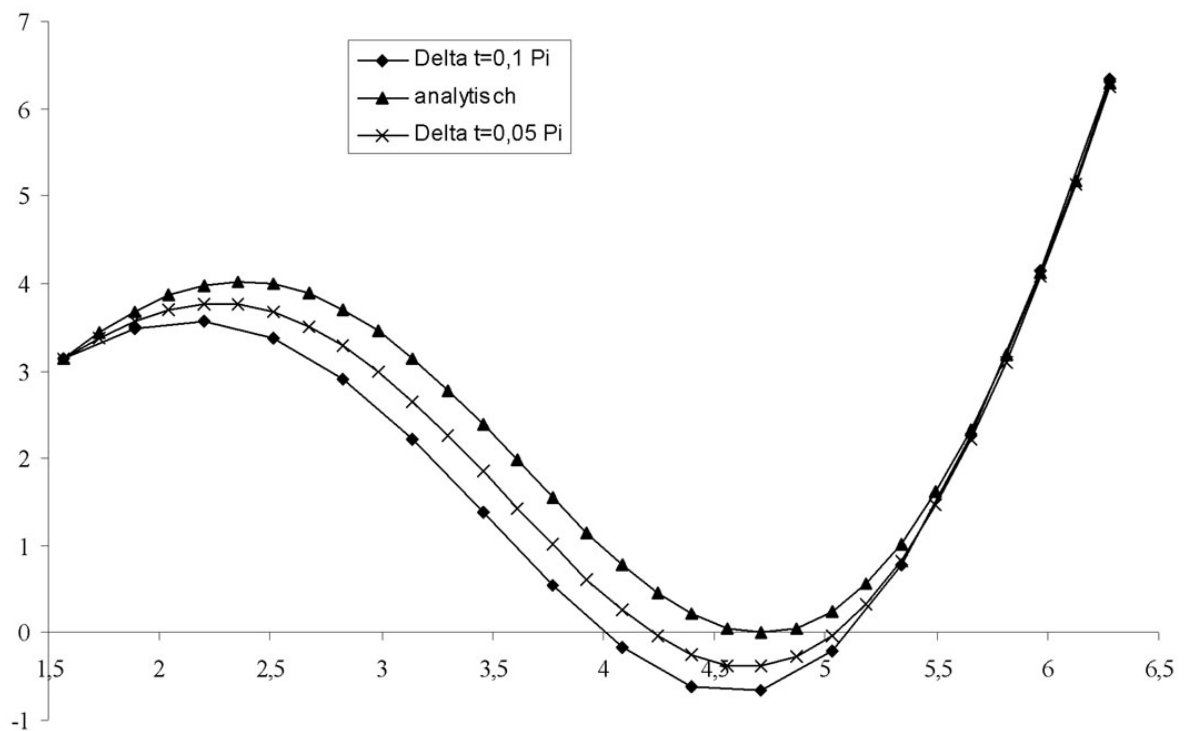


Abbildung 5.32: Verlauf der Lösungsfunktion, Quantisierungsschrittweite als Parameter

• zu Aufgabe 4 (s. S. 234)

a. Entsprechend der EULER-Methode wird die Lösung der Differentialgleichung auf die schrittweise Lösung einer algebraischen Gleichung überführt. Je nachdem, ob nur mit einem Intervall zwischen Ober- und Untergrenze (b bzw. a) oder mit n Teilintervallen gearbeitet wird, erhält man:

$$\begin{aligned} y_b &= y_a + \int_a^b f(x, y) dx \approx y_a + f(a, y_a) \cdot (b - a) \\ &\approx y_a + f(a, y_a) \cdot h \\ y_{n+1} &= y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y) dx \approx y_n + f(x_n, y_n) \cdot (x_{n+1} - x_n) \\ &\approx y_n + f(x_n, y_n) \cdot \Delta x_n \end{aligned}$$

Für die Lösung der vorliegenden Differentialgleichung bedeutet dies:

$$T_1 \dot{C} + C = K$$

$$C_{n+1} = C_n + \frac{1}{T_1} (K - C)_n \cdot \Delta t$$

Bei Einsetzen der vorgegebenen Anfangsbedingung $C_{t=0} = 0$ und des zu berechnenden

Wertes $C_{t=1d}$ erhält man die in Abbildung 5.33 gezeigte Entwicklung der Lösung in Abhängigkeit von der Zeit ($\Delta t = 0,1d$).

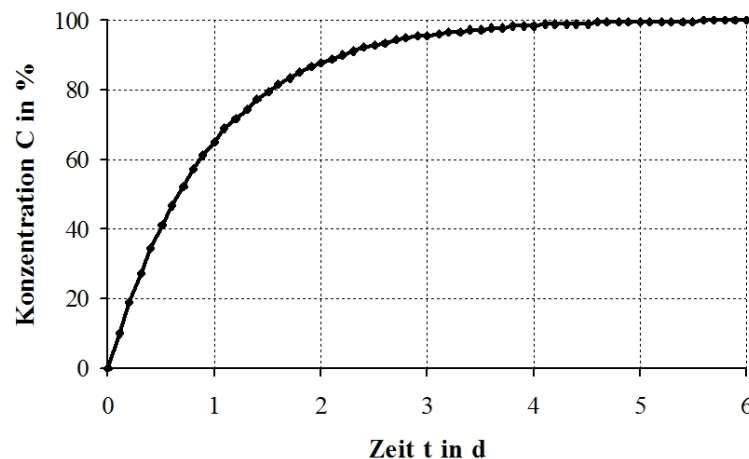


Abbildung 5.33: Abhängigkeit der Konzentration von der Zeit

Die analytische Lösung dieser Differentialgleichung ist im Abschnitt 5.2.1 "Analytische Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen", Seite 148 dargelegt.

Die analytische Lösung

$$C = C_{\infty} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right)$$

ist zum Vergleich mit dargestellt. Man erkennt, dass die Abweichung sehr stark von dem Kurvenverlauf bzw. dem zu berechnenden Wert abhängt.

	$\Delta t = 0,1\text{d}$	analytisch
$x(t = 1\text{d})$	65,132	63,212
rel. Fehler (t = 1d)	0,03	
abs. Fehler (t = 1d)	1,92	

b. Skizze

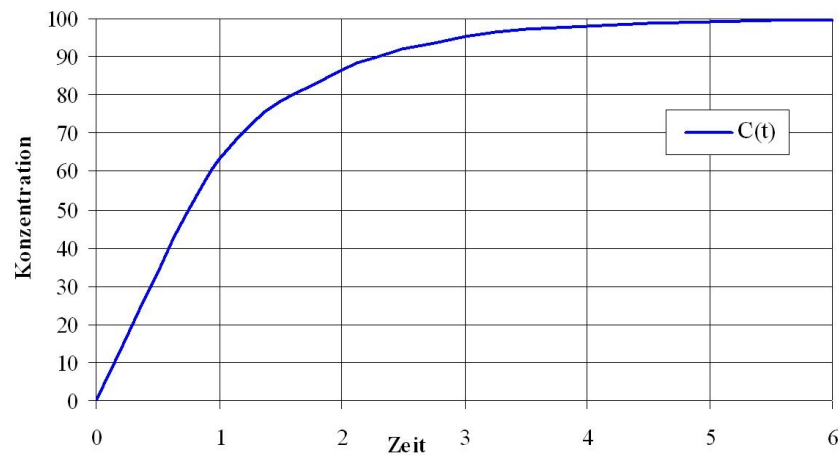


Abbildung 5.34: Prinzipieller Zeitverlauf der Konzentration

- zu Aufgabe 5 (s. S. 234)

$$A \frac{dh}{dt} = \dot{V} \quad \text{mit: } h_{t=0} = 0$$

$$dh = \frac{1}{A} \cdot \dot{V} dt. \quad \text{es gilt: } dh \approx \Delta h = h_{n+1} - h_n$$

$$h_{n+1} = h_n + \frac{1}{A} \cdot \dot{V} \cdot \Delta t$$

$$h_0 = 0$$

$$h_1 = h_0 + \frac{1}{A} \cdot \dot{V} \cdot \Delta t$$

$$h_2 = h_1 + \frac{1}{A} \cdot \dot{V} \cdot \Delta t$$

...

- zu Aufgabe 6 (s. S. 234)

$$g = 0,015 \frac{m}{s} \quad k = 0,01 s^{-1}$$

$$\frac{dh}{dt} + k \cdot h = g \quad \text{mit: } h_{t=0} = 0$$

$$dh = (g - k \cdot h) dt$$

$$dh \approx \Delta h = h_{n+1} - h_n$$

$$h_{n+1} = h_n (0,015 - 0,01 \cdot h_n) \Delta t$$

Teil II

Aufgaben und Lösungen - Partielle Differentialgleichungen der unterirdischen Prozesse

Kapitel 6

Überblick

Zu diesem Kapitel sind keine Übungsaufgaben vorhanden.

Kapitel 7

Horizontale Grundwasserströmungsgleichung

Zu diesem Kapitel sind keine Übungsaufgaben vorhanden.

Kapitel 8

Analytische Lösung der Brunnenanströmung

Aufgaben zu 8:

1. Berechnen Sie die Absenkung s für die Grundwasserbeobachtungsrohre (GWBR) in einer Entfernung r und zu den Zeiten t , die infolge einer Wasserförderung \dot{V} im Brunnen Br für nachfolgenden unendlich ausgedehnten Grundwasserleiter (siehe Abbildung 8.1) auftritt und stellen Sie das Ergebnis grafisch dar.

$$k = 1 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s}; M = 10m; S = 0,001; a = \frac{S}{T} = 0,1 \frac{s}{m^2}$$

$$r_0 = 0,25m; \dot{V} = 0,015 \frac{m^3}{s}; h_n = 16m$$

$$r = 5m; 10m; 20m; 50m$$

$$t = 1min; 2min; 5min; 10min; 20min; 30min; 45min; 60min; 90min; 120min$$

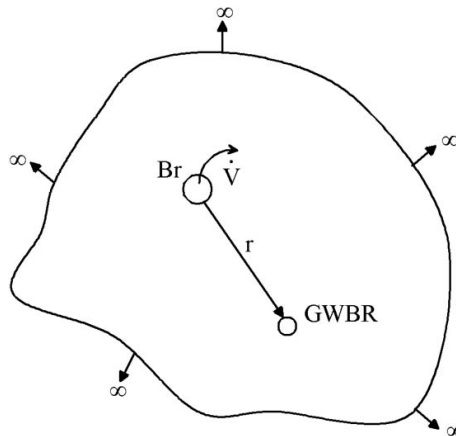


Abbildung 8.1: Unendlich ausgedehnter Grundwasserleiter mit Brunnen und GWBR

(Lösung s. S. 264)

2. Berechnen Sie für den Grundwasserleiter aus Aufgabe 1 (siehe Abbildung 8.1) die Absenkung im GWBR ($r = 10m$) alle 10 Minuten bis maximal 100 Minuten, wenn der Volumenstrom des Förderbrunnens folgender Zeitstaffelung unterliegt, und stellen Sie die Lösung grafisch dar.

Volumenstrom $\left[\frac{m^3}{s} \right]$	0,005	0,010	0,015	0,020	0,025	0,030	0,000
Förderbeginn [min]	0	10	20	30	40	50	60

(Lösung s. S. 270)

3. In einem Grundwasserleiter in der Nähe eines Flusses soll eine Baugrube abgesenkt werden. Die Mitte der Baugrube ist $100m$ vom Fluss entfernt, die Entwässerungsbrunnen $80m$. Es sind drei Brunnen parallel zum Fluss angeordnet, die jeweils $25m$ voneinander entfernt sind. Die Brunnen besitzen einen Durchmesser von $r_0 = 0,3m$ und fördern mit jeweils $\dot{V} = 0,015 \frac{m^3}{s}$.

Der Fluss besitzt eine Breite von $B = 20\text{m}$ und eine Kolmationsschicht von $k' = 3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $M' = 1\text{m}$. (siehe Abbildung 8.2)

Der Grundwasserleiter hat folgende Eigenschaften:

$k = 5 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $n_0 = 0,20$; $h_n = 15\text{m}$; $M = 20\text{m}$.

Wird nach 10 Tagen im Zentrum der Baugrube die Zielabsenkung von $2,5\text{m}$ erreicht?

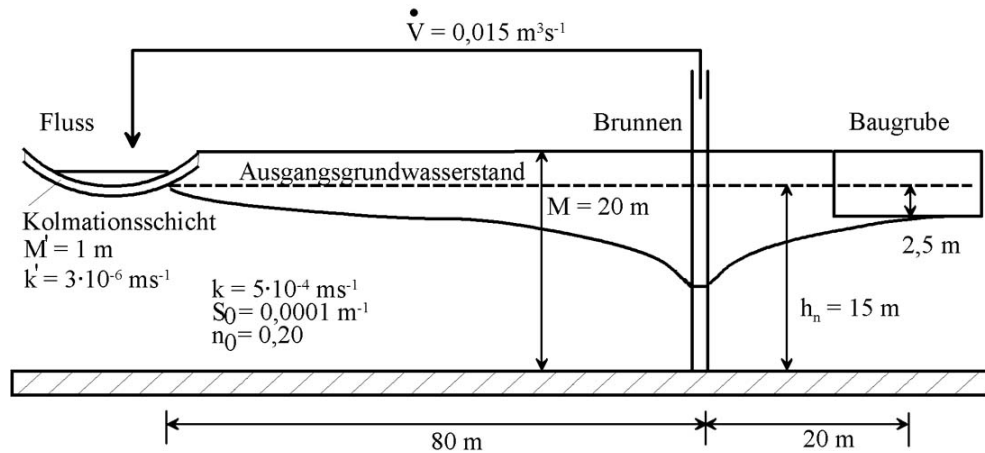


Abbildung 8.2: Grundwasserleiter mit unvollkommenem Fluss, Brunnen und Baugrube

(Lösung s. S.274)

4. Überprüfen Sie mittels der analytischen Lösung der Brunnenanströmung, ob der Mittelpunkt der Baugrube nach einer Zeit von 7 Tagen bei einer Förderleistung von $\dot{V} = 0,01 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$, $r_0 = 0,30\text{m}$ mit einer Sicherheit von $0,5\text{m}$ entwässert ist (siehe Abbildung 8.3).

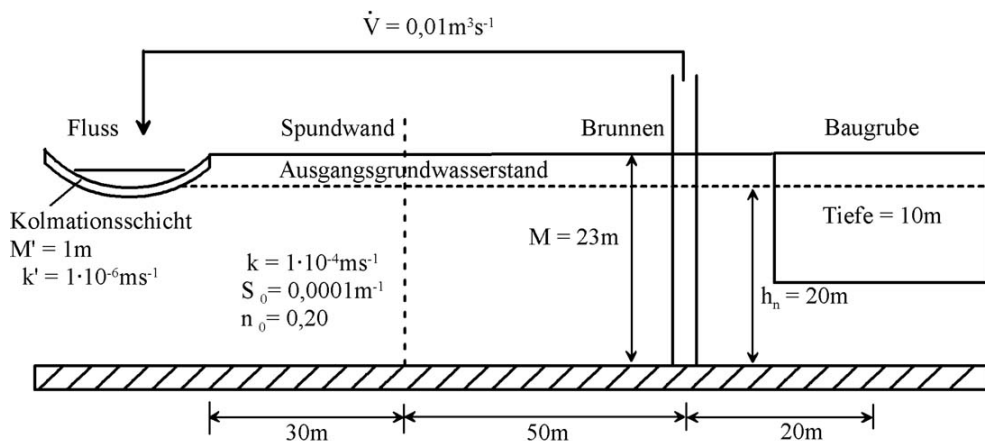


Abbildung 8.3: Grundwasserleiter mit Brunnen und Baugrube, Spundwand und Fluss

(Lösung s. S.278)

5. Bei einem Pumpversuch in einem unendlich ausgedehnten Grundwasserleiter wurden folgende Wasserstände in Abhängigkeit von der Entfernung zum Brunnen nach einer Pumpzeit von 120min gemessen (siehe Abbildung 8.4). Berechnen Sie das Wasserdefizit (Volumen) des Absenkungstrichters, wenn der Grundwasserleiter folgende Kennwerte besitzt:

$$h_n = 16\text{m}, M = 10\text{m}, k = 0,001 \frac{\text{m}}{\text{s}}, S_0 = 0,0001\text{m}^{-1}, n_0 = 0,20.$$

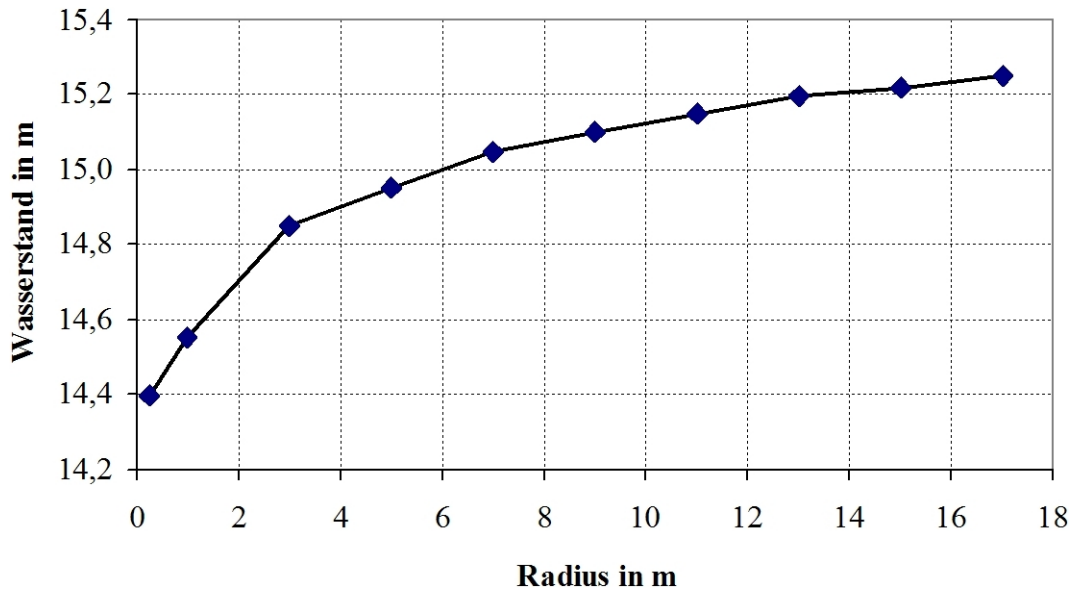


Abbildung 8.4: Grundwasserstand in Abhängigkeit vom Radius

(Lösung s. S. 281)

6. Aus einem Brunnen, der an einem idealen Fluss ($x = 0; -\infty < y < +\infty$) liegt ($Br_{(100\text{m}, 500\text{m})}$), wird ein konstanter Volumenstrom von $\dot{V} = 25 \frac{\text{l}}{\text{s}}$ gefördert. Der Brunnen hat einen Radius von $r_0 = 0,35\text{m}$. Der Grundwasserleiter ist durch folgende Parameter gekennzeichnet:

$$h_n = 15\text{m}, M = 17\text{m}, k = 1 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}}, S_0 = 0,0002\text{m}^{-1}, n_0 = 0,25.$$

- Berechnen Sie den stationären Endzustand (der Anteil der zeitlichen Funktionalität soll kleiner als 0,001 sein) für den Punkt ($P_{(200\text{m}, 600\text{m})}$) und
- den Zeitpunkt, ab wann mit ihm zu rechnen ist.

Hinweis: Arbeiten Sie so lange wie möglich mit allgemeinen Formelzeichen.

(Lösung s. S.282)

7. Für ein Uferfiltratswasserwerk (siehe Abbildung 8.5) mit parallelem Strömungsregime ist ein Simulationssystem aufzubauen. Der Fluss soll dabei als idealisierte Randbedingung berücksichtigt werden. Berechnen Sie für diese hydraulischen Verhältnisse den stationären Endzustand auf der Basis der analytischen Lösung der Brunnengleichung.

$k = 1 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s}$; $h_{Fl} = 15m$; $z_{R0} = 15m$; $S = 0,25$; $\dot{V} = 50 \frac{l}{s}$; $q = 0,001 \frac{l}{s \cdot m^2}$;
 $b = 100m$; $k_{Kolm} = 5 \cdot 10^{-5} \frac{m}{s}$; $M_{Kolm} = 1m$;

Ermitteln Sie die Lösung

- mit idealisiertem Fluss und
- unter Berücksichtigung des realen Flusses (Kolmation und Unvollkommenheit).

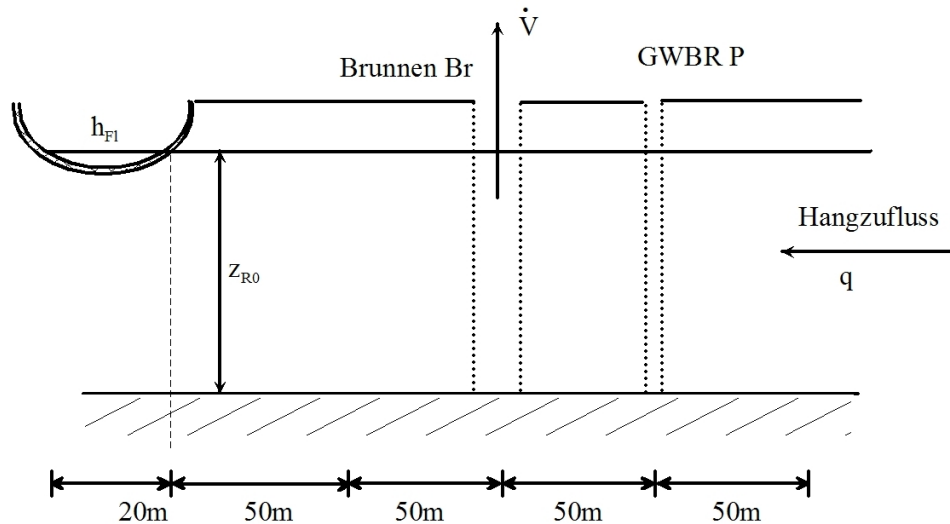


Abbildung 8.5: Grundwasserleiter mit Fluss, Brunnen und Hangzufluss

(Lösung s. S.286)

- In der Geohydraulik werden Pumpversuche zur Bestimmung der Grundwasserleiterparameter eingesetzt. Unter bestimmten Bedingungen kann die Absenkung nach der Formel von THEISS/JAKOB/COOPER

$$s = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi T} \ln \left(\frac{2,25 \cdot T \cdot t}{r^2 \cdot S} \right)$$

ermittelt werden.

Leiten Sie unter Verwendung dieser Formel eine Gleichung zur Bestimmung des k -Wertes für einen Ortspunkt P , der sich in einer Entfernung r vom Brunnen befindet, ab. Die Bestimmung des k -Wertes soll dabei auf der Verwendung der Absenkungswerte s_1 zum Zeitpunkt t_1 und s_2 zum Zeitpunkt t_2 basieren. Das Verhältnis der Messzeiten $t_1 : t_2$ beträgt 1 : 10.

(Lösung s.S. 291)

- Berechnen Sie die Absenkung im GWBR (siehe Abbildung 8.6) für den Zeitpunkt $t = 10h$, wenn im Brunnen $5h$ lang ein Volumenstrom von $0,2 \frac{m^3}{s}$ gefördert wird und anschließend die Pumpen abgeschaltet werden.

$h_{t=0} = 10m$, $M = 15m$, $k = 0,0001 \frac{m}{s}$, $S_0 = 0,0001 m^{-1}$, $n_0 = 0,25$

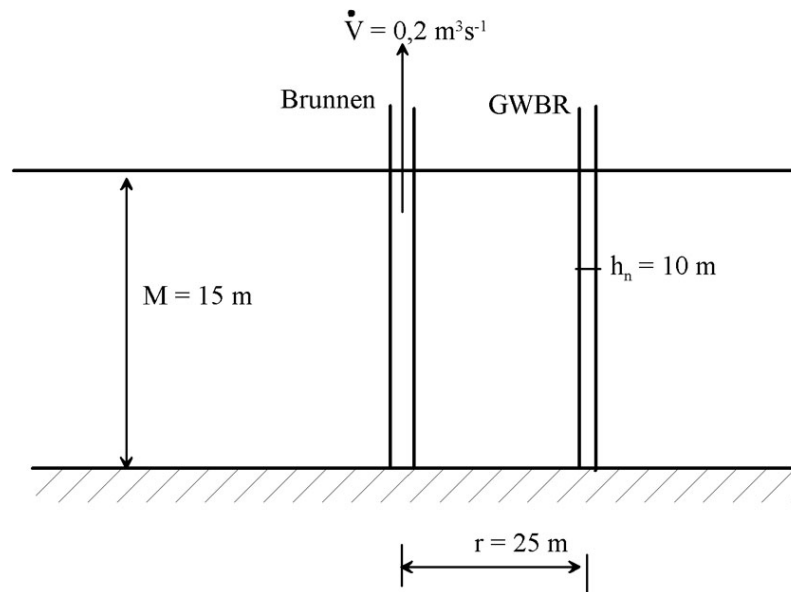


Abbildung 8.6: Unendlich ausgedehnter Grundwasserleiter mit einem Förderbrunnen

(Lösung s. S.292)

10. Berechnen Sie für eine Grundwassergewinnungsanlage auf Uferfiltratbasis die Absenkung am Punkt P nach einem Jahr.

Förderrate je Brunnen: $25 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$

$k = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $h_n = 15 \text{ m}$; $S = 0,25$

$k' = 1 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $M' = 1 \text{ m}$; $B = 25 \text{ m}$; $r_1 = 250 \text{ m}$; $r_2 = 500 \text{ m}$; $r_P = 375 \text{ m}$

(Lösung s.S. 294)

11. Aus zwei Brunnen an einem Fluss (ohne Kolmation und vollkommen) wird konstant je $25 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$ gefördert.

Berechnen Sie die Absenkung am Punkt P nach einem Monat und den stationären Endzustand.

Kordinaten:

Brunnen 1: $x = 750 \text{ m}$ $y = 100 \text{ m}$

Brunnen 2: $x = 700 \text{ m}$ $y = 400 \text{ m}$

Punkt P: $x = 1000 \text{ m}$ $y = 500 \text{ m}$

$h_n = 15 \text{ m}$, $n_0 = 0,25$, $k = 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

(Lösung s. S. 297)

12. Berechnen Sie mittels der THEISSchen Brunnengleichung die Grundwasserstandsänderung nach 10 Tagen für folgende schematische Grundwasseranreicherungsanlage (siehe Abbildung 8.7).

Gegeben: $\dot{V} = 0,001 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, $S_0 = 0,001 \text{ m}^{-1}$, $n_0 = 0,25$, $k = 0,001 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

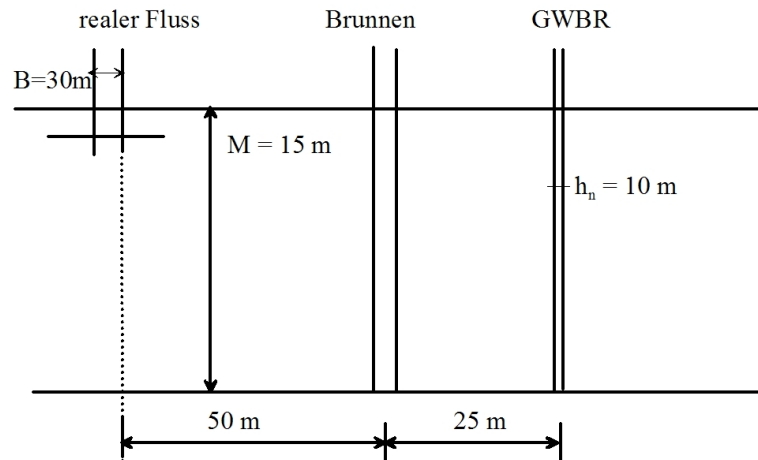


Abbildung 8.7: Realer Fluss mit Entnahmebrunnen (Grundwasseranreicherungsanlage)

(Lösung s.S. 300)

13. Berechnen Sie mittels der THEISSchen Brunnengleichung die Grundwasserstandsänderung nach 10 Tagen für folgende schematische Grundwasseranreicherungsanlage (siehe Abbildung 8.8).

Gegeben: $\dot{V} = 0,001 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, $S_0 = 0,001 \text{ m}^{-1}$, $n_0 = 0,25$, $k = 0,001 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

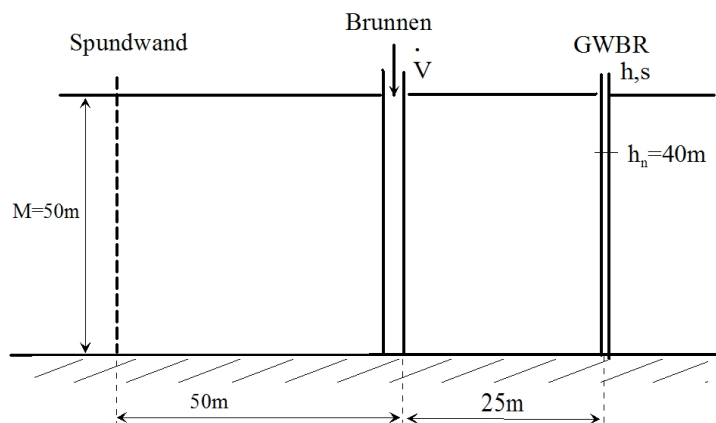


Abbildung 8.8: Grundwasseranreicherungsanlage mit Brunnen und Spundwand

(Lösung s.S. 302)

14. Berechnen Sie die Absenkung am Pegel für den Zeitpunkt $t = 15h$, wenn im Brunnen $10h$ lang ein Volumenstrom von $\dot{V} = 0,1 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ gefördert wird und anschließend die Pumpe abgeschaltet wird (siehe Abbildung 8.9).

Gegeben: $h_{t=0} = 40 \text{ m}$, $M = 50 \text{ m}$, $k = 0,0001 \text{ m s}^{-1}$, $S_0 = 0,0001 \text{ m}^{-1}$, $n_0 = 0,25$

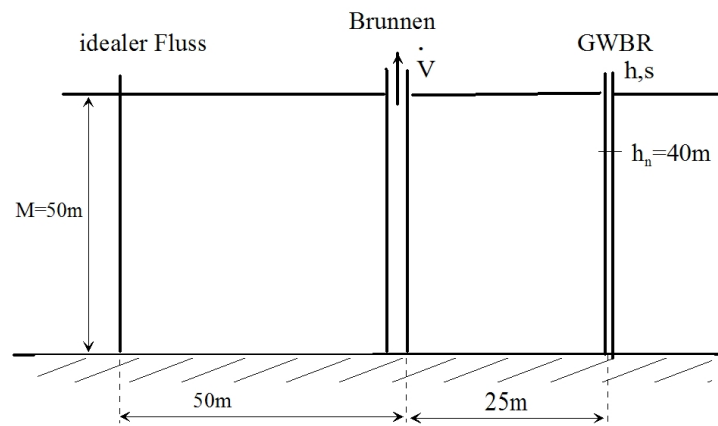


Abbildung 8.9: Uferfiltratanlage mit Brunnen und Fluss

(Lösung s.S.304)

Tabelle 8.1: Brunnenfunktion $W(\sigma)$ für den Bereich $1 \cdot 10^{-12} \leq \sigma \leq 9$

σ Mantis.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Exponent									
$1 \cdot 10^{+00}$	0,2194	0,0496	0,0143	0,00378	0,00115	$3,60 \cdot 10^{-4}$	$1,16 \cdot 10^{-4}$	$3,77 \cdot 10^{-5}$	$1,24 \cdot 10^{-5}$
$1 \cdot 10^{-01}$	1,8229	1,2227	0,9057	0,7024	0,5598	0,4544	0,3738	0,3106	0,2602
$1 \cdot 10^{-02}$	4,0379	3,3547	2,9591	2,6813	2,4679	2,2953	2,1508	2,0269	1,9187
$1 \cdot 10^{-03}$	6,3315	5,6394	5,2349	4,9482	4,7261	4,5448	4,3916	4,2591	4,1423
$1 \cdot 10^{-04}$	8,6332	7,9402	7,5348	7,2472	7,0242	6,8420	6,6879	6,5545	6,4368
$1 \cdot 10^{-05}$	10,9357	10,2426	9,8371	9,5495	9,3263	9,1440	8,9899	8,8563	8,7386
$1 \cdot 10^{-06}$	13,2383	12,5451	12,1397	11,8520	11,6289	11,4465	11,2924	11,1589	11,0411
$1 \cdot 10^{-07}$	15,5409	14,8477	14,4423	14,1546	13,9314	13,7491	13,5950	13,4614	13,3437
$1 \cdot 10^{-08}$	17,8435	17,1503	16,7449	16,4572	16,2340	16,0517	15,8976	15,7640	15,6462
$1 \cdot 10^{-09}$	20,1460	19,4529	19,0474	18,7598	18,5366	18,3543	18,2001	18,0666	17,9488
$1 \cdot 10^{-10}$	22,4486	21,7555	21,3500	21,0623	20,8392	20,6569	20,5027	20,3692	20,2514
$1 \cdot 10^{-11}$	24,7512	24,0581	23,6526	23,3649	23,1418	22,9595	22,8053	22,6718	22,5540
$1 \cdot 10^{-12}$	27,0538	26,3607	25,9552	25,6675	25,4444	25,2620	25,1079	24,9744	24,8566

Lösungen:• **zu Aufgabe 1 (s. S. 256)**

Wie aus der Skizze zur Aufgabenstellung zu ersehen ist, handelt es sich um einen gespannten Grundwasserleiter (siehe Abbildung 8.10) ($h_n > M$) Damit können die gegebenen Werte

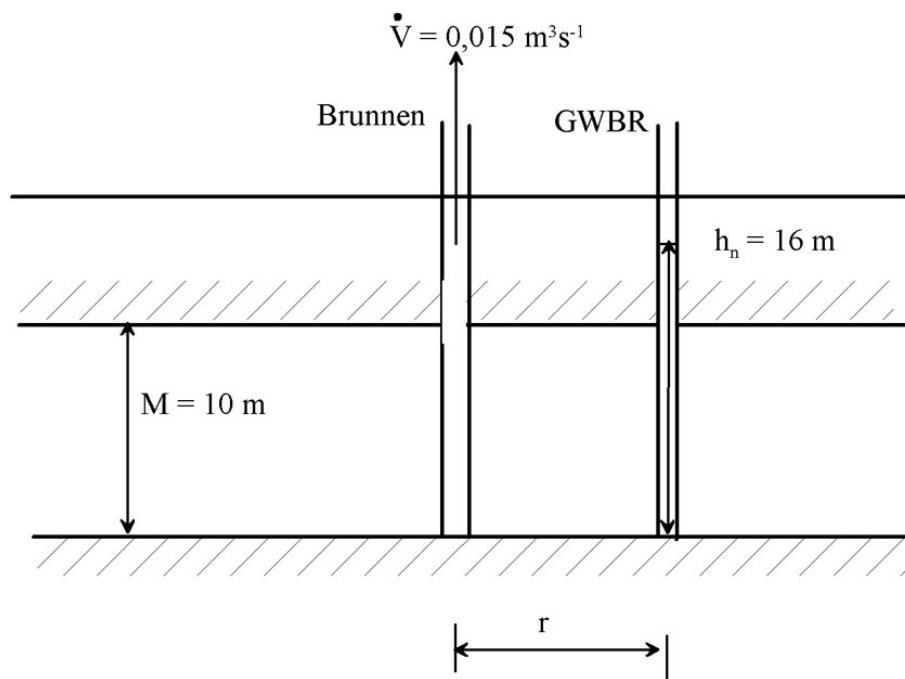


Abbildung 8.10: Gespannter Grundwasserleiter mit Entnahmebrunnen und Grundwasserbeobachtungsrohr

direkt in die THEIS-Formel eingesetzt werden:

$$s_{gesp} = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi T} W(\sigma)$$

mit

$$T = k \cdot M$$

$$\sigma = \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t}$$

und

$$C = e^\gamma$$

$$C \approx 1,7810724$$

$$W(\sigma)_{\text{THEISS}} = -\gamma - \ln(\sigma) + \sigma - \frac{\sigma^2}{2 \cdot 2!} + \frac{\sigma^3}{3 \cdot 3!} - \frac{\sigma^4}{4 \cdot 4!} + \frac{\sigma^5}{5 \cdot 5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{\sigma^n}{n \cdot n!}$$

$$W(\sigma)_{\text{THEISS}} = -\ln(C\sigma) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sigma^n}{n \cdot n!}$$

Die Potenzreihe konvergiert für Werte mit $\sigma < 0,03$ bereits so gut, dass die Glieder mit höheren Potenzen von σ vernachlässigbar kleine Werte liefern. Nach JACOB&COOPER kann $W(\sigma)$ in diesem Fall nur mit der Logarithmus-Funktion berechnet werden, wobei ein Fehler von $< 1\%$ entsteht.

$$W(\sigma)_{\text{JACOB}} = -\ln(C\sigma)$$

$$W(\sigma)_{\text{JACOB}} = \ln\left(\frac{2,246 \cdot T \cdot t}{S \cdot r^2}\right)$$

Für die Wertepaare Abstand $r_2 = 10m$ und Zeit $t[\text{min}] = 1, 2, 5, 10, 20, 30, 45, 60, 120$ erhält man folgende Ergebnisse (siehe Abbildung 8.11):

Zeit [min]	$\sigma(r_2) = 10m$	$W(\sigma)_{\text{THEIS}}$	$W(\sigma)_{\text{JACOB}}$	$S_{10m\text{THEIS}}$	$S_{10m\text{JACOB}}$
1	0,0417	2,6421	2,6009	0,315	0,311
2	0,0208	3,3148	3,2940	0,396	0,393
5	0,0083	4,2186	4,2103	0,504	0,503
10	0,0042	4,9076	4,9035	0,586	0,585
20	0,0021	5,5987	5,5966	0,668	0,668
30	0,0014	6,0035	6,0021	0,717	0,716
45	0,0009	6,4085	6,4075	0,765	0,765
60	0,0007	6,6959	6,6952	0,799	0,799
90	0,0005	7,1012	7,1007	0,848	0,848
120	0,0003	7,3887	7,3884	0,882	0,882

Die Ergebnisse der Näherung nach JACOB weichen nach ca. 30min nicht mehr von der direkten THEIS-Lösung ab. Man erkennt, dass die Absenkung nach THEIS stärker ist, als die nach JACOB. Es ist unangebracht, die Absenkungen mit mehr als drei Kommastellen, d.h. besser als Millimeterbereich, auszurechnen.

Tabelle 8.2: Berechnung der Absenkung als Funktion der Zeit für $r_1 = 5\text{ m}$

Zeit _[min]	$r_1 \Rightarrow \sigma_{r_1}$	W (σ) _{THEISS}	W (σ) _{JACOB}	s _{r_1THEISS}	s _{r_1JACOB}
1	0,0104	3,9976	3,9872	0,477	0,476
2	0,0052	4,6855	4,6803	0,559	0,559
5	0,0021	5,5987	5,5966	0,668	0,668
10	0,0010	6,2908	6,2898	0,751	0,751
20	0,0005	6,9834	6,9829	0,834	0,834
30	0,0003	7,3887	7,3884	0,882	0,882
45	0,0002	7,7941	7,7938	0,930	0,930
60	0,0002	8,0817	8,0814	0,965	0,965
90	0,0001	8,4871	8,4870	1,013	1,013
120	0,0001	8,7748	8,7747	1,047	1,047

Tabelle 8.3: Berechnung der Absenkung als Funktion der Zeit für $r_2 = 10\text{ m}$

Zeit _[min]	$r_2 \Rightarrow \sigma_{r_2}$	W (σ) _{THEISS}	W (σ) _{JACOB}	s _{r_2THEISS}	s _{r_2JACOB}
1	0,0417	2,6421	2,6009	0,315	0,311
2	0,0208	3,3148	3,2940	0,396	0,393
5	0,0083	4,2186	4,2103	0,504	0,503
10	0,0042	4,9076	4,9035	0,586	0,585
20	0,0021	5,5987	5,5966	0,668	0,668
30	0,0014	6,0035	6,0021	0,717	0,716
45	0,0009	6,4085	6,4075	0,765	0,765
60	0,0007	6,6959	6,6952	0,799	0,799
90	0,0005	7,1012	7,1007	0,848	0,848
120	0,0003	7,3887	7,3884	0,882	0,882

Tabelle 8.4: Berechnung der Absenkung als Funktion der Zeit für $r_3 = 20\text{ m}$

Zeit [min]	$r_3 \Rightarrow \sigma_{r_3}$	$\mathbf{W}(\sigma)_{\text{THEISS}}$	$\mathbf{W}(\sigma)_{\text{JACOB}}$	$\mathbf{s}_{r_3\text{THEISS}}$	$\mathbf{s}_{r_3\text{JACOB}}$
1	0,1667	1,3746	1,2146	0,164	0,145
2	0,0833	1,9894	1,9077	0,238	0,228
5	0,0333	2,8571	2,8240	0,341	0,337
10	0,0167	3,5338	3,5172	0,421	0,420
20	0,0083	4,2186	4,2103	0,504	0,503
30	0,0056	4,6213	4,6158	0,552	0,551
45	0,0037	5,0249	5,0212	0,600	0,599
60	0,0028	5,3117	5,3089	0,634	0,634
90	0,0019	5,7162	5,7144	0,682	0,682
120	0,0014	6,0035	6,0021	0,717	0,716

Tabelle 8.5: Berechnung der Absenkung als Funktion der Zeit für $r_4 = 50\text{ m}$

Zeit [min]	$r_4 \Rightarrow \sigma_{r_4}$	$\mathbf{W}(\sigma)_{\text{THEISS}}$	$\mathbf{W}(\sigma)_{\text{JACOB}}$	$\mathbf{s}_{r_4\text{THEISS}}$	$\mathbf{s}_{r_4\text{JACOB}}$
1	1,0417	0,2047	-0,6180	0,024	-0,074
2	0,5208	0,5353	0,0752	0,064	0,009
5	0,2083	1,1894	0,9914	0,142	0,118
10	0,1042	1,7861	1,6846	0,213	0,201
20	0,0521	2,4291	2,3777	0,290	0,284
30	0,0347	2,8176	2,7832	0,336	0,332
45	0,0231	3,2117	3,1887	0,383	0,381
60	0,0174	3,4936	3,4763	0,417	0,415
90	0,0116	3,8934	3,8818	0,465	0,463
120	0,0087	4,1782	4,1695	0,499	0,498

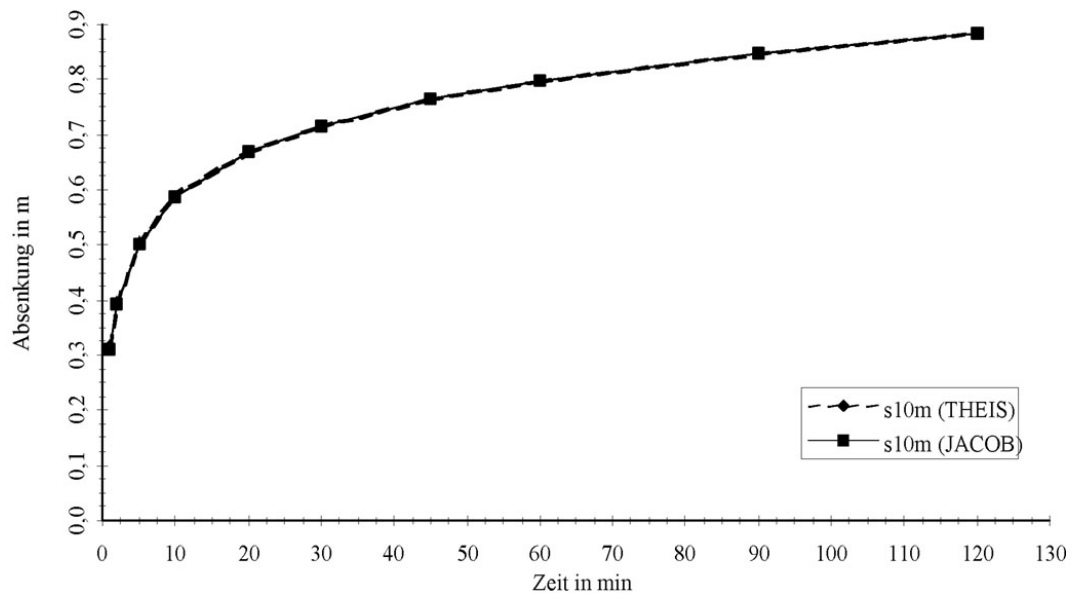


Abbildung 8.11: Absenkung in Abhängigkeit von der Zeit für $r = 10m$

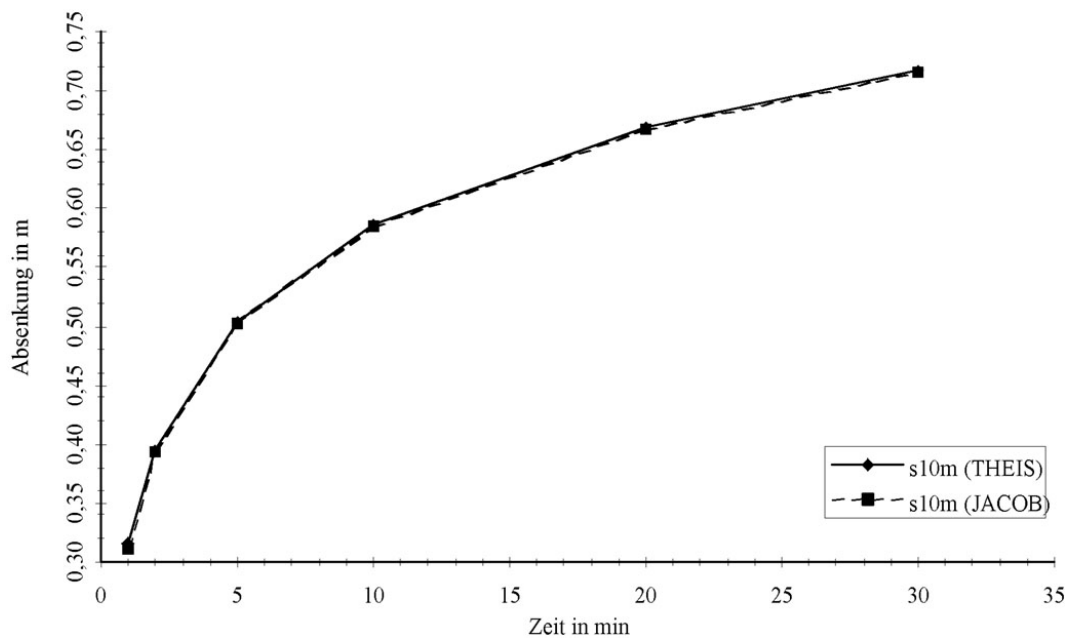


Abbildung 8.12: Absenkung in Abhängigkeit von der Zeit innerhalb der ersten 30min und für $r = 10m$

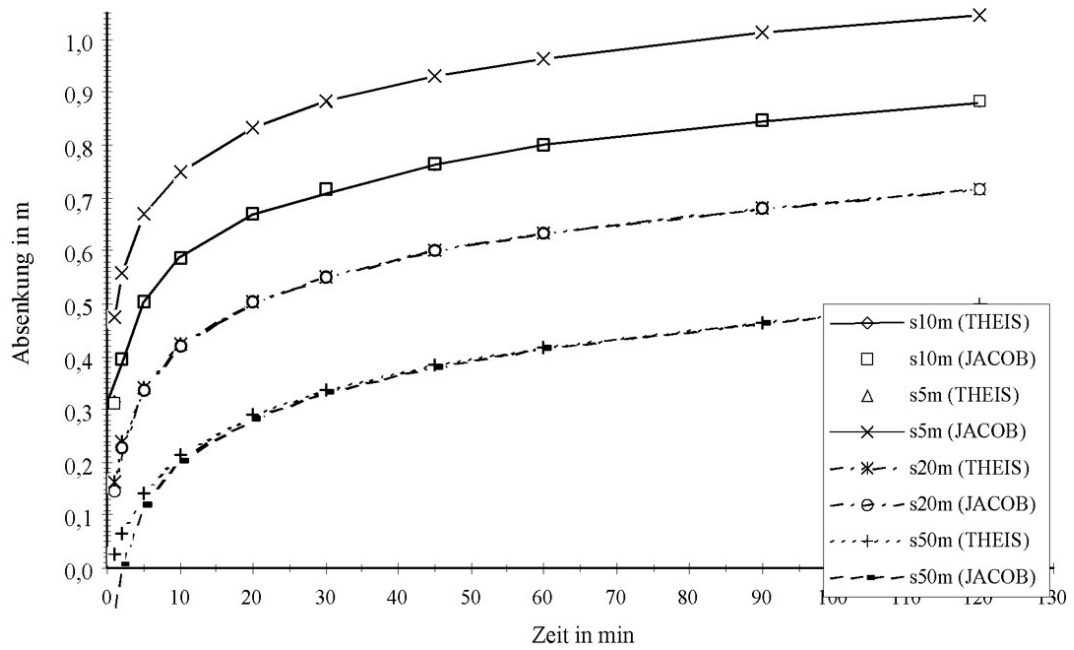


Abbildung 8.13: Absenkung in Abhängigkeit von der Zeit und für verschiedene Radien

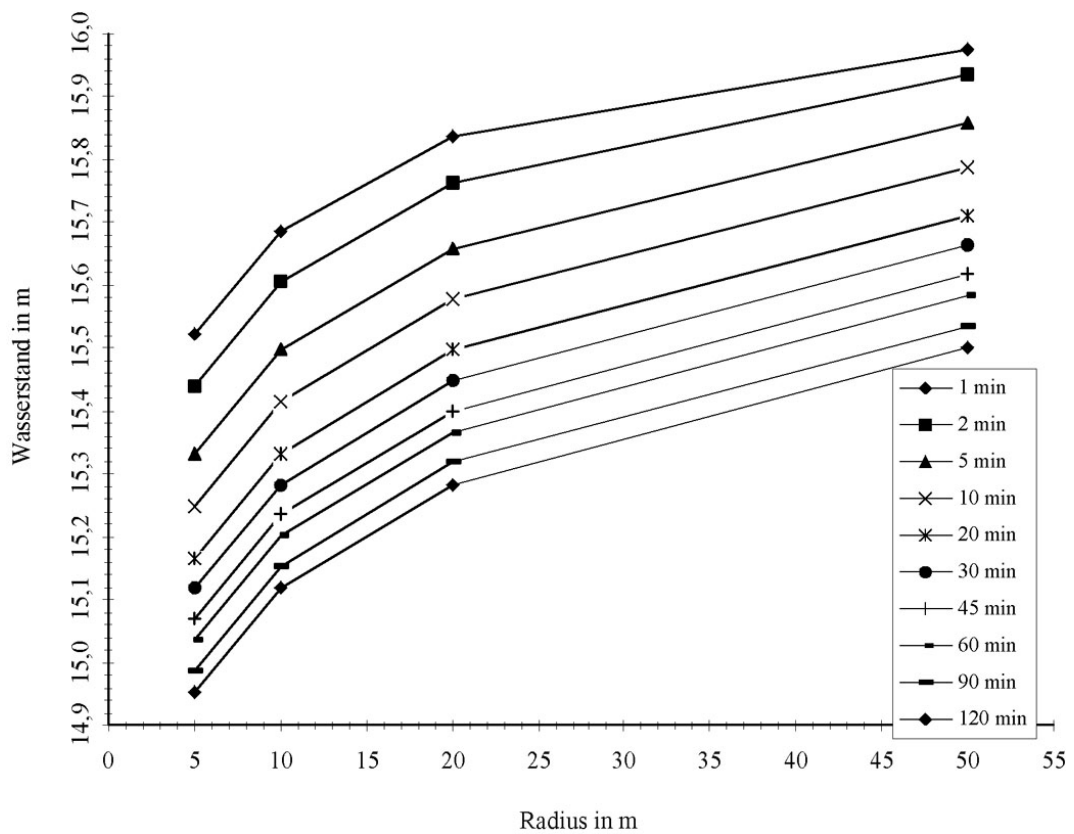


Abbildung 8.14: Absenkung in Abhängigkeit vom Radius und für unterschiedliche Zeiten

• zu Aufgabe 2 (s. S. 256)

Die Absenkung entsprechend Aufgabe 2 wird auf der Basis der Superposition berechnet. Dazu wird die Förderganglinie in einzelne Förderleistungen aufgeteilt, die entsprechend der Voraussetzung zur THEISSchen Lösung bis zur Zeit ∞ fördern. Die Teilförderleistungen beginnen zeitlich jeweils mit den Stufen des Gesamtvolumenstromes. Ab der Zeit 60 min würde so ein Volumenstrom $\frac{dV}{dt} = \sum \frac{dV_n}{dt}$ entstehen. Dieser muss durch eine gleichgroße Infiltration kompensiert werden, damit die Aufgabenstellung $\frac{dV}{dt} = 0$ für $t > 60 \text{ min}$ erfüllt wird.

Die Förderganglinie entsprechend der Aufgabenstellung hat den im Bild dargestellten Verlauf.

Die Berechnung des Absenkungspotentials von veränderlichen Förderganglinien erfolgt nach der folgenden Formel:

$$Z_{Ges.r,t} = \frac{1}{4\pi k} \sum_{i=1}^m \left(\dot{V}_{\text{real},i,t} - \dot{V}_{\text{real},i,t-\tau_i} \right) W_i \left(\frac{r^2 a}{4(t - \tau_i)} \right)$$

Bei dieser Stufenfunktion muss beachtet werden, dass die fiktive Brunnenlaufzeit gegenüber der Realzeit um die Zeit verschoben ist, zu der der entsprechende Sprung einsetzt.

Da es sich hier um einen gespannten Grundwasserleiter handelt, kann die Superposition auch direkt auf die Absenkungswerte angewendet werden:

$$s_{Ges.r,t} = \frac{1}{4\pi T} \sum_{i=1}^m \left(\dot{V}_{\text{real},i,t} - \dot{V}_{\text{real},i,t-\tau_i} \right) W_i \left(\frac{r^2 a}{4(t - \tau_i)} \right)$$

Mit

$$\sigma = \frac{r^2 S}{4T(t - \tau_i)}$$

$$W_\sigma = -\ln(1,781\sigma) + \sigma - \frac{\sigma^2}{2 \cdot 2!} + \frac{\sigma^3}{3 \cdot 3!} - \frac{\sigma^4}{4 \cdot 4!} + \frac{\sigma^5}{5 \cdot 5!} - \dots$$

können σ und W_σ berechnet werden. Dabei ist zu beachten, dass die THEIS-Funktion nur für positive Zeiten definiert ist. Für $t \leq 0$ erhält W_σ den Wert Null. Nach der Ermittlung der W_σ -Werte kann die Superposition der Absenkungsanteile erfolgen. Für den Fall der Infiltration (Wiederanstiegsphase bei $t > 60 \text{ min}$) wird eine negative Förderrate des Brunnens angesetzt. Diese führt zu negativen Absenkungen, d.h. zu einer fiktiven Erhöhung des Grundwasserspiegels während dieser Zeit.

Tabelle 8.6: Absenkung s in Abhängigkeit von der Zeit bei stufenförmiger Förderung und $r = 10\text{ m}$

Zeit [min]	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7	
10	0,0042							
20	0,0021	0,0042						
30	0,0014	0,0021	0,0042					
40	0,0010	0,0014	0,0021	0,0042				
50	0,0008	0,0010	0,0014	0,0021	0,0042			
60	0,0007	0,0008	0,0010	0,0014	0,0021	0,0042		
70	0,0006	0,0007	0,0008	0,0010	0,0014	0,0021	0,0042	
80	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0010	0,0014	0,0021	
90	0,0005	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0010	0,0014	
100	0,0004	0,0005	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0010	
Zeit [min]	$W(\sigma_1)$	$W(\sigma_2)$	$W(\sigma_3)$	$W(\sigma_4)$	$W(\sigma_5)$	$W(\sigma_6)$	$W(\sigma_7)$	
10	4,9076							
20	5,5987	4,9076						
30	6,0035	5,5987	4,9076					
40	6,2908	6,0035	5,5987	4,9076				
50	6,5137	6,2908	6,0035	5,5987	4,9076			
60	6,6959	6,5137	6,2908	6,0035	5,5987	4,9076		
70	6,8500	6,6959	6,5137	6,2908	6,0035	5,5987	4,9076	
80	6,9834	6,8500	6,6959	6,5137	6,2908	6,0035	5,5987	
90	7,1012	6,9834	6,8500	6,6959	6,5137	6,2908	6,0035	
100	7,2065	7,1012	6,9834	6,8500	6,6959	6,5137	6,2908	
Zeit [min]	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_{ges}
10	0,1953							0,195
20	0,2228	0,1953						0,418
30	0,2389	0,2228	0,1953					0,657
40	0,2503	0,2389	0,2228	0,1953				0,907
50	0,2592	0,2503	0,2389	0,2228	0,1953			1,166
60	0,2664	0,2592	0,2503	0,2389	0,2228	0,1953		1,433
70	0,2726	0,2664	0,2592	0,2503	0,2389	0,2228	-1,1716	0,339
80	0,2779	0,2726	0,2664	0,2592	0,2503	0,2389	-1,3366	0,229
90	0,2825	0,2779	0,2726	0,2664	0,2592	0,2503	-1,4332	0,176
100	0,2867	0,2825	0,2779	0,2726	0,2664	0,2592	-1,5018	0,144

Tabelle 8.7: Absenkung s in Abhängigkeit von der Zeit bei stufenförmiger Förderung und $r = 5 \text{ m}$

Zeit $[\text{min}]$	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7	
10	0,0010							
20	0,0005	0,0010						
30	0,0003	0,0005	0,0010					
40	0,0003	0,0003	0,0005	0,0010				
50	0,0002	0,0003	0,0003	0,0005	0,0010			
60	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0005	0,0010		
70	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0005	0,0010	
80	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0005	
90	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	
100	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	
Zeit $[\text{min}]$	$\mathbf{W}(\sigma_1)$	$\mathbf{W}(\sigma_2)$	$\mathbf{W}(\sigma_3)$	$\mathbf{W}(\sigma_4)$	$\mathbf{W}(\sigma_5)$	$\mathbf{W}(\sigma_6)$	$\mathbf{W}(\sigma_7)$	
10	6,2908							
20	6,9834	6,2908						
30	7,3887	6,9834	6,2908					
40	7,6763	7,3887	6,9834	6,2908				
50	7,8994	7,6763	7,3887	6,9834	6,2908			
60	8,0817	7,8994	7,6763	7,3887	6,9834	6,2908		
70	8,2358	8,0817	7,8994	7,6763	7,3887	6,9834	6,2908	
80	8,3693	8,2358	8,0817	7,8994	7,6763	7,3887	6,9834	
90	8,4871	8,3693	8,2358	8,0817	7,8994	7,6763	7,3887	
100	8,5924	8,4871	8,3693	8,2358	8,0817	7,8994	7,6763	
Zeit $[\text{min}]$	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_{ges}
10	0,2503							0,250
20	0,2779	0,2503						0,528
30	0,2940	0,2779	0,2503					0,822
40	0,3054	0,2940	0,2779	0,2503				1,128
50	0,3143	0,3054	0,2940	0,2779	0,2503			1,442
60	0,3216	0,3143	0,3054	0,2940	0,2779	0,2503		1,764
70	0,3277	0,3216	0,3143	0,3054	0,2940	0,2779	-1,5018	0,340
80	0,3330	0,3277	0,3216	0,3143	0,3054	0,2940	-1,6672	0,229
90	0,3377	0,3330	0,3277	0,3216	0,3143	0,3054	-1,7639	0,176
100	0,3419	0,3377	0,3330	0,3277	0,3216	0,3143	-1,8326	0,144

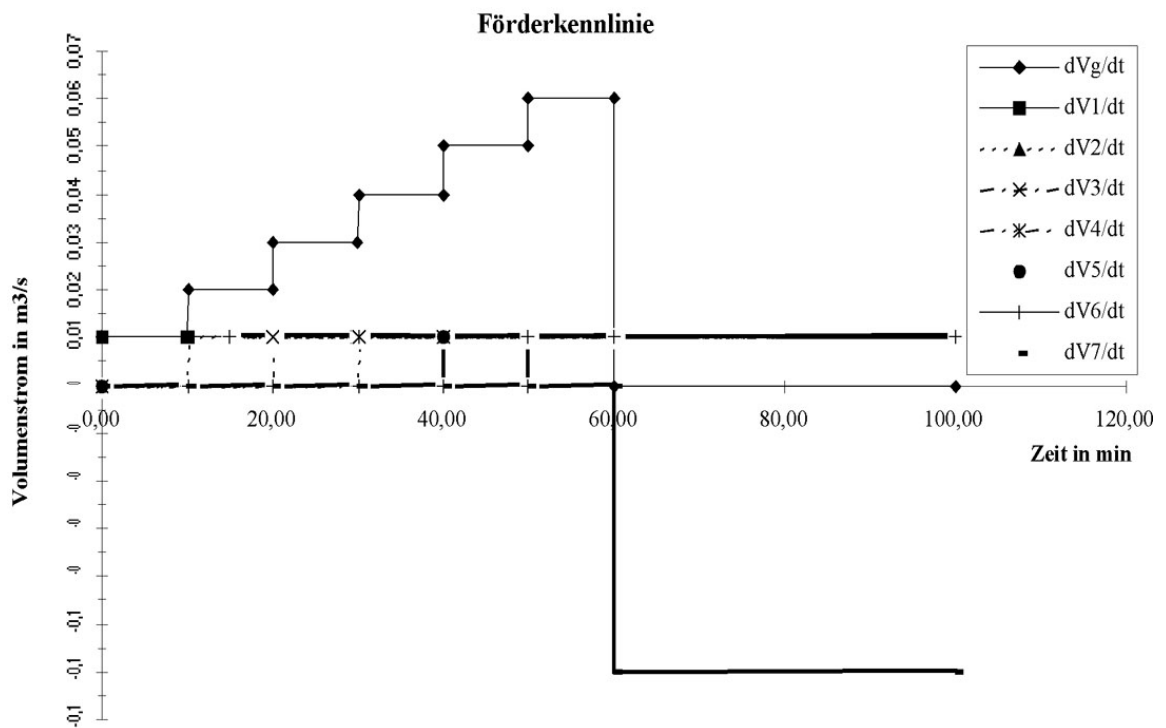


Abbildung 8.15: Förderganglinie und deren Aufteilung in einzelne Förderleistungen

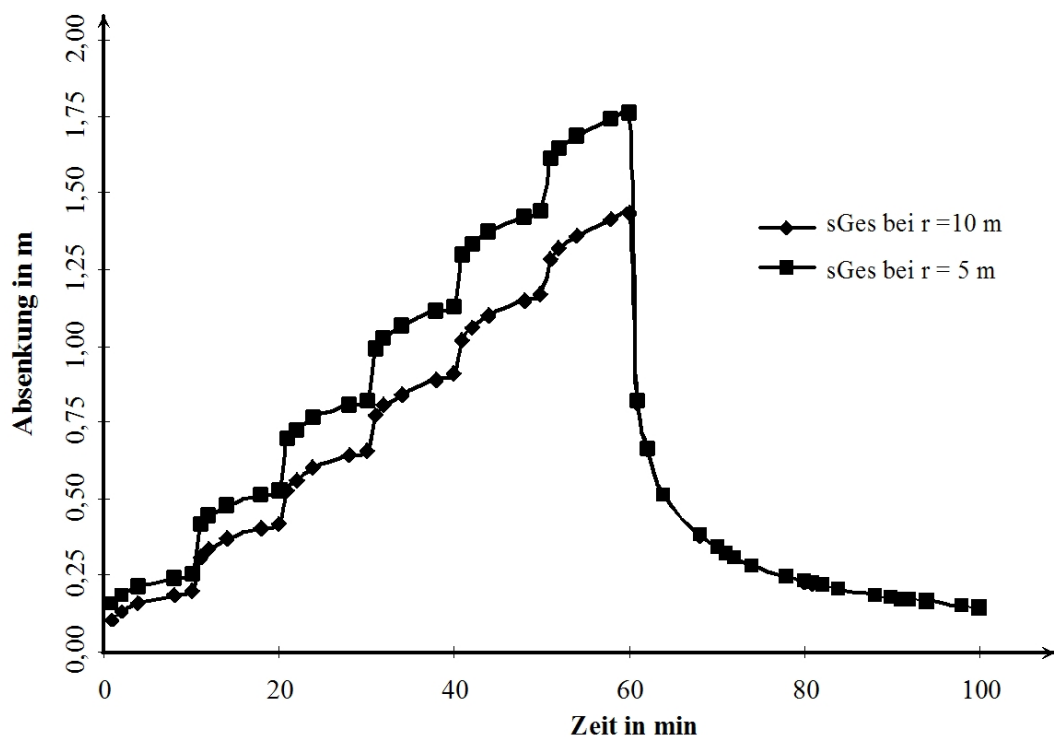


Abbildung 8.16: Absenkung in Abhängigkeit von der Zeit bei stufenförmiger Förderung

• zu Aufgabe 3 (s. S. 256)

Entsprechend der Aufgabenstellung handelt es sich um ungespannte Grundwasserströmungsverhältnisse. Die Einteilung in gespannte und ungespannte Grundwasserleiter richtet sich danach, in welchem Verhältnis der Grundwasserstand $z_{Rt=0}$ bzw. die Piezometerhöhe $h_{t=0}$ im Verhältnis zur Mächtigkeit des Grundwasserleiters steht. Die unterschiedlichen Speicherkoeffizienten sind die Folge davon. Im Zusammenhang mit der analytischen Lösung der Brunnengleichung gelten folgende Beziehungen:

Verhältnis zwischen Grundwasserstand und Mächtigkeit des GWL	$z_{Rt=0} \leq M$	$h_{t=0} > M$
Strömungsverhältnisse	ungespannt	gespannt
Durchströmte Mächtigkeit	$D = z_{Rt=0}$	$D = M$
Transmissibilität	$T = k \cdot z_{Rt=0}$	$T = k \cdot M$
Speicherkoeffizient	$S = n_0 + S_0 \cdot z_{Rt=0}$	$S = S_0 \cdot h_{t=0}$

Der Grundwasserleiter wird auf der einen Seite von einem unvollkommenen Fluss mit kolmatierter Sohle begrenzt. Auf der anderen Seite liegen drei Brunnen symmetrisch zur Baugrube, zwischen dieser und dem Fluss (siehe Abbildung 8.17). Da der unvollkommene Fluss

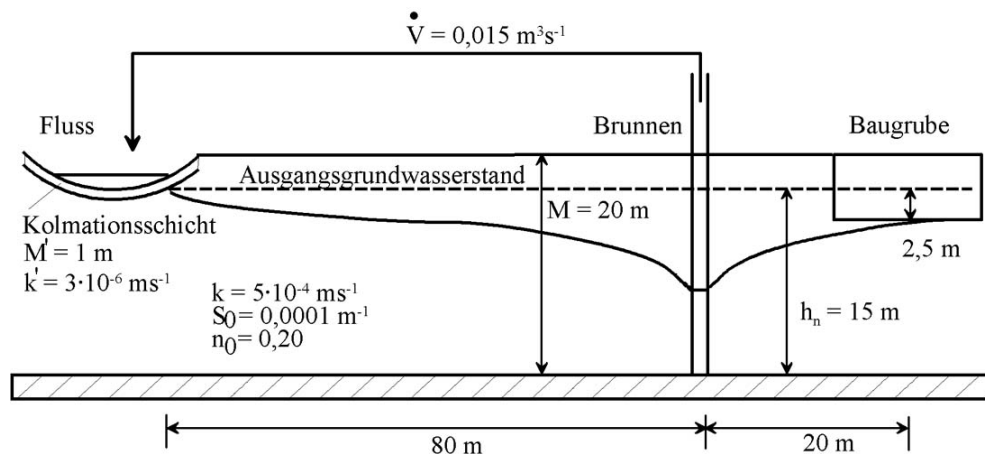


Abbildung 8.17: Grundwasserleiter mit unvollkommenem Fluss und Brunnen

mit kolmatierter Sohle als Randbedingung 3. Art wirkt, muss auf der Basis von Zusatzlängen eine virtuelle Verschiebung des Flusses erfolgen. Damit können die Wirkungen der Kolmationsschicht und die der unvollkommenen Berandung ausgeglichen werden. Danach kann durch die Einführung von virtuellen Brunnen mit der Methode der Spiegelung die Wirkung der Randbedingung 1. Art kompensiert werden (siehe Abbildung 8.18).

Die Absenkungspotentiale der sechs Brunnen (drei reale und drei virtuelle (gespiegelte)) werden dann mit der Methode der Superposition überlagert. Da hier ungespannte Grundwasserverhältnisse vorliegen, dürfen nicht die Absenkungen, sondern müssen deren Potentiale aufsummiert werden. **Berechnung der Zusatzlängen**

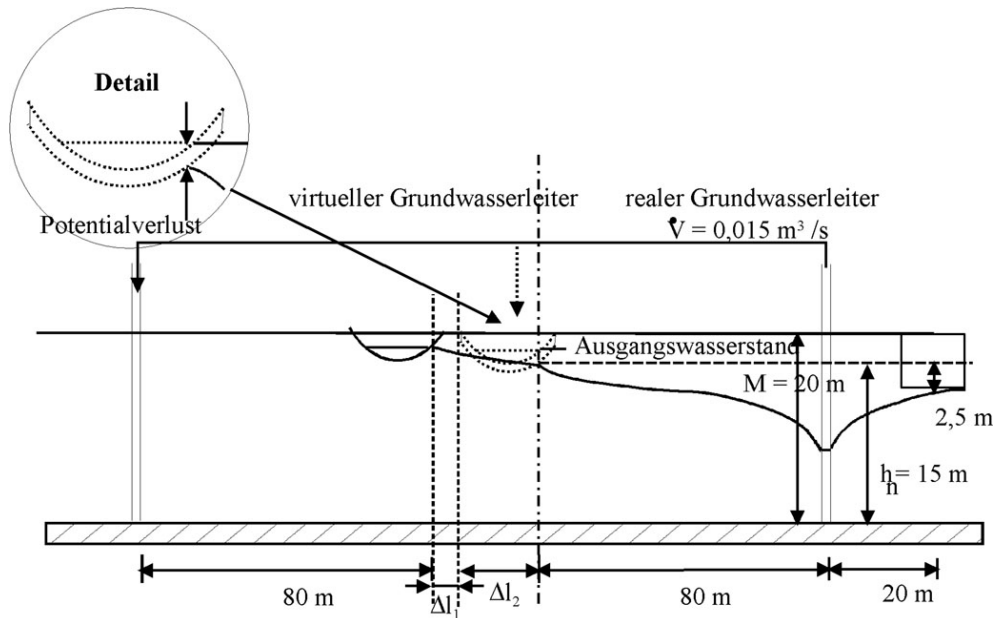


Abbildung 8.18: Detailansicht der Zusatzlängen und virtuellen Brunnen

- Unvollkommenheit

$$\begin{aligned}\Delta l_1 &= f\left(\frac{B}{D}\right) \\ &= f\left(\frac{20}{15}\right) = f(1,333)\end{aligned}$$

aus Diagramm (siehe GRÄBER, LB Systemanalyse, Abschnitt THEISSche Brunnen-gleichung)

$$\frac{\Delta l_1}{D} = 0,43$$

mit $D = z_R = 15 \text{ m}$ ergibt sich

$$\Delta l_1 = 6,45 \text{ m}$$

- Kolmation

$$\begin{aligned}\Delta l_2 &= \sqrt{\frac{k \cdot D \cdot M'}{k'}} \\ &= \sqrt{\frac{5 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 15 \text{ m} \cdot 1 \text{ m}}{3 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}} \\ \Delta l_2 &= 50 \text{ m}\end{aligned}$$

Berechnung der Absenkung

- Berechnung der Entfernungen (siehe Abbildung 8.19)

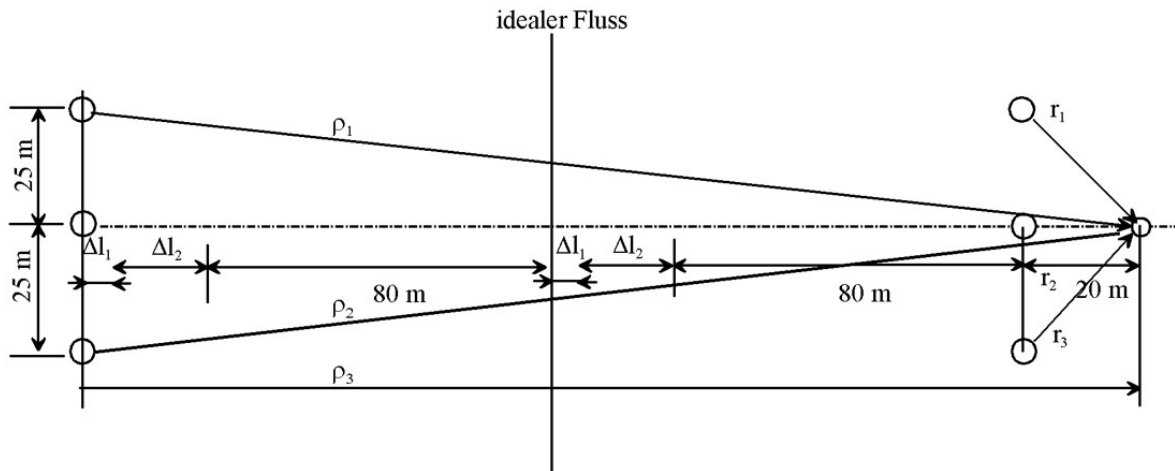


Abbildung 8.19: Schema zur Entfernungsbestimmung der realen und der virtuellen Brunnen

$$r_1^2 = (20m)^2 + (25m)^2 = 1025m^2$$

$$r_2^2 = (20m)^2 = 400m^2$$

$$r_3^2 = (20m)^2 + (25m)^2 = 1025m^2$$

$$\rho_1^2 = (2 \cdot (80m + 50m + 6,45m) + 20m)^2 + (25m)^2 = 86415,41m^2$$

$$\rho_3^2 = (2 \cdot (80m + 50m + 6,45m) + 20m)^2 = 85790,41m^2$$

$$\rho_2^2 = (2 \cdot (80m + 50m + 6,45m) + 20m)^2 + (25m)^2 = 86415,41m^2$$

- Berechnung nach der THEIS-Formel:

Mit den bekannten Formeln erhält man:

$$\sigma = \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t}$$

$$W(\sigma) = -\ln(1,781\sigma) + \sigma - \frac{\sigma^2}{2 \cdot 2!} + \frac{\sigma^3}{3 \cdot 3!} - \frac{\sigma^4}{4 \cdot 4!} + \frac{\sigma^5}{5 \cdot 5!} - \dots$$

$$Z = \frac{\dot{V}}{4\pi k} (W(\sigma r_1) + W(\sigma r_2) + W(\sigma r_3) - W(\sigma r_1) - W(\sigma r_2) - W(\sigma r_3))$$

$$s = z_{Rt=0} - \sqrt{(z_{Rt=0}^2 - 2Z)}$$

In obiger Formel kennzeichnen die positiven $W(\sigma)$ die real existierenden Förderbrunnen, die negativen dagegen die virtuellen Infiltrationsbrunnen, die durch die Spiegelung entstanden sind. Da in diesem Beispiel ungespannte Grundwasserverhältnisse vorliegen, muss die Superposition in der Potentialebene Z erfolgen. Erst dann kann auf Grund der nichtlinearen Beziehung die Rücktransformation in die Originalebene der Absenkung erfolgen.

Entfernung	σ	$W(\sigma)$	Z	s
Brunnen 1	0,0079	4,2705		
Brunnen 2	0,0031	5,2067		
Brunnen 3	0,0079	4,2705		
virt. Brunnen 1	0,6668	-0,3982		
virt. Brunnen 2	0,6620	-0,4019		
virt. Brunnen 3	0,6668	-0,3982		
	Summe:	12,5494	29,9595	2,15

Nach 10 Tagen ist die Sollabsenkung von 2,50m noch nicht erreicht. Es wurde nur eine Absenkung von 2,15m erzielt.

In diesem Beispiel konnte die Näherung nach JACOB&COOPER nicht angewendet werden, da die Bedingung $\sigma \ll 1$ nicht erfüllt ist. An den Zahlenwerten für $\sigma(s)$ sieht man auch, dass die virtuellen Brunnen unter den gegebenen Bedingungen nur einen kleinen Einfluss ($< 10\%$) auf die Gesamtabsenkung haben. Dies liegt vor allem auch an der großen Entfernung der realen Brunnen und der Baugrube vom Fluss. Man beachte immer, dass σ quadratisch mit der Entfernung zunimmt, dafür aber $W(\sigma)$ abnimmt und damit auch die Beeinflussung.

• zu Aufgabe 4 (s. S. 256)

Auf Grund der Spundwand reduziert sich das Modell auf einen Grundwasserleiter, der einseitig durch eine Barriere begrenzt ist (siehe Abbildung 8.20). Barrieren werden mittels der Methode der Spiegelung, wobei hier der Förderbrunnen in einen Förderbrunnen gespiegelt wird, berücksichtigt. Das Berechnungsmodell ergibt sich damit zu:

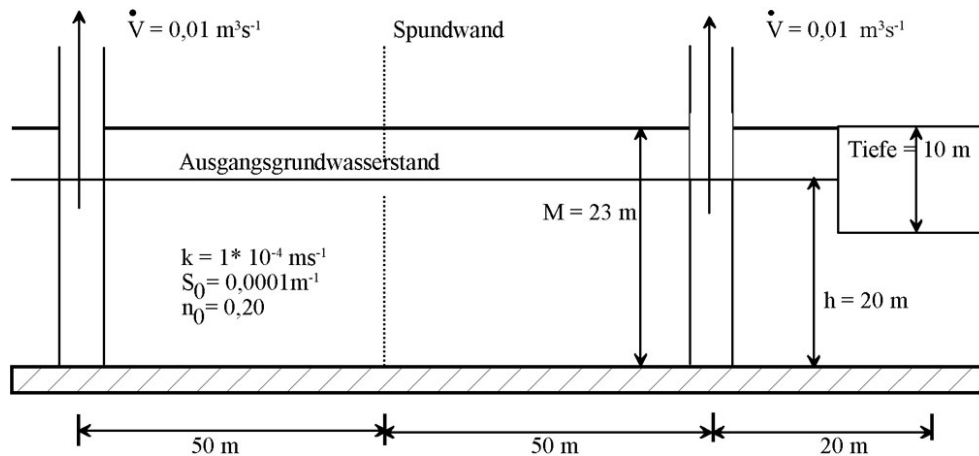


Abbildung 8.20: Lage der virtuellen Brunnen bei der Begrenzung durch eine Barriere

- **Randbedingung:** Barriere \Rightarrow Spiegelung in einen zweiten Förderbrunnen
- **Grundwasserleitertyp:** ungespannt \Rightarrow es ist nur eine Überlagerung der Potentiale Z möglich. Nach der Überlagerung ist dann die Absenkung berechenbar.
- **Grundwasserleiterparameter:**

$$S = n_0; \quad T = k \cdot h_n$$

Berechnung des Potentials Z_1 des realen Brunnen

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t} \\ &= \frac{20^2 \text{ m}^2 \cdot 0,20}{4 \cdot 20 \text{ m} \cdot 0,0001 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 7 \cdot 86.400 \text{ s}} \\ \sigma_1 &= 0,0165 \end{aligned}$$

Da hier $\sigma < 0,03$ gilt, kann die Näherung nach JACOB&COOPER verwendet werden:

$$W(\sigma_1) \approx -\ln(C\sigma) \approx 3,6$$

$$Z_1 = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot k} W(\sigma_1) = \frac{0,01s \cdot m^{-3} \cdot 3,6}{4 \cdot \pi \cdot 0,0001m \cdot s^{-1}}$$

$$Z_1 = 28,66m^2$$

Berechnung des Potentials Z_2 des virtuellen Brunnens

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \frac{\rho^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t} \\ &= \frac{120^2 m^2 \cdot 0,20}{4 \cdot 20m \cdot 0,0001m \cdot s^{-1} \cdot 7 \cdot 86400s}\end{aligned}$$

$$\sigma_2 = 0,595$$

Hier ist $\sigma > 0,03$ und man muss mit der THEIS-Formel rechnen:

$$W(\sigma_2) = -\ln(1,781\sigma) + \sigma - \frac{\sigma^2}{2 \cdot 2!} + \frac{\sigma^3}{3 \cdot 3!} - \dots$$

$$W(\sigma_2) \approx 0,454$$

$$\begin{aligned}Z_2 &= \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot k} W(\sigma_2) \\ &= \frac{0,01s \cdot m^{-3} \cdot 0,454}{4 \cdot \pi \cdot 0,0001m \cdot s^{-1}}\end{aligned}$$

$$Z_2 = 3,58m^2$$

Überlagerung

Die Superposition muss in der Potentialebene durchgeführt werden:

$$Z = Z_1 + Z_2$$

$$Z = 32,24m^2$$

Rücktransformation

Da hier ungespannte Verhältnisse vorliegen, muss die nichtlineare Rücktransformation aus

der Potentialebene in die Originalebene (Wasserstand, bzw. Absenkung) benutzt werden:

$$s = z_{Rt=0} - \sqrt{z_{Rt=0}^2 - 2 \cdot Z}$$

$$s = 20m - \sqrt{400m^2 - 64,48m^2} = 20m - 18,31m$$

$$s = \underline{1,68m}$$

Damit ist die vorgesehene Absenkung von $10,5m$ nicht erreicht!

• zu Aufgabe 5 (s. S. 256)

Da gespannte Grundwasserverhältnisse ($h_n > M$) vorliegen, gilt die THEISSche Brunnenformel und die Absenkung s ergibt sich zu:

$$s = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot k} W_{(\sigma)}$$

Die abgepumpte Wassermenge ist gleich dem zeitlichen Integral des Volumenstroms:

$$V = \int_{t=0}^{t_{\max}} \dot{V} dt \approx \dot{V} t_{\max} = \frac{s \cdot 4 \cdot \pi \cdot T \cdot t_{\max}}{W_{(\sigma)}}$$

Aus den in der Aufgabenstellung angebotenen Kurvenwerten (siehe Abbildung 8.4 auf S. 258) wird als Beispiel der Punkt $r = 10m$ und der Zeitpunkt $t_{max} = 120min$ mit der Absenkung von $s = 0,90m$ gewählt. Für S und T wurde auf Grund der gespannten Grundwasserverhältnisse

$$S = S_0 \cdot M; \quad T = k \cdot M$$

gewählt. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t_{\max}} \\ &= \frac{100m^2 \cdot 0,0001m^{-1} \cdot 10m}{4 \cdot 0,001m \cdot s^{-1} \cdot 10m \cdot 120 \cdot 60s} \\ \sigma &= 0,00035 \end{aligned}$$

Aus Tabelle $W(\sigma)$ (siehe Tabelle 8.1, Seite 263) kann abgelesen werden:

$$W_{(\sigma)} = 7,38$$

Daraus ergibt sich ein Volumenstrom von:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{s \cdot 4 \cdot \pi \cdot T}{W_{(\sigma)}} = \frac{0,90m \cdot 4 \cdot \pi \cdot 0,01m^2 \cdot s^{-1}}{7,38} \\ \dot{V} &= 0,0153 \frac{m^3}{s} \end{aligned}$$

Die Kurvenwerte wurden mit einem Wert von $\dot{V}_{exakt} = 0,015 \frac{m^3}{s}$ berechnet!

$$V = \dot{V} \cdot t_{\max} = 110,28m^3$$

Das abgepumpte Volumen beträgt damit $110,28m^3$

• zu Aufgabe 6 (s. S. 256)

Hier liegen ungespannte Strömungsverhältnisse ($h_n < M$) in dem Gebiet vor. Der Fluss wird in der THEISSchen Brunnenformel durch eine Spiegelung des Förderbrunnens in einen Infiltrationsbrunnen berücksichtigt. Als Spiegelachse wird das rechte Ufer des Flusses angenommen. Da der Fluss als ideal angesehen wird, muss keine Verschiebung um Zusatzlängen berechnet werden. Da die Superposition nur bei linearen Systemen angewendet werden darf, muss hier die Superposition mit der Potentialdifferenz Z erfolgen und erst danach darf die Rücktransformation durchgeführt werden.

Entsprechend der THEISSchen Brunnenformel gilt:

$$Z_{r,t} = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot W(\sigma); \quad \text{mit} \quad \sigma = \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t}$$

Durch die Anordnung des Spiegelbrunnens und der Superposition erhält man:

$$Z_{P,t} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot k} \left(\dot{V} \cdot W(\sigma_r) + (-\dot{V}) \cdot W(\sigma_\rho) \right)$$

wobei gilt:

$$\sigma_r = \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t}$$

$$\sigma_\rho = \frac{\rho^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t}$$

der Abstand zwischen Förderbrunnen $\mathbf{Br}_{\text{real}}$ und dem GWBR \mathbf{P} wird mit r bezeichnet und der zwischen Spiegelbrunnen $\mathbf{Br}_{\text{virt}}$ und GWBR \mathbf{P} mit ρ (siehe Abbildung 8.21). Diese Entfernungen können mittels des Satzes von PYTHAGORAS aus den Koordinaten des GWBR \mathbf{P} und denen der Brunnen berechnet werden:

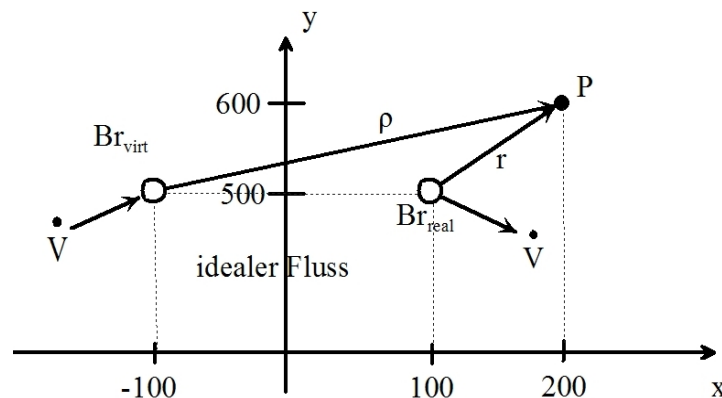


Abbildung 8.21: Lage des virtuellen Brunnens bei einem idealen Fluss als Randbedingung

a. Beachtet man die Näherung der Funktion $W(\sigma)$ nach COOPER&JACOB durch die Logarithmusfunktion für sehr große Zeiten, so erhält man:

$$W(\sigma) \approx -\ln(C \cdot \sigma)$$

$$C \approx 1,78$$

$$Z_{P,t \rightarrow \infty} = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot k} \left(-\ln \left(\frac{1,78 \cdot r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t} \right) + \ln \left(\frac{1,78 \cdot \rho^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t} \right) \right)$$

Nach den Logarithmengesetzen

$$\ln x - \ln y = \ln \frac{x}{y}$$

$$\ln x^n = n \cdot \ln x$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} Z_{P,t \rightarrow \infty} &= \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot k} \left(2 \ln \frac{\rho}{r} \right) = \frac{\dot{V}}{2 \cdot \pi \cdot k} \left(\ln \frac{\rho}{r} \right) \\ Z_{P,t \rightarrow \infty} &= \frac{0,025 m^3 \cdot s^{-1}}{2 \cdot \pi \cdot 10^{-3} m \cdot s^{-1}} \cdot \left(\ln \frac{\sqrt{100^2 + 300^2}}{\sqrt{100^2 + 100^2}} \right) \\ &= \frac{0,025 m^3 \cdot s^{-1}}{2 \cdot \pi \cdot 10^{-3} m \cdot s^{-1}} \cdot \left(\ln \frac{316,23}{141,42} \right) \\ &= \frac{0,025 m^3 \cdot s^{-1} \cdot 0,805}{2 \cdot \pi \cdot 10^{-3} m \cdot s^{-1}} \\ Z_{P,t \rightarrow \infty} &= 3,202 m^2 \end{aligned}$$

Aus der Beziehung für ungespannte Grundwasserverhältnisse folgt die Absenkung mit:

$$\begin{aligned} s &= z_{Rt=0} - \sqrt{z_{Rt=0}^2 - 2 \cdot Z_{r,t}} \\ s_{P,t \rightarrow \infty} &= 15 m - \sqrt{225 m^2 - 2 \cdot 3,202 m^2} \\ s_{P,t \rightarrow \infty} &\approx 0,22 m \end{aligned}$$

1. b. Hier geht man wieder von der Potentialgleichung aus, ersetzt aber $W(\sigma)$ nicht nur durch das logarithmische Glied der Reihenentwicklung, sondern berücksichtigt

auch noch das zweite, das lineare Glied σ . Die Glieder höherer Ordnung können vernachlässigt werden, da σ in der Nähe des stationären Zustandes auf alle Fälle wesentlich kleiner als eins ist ($s \ll 1$).

Die Potentialgleichung lautet dann:

$$Z_{P,t} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot \left(\dot{V} \cdot W(\sigma_r) + (-\dot{V}) W(\sigma_\rho) \right)$$

Dabei gilt:

$$\sigma_r = \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t}$$

$$\sigma_\rho = \frac{\rho^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t}$$

$$W(\sigma) = -\ln(1,781\sigma) + \sigma - \frac{\sigma^2}{2 \cdot 2!} + \dots$$

Damit erhält man:

$$Z_{P,t} = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot k} \left(-\ln \left(\frac{1,78 \cdot r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t} \right) + \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t} + \ln \left(\frac{1,78 \cdot \rho^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t} \right) - \frac{\rho^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t} \right)$$

$$Z_{P,t} = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot k} \left(\ln \left(\frac{\rho^2}{r^2} \right) + \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t} - \frac{\rho^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t} \right)$$

$$= \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot k} \left(\ln \left(\frac{\rho^2}{r^2} \right) + \frac{S}{4 \cdot T \cdot t} (r^2 - \rho^2) \right)$$

An dieser Gleichung sieht man, dass eine Zeitabhängigkeit nur im zweiten Summanden auftritt.

Laut Aufgabenstellung soll diese Funktionalität proportional um ein Tausendstel kleiner sein als der zeitunabhängige Teil.

Aus diesem Grund muss gelten:

$$\ln \left(\frac{\rho^2}{r^2} \right) \cdot 0,001 \geq \frac{S}{4 \cdot T \cdot t} |(r^2 - \rho^2)|$$

Aufgelöst nach t :

$$t \geq \frac{S}{4 \cdot T \cdot \ln \left(\frac{\rho^2}{r^2} \right) \cdot 0,001} |(r^2 - \rho^2)|$$

und unter Beachtung, dass $\rho > r$ ist, gilt:

$$\begin{aligned}
 t &\geq \frac{S}{8 \cdot T \cdot \ln\left(\frac{\rho^2}{r^2}\right) \cdot 0,001} |(r^2 - \rho^2)| \\
 t &\geq \frac{0,25}{8 \cdot 15m \cdot 0,001m \cdot s^{-1} \cdot 2,055 \cdot 0,001} (1220000 - 20000) \\
 &= \frac{0,25 \cdot 1200000}{8 \cdot 15m \cdot 0,001m \cdot s^{-1} \cdot 2,055 \cdot 0,001} \\
 &\geq 1216545012s \\
 t &\gtrapprox 38,5a
 \end{aligned}$$

Beachtet man das Ergebnis von Aufgabe a) ($s = 55,6cm$), so ist die Forderung nach einer minimalen relativen Änderung von $\varepsilon \leq 0,001$ übertrieben. Lässt man eine Änderung von $\varepsilon \leq 1\%$ zu, so ist dieser Zustand bereits nach ca. 3,85 Jahren, d.h. nach 3 Jahren und 10 Monaten erreicht. In den folgenden 35 Jahren würde sich der Grundwasserspiegel nur um $0,5cm$ verringern.

• zu Aufgabe 7 (s. S. 256)

Diese Aufgabe kann mit der Brunnengleichung nach THEIS gelöst werden. Da der stationäre Endzustand gefragt ist, kann mit sehr guter Näherung die vereinfachte Lösung von JACOB&COOPER eingesetzt werden. Der Hangzufluss kann dabei näherungsweise als Infiltrationsbrunnen angesetzt werden. Beachtet man in der folgenden Rechnung den Anteil am Absenkungspotential, der durch diesen hervorgerufen wird, so kann man feststellen, dass dieser auch vernachlässigt werden kann.

Auf Grund der ungespannten Verhältnisse muss die Superposition im Potentialraum erfolgen. Erst danach kann die Rücktransformation in die Wasserstands-/Absenkungsebene erfolgen.

a. Entsprechend der Aufgabenstellung handelt es sich hier um eine Zweibrunnenanlage, die an der Flussrandbedingung zu spiegeln ist. Der Hangzufluss soll laut Aufgabenstellung 50m auf der flussabgewandten Seite des GWBR angreifen. Der virtuelle Spiegelbrunnen des als Infiltrationsbrunnen angenommenen Hangzuflusses ist dann 350m vom GWBR entfernt. Rückt der Hangzufluss noch weiter vom Pegel weg, so wird der Einfluss kleiner. Das Potential ergibt sich zu:

$$Z_{(r,t \rightarrow \infty)} = \frac{1}{4\pi k} \left(\dot{V}_{Br} (W(\sigma_{rBr}) - W(\sigma_{\rho Br})) - \dot{V}_{Hang} (W(\sigma_{rHang}) - W(\sigma_{\rho Hang})) \right)$$

Mit der Näherung nach JACOB&COOPER erhält man:

$$\begin{aligned} W(\sigma) &\approx \ln \left(\frac{2,25 \cdot T \cdot t}{r^2 \cdot S} \right) \approx -\ln \left(\frac{1,78 \cdot S \cdot r^2}{4 \cdot t \cdot T} \right) \\ Z_{(r,t \rightarrow \infty)} &= \frac{1}{4\pi k} \left(2\dot{V}_{Br} \ln \left(\frac{\rho_{Br}}{r_{Br}} \right) - 2\dot{V}_{Hang} \ln \left(\frac{\rho_{Hang}}{r_{Hang}} \right) \right) \\ &= \frac{2}{4\pi k} \left(50 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot s^{-1} \ln \left(\frac{250m}{50m} \right) \right. \\ &\quad \left. - 0,001 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot s^{-1} \cdot m^{-2} \cdot 15m \cdot 100m \cdot \ln \left(\frac{350m}{50m} \right) \right) \\ &= \frac{2}{4\pi k} (50 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot s^{-1} \cdot 1,6049 - 0,001 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot s^{-1} \cdot m^{-2} \\ &\quad \cdot 15m \cdot 100m \cdot 1,9459) \\ &= \frac{2 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot s^{-1}}{4\pi k} (80,47 - 2,9189) \\ Z_{(r,t \rightarrow \infty)} &= 12,34 m^2 \end{aligned}$$

Berechnet man das Potential ohne Hangzufluss, so erhält man:

$$\begin{aligned} Z_{(r,t \rightarrow \infty, \text{ohne Hang})} &= \frac{2 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot s^{-1}}{4\pi k} (80,47) \\ Z_{(r,t \rightarrow \infty, \text{ohne Hang})} &= 12,81 m^2 \end{aligned}$$

Für den hier vorliegenden Fall des ungespannten Grundwasserleiters muss dieser Potentialwert noch in die Absenkung s umgerechnet werden.

	mit Hangzufluss	ohne Hangzufluss
Wasserstand	$z_R = \sqrt{z_{R0}^2 - 2 \cdot Z}$ $= \sqrt{(225 - 24,68)m}$ $z_R = 14,15m$	$z_R = \sqrt{z_{R0}^2 - 2 \cdot Z}$ $= \sqrt{(225 - 25,62)m}$ $z_R = 14,12m$
Absenkung	$s = z_{R0} - z_R$ $= 15m - 14,15m$ $s = 0,85m$	$s = z_{R0} - z_R$ $= 15m - 14,12m$ $s = 0,88m$

Daran sieht man, dass der Hangzufluss nur eine untergeordnete Bedeutung bei diesem hydraulischen Schema hat.

b. Die Lösung der Aufgabenstellung 7b) erfolgt analog zu a). Der Unterschied besteht nur in der Berücksichtigung der Zusatzlängen, die auf Grund der Kolmationsschicht und der Unvollkommenheit des Flusses zu berücksichtigen sind. Da hier ungespannte Grundwasserhältnisse vorliegen, ergibt sich die durchströmte Mächtigkeit D zu:

$$D = z_{R0} = 15m$$

Für die Unvollkommenheit ergibt sich eine Zusatzlänge aus dem Diagramm von

$$\frac{B}{D} = \frac{20m}{15m} = 1,33 \Rightarrow \frac{\Delta L_1}{D} = 0,43$$

$$\Delta L_1 = 6,45m$$

Für die Zusatzlänge, welche die Kolmationsschicht berücksichtigen soll, ergibt sich:

$$\Delta L_2 = \sqrt{\frac{k \cdot D \cdot M_{Kolm}}{k_{Kolm}}} = \sqrt{\frac{10^{-3}m \cdot s^{-1} \cdot 15m \cdot 1m}{5 \cdot 10^{-5}m \cdot s^{-1}}} = \sqrt{300m^2} = 17,32m$$

Damit wird das Absenkungspotential berechnet zu:

$$Z_{(r,t \rightarrow \infty)} = \frac{1}{4\pi k} \left(\dot{V}_{Br} (W(\sigma_{r_{Br}}) - W(\sigma_{\rho_{Br}})) - \dot{V}_{Hang} (W(\sigma_{r_{Hang}}) - W(\sigma_{\rho_{Hang}})) \right)$$

Mit der Näherung nach JACOB&COOPER erhält man:

$$\begin{aligned}
 W(\sigma) &\approx \ln \left(\frac{2,25 \cdot T \cdot t}{r^2 \cdot S} \right) \approx -\ln \left(\frac{1,78 \cdot S \cdot r^2}{4 \cdot t \cdot T} \right) = -\ln(1,78 \cdot \sigma_r) \\
 Z_{(r,t \rightarrow \infty)} &= \frac{1}{4\pi k} \left(2\dot{V}_{Br} \ln \left(\frac{\rho_{Br}}{r_{Br}} \right) - 2\dot{V}_{Hang} \ln \left(\frac{\rho_{Hang}}{r_{Hang}} \right) \right) \\
 &= \frac{2}{4\pi k} \left(50 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot s^{-1} \ln \left(\frac{250 + (2 \cdot 23,77)m}{50m} \right) \right) \\
 &\quad - \frac{2}{4\pi k} \left(0,001 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot s^{-1} \cdot m^{-2} \cdot 15m \cdot 100m \cdot \ln \left(\frac{350 + (2 \cdot 23,77)m}{50m} \right) \right) \\
 &= \frac{2}{4\pi k} (50 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot s^{-1} \cdot 1,7835 - 0,001 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot s^{-1} \cdot m^{-2} \\
 &\quad \cdot 15m \cdot 100m \cdot 2,07327) \\
 &= \frac{2 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot s^{-1}}{4\pi k} (89,175 - 3,11) \\
 Z_{(r,t \rightarrow \infty)} &= \underline{13,70 m^2}
 \end{aligned}$$

Die Zusatzlängen müssen doppelt berücksichtigt werden, da die Spiegelung an dem virtuellen Flusssufer erfolgt, welches dem Pegel zugewandt ist, d.h. es erfolgt erst die virtuelle Verschiebung und danach die Spiegelung.

Berechnet man das Potential ohne Hangzufluss, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 Z_{(r,t \rightarrow \infty, \text{ohne Hang})} &= \frac{2 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot s^{-1}}{4\pi k} (89,175) \\
 Z_{(r,t \rightarrow \infty, \text{ohne Hang})} &= 14,19 m^2
 \end{aligned}$$

Für den hier vorliegenden Fall des ungespannten Grundwasserleiters muss dieser Potentialwert noch in die Absenkung s umgerechnet werden.

	Wasserstand	Absenkung
mit Hangzufluss	$z_R = \sqrt{z_{R0}^2 - 2 \cdot Z}$ $= \sqrt{(225 - 24,68)}m$	$s = z_{R0} - z_R$ $= 15m - 14,15m$
idealer Fluss	$z_R = 14,15m$	$s = 0,85m$
ohne Hangzufluss	$z_R = \sqrt{z_{R0}^2 - 2 \cdot Z}$ $= \sqrt{(225 - 25,62)}m$	$s = z_{R0} - z_R$ $= 15m - 14,12m$
idealer Fluss	$z_R = 14,12m$	$s = 0,88m$
mit Hangzufluss	$z_R = \sqrt{z_{R0}^2 - 2 \cdot Z}$ $= \sqrt{(225 - 27,40)}m$	$s = z_{R0} - z_R$ $= 15m - 14,06m$
realer Fluss	$z_R = 14,06m$	$s = 0,94m$
ohne Hangzufluss	$z_R = \sqrt{z_{R0}^2 - 2 \cdot Z}$ $= \sqrt{(225 - 28,39)}m$	$s = z_{R0} - z_R$ $= 15m - 14,09m$
realer Fluss	$z_R = 14,02m$	$s = 0,91m$

Die grafische Darstellung in Abbildung 8.22 veranschaulicht die Ergebnisse.

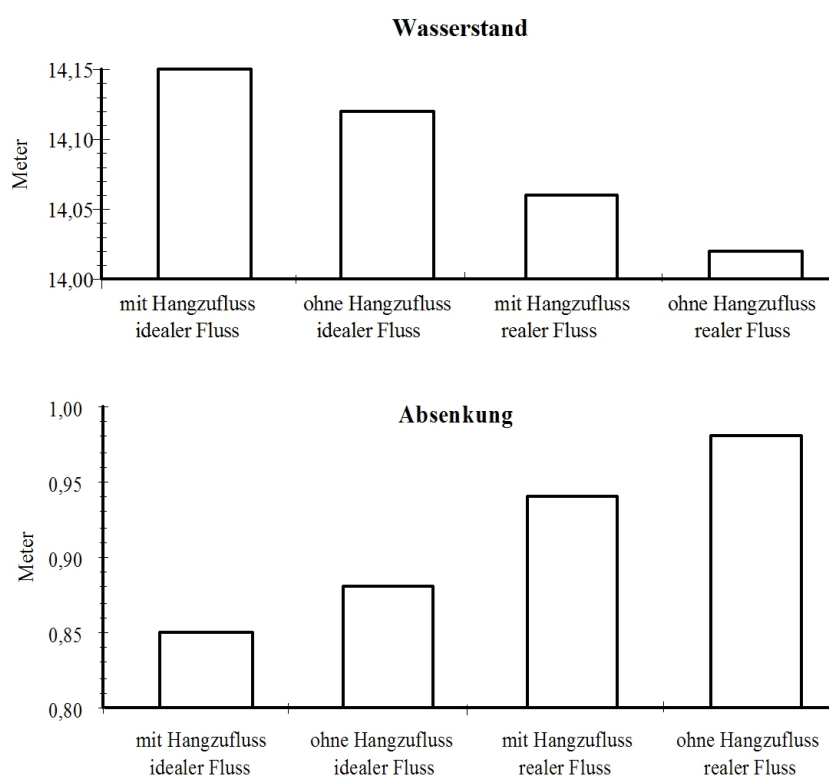


Abbildung 8.22: Abhängigkeit des Grundwasserstandes und der Absenkung vom Hangzufluss

• zu Aufgabe 8 (s. S. 256)

In die gegebene Funktion, die Absenkung für gespannte Grundwasserleiterverhältnisse mit der Näherung nach JACOB&COOPER, setzt man die Messwerte s_1 und s_2 mit den Messzeitpunkten t_1 und t_2 ein:

$$s_1 = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot T} \ln \left(\frac{2,25 \cdot T \cdot t_1}{r^2 \cdot S} \right)$$

$$s_2 = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot T} \ln \left(\frac{2,25 \cdot T \cdot t_2}{r^2 \cdot S} \right)$$

Bildet man nun die Differenz zwischen den beiden Absenkungen, so erhält man:

$$s_2 - s_1 = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot T} \left(\ln \left(\frac{2,25 \cdot T \cdot t_2}{r^2 \cdot S} \right) - \ln \left(\frac{2,25 \cdot T \cdot t_1}{r^2 \cdot S} \right) \right)$$

$$\Delta s = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot T} \ln \left(\frac{t_2}{t_1} \right)$$

Laut Aufgabenstellung beträgt das Verhältnis t_2 zu t_1 :

$$\frac{t_2}{t_1} = 10$$

$$\Delta s = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot T} \ln(10)$$

$$\Delta s \approx \frac{\dot{V} \cdot 2,3}{4 \cdot \pi \cdot T}$$

Aus der gegebenen Formel erkennt man, dass gespannte Grundwasserverhältnisse vorliegen müssen, da s und $W(\sigma) \approx -\ln(C\sigma)$ linear zusammenhängen. Bei ungespannten Grundwasserverhältnissen lautet die Gleichung unter den gegebenen Bedingungen (Näherung nach JACOB&COOPER):

$$s = z_{Rn} - \sqrt{z_{Rn}^2 - \frac{\dot{V}}{2 \cdot \pi \cdot k} \ln \left(\frac{2,25 \cdot T \cdot t}{r^2 \cdot S} \right)}$$

Unter Beachtung der gespannten Grundwasserverhältnisse ergibt sich $T = k \cdot M$, bzw. für den k -Wert:

$$k = \frac{\dot{V} \cdot 2,3}{4 \cdot \pi \cdot M \cdot \Delta s}$$

Man erkennt, dass diese Formel zur Bestimmung des k -Wertes unabhängig von der Entfernung zwischen Brunnen und Beobachtungsrohr ist.

Diese Formel gilt aber nur für gespannte Grundwasserleiterverhältnisse und für Bereiche, in denen die Näherung nach JACOB&COOPER entsprechend kleine Fehler liefert. Wie bei GRÄBER (LB Systemanalyse) gezeigt, gilt für Zeiten

$$t > 8,33 \cdot r^2 \cdot \frac{S}{T}$$

ein Fehler der Näherung nach JACOB&COOPER von kleiner 1%.

• zu Aufgabe 9 (s. S. 256)

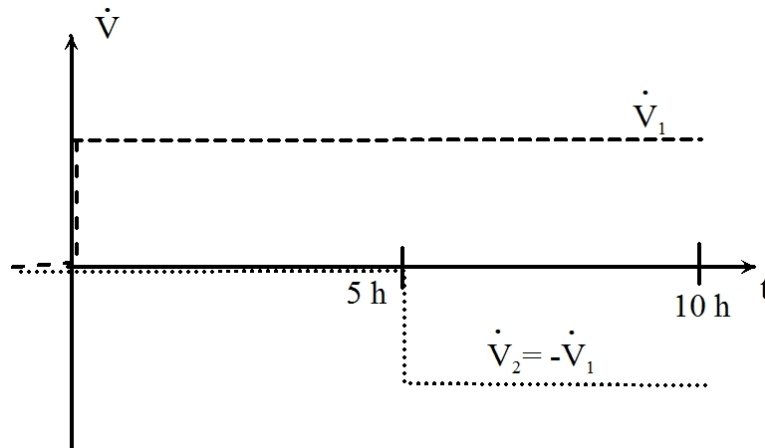


Abbildung 8.23: GWBR mit Förderintervall

Gegeben sind:

$$h_{t=0} = 10m$$

$$M = 15m$$

$$k = 0,0001m \cdot s^{-1} = 0,36m \cdot h^{-1}$$

$$S_0 = 0,0001m^{-1}$$

$$n_0 = 0,25$$

$$\dot{V} = 0,2m^3 \cdot s^{-1}$$

 Zu berechnen ist die Absenkung im GWBR für den Zeitpunkt $t = 10h$

$$z_{Rn} = h_n = 10m; \quad z_R < M = 15m \implies \text{ungespannter GWL}$$

$$T = k \cdot z_{Rt=0} = 0,0001 \cdot 10 = 0,001m^2 \cdot s^{-1}$$

$$S = n_0 + S_0 \cdot z_{Rt=0} = 0,25 + 0,0001 \cdot 10 = 0,251$$

$$s_{ungesp} = z_{Rt=0} - z_R = z_{Rn} - \sqrt{z_{Rn}^2 - 2Z}$$

$$Z_{\dot{V}_2} = \frac{\dot{V}_2}{4 \cdot \pi \cdot k} W(\sigma_{\dot{V}_2}) \quad \dot{V}_2 = -0,2m^3 \cdot s^{-1}$$

$$\sigma_{\dot{V}_2} = \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot (t - \tau)} \quad \begin{array}{l} t = 10h \rightarrow \text{reale Zeit} \\ \tau = 5h \rightarrow \text{Startzeit} \end{array}$$

$$\sigma_{\dot{V}_2} = \frac{25^2 \cdot 0,251}{4 \cdot 0,001 \cdot (10 - 5) \cdot 3600} = 2,18$$

$$W(2,18) = W(2) - [W(2) - W(3)] \cdot 0,18$$

$$W(\sigma) = 0,0432$$

$$Z_{\dot{V}_2} = \frac{-0,2 \cdot 0,0432}{4 \cdot \pi \cdot 0,0001} = -6,9m^2$$

$$Z = \frac{\dot{V}_1}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot W(\sigma_{\dot{V}_1})$$

$$\dot{V}_1 = 0,2 \frac{m^3}{s} = 720 \frac{m^3}{h}$$

$$\sigma = \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t}; \quad t = 5h; \quad r = 25m; \quad S = n_0 + S_0 \cdot h_n$$

$$W(\sigma_{\dot{V}_1}) = -\ln(1,781 \cdot \sigma) + \sigma - \frac{\sigma^2}{2 \cdot 2!} + \frac{\sigma^3}{3 \cdot 3!} - \frac{\sigma^4}{4 \cdot 4!} + \dots$$

$$T = k \cdot h_n = 3,6 \frac{m^2}{h}$$

$$\sigma_{\dot{V}_1} = \frac{25^2 \cdot 0,251}{4 \cdot 3,6 \cdot 10} = 1,09$$

$$W(\sigma_{\dot{V}_1}) \approx 0,20 \quad \text{siehe Tabelle 8.1, S. 263}$$

$$\begin{aligned} Z_{\dot{V}_1} &= \frac{\dot{V}_1}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot W(\sigma_{\dot{V}_1}) = \frac{0,2 \cdot 0,2}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-4}} \\ &= \frac{0,00318}{10^{-4}} \approx 31,8m^2 \end{aligned}$$

$$Z = Z_{\dot{V}_1} + Z_{\dot{V}_2} = 31,8 - 6,9 = 24,9m^2$$

$$s = z_{R_n} - \sqrt{z_{R_n}^2 - 2Z} = 10 - \sqrt{100 - 49,8} = 10 - 7,09$$

$$s = 2,91m$$

Die Absenkung im GWBR beträgt 2,91m.

zu Aufgabe 10 (s. S. 256)

Gegeben sind:

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 = 25 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1} = 0,025 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$k = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$D = h_n = 15 \text{ m}$$

$$S = 0,25$$

$$k' = 1 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$M' = 1 \text{ m}$$

$$B = 25 \text{ m}$$

$$r_1 = 250 \text{ m}$$

$$r_2 = 500 \text{ m}$$

$$r_P = 375 \text{ m}$$

Zu berechnen ist die Absenkung am Punkt P nach einem Jahr.

\Rightarrow Es liegt eine Randbedingung 3. Art vor (siehe Abbildung 8.24); Verschiebung um ΔL_1 ; ΔL_2

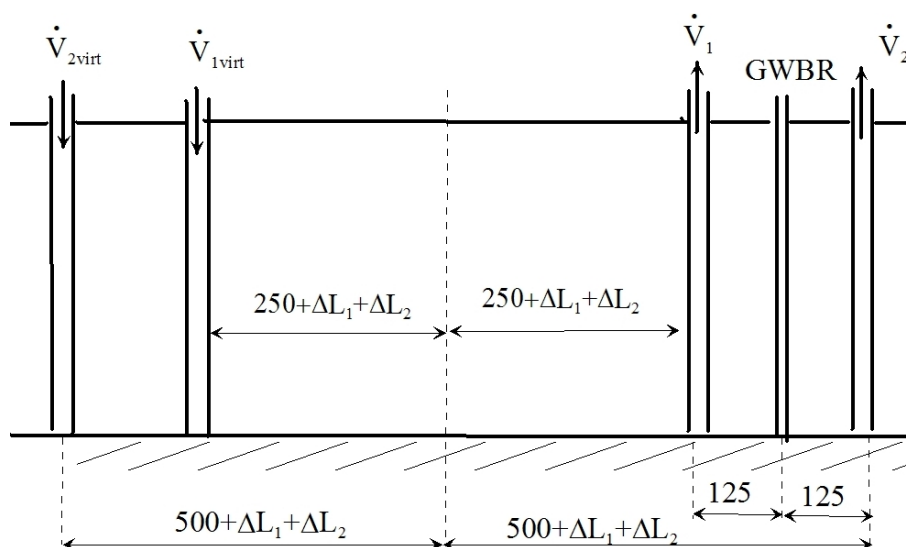


Abbildung 8.24: RB dritter Art \rightarrow Verschiebung

$$\Delta L_1 = f\left(\frac{B}{D}\right) = f\left(\frac{25}{15}\right) = f(1,667)$$

$$\Delta L_1 = 0,43 \cdot D = 6,45m$$

$$\begin{aligned}\Delta L_2 &= \sqrt{\frac{k \cdot D \cdot M'}{k'}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-3}m \cdot s^{-1} \cdot 15m \cdot 1m}{1 \cdot 10^{-5}m \cdot s^{-1}}}\end{aligned}$$

$$\Delta L_2 = 54,8m$$

$$s = h_n - \sqrt{h_n^2 - 2Z}$$

$$Z = \frac{1}{4\pi \cdot k} \sum_{i=1}^4 \dot{V}_i \cdot W_i(\sigma)$$

$$\sigma_i = \frac{r_i^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t}; \quad T = k \cdot h_n = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 15 = 0,03$$

Es gilt:

$$\dot{V}_{1virt} = \dot{V}_{2virt} = -25l \cdot s^{-1}$$

$$\rho_1 = 2(250 + 6,45 + 54,8) + 125 = 747,5m$$

$$\rho_2 = 2(500 + 6,45 + 54,8) - 125 = 997,5m$$

$$\dot{V}_3 = \dot{V}_{1virt}; \quad \dot{V}_4 = \dot{V}_{2virt}$$

$$r_3 = \rho_1; \quad r_4 = \rho_2$$

$$t = 365 \cdot 24 \cdot 3600 = 31536 \cdot 10^3 s$$

$$\sigma_1 = \frac{125^2 \cdot 0,25}{4 \cdot 0,03 \cdot 31536 \cdot 10^3} = 1,03 \cdot 10^{-3}$$

$$W_1(\sigma_1) = 6,31$$

$$\sigma_2 = \sigma_1; \quad W_2 = W_1$$

$$\sigma_3 = \frac{747,5^2 \cdot 0,25}{4 \cdot 0,03 \cdot 31536 \cdot 10^3} = 3,7 \cdot 10^2$$

$$W_3(\sigma_3) = 2,76$$

$$\sigma_4 = \frac{997,5^2 \cdot 0,25}{4 \cdot 0,003 \cdot 31536 \cdot 10^3} = 6,6 \cdot 10^{-2}$$

$$W_4(\sigma_4) = 2,21$$

$$Z = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot 0,25(6,31 + 6,31 - 2,76 - 2,21) = 76,1$$

$$s = 15 - \sqrt{15^2 - 2 \cdot 76,1}$$

$$s = 6,5m$$

Die Absenkung am Punkt P beträgt nach einem Jahr 6,5m.

• zu Aufgabe 11 (s. S. 256)

Gegeben sind:

Brunnen 1: $X = 750m \quad Y = 100m$

Brunnen 2: $X = 700m \quad Y = 400m$

Punkt P: $X = 1000m \quad Y = 500m$

$h_n = 15m; \quad n_0 = 0,25 \quad k = 0,001$

Zu berechnen sind die Absenkung am Punkt P nach einem Monat und der stationäre Endzustand.

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 = 25l \cdot s^{-1} = 0,025m^3 \cdot s^{-1}$$

$$t = 30 \cdot 24 \cdot 3600 = 2592 \cdot 10^3 s$$

$$r_1^2 = (1000 - 750)^2 + (500 - 100)^2 = 222.500m^2$$

$$r_2^2 = (1000 - 700)^2 + (500 - 400)^2 = 100.000m^2$$

$$\rho_1^2 = (1000 + 750)^2 + (500 - 100)^2 = 3,3 \cdot 10^6 m^2$$

$$\rho_2^2 = (1000 + 700)^2 + (500 - 400)^2 = 2,9 \cdot 10^6 m^2$$

\Rightarrow Es liegt eine Randbedingung 1. Art vor: (siehe Abbildung 8.25)

$$s = Z_{Rn} - \sqrt{Z_{Rn}^2 - 2Z}; \quad Z_{Rn} = h_n = 15m$$

$$s = n_0 = 0,25$$

$$T = k \cdot h_n = 0,015$$

$$Z = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot \dot{V} \cdot (W_1(\sigma_1) + (W_2(\sigma_2) - (W_{1virt}(\sigma_{1virt}) - (W_{2virt}(\sigma_{2virt})))$$

$$\dot{V} = \dot{V}_1 = \dot{V}_2 = -\dot{V}_{1virt} = -\dot{V}_{2virt}$$

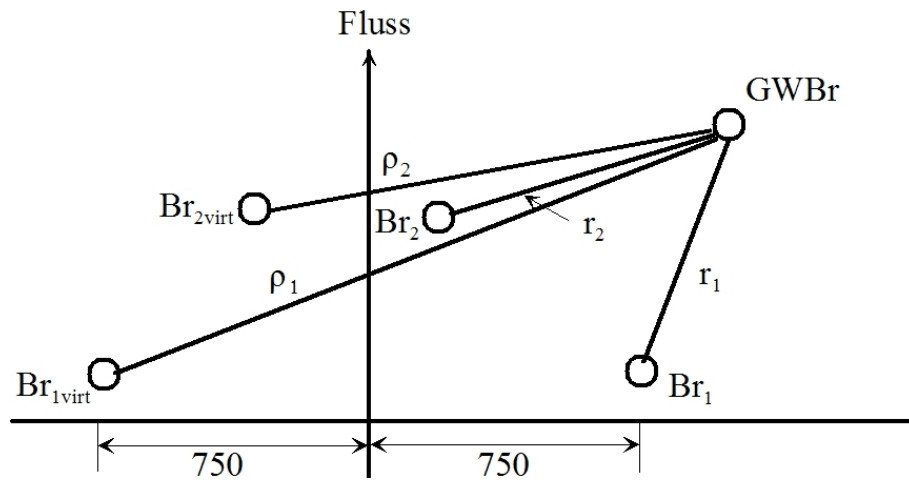


Abbildung 8.25: Zwei Brunnen an einem Fluss

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \frac{r_1^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t} = 3,58 \cdot 10^{-1} & W_1(\sigma_1) &= 0,79 \\
 \sigma_2 &= \frac{10^5 \cdot 0,25}{4 \cdot 0,015 \cdot 2592 \cdot 10^3} = 1,61 \cdot 10^{-1} & W_2(\sigma_2) &= 1,46 \\
 \sigma_{1virt} &= \frac{32.225 \cdot 10^2 \cdot 0,25}{4 \cdot 0,015 \cdot 2592 \cdot 10^3} = 5,18 & W_{1virt}(\sigma_{1virt}) &= 0,001 \\
 \sigma_{2virt} &= \frac{29 \cdot 10^5 \cdot 0,25}{4 \cdot 0,015 \cdot 2592 \cdot 10^3} = 4,66 & W_{2virt}(\sigma_{2virt}) &= 0,00204
 \end{aligned}$$

$$Z = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot 0,025 (0,79 + 1,46 - 0,001 - 0,00204) = 4,47$$

$$s = 10 - \sqrt{100 - 2 \cdot 4,47} = 0,48$$

Die Absenkung am Punkt P beträgt nach einem Monat $0,48m$.

Berechnung des stationären Endzustandes:

$$\begin{aligned}
 z_{stat(r,t=\infty)} &= \frac{\dot{V}_1}{4 \cdot \pi \cdot k} (W_{Br1} - W_{Br1virt}) + \frac{\dot{V}_2}{4 \cdot \pi \cdot k} (W_{Br2} - W_{Br2virt}) \\
 &= \frac{\dot{V}_1}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot \ln \frac{\rho_1^2}{r_1^2} + \frac{\dot{V}_2}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot \ln \frac{\rho_2^2}{r_2^2} \\
 &= \frac{0,025}{4 \cdot 3,14 \cdot 0,001} \cdot \ln \frac{3,3 \cdot 10^6}{222.500} + \frac{0,025}{4 \cdot 3,14 \cdot 0,001} \cdot \ln \frac{2,9 \cdot 10^6}{100.000} \\
 &= 12,1 m^2
 \end{aligned}$$

$$s = z_{Rn} - \sqrt{z_{Rn}^2 - 2z_{stat}} = 10 - \sqrt{10^2 - 2 \cdot 12,1}$$

$$s = 1,29 m$$

Der stationäre Endzustand ist nach 1,29m erreicht.

- zu Aufgabe 12 (s. S. 256)

Gegeben sind:

$$\dot{V} = 0,001 m^3 \cdot s^{-1}$$

$$S_0 = 0,001 m^{-1}$$

$$n_0 = 0,25$$

$$k = 0,001 m \cdot s^{-1}$$

$$h_n = 10m; \quad B = 30m; \quad M = 15m; \quad M' = 1m; \quad k' = 1 \cdot 10^{-5}$$

Zu berechnen ist die Grundwasserstandsänderung nach 10 Tagen mittels THEISScher Brunnengleichung.

⇒ Es liegt eine Randbedingung 3. Art vor (siehe Abbildung 8.26):

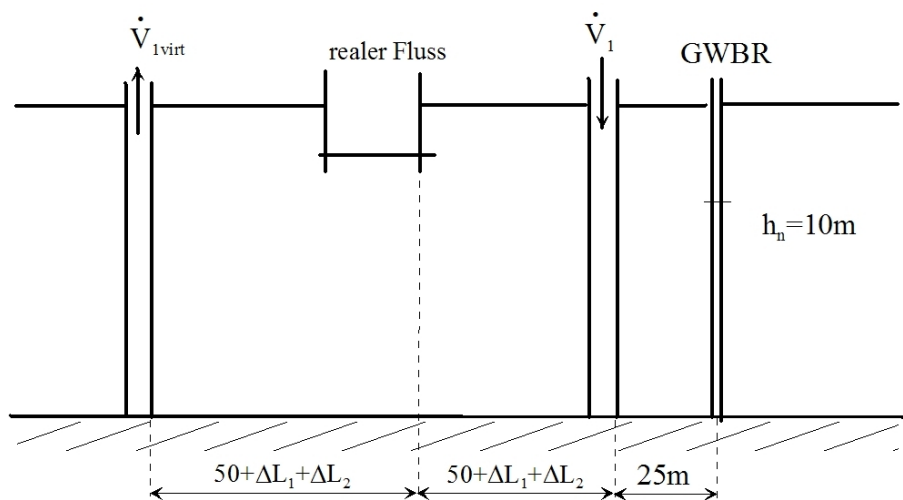


Abbildung 8.26: Grundwasseranreicherungsanlage

$$\Delta L_1 = f\left(\frac{B}{D}\right) = f\left(\frac{30}{10}\right) = f(3); \quad \Delta L_1 = 0,43; \quad D = 4,3$$

$$\Delta L_2 = \sqrt{\frac{0,001 \cdot 10 \cdot 1}{10^{-5}}} = 31,6$$

$$r_1 = 25m$$

$$\rho_1 = 25 + 2(50 + \Delta L_1 + \Delta L_2) = 196,8m$$

$$S = n_0 + S_0 \cdot h_n = 0,26$$

$$T = k \cdot h_n = 0,01$$

$$s = z_{Rn} - \sqrt{z_{Rn}^2 - 2Z}; \quad t = 10d = 10 \cdot 24 \cdot 3600 = 864 \cdot 10^3 s$$

$$Z = \frac{-1}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot (\dot{V}_1 \cdot W_1(\sigma_1) - \dot{V}_{1virt} \cdot W_2(\sigma_2))$$

$$\sigma_1 = \frac{r_1^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot k} = \frac{25^2 \cdot 0,26}{4 \cdot 0,01 \cdot 864 \cdot 1000} = 0,0047 = 4,7 \cdot 10^{-3}$$

$$W_1(\sigma_1) = 4,79$$

$$\sigma_2 = \frac{\rho_1^2 \cdot 0,26}{4 \cdot 0,01 \cdot 864 \cdot 1000} = 2,9 \cdot 10^{-1}; \quad W_2(\sigma_2) = 0,94$$

$$Z = \frac{-1}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot 0,001(4,79 - 0,94) = 0,31$$

$$s = 10 - \sqrt{100 + 0,62} = -0,031$$

Der Grundwasserstand ist nach zehn Tagen um 0,031m.gestiegen.

- zu Aufgabe 13 (s. S.256)

Gegeben sind:

$$\dot{V} = 0,001 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$S_0 = 0,001 \text{ m}^{-1}$$

$$n_0 = 0,25$$

$$k = 0,001 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$M = 50 \text{ m}; \quad h_n = 40 \text{ m}$$

Zu berechnen ist die Grundwasserstandsänderung nach 10 Tagen mittels THEISScher Brunnengleichung.

Die schematische Darstellung für die Lösung zeigt Abbildung (8.27).

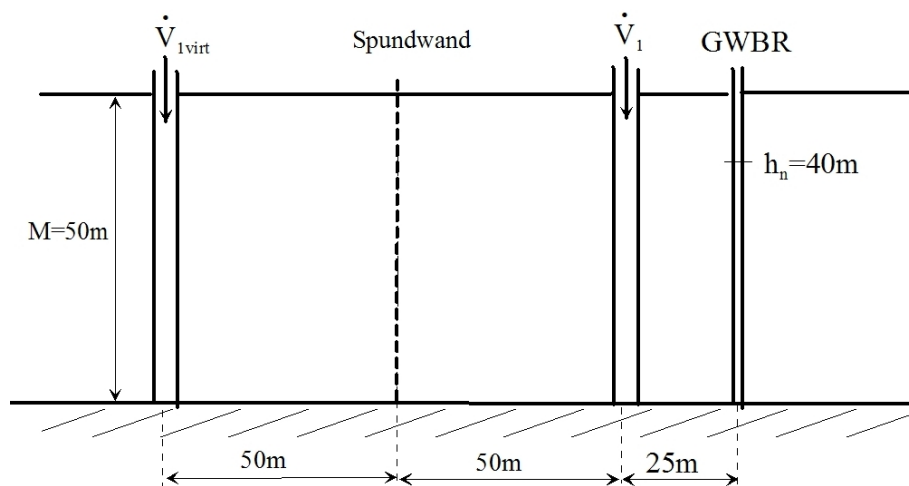


Abbildung 8.27: Schematische Anordnung mit Brunnen und Spundwand

$$s = Z_{Rn} - \sqrt{Z_{Rn}^2 - 2Z}; \quad Z_{Rn} = h_n = 40m$$

$$Z = \frac{-1}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot \dot{V}(W_1(\sigma_1) + W_2(\sigma_2))$$

$$S = n_0 + S_0 \cdot h_n = 0,29$$

$$T = k \cdot h_n = 0,04$$

$$T = 10d = 10 \cdot 24 \cdot 3600 = 864 \cdot 10^3 s$$

$$r = 25$$

$$\rho = 125$$

$$\sigma_1 = \frac{25^2 \cdot 0,29}{4 \cdot 0,04 \cdot 864 \cdot 10^3} = 1,3 \cdot 10^{-3}; \quad W_1(\sigma_1) = 6,12$$

$$\sigma_2 = \frac{\rho^2 \cdot S}{4 \cdot \pi \cdot T} = 3,3 \cdot 10^{-2}; \quad W_2(\sigma_2) = 2,88$$

$$Z = -\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot 0,001(6,12 + 2,88) = -0,72$$

$$s = 40 - \sqrt{40^2 + 2 \cdot 0,72} = -0,02$$

Der Grundwasserstand hat sich nach zehn Tagen um 0,02m.erhöht.

- zu Aufgabe 14 (s. S. 256)

Gegeben sind:

$$\dot{V} = 0,1m^3 \cdot s^{-1}$$

$$S_0 = 0,0001m^{-1}$$

$$n_0 = 0,25$$

$$k = 0,0001m \cdot s^{-1}$$

$$h_{t=0} = 40m$$

$$M = 50m$$

Zu berechnen ist die Absenkung am Pegel für den Zeitpunkt $t = 15h$.

Es handelt sich hier um einen durch eine Randbedingung 1. Art einseitig begrenzten Grundwasserleiter. Dies führt dazu, dass der reale Brunnen auf Grund des Spiegelungsverfahrens in einen virtuellen überführt werden muss. Dabei wird aus der Exfiltration eine Infiltration. Da hier eine gestufte Förderganglinie vorliegt, dargestellt durch die zwei Phasen Pumpen und Wiederanstieg, müssen zwei Pumpleistungen, Exfiltration und Infiltration, eingeführt werden. Es ergibt sich damit folgende schematische Berechnungsgrundlage (siehe Abbildung 8.28).

Da es sich um ungespannte Grundwasserleiterverhältnisse handelt, muss die Superposition in der Potentialebene durchgeführt werden. Im Einzelnen werden folgende Werte berechnet:

$$\sigma = \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot t \cdot T}$$

$$W(\sigma) = -\ln(1,78 \cdot \sigma) + \sum (-1)^{n+1} \frac{\sigma^n}{n \cdot n!}$$

Des Weiteren gilt:

$$Z = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot W(\sigma)$$

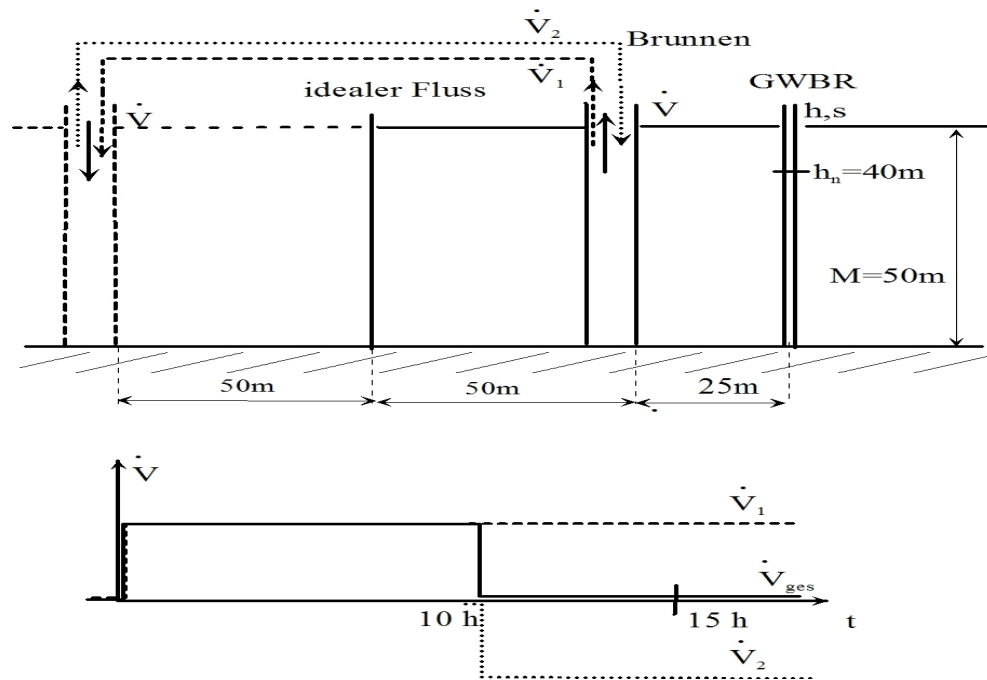


Abbildung 8.28: Grundwasserleiter mit Brunnen und Fluss

	Br_{real1}	Br_{real2}	Br_{virt1}	Br_{virt2}
\dot{V}	$+\dot{V}$	$-\dot{V}$	$-\dot{V}$	$+\dot{V}$
t	$15h$	$5h$	$15h$	$5h$
r	$25m$	$25m$	$125m$	$125m$
σ	0,18	0,54	4,5	13,6
$W(\sigma)$	1,343	0,518	0,0025	≈ 0
Z	106,87	-41,22	-0,199	0

Damit ergibt sich ein Gesamtpotential von:

$$Z_{Ges} = Z_{real1} + Z_{real2} + Z_{virt1} + Z_{virt2}$$

$$Z_{Ges} = 65,45m^2$$

Da es sich hier um ungespannte Grundwasserverhältnisse handelt, folgt die Lage der freien Grundwasseroberfläche zu:

$$z_R = \sqrt{z_{Rt=0}^2 - 2 \cdot Z}$$

$$z_R = 38,33m$$

bzw.

$$s = z_{Rt=0} - z_R$$

$$s = 1,67m$$

Die Absenkung am Pegel beträgt $1,67m$.

Kapitel 9

Numerische Grundwasserströmungsmodelle

Aufgaben zu 9

1. Berechnen Sie mittels einer eindimensionalen stationären Grabenströmung die Lage der freien Oberfläche in Abhängigkeit von x , den Abfluss aus dem Oberwasser und den Zufluss zum Unterwasser (siehe Abbildung 9.1).

Verwenden Sie dabei fünf Quantisierungselemente.

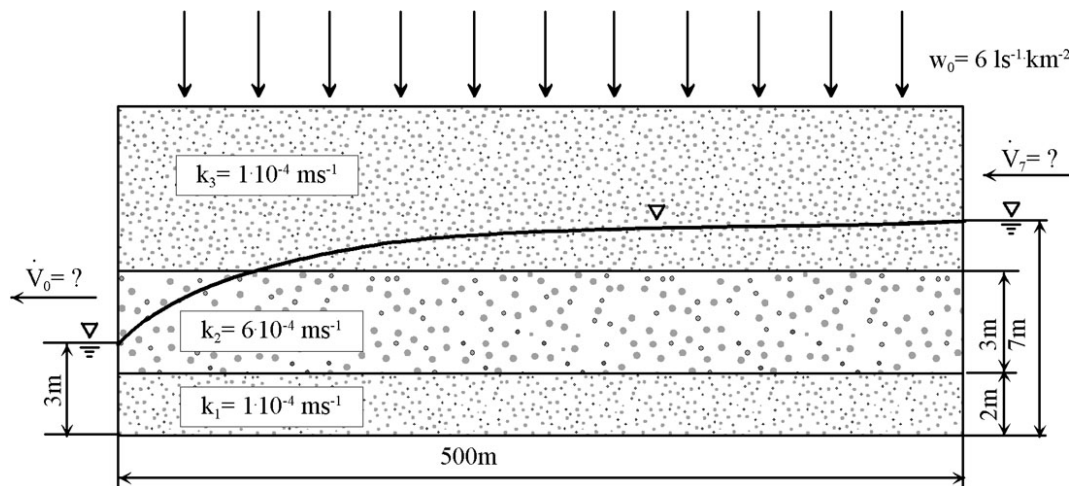


Abbildung 9.1: Geschichteter Grundwasserleiter mit stationärem Strömungsregime

(Lösung s. S. 312)

2. Berechnen Sie mittels einer eindimensionalen instationären Grabenströmung die Lage der freien Oberfläche in Abhängigkeit von x und t (0 bis $2d$), den Abfluss aus dem Oberwasser und den Zufluss zum Unterwasser (siehe Abbildung 9.2).

Verwenden Sie dabei fünf Ortsquantisierungselemente und fünf Zeitschritte.

Wählen sie die Zeitschrittgröße entsprechend des zu erwartenden Gradienten.

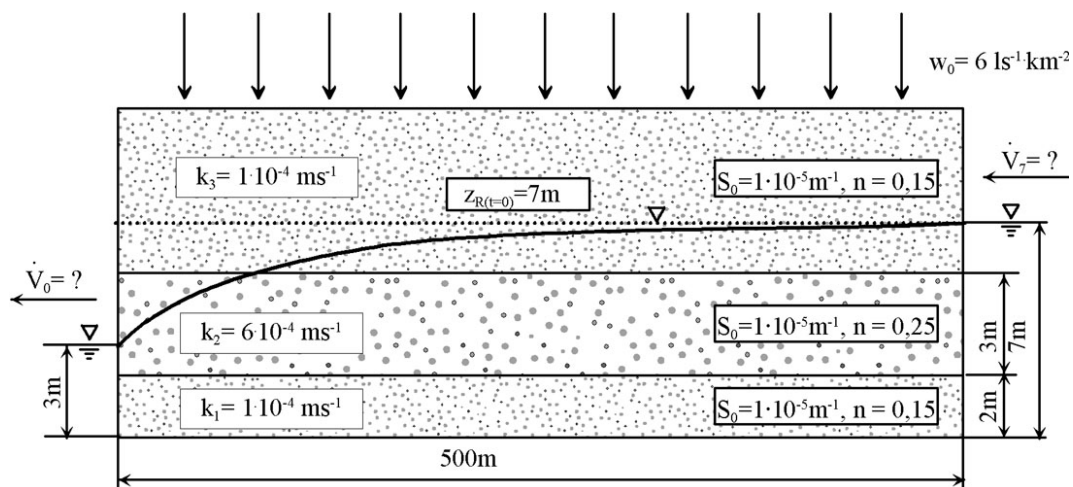


Abbildung 9.2: Geschichteter Grundwasserleiter mit instationärem Strömungsregime

3. In einem Grundwasserleiter soll ein Tunnel (U-Bahn) parallel zu einem Fluss eingebaut werden (siehe Abbildung 9.3).

Berechnen Sie, zu welchen Grundwasserstandsänderungen es für den stationären Fall durch diesen Einbau kommt.

Wählen Sie dazu ein geeignetes grobes Quantisierungsschema.

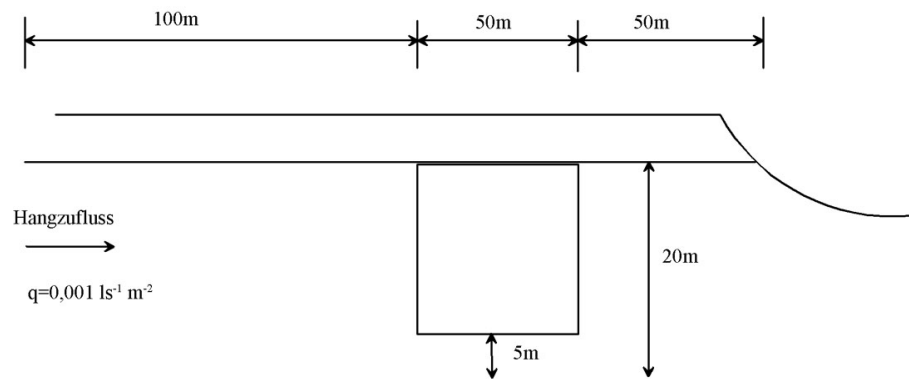


Abbildung 9.3: Einbau eines Tunnelbauwerkes in einem Grundwasserleiter

4. In einer Flussniederung soll mittels eines Deichbauwerkes (siehe Abbildung 9.4) das Poldergebiet vor Hochwasser geschützt werden (entsprechend vereinfachtem Schema).

Deich: $k = 10^{-4} \frac{m}{s}$, $n_0 = 0,15$, $S_0 = 0,002 m^{-1}$;

Dichtungsmaterial: $k = 10^{-5} \frac{m}{s}$; $n_0 = 0,05$; $S_0 = 0,001 m^{-1}$

- Entwickeln Sie ein einfaches diskretisiertes Schema zur Abschätzung der Grundwasserströmungsprozesse.
 - Wieviel Wasser fließt pro Meter Deichlänge in das Poldergebiet?
5. Für ein Uferfiltratwasserwerk sollen die zu erwartenden Grundwasserströmungsverhältnisse simuliert werden (siehe Abbildung 9.5).

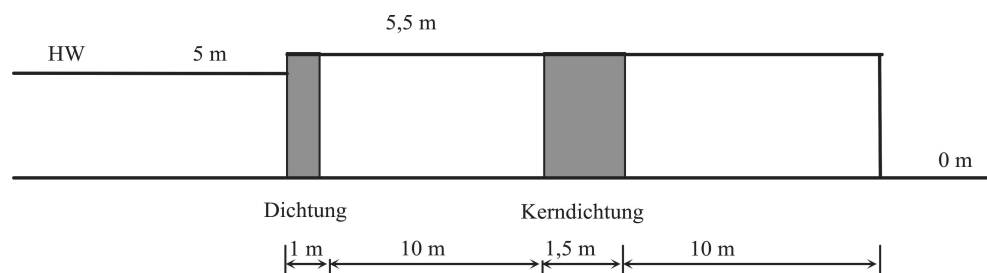


Abbildung 9.4: Deichbauwerk mit Kerndichtung

Gegeben:

$$\dot{V} = 0,001 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}, S_0 = 0,0001 \text{ m}^{-1}, n_0 = 0,25, k = 0,001 \text{ m s}^{-1}, z_{R(t=0)} = 10 \text{ m}, \\ h_{Fl} = 10 \text{ m}, M = 15 \text{ m}, b = 1 \text{ m}$$

- Entwickeln Sie ein einfaches Quantisierungsschema mit drei Knotenpunkten zur Abschätzung der Strömungsprozesse im Grundwasserleiter entsprechend der vorgegebenen Geometrie.
- Stellen Sie die drei Knotengleichungen für eine instationäre Strömungsberechnung auf.
- Berechnen Sie den Wasserstand $z_{R(t)}$ im GWBR für den Zeitpunkt $t = 1 \text{ d}$.

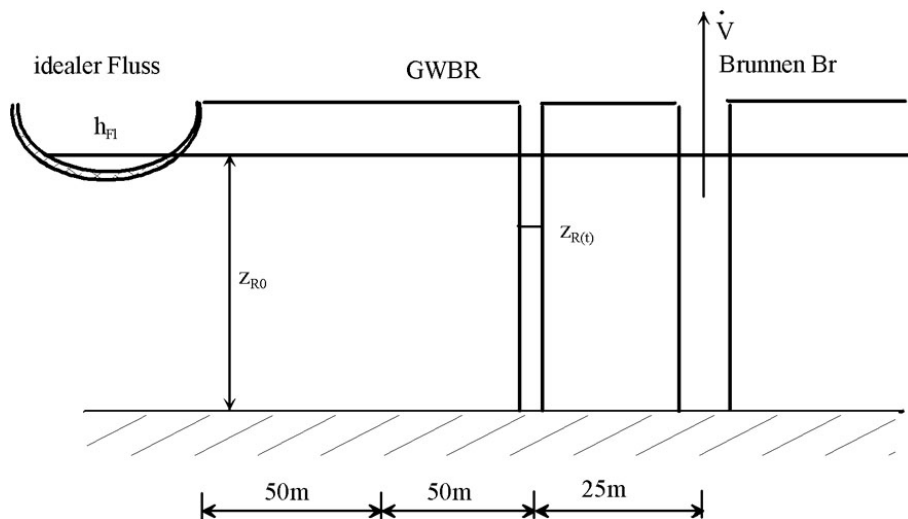


Abbildung 9.5: Grundwasserleiter mit Fluss und Brunnen

(Lösung s.S. 331)

- Für ein Uferfiltratswasserwerk (siehe Abbildung 9.6) mit parallelem Strömungsregime ist ein numerisches Grundwasserströmungsmodell aufzubauen. Der Fluss soll dabei als idealisierte Randbedingung berücksichtigt werden.

$$k = 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad h_{Fl} = 15 \text{ m} \quad z_{R0} = 15 \text{ m} \quad S = 0,25 \quad \dot{V} = 50 \frac{\text{l}}{\text{s}} \\ q = 0,001 \frac{\text{l}}{\text{sm}^2} \quad b = 100 \text{ m} \quad k_{Kolm} = 5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad M_{Kolm} = 1 \text{ m} \quad B = 6,357 \text{ m}$$

- Wählen Sie ein geeignetes vereinfachtes Quantisierungsschema mit maximal fünf Elementen, damit der Wasserstand am GWBR für den stationären Fall möglichst genau berechnet wird.
- Formulieren Sie die Bilanzgleichungen an den Mittelpunkten der Elemente und stellen Sie diese in Matrixform dar.
- Berechnen Sie die hydraulischen Leitwerte für den Strömungsanteil.

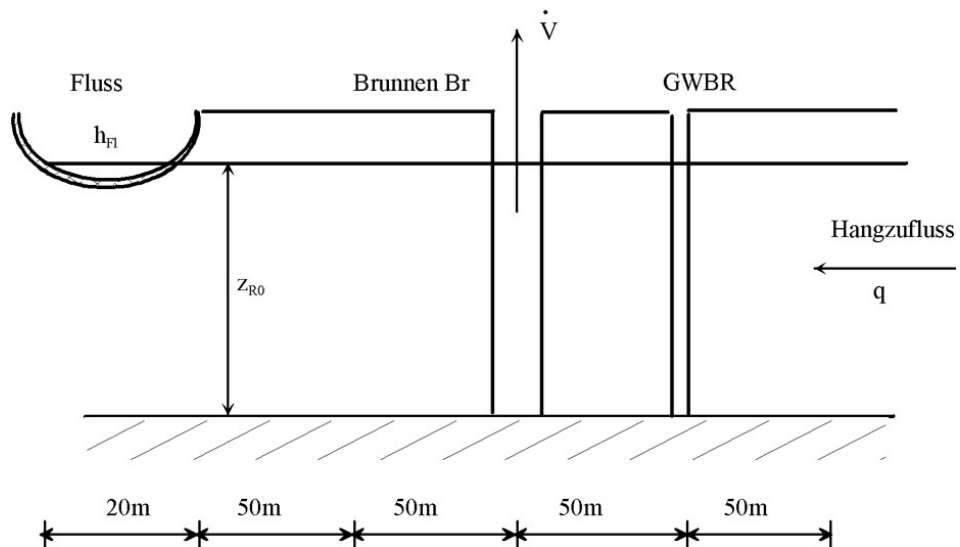


Abbildung 9.6: Wirkung eines Flusses und eines Hangzuflusses auf den Grundwasserleiter

- d) Wie verändern sich das Gleichungssystem und das Ergebnis, wenn der Fluss nicht idealisiert wird, sondern die Unvollkommenheit und eine Kolmation berücksichtigt werden?

Skizzieren Sie den Lösungsansatz und schätzen Sie das Ergebnis grob ab.

(Lösung s. S. 335)

Lösungen:

• zu Aufgabe 1 (s. S. 308)

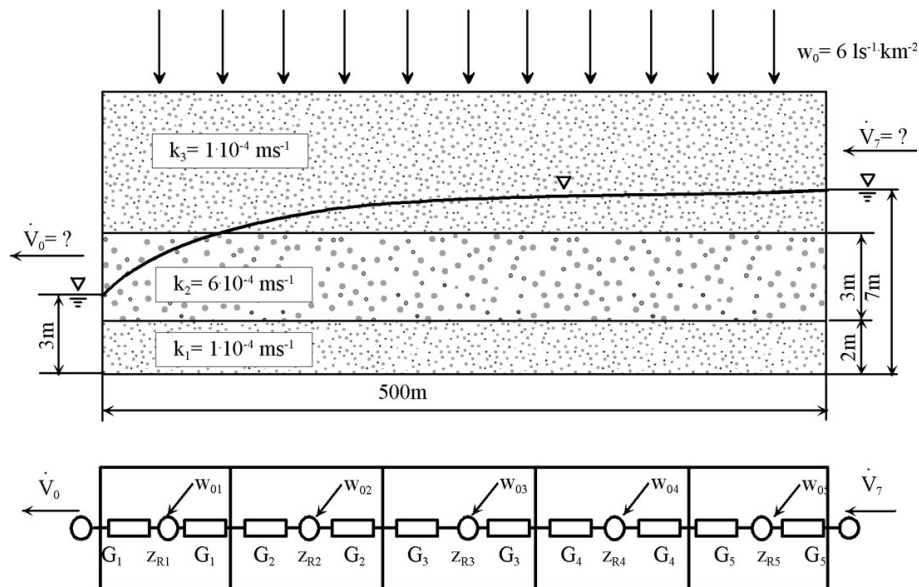


Abbildung 9.7: Quantisierter Grundwasserleiter mit stationärem Strömungsregime

Als **Lösungsweg** wird vorgeschlagen, wie folgt vorzugehen:

Die Leitwerte ergeben sich bei dem vorgegebenen Quantisierungsabstand und der Breite des Strömungsfeldes zu (siehe Abbildung 9.7):

$$\Delta y_i = 100m$$

$$\Delta x_i = 50m$$

$$G_i = T_i \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$$

$$\Rightarrow G_i = 2T_i$$

Die aneinanderstoßenden Leitwerte können wie folgt zusammengefasst werden:

Nach dem Gesetz der Reihenschaltung von Widerständen gilt:

$$R_{ges} = R_1 + R_2$$

$$G = \frac{1}{R}$$

Daraus folgt:

$$G_{i,i+1} = \frac{G_i \cdot G_{i+1}}{G_i + G_{i+1}}$$

Für den Fall der äquidistanten Teilung $\Delta x_i = \Delta x_{i+1}$ und der konstanten Breite $\Delta y_i = \Delta y_{i+1}$ sowie dem vorgegebenen Breiten-Längenverhältnis von $\Delta y_i = 2\Delta x_i$ ergibt sich:

$$G_{i,i+1} = \frac{2T_i \cdot T_{i+1}}{T_i + T_{i+1}}$$

Die Transmissibilität T ist definiert zu (ungespannte Grundwasserverhältnisse):

$$T = \int_a^D k \cdot dz$$

$$D = z_R$$

Da der Durchlässigkeitskoeffizient nicht als geschlossene analytische Funktion darstellbar ist, muss der T -Wert über eine Summenformel ermittelt werden. Dabei wird für die Schichten, die gesättigt sind, die Mächtigkeit in Ansatz gebracht. Für die nicht vollständig gesättigten Schichten ist die Lage der freien Oberfläche maßgebend. Für den Anfangswasserspiegel, der in erster Näherung als lineare Funktion zwischen linker und rechter Randbedingung angenommen werden kann, sollen z.B. folgende Werte gelten:

Quantisierungspunkt	z_{R0}	z_{R1}	z_{R2}	z_{R3}	z_{R4}	z_{R5}	z_{R6}
geschätzte Startwasserhöhe	3m	4m	5m	5,5m	6m	6,5m	7m

Mit dieser geschätzten Wasserhöhenverteilung ergibt sich folgende erste Transmissibilitätsverteilung:

$$T_1^{(1)} = k_1 M_1 + k_2 (z_{R1} - M_1) = 1,40 \cdot 10^{-3} \frac{m^2}{s}$$

$$T_2^{(1)} = k_1 M_1 + k_2 (z_{R2} - M_1) = 2,00 \cdot 10^{-3} \frac{m^2}{s}$$

$$T_3^{(1)} = k_1 M_1 + k_2 M_2 + k_3 (z_{R3} - M_1 - M_2) = 2,05 \cdot 10^{-3} \frac{m^2}{s}$$

$$T_4^{(1)} = k_1 M_1 + k_2 M_2 + k_3 (z_{R4} - M_1 - M_2) = 2,10 \cdot 10^{-3} \frac{m^2}{s}$$

$$T_5^{(1)} = k_1 M_1 + k_2 M_2 + k_3 (z_{R5} - M_1 - M_2) = 2,15 \cdot 10^{-3} \frac{m^2}{s}$$

Daraus lassen sich die Leitwerte nach obiger Formel berechnen:

$$G_{i,i+1} = \frac{2T_i \cdot T_{i+1}}{T_i + T_{i+1}}$$

$G_{01}^{(1)}$	$2,8 \cdot 10^{-3} \frac{m^2}{s}$
$G_{12}^{(1)}$	$1,65 \cdot 10^{-3} \frac{m^2}{s}$
$G_{23}^{(1)}$	$2,02 \cdot 10^{-3} \frac{m^2}{s}$
$G_{34}^{(1)}$	$2,07 \cdot 10^{-3} \frac{m^2}{s}$
$G_{45}^{(1)}$	$2,12 \cdot 10^{-3} \frac{m^2}{s}$
$G_{56}^{(1)}$	$4,3 \cdot 10^{-3} \frac{m^2}{s}$

Für die einzelnen Knotenpunkte des quantisierten Schemas ergeben sich folgende Bilanzgleichungen:

$$\textbf{Knoten 1:} \quad (z_{R1} - z_{R0})G_{01} + (z_{R1} - z_{R2})G_{12} = -w_0 \cdot 0,01 km^2$$

$$\textbf{Knoten 2:} \quad (z_{R2} - z_{R1})G_{12} + (z_{R2} - z_{R3})G_{23} = -w_0 \cdot 0,01 km^2$$

$$\textbf{Knoten 3:} \quad (z_{R3} - z_{R2})G_{23} + (z_{R3} - z_{R4})G_{34} = -w_0 \cdot 0,01 km^2$$

$$\textbf{Knoten 4:} \quad (z_{R4} - z_{R3})G_{34} + (z_{R4} - z_{R5})G_{45} = -w_0 \cdot 0,01 km^2$$

$$\textbf{Knoten 5:} \quad (z_{R5} - z_{R4})G_{45} + (z_{R5} - z_{R6})G_{56} = -w_0 \cdot 0,01 km^2$$

bzw. nach den Wasserständen geordnet und die Randbedingungen eingeführt

$$z_{R0} = 3m$$

$$z_{R6} = 7m$$

$$\textbf{Knoten 1:} \quad z_{R1}(G_{01} + G_{12}) + z_{R2}(-G_{12}) = -0,06 \frac{l}{s} + 3m \cdot G_{01}$$

$$\textbf{Knoten 2:} \quad z_{R1}(-G_{12}) + z_{R2}(G_{12} + G_{23}) + z_{R3}(-G_{23}) = -0,06 \frac{l}{s}$$

$$\textbf{Knoten 3:} \quad z_{R2}(-G_{23}) + z_{R3}(G_{23} + G_{34}) + z_{R4}(-G_{34}) = -0,06 \frac{l}{s}$$

$$\textbf{Knoten 4:} \quad z_{R3}(-G_{34}) + z_{R4}(G_{34} + G_{45}) + z_{R5}(-G_{45}) = -0,06 \frac{l}{s}$$

$$\textbf{Knoten 5:} \quad z_{R4}(-G_{45}) + z_{R5}(G_{45} + G_{56}) = -0,06 \frac{l}{s} + 7m \cdot G_{56}$$

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{10} \\ +G_{12} \end{pmatrix} & -G_{12} & 0 & 0 & 0 \\ -G_{12} & \begin{pmatrix} G_{12} \\ +G_{23} \end{pmatrix} & -G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & -G_{23} & \begin{pmatrix} G_{23} \\ +G_{34} \end{pmatrix} & -G_{34} & 0 \\ 0 & 0 & -G_{34} & \begin{pmatrix} G_{34} \\ +G_{45} \end{pmatrix} & -G_{45} \\ 0 & 0 & 0 & -G_{45} & \begin{pmatrix} G_{45} \\ +G_{56} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z_{R1} \\ z_{R2} \\ z_{R3} \\ z_{R4} \\ z_{R5} \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} -0,06 \frac{l}{s} + 3m \cdot G_{10} \\ -0,06 \frac{l}{s} \\ -0,06 \frac{l}{s} \\ -0,06 \frac{l}{s} \\ -0,06 \frac{l}{s} + 7m \cdot G_{56} \end{pmatrix}$$

Das so entstandene Gleichungssystem besteht aus fünf Zeilen und enthält fünf Unbekannte. Damit ist es eindeutig lösbar. Für die Lösung solcher Gleichungssysteme können alle bekannten Methoden benutzt werden. Dabei können die Gesamtschrittverfahren und Iterationsverfahren eingesetzt werden. Da die Koeffizientenmatrix nur aus drei Diagonalen besteht, die außerdem noch symmetrisch sind, können besondere Verfahren für solche Systeme benutzt werden.

Das GAUSSsche Eliminationsverfahren, das zu den universellen Einschrittverfahren gehört, beruht darauf, dass versucht wird, durch sukzessives Einsetzen aus den n Gleichungen mit n Unbekannten, **eine** Gleichung mit **einer** Unbekannten zu machen. Diese kann dann gelöst werden. Durch rückwärtiges Einsetzen werden die anderen Unbekannten bestimmt. In Matrixschreibweise bedeutet dies, dass aus der vollständigen Koeffizientenmatrix eine Drei-

ecksmatrix erzeugt wird, die dann von unten heraus gelöst werden kann.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{nn-1} & a_{nn} & a_{nn+1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{kk-1} & a_{kk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_{R1} \\ z_{R2} \\ \vdots \\ z_{Rn} \\ \vdots \\ z_{Rk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

Nach Umformung erhält man die neue Koeffizientenmatrix (a') mit einer neuen rechten Seite (b'):

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a'_{nn} & a'_{nn+1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a'_{kk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_{R1} \\ z_{R2} \\ \vdots \\ z_{Rn} \\ \vdots \\ z_{Rk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_n \\ \vdots \\ b'_k \end{pmatrix}$$

Zu dieser Dreiecksform kommt man, indem die $(n-1)$ -te Zeile nach z_{Rn-1} aufgelöst und in der (n) -ten Zeile eingesetzt wird.

Für die zweite Zeile heißt dies:

$$a_{11}z_{R1} + a_{12}z_{R2} = b_1$$

Daheraus ergibt sich z_{R1} zu:

$$z_{R1} = \frac{b_1 - a_{12} z_{R2}}{a_{11}}$$

Damit erhält die zweite Zeile

$$a_{21} z_{R1} + a_{22} z_{R2} + a_{23} z_{R3} = b_2$$

die Form:

$$\left(a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} \right) z_{R2} + a_{23}z_{R3} = b_2 - \frac{a_{21}b_1}{a_{11}}$$

bzw. zusammengefaßt:

$$a_{22'} z_{R2} + a_{23} z_{R3} = b_{2'}$$

Dieser Vorgang wird analog für alle weiteren Zeilen und Unbekannten durchgeführt. Für die letzte Zeile erhält man:

$$a_{56}^{(5)} \cdot z_{R5} = b_5^{(5)}$$

Diese Gleichung ist für z_{R5} lösbar. Danach können dann z_{R4} , z_{R3} , z_{R2} und z_{R1} gelöst werden. Damit hat man eine erste Näherung der Lage der freien Grundwasseroberfläche $z_R^{(x)}$. Da die Transmissibilität eine Funktion der Grundwasserhöhe ist, muss nun diese für die Quantisierungspunkte neu berechnet werden. Somit ändern sich auch die Leitwerte G_i und es entsteht ein Gleichungssystem mit geänderten Koeffizienten, welches auf die beschriebene Art und Weise zu lösen ist. Dieser Iterationsprozess muss solange fortgesetzt werden, bis die Änderung zwischen zwei aufeinander folgenden iterativen Lösungen kleiner als eine vorgegebene Schranke $|z_{Ri}^{(1)} - z_{Ri}^{(1+1)}| < \varepsilon$ ist.

Nach drei Iterationen ergeben sich folgende Wasserstände:

Quantisierungspunkt	z_{R0}	$z_{R1}^{(3)}$	$z_{R2}^{(3)}$	$z_{R3}^{(3)}$	$z_{R4}^{(3)}$	$z_{R5}^{(3)}$	z_{R6}
Wasserhöhe nach 3. Iteration [m]	3	3,55	4,51	5,25	5,94	6,64	7

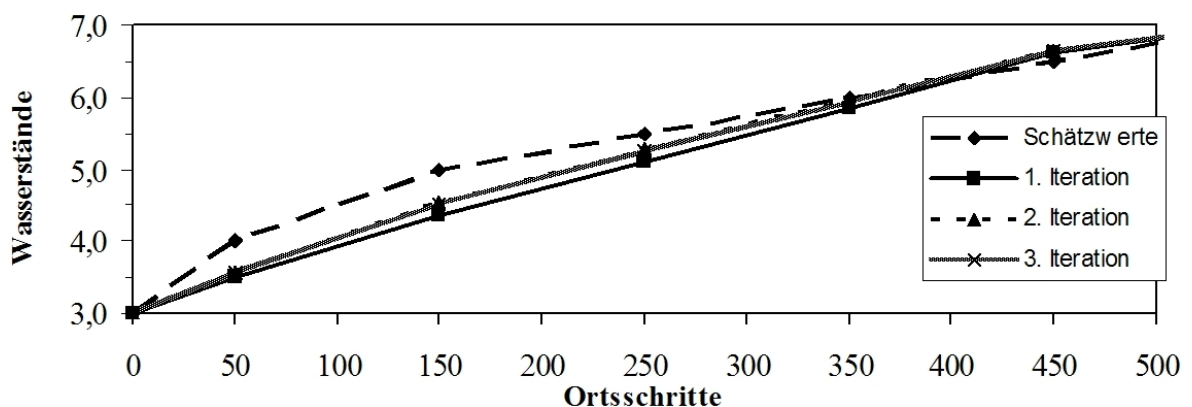


Abbildung 9.8: Iterationsverhalten des Wasserstandes

Weitere Lösungsmethoden sind im Teil I des Scriptes im Kapitel "Lösung von Gleichungssystemen" aufgeführt.

Die gesuchten Volumenströme ergeben sich aus:

$$\dot{V}_0 = \frac{z_{R0} - z_{R1}}{R_1} = \frac{3m - z_{R1}}{R_1}$$

$$\dot{V}_7 = \frac{z_{R5} - z_{R6}}{R_5} = \frac{z_{R5} - 7m}{R_5}$$

- zu Aufgabe 2 (s. S. 308)

Die Modellbildung wird hier in zwei Schritte unterteilt. Der erste Schritt ist die örtliche Quantisierung, wie sie auch beim stationären Fall (siehe Lösung zu Aufgabe 1 (s. S. 312)) durchgeführt wurde. Im Gegensatz zur stationären muss bei der instationären Strömung die Speicherinhaltsänderung in die Bilanzgleichung mit einbezogen werden. Die Speicherwirkung des Grundwasserleiters wird als Kondensator im Blockschaltbild dargestellt (siehe Abbildung 9.9). Die Wassermenge, die infolge des Speicherverhaltens des Grundwasserleiters

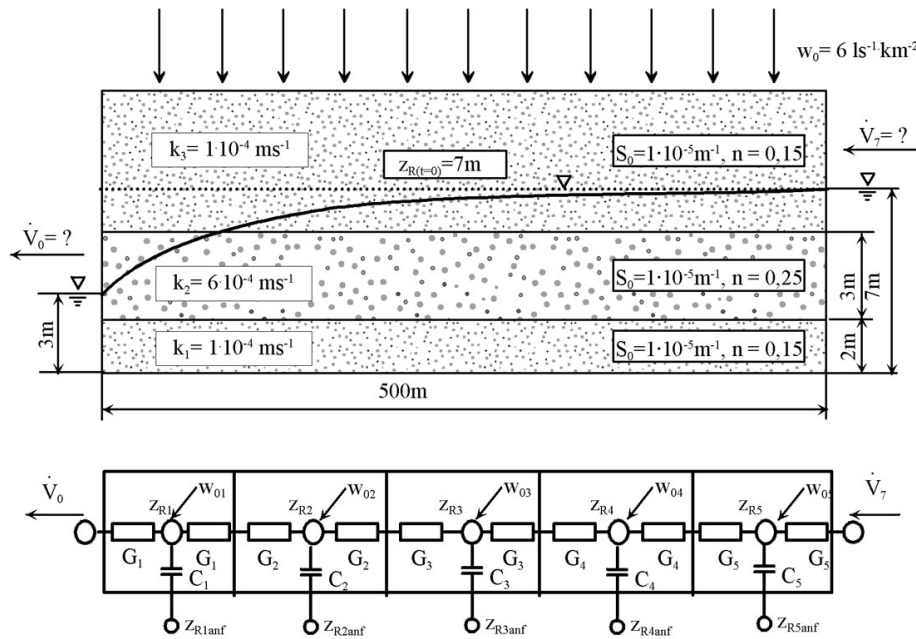


Abbildung 9.9: Quantisierter Grundwasserleiter mit Speicherkapazitäten

ausgetauscht wird, ergibt sich zu:

$$\dot{V}_{Zeit} = S \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \frac{dz_R}{dt}$$

Der Speicherkoeffizient S repräsentiert die summarische Speicherwirkung über die Höhe z von der undurchlässigen Sohle bis zur freien Grundwasseroberfläche bei den hier vorliegenden ungespannten Grundwasserverhältnissen. Innerhalb des gesättigten Bereiches des Strömungsfeldes ($a < z < z_R$) gilt auf Grund der elastischen Speicherwirkung:

$$S = S_{0i} \cdot M_i$$

An der freien Grundwasseroberfläche ($z = z_R$) wirkt die gravimetrische Speicherung mit dem Wert $S = n_0$. Da sich beide Werte in dieser Aufgabenstellung (n_0 und S_0) um den Faktor 10^{-4} unterscheiden und andererseits die Mächtigkeit nur wenige Meter beträgt, kann man annehmen, dass $S \approx n_0$ ist. Damit ergibt sich die Kapazität am Knoten i in Abhängigkeit des Wasserstandes von der Schichthöhe j zu:

$$C_i = S_{ii} \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

Für die einzelnen Knotenpunkte des quantisierten Schemas ergeben sich folgende Bilanzgleichungen:

$$\textbf{Knoten 1:} \quad (z_{R1} - z_{R0})G_{01} + (z_{R1} - z_{R2})G_{12} + C_1 \frac{dz_R}{dt} + w_0 \cdot 0,01 km^2 = 0$$

$$\textbf{Knoten 2:} \quad (z_{R2} - z_{R1})G_{12} + (z_{R2} - z_{R3})G_{23} + C_2 \frac{dz_R}{dt} + w_0 \cdot 0,01 km^2 = 0$$

$$\textbf{Knoten 3:} \quad (z_{R3} - z_{R2})G_{23} + (z_{R3} - z_{R4})G_{34} + C_3 \frac{dz_R}{dt} + w_0 \cdot 0,01 km^2 = 0$$

$$\textbf{Knoten 4:} \quad (z_{R4} - z_{R3})G_{34} + (z_{R4} - z_{R5})G_{45} + C_4 \frac{dz_R}{dt} + w_0 \cdot 0,01 km^2 = 0$$

$$\textbf{Knoten 5:} \quad (z_{R5} - z_{R4})G_{45} + (z_{R5} - z_{R6})G_{56} + C_5 \frac{dz_R}{dt} + w_0 \cdot 0,01 km^2 = 0$$

Der zeitliche Differentialquotient muss in einen Differenzenquotienten überführt werden, da sonst keine einfache numerische Behandlung möglich ist. Nur durch diese Überführung ist der Aufbau eines entsprechenden Gleichungssystems wieder möglich. Für die Überführung des Differentialquotienten in einen Differenzenquotienten soll als erste Methode die Rückwärtsdifferenz als implizites Verfahren benutzt werden. Dabei wird

$$\frac{dz_R}{dt} \approx \frac{z_{Rt} - z_{Rt-\Delta t}}{\Delta t}$$

gesetzt (siehe Abbildung 9.10). Damit lautet der Volumentstromanteil, der die Speicherwir-

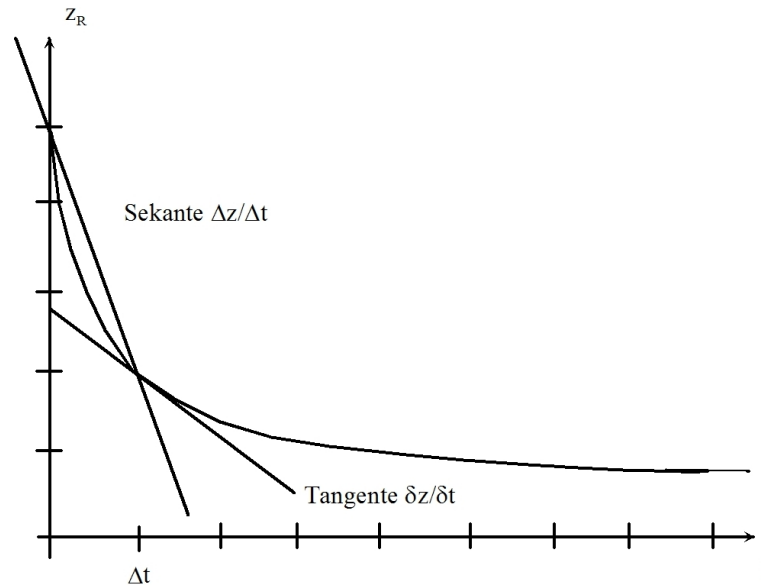


Abbildung 9.10: Verlauf eines Absenkungsvorganges

kung repräsentiert, jetzt

$$\dot{V}_{Zeit} = S \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \frac{(z_{Rt} - z_{Rt-\Delta t})}{\Delta t}$$

Mit der Einführung des so genannten Zeitleitwertes

$$G_{zi} = \frac{S_i \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_i}{\Delta t}$$

wird der Volumenstrom zu:

$$\dot{V}_{Zeit} = G_{zi} \cdot (z_{Rit} - z_{Rit-\Delta t})$$

Dieser repräsentiert die Wassermenge, die infolge der Speicherwirkung vom Grundwasserleiter innerhalb des Zeitschrittes Δt abgegeben oder gespeichert wird. Infolge der Einführung des zeitlichen Differenzenquotienten muss auch der örtliche Strömungsanteil, d.h. die linke Seite der Gleichung, einem Zeitpunkt, bei der Rückwärtsdifferenz dem Zeitpunkt t , zugeordnet werden. Damit erhalten die Knotenpunktgleichungen folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \textbf{Knoten 1:} \quad & (z_{R1} - z_{R0})_t \cdot G_{01t} + (z_{R1} - z_{R2})_t \cdot G_{12t} + (z_{R1t} - z_{R1t-\Delta t}) \cdot G_{z1t} \\ & = -w_0 \cdot 0,01km^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textbf{Knoten 2:} \quad & (z_{R2} - z_{R1})_t \cdot G_{12t} + (z_{R2} - z_{R3})_t \cdot G_{23t} + (z_{R2t} - z_{R2t-\Delta t}) \cdot G_{z2t} \\ & = -w_0 \cdot 0,01km^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textbf{Knoten 3:} \quad & (z_{R3} - z_{R2})_t \cdot G_{23t} + (z_{R3} - z_{R4})_t \cdot G_{34t} + (z_{R3t} - z_{R3t-\Delta t}) \cdot G_{z3t} \\ & = -w_0 \cdot 0,01km^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textbf{Knoten 4:} \quad & (z_{R4} - z_{R3})_t \cdot G_{34t} + (z_{R4} - z_{R5})_t \cdot G_{45t} + (z_{R4t} - z_{R4t-\Delta t}) \cdot G_{z4t} \\ & = -w_0 \cdot 0,01km^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textbf{Knoten 5:} \quad & (z_{R5} - z_{R4})_t \cdot G_{45t} + (z_{R5} - z_{R6})_t \cdot G_{56t} + (z_{R5t} - z_{R5t-\Delta t}) \cdot G_{z5t} \\ & = -w_0 \cdot 0,01km^2 \end{aligned}$$

Die Matrizengleichung für das in fünf Elemente geteilte Strömungsfeld lautet somit:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{01t} \\ +G_{12t} \\ +G_{z1t} \end{pmatrix} & -G_{12t} & 0 & 0 & 0 \\ -G_{12t} & \begin{pmatrix} G_{12t} \\ +G_{23t} \\ +G_{z2t} \end{pmatrix} & -G_{23t} & 0 & 0 \\ 0 & -G_{23t} & \begin{pmatrix} G_{23t} \\ +G_{34t} \\ +G_{z3t} \end{pmatrix} & -G_{34t} & 0 \\ 0 & 0 & -G_{34t} & \begin{pmatrix} G_{34t} \\ +G_{45t} \\ +G_{z4t} \end{pmatrix} & -G_{45t} \\ 0 & 0 & 0 & -G_{45t} & \begin{pmatrix} G_{45t} \\ +G_{56t} \\ +G_{z5t} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} z_{R1t} \\ z_{R2t} \\ z_{R3t} \\ z_{R4t} \\ z_{R5t} \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} -0,06\frac{l}{s} + 3m \cdot G_{01t} + G_{z1t} \cdot z_{R1t-\Delta t} \\ -0,06\frac{l}{s} + G_{z2t} \cdot z_{R2t-\Delta t} \\ -0,06\frac{l}{s} + G_{z3t} \cdot z_{R3t-\Delta t} \\ -0,06\frac{l}{s} + G_{z4t} \cdot z_{R4t-\Delta t} \\ -0,06\frac{l}{s} + 7m \cdot G_{56t} + G_{z5t} \cdot z_{R5t-\Delta t} \end{pmatrix}$$

Die so entstandene Matrizengleichung ist auf Grund der Potentialabhängigkeit der Leitwerte nicht explizit lösbar. Wie bei der Lösung zu Aufgabe 1 (s. S. 312) müssen wieder die Lösungen iterativ herbeigeführt werden. Im ersten Schritt werden die Leitwerte $G_i^{(1)}$ entsprechend den Anfangswasserhöhen ($z_{Rt-\Delta t}$) berechnet. Die Gleichungen zu deren Berechnung können aus der Lösung der Aufgabe 1 (s. S. 312) übernommen werden. Der Unterschied besteht aber darin, dass diesmal keine geschätzten Wasserhöhen für die Berechnung der Transmissibilitäten benutzt werden, sondern für den ersten Zeitschritt die Anfangswasserhöhen (laut Aufgabenstellung z_{R1} bis $z_{R6} = 7m$), für die weiteren Zeitschritte jeweils die Wasserhöhen des vorhergehenden Zeitschrittes.

Man spricht in diesem Zusammenhang von einer äußeren und einer inneren Iteration. Die innere Iteration kennzeichnet die Berechnung der nichtlinearen Koeffizienten des Gleichungssystems auf Grund des nichtlinearen Verhaltens der Transmissibilität. Die äußere Iteration berechnet die Nichtlinearität auf Grund des impliziten Verhaltens der verwendeten Rückwärtsdifferenz.

Für Grundwasserabsenkungsvorgänge bedeutet dies, dass die Transmissibilität und damit auch die Leitwerte zu groß angenommen werden. Die Matrix lässt sich mit diesen Werten lösen, und man erhält eine Wasserhöhe $z_{Rit}^{(1)}$, die gegenüber der wahren Lage zu niedrig ist. Mit dieser ersten Näherung $z_{Rit}^{(1)}$ können verbesserte Leitwerte $G_{it}^{(2)}$ berechnet werden. Sie führen zu einer zweiten Näherung der Wasserhöhe $z_{Rit}^{(2)}$, welche über der wahren Lösung liegt, da die Leitwerte zu klein angenommen wurden und damit zu wenig Abfluss realisiert wurde. Die Näherungslösungen nähern sich der wahren Lösung in Form einer gedämpften Schwingung an. Dieser Iterationsprozess wird so lange durchgeführt, bis die Änderungen zwischen zwei Iterationen eine Fehlerschranke nicht mehr überschreiten. Dann erhält man die Lösung für den Zeitschritt Δt . Trotz der Iteration innerhalb des Zeitschrittes bleibt ein Quantisierungsfehler erhalten. Er wächst proportional mit Δt , da anstatt der Tangente im Punkt t die Sekante zwischen den Punkten t und $t - \Delta t$ berechnet wird. Da sich die Grundwasserströmungsprozesse entsprechend einer abklingenden e -Funktion asymptotisch dem stationären Endzustand nähern, ist der Zeitquantisierungsfehler nicht nur von der Schrittweite Δt , sondern auch von der Dynamik des Prozesses abhängig.

Die nachfolgende Tabelle enthält die Ergebnisse für die quantisierten Zeitschritte und Abbildung 9.11 deren grafische Darstellung.

Zeitpunkt in Tagen	z _{R0}	z _{R1}	z _{R2}	z _{R3}	z _{R4}	z _{R5}	z _{R6}
0,00	3,00	7,00	7,00	7,00	7,00	7,00	7,00
0,25	3,00	6,77	6,99	7,00	7,00	7,00	7,00
0,67	3,00	6,44	6,97	7,00	7,00	7,00	7,00
1,29	3,00	6,04	6,90	6,99	6,99	7,00	7,00
2,54	3,00	5,49	6,74	6,96	6,99	6,99	7,00
5,00	3,00	4,87	6,41	6,85	6,95	6,98	7,00
10,00	3,00	4,48	5,97	6,60	6,85	6,96	7,00
15,00	3,00	4,24	5,66	6,37	6,73	6,92	7,00
30,00	3,00	3,94	5,18	5,93	6,45	6,82	7,00
50,00	3,00	3,77	4,92	5,64	6,23	6,75	7,00
100,00	3,00	3,78	4,93	5,64	6,23	6,74	7,00
stationär	3,00	3,55	4,51	5,25	5,94	6,64	7,00

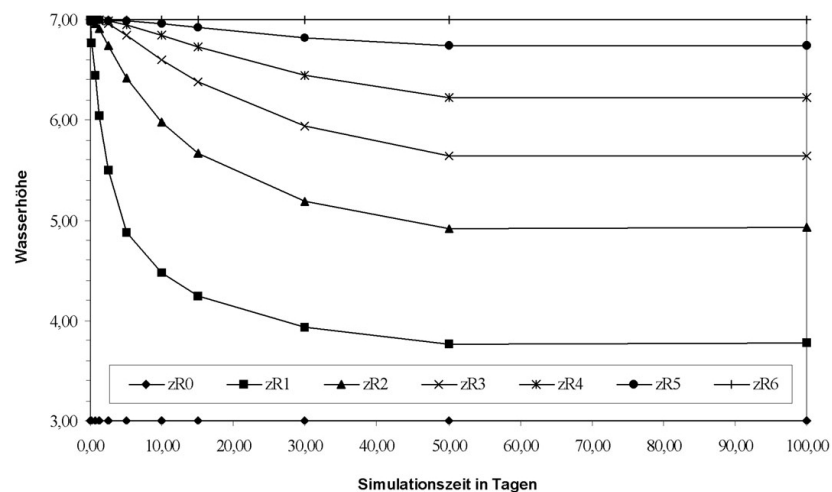


Abbildung 9.11: Wasserstand in Abhängigkeit von Zeit und Ort

• zu Aufgabe 3 (s. S. 308)

Bei dem stationärem Fall kann davon ausgegangen werden, dass der gesamte Betrag des Hangzuflusses durch alle Elemente des Grundwasserleiters, d.h. durch alle quantisierten Leitwerte fließen muss. Dieser Volumenstrom \dot{V}_H ergibt sich aus dem spezifischen Volumenstrom q multipliziert mit der senkrecht durchflossenen Fläche A .

$$\dot{V}_H = q \cdot A$$

Da die Grundwasserstandsänderungen zu ermitteln sind, ist es zweckmäßig, die Wasserstände mit (z_{RnM}) und ohne (z_{RnO}) Tunneleinbau zu berechnen. Durch den Tunneleinbau wird ein stellenweiser Wechsel zwischen gespanntem und ungespanntem Grundwasserleiter verursacht (siehe Abbildung 9.12).

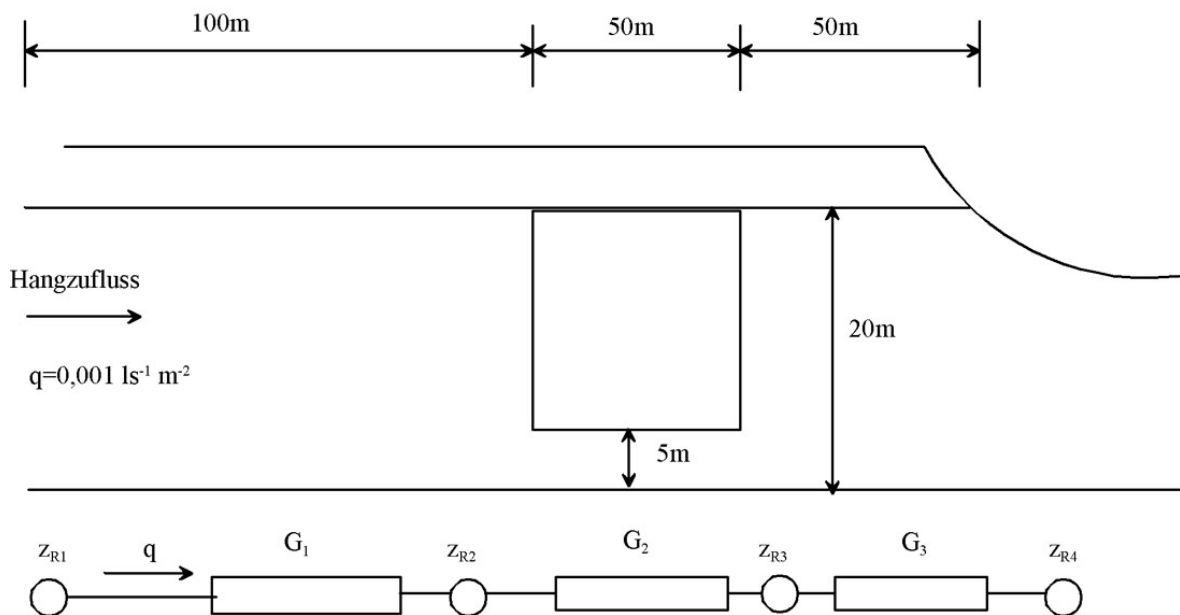


Abbildung 9.12: Schematisierung des Grundwasserleiters mit Tunneleinbau

Die Differenz der Wasserstände zwischen zwei Knoten wird bei dem betrachteten stationären Fließprozess durch den fließenden Volumenstrom \dot{V}_H und den wirksamen Leitwert bestimmt.

$$G_{n,n-1} \cdot (z_{Rn} - z_{Rn-1}) = \dot{V}_H$$

Grundwasserstände	
ohne Tunneleinbau	mit Tunneleinbau
$z_{R4O} = \text{const.}$	$z_{R4M} = \text{const.}$
$z_{R3O} = z_{R4O} + \frac{\dot{V}_H}{G_{3O}}$	$z_{R3M} = z_{R4M} + \frac{\dot{V}_H}{G_{3M}}$
$z_{R2O} = z_{R3O} + \frac{\dot{V}_H}{G_{2O}}$	$z_{R2M} = z_{R3M} + \frac{\dot{V}_H}{G_{2M}}$
$z_{R1O} = z_{R2O} + \frac{\dot{V}_H}{G_{1O}}$	$z_{R1M} = z_{R2M} + \frac{\dot{V}_H}{G_{1M}}$

Allgemein kann angenommen werden, dass in dieser Aufgabenstellung ein ungeschichteter Grundwasserleiter vorliegt. Unter Beachtung, dass sowohl gespannte als auch ungespannte Strömungsverhältnisse auftreten können, werden die hydraulischen Leitwerte wie folgt berechnet. Gleichzeitig soll die Breite entsprechend des Quantisierungsschemas möglichst groß gewählt werden (z. B. 100m):

$$G = \frac{k \cdot D \cdot b}{l} = \frac{T \cdot b}{l}$$

Zwischen den Quantisierungspunkten soll in erster Näherung eine ortsunabhängige Transmissibilität herrschen.

$$G_n = \frac{k \cdot D_n \cdot b}{l_n} = \frac{T_n \cdot b}{l_n}$$

Hydraulische Leitwerte		
ohne Tunneleinbau		mit Tunneleinbau
$G_{3O} = \frac{k \cdot z_{R3O} \cdot b}{l_3}$	Übergang zu gespannten Strömungsverhältnissen	$G_{3M} = \frac{k \cdot z_{R3M} \cdot b}{l_3}$
$D = z_{R2O}$		$D = M_{2M}$
$G_{2O} = \frac{k \cdot z_{R2O} \cdot b}{l_2}$		$G_{2M} = \frac{k \cdot M_{2M} \cdot b}{l_2}$
$G_{1O} = \frac{k \cdot z_{R1O} \cdot b}{l_1}$		$G_{1M} = \frac{k \cdot z_{R1M} \cdot b}{l_1}$

Aus diesen Beziehungen sieht man, dass auf alle Fälle gilt:

$$G_{3O} = G_{3M}$$

da $z_{R2O} = 4 \cdot M_{2M}$ ist, gilt:

$$G_{2O} = 4 \cdot G_{2M}$$

Daraus ist zu erkennen, dass der Leitwert G_{2M} (mit Tunneleinbau) viermal kleiner als G_{2O} (ohne Tunneleinbau) ist.

Für den Fall, dass die Grundwasserstandsänderung

$$\Delta z_{Rn} = |z_{RnO} - z_{RnM}| \ll z_{RnO}$$

ist, gilt:

$$G_{1O} \approx G_{1M}$$

Für eine genauere Berechnung sollte der G -Wert aus dem harmonischen Mittel der T -Werte an den Knoten berechnet werden:

$$G_{n,n+1} = \frac{T_n \cdot T_{n+1} \cdot b}{(T_n + T_{n+1}) \cdot l_n}$$

Damit und unter der Voraussetzung, dass $\Delta z_{R4} = 0$ (RB 1. Art) lassen sich folgende Grundwasserstandsänderungen berechnen:

$$G_{3M} = G_{3O}$$

$$z_{R3M} = z_{R4M} + \frac{\dot{V}}{G_{3M}}$$

$$z_{R3M} = z_{R4O} + \Delta z_{R4} + \frac{\dot{V}}{G_{3O}}$$

$$-z_{R3O} = -z_{R4O} - \frac{\dot{V}_H}{G_{3O}}$$

$$\Delta z_{R3} = z_{R3M} - z_{R3O} = 0$$

$$z_{R3M} = z_{R3O}$$

$$z_{R2M} = z_{R3M} + \frac{\dot{V}}{G_{2M}}$$

$$z_{R2M} = z_{R3O} + \Delta z_{R3} + \frac{\dot{V} \cdot 4}{G_{2O}}$$

$$-z_{R2O} = -z_{R3O} - \frac{\dot{V}_H}{G_{2O}}$$

$$\Delta z_{R2} = z_{R2M} - z_{R2O}$$

$$= \dot{V}_H \frac{3}{G_{2O}}$$

$$\Delta z_{R2} = q \cdot A \cdot \frac{3}{G_{2O}}$$

$$z_{R1M} = z_{R2M} + \frac{\dot{V}}{G_{1M}}$$

$$z_{R1M} = z_{R2O} + \Delta z_{R2} + \frac{\dot{V}}{G_{1O}}$$

$$-z_{R1O} = -z_{R2O} - \frac{\dot{V}_H}{G_{1O}}$$

$$\Delta z_{R1} = z_{R1M} - z_{R1O}$$

$$\Delta z_{R1} = \Delta z_{R2}$$

$$G_{20} = \frac{k \cdot z_{R2O} \cdot b}{l_2}$$

$$= \frac{10^{-4}m \cdot 20m \cdot 100m}{s \cdot 50m}$$

$$G_{20} = 4 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s}$$

$$\Delta z_{R2} = \frac{q \cdot A \cdot 3}{G_{20}}$$

$$= \frac{10^{-6}m^3 \cdot 20m \cdot 100m \cdot 3 \cdot s}{s \cdot m^2 \cdot 4 \cdot 10^{-3}m^2}$$

$$\Delta z_{R2} = 1,5m$$

Damit entsteht durch den Hangzufluss von $q = 10^{-6} \frac{m^3}{s \cdot m^2}$ ein Aufstau an den Punkten z_{R2} und z_{R1} um jeweils $1,5m$.

• zu Aufgabe 4 (s. S. 308)

- (a) Ein einfaches Quantisierungsschema für die Untersuchung zur Durchströmung des Deiches enthält für jedes Element mindestens einen Strömungswiderstand (hydraulischen Leitwert).

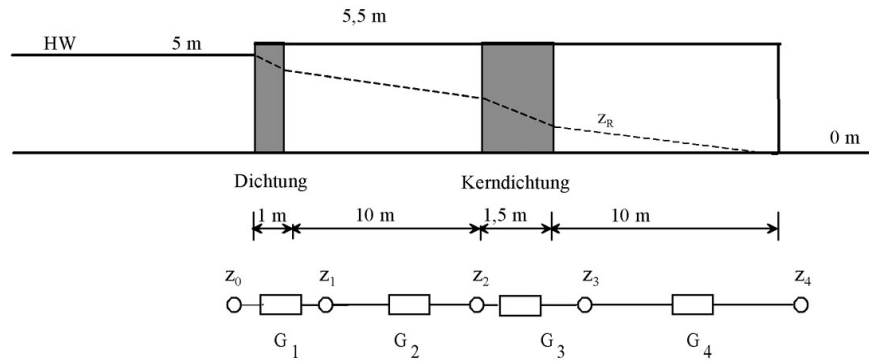


Abbildung 9.13: Deich mit Kerndichtung und Quantisierungsschema

- (b) Für den stationären Fall genügt die Betrachtung der Leitwerte, da in diesem Zeitabschnitt die innerhalb des Deiches strömende Wassermenge zeitlich konstant ist. Somit treten keine Be- oder Entwässerungseffekte auf.

Für die Berechnung dieser Kette gelten folgende Gleichungen:

$$\dot{V} = (z_0 - z_1)G_1$$

$$\dot{V} = (z_1 - z_2)G_2$$

$$\dot{V} = (z_2 - z_3)G_3$$

$$\dot{V} = (z_3 - z_4)G_4$$

z_0 und z_4 wirken als Randbedingungen, d.h. deren Werte sind unabhängig vom Strömungszustand innerhalb des Deiches.

$$z_{R0} = 5m$$

$$z_{R4} = 0m$$

Die Leitwerte berechnen sich wie folgt:

$$G_n = k_n \cdot \frac{z_{Rn} \cdot b}{l_n}$$

Da die Werte pro Meter Deichlänge zu berechnen sind, wird $b = 1m$ gesetzt.

z_{Rn} ist zu Beginn der Rechnung nicht bekannt. Deshalb muss mit einem fiktiven Mittelwert bei der T -Wert-Bestimmung gerechnet werden. Dieser ergibt sich aus dem arithmetischen Mittel zwischen den beiden Randbedingungen.

$$z_{Rn}^{(1)} = \frac{z_{R0} + z_{R4}}{2}$$

$$z_{Rn}^{(1)} = 2,5m$$

Damit ist:

$$G_1^{(1)} = k_1 \cdot \frac{z_{R1} \cdot b}{l_1} = \frac{10^{-5} \frac{m}{s} \cdot 2,5m \cdot 1m}{1m} = 2,5 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$$

$$G_2^{(1)} = k_2 \cdot \frac{z_{R2} \cdot b}{l_2} = \frac{10^{-4} \frac{m}{s} \cdot 2,5m \cdot 1m}{10m} = 2,5 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$$

$$G_3^{(1)} = k_3 \cdot \frac{z_{R3} \cdot b}{l_3} = \frac{10^{-5} \frac{m}{s} \cdot 2,5m \cdot 1m}{1,5m} = 1,7 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$$

$$G_4^{(1)} = k_4 \cdot \frac{z_{R4} \cdot b}{l_4} = \frac{10^{-4} \frac{m}{s} \cdot 2,5m \cdot 1m}{10m} = 2,5 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$$

Generell gilt:

$$R_n = \frac{1}{G_n}$$

$$Q = q \cdot A = \dot{V}$$

Die Gesamtwassermenge \dot{V} , die pro Meter Deichlänge während des stationären Zustandes in den Polder fließt, ergibt sich:

$$z_{R3} = z_{R4} + R_4 \cdot \dot{V} = R_4 \cdot \dot{V}$$

$$z_{R2} = z_{R3} + R_3 \cdot \dot{V} = R_4 \cdot \dot{V} + R_3 \cdot \dot{V}$$

$$z_{R1} = z_{R2} + R_2 \cdot \dot{V} = R_4 \cdot \dot{V} + R_3 \cdot \dot{V} + R_2 \cdot \dot{V}$$

$$z_{R0} = z_{R1} + R_1 \cdot \dot{V} = R_4 \cdot \dot{V} + R_3 \cdot \dot{V} + R_2 \cdot \dot{V} + R_1 \cdot \dot{V} = 5m$$

$$\begin{aligned} \dot{V}^{(1)} &= \frac{5m}{R_4 + R_3 + R_2 + R_1} = \frac{5m}{(4 + 5,9 + 4 + 4) \cdot 10^{-4} \frac{s}{m^2}} \\ &\approx 0,028 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{s} = 0,028 \frac{l}{s} \end{aligned}$$

Das Ergebnis kann man auch schneller erhalten, wenn man die Gesetze der Reihenschaltung von Widerständen und das dynamische Grundgesetz benutzt. Danach addieren sich in Reihe geschaltete Widerstände, und der durchfließende Volumenstrom ist

proportional zu dem Potentialabbau (Potentialdifferenz) über dem Widerstand und indirekt proportional zu dessen Wert.

Dieser berechnete Volumenstrom stellt eine erste Näherung dar, da mit geschätzten T -Werten gearbeitet wurde. Setzt man diesen \dot{V} -Wert in die Gleichungen ein, so erhält man verbesserte $z_{Rn}^{(i)}$ -Werte, die auch wieder zu verbesserten T - und \dot{V} -Werten führen.

$$z_{R3}^{(2)} = z_{R4} + R_4 \cdot \dot{V} = \frac{0,028 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{s}}{2,5 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}} = 1,12m$$

$$z_{R2}^{(2)} = z_{R3}^{(2)} + R_3 \cdot \dot{V} = R_4 \cdot \dot{V} + R_3 \cdot \dot{V} = 1,12m + \frac{0,028 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{s}}{1,7 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}} = 2,76m$$

$$z_{R1}^{(2)} = z_{R2}^{(2)} + R_2 \cdot \dot{V} = R_4 \cdot \dot{V} + R_3 \cdot \dot{V} + R_2 \cdot \dot{V} = 2,76m + \frac{0,028 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{s}}{2,5 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}} = 3,88m$$

$$z_{R0}^{(2)} = z_{R1}^{(2)} + R_1 \cdot \dot{V} = R_4 \cdot \dot{V} + R_3 \cdot \dot{V} + R_2 \cdot \dot{V} + R_1 \cdot \dot{V} = 5,00m$$

$$\begin{aligned} \dot{V}^{(2)} &= \frac{5m}{R_4^{(2)} + R_3^{(2)} + R_2^{(2)} + R_1^{(2)}} = \frac{5m}{(17,85 + 7,60 + 3,00 + 2,25) \cdot 10^4 \frac{s}{m^2}} \\ &= 32,6 \frac{l}{s} \end{aligned}$$

Man sieht, dass dieser Wert um ca. 13% höher als der der ersten Iteration ist. Dieser höhere Wert wird aber wieder zu groß sein, so dass eine oszillierende Anpassung erfolgt. Die Berechnung von z_{R0} erfolgte zur Kontrolle und es ergibt sich richtigerweise der Wert des Oberwassers als Randbedingung.

• zu Aufgabe 5 (s. S. 308)

- (a) Die Quantisierung erfolgt an Hand der vorgegebenen Geometrie. Zu beachten ist, dass ein Knoten zur Nachbildung der unendlichen Ausdehnung des Grundwasserleiters in der flussabgewandten Seite erfolgt. Die instationären Speichervorgänge werden durch entsprechend angeordnete Kapazitäten realisiert.

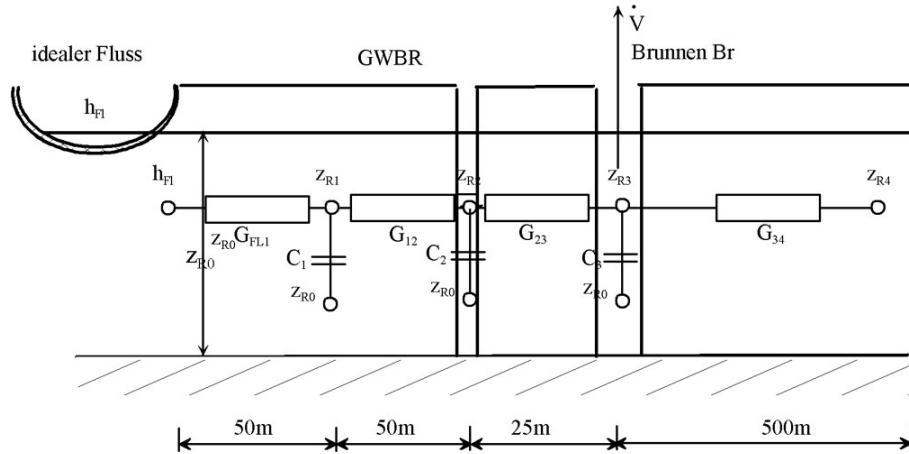


Abbildung 9.14: Darstellung des quantisierten Grundwasserleiters

- (b) Für die Knoten ergibt sich:

$$\textbf{Knoten 1:} \quad (z_{R1} - h_{Fl}) \cdot G_{Fl1} + (z_{R1} - z_{R2}) \cdot G_{12} + C_1 \frac{\partial z_{R1}}{\partial t} = 0$$

$$\textbf{Knoten 2:} \quad (z_{R2} - z_{R1}) \cdot G_{12} + (z_{R2} - z_{R3}) \cdot G_{23} + C_2 \frac{\partial z_{R2}}{\partial t} = 0$$

$$\textbf{Knoten 3:} \quad (z_{R3} - z_{R2}) \cdot G_{23} + (z_{R3} - z_{R4}) \cdot G_{34} + C_3 \frac{\partial z_{R3}}{\partial t} = \dot{V}$$

bzw. nach Wasserständen geordnet und unter Einführung des Zeitleitwertes ergibt sich:

$$G_{Zn} = C_n \frac{z_{Rnt} - z_{Rnt-\Delta t}}{\Delta t}$$

$$\begin{aligned} \textbf{Knoten 1:} \quad & z_{R1t} \cdot (G_{Fl1} + G_{12} + G_{Z1}) + z_{R2t} \cdot (-G_{23}) \\ & = h_{Fl} \cdot G_{Fl1} + z_{R1t-\Delta t} \cdot G_{Z1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textbf{Knoten 2:} \quad & z_{R1t} \cdot (-G_{12}) + z_{R2t} \cdot (G_{12} + G_{23} + G_{Z2}) + z_{R3t} \cdot (-G_{23}) \\ & = z_{R2t-\Delta t} \cdot G_{Z2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textbf{Knoten 3:} \quad & z_{R2t} \cdot (-G_{23}) + z_{R3t} \cdot (G_{23} + G_{34} + G_{Z3}) \\ & = z_{R4t} \cdot G_{34} + z_{R3t-\Delta t} \cdot G_{Z3} + \dot{V} \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} (G_{Fl1} + G_{12} + G_{Z1}) & -G_{23} & 0 \\ -G_{12} & G_{12} + G_{23} + G_{Z2} & -G_{23} \\ 0 & -G_{23} & G_{23} + G_{34} + G_{Z3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} z_{R1t} \\ z_{R2t} \\ z_{R3t} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} h_{Fl} \cdot G_{Fl1} + z_{R1t-\Delta t} \cdot G_{Z1} \\ z_{R2t-\Delta t} \cdot G_{Z2} \\ z_{R4t} \cdot G_{34} + z_{R3t-\Delta t} \cdot G_{Z3} + \dot{V} \end{pmatrix}$$

(c) Die Hauptaufgabe besteht in der Berechnung der Leitwerte.

Mit der Anfangswasserhöhe $z_{Rt=0} = 10m$ als geschätzte Wasserhöhenverteilung z_{Rnt} ergibt sich folgende erste Transmissibilitätsverteilung:

$$T_1^{(1)} = k \cdot z_{R1} = 0,01 \frac{m^2}{s}$$

$$T_2^{(1)} = k \cdot z_{R2} = 0,01 \frac{m^2}{s}$$

$$T_3^{(1)} = k \cdot z_{R3} = 0,01 \frac{m^2}{s}$$

Daheraus lassen sich die Leitwerte nach obiger Formel berechnen:

$$G_n = T_n \cdot b / \Delta x_n$$

$$G_{n,n+1} = \frac{G_n \cdot G_{n+1}}{G_n + G_{n+1}}$$

$$= \frac{\frac{T_n}{\Delta x_n} \cdot \frac{T_{n+1}}{\Delta x_{n+1}}}{\frac{T_n}{\Delta x_n} + \frac{T_{n+1}}{\Delta x_{n+1}}} \cdot b$$

$G_{Fl1}^{(1)}$	$G_{12}^{(1)}$	$G_{23}^{(1)}$	$G_{34}^{(1)}$
$0,0002 \frac{m^2}{s}$	$0,0002 \frac{m^2}{s}$	$0,0004 \frac{m^2}{s}$	$0,00002 \frac{m^2}{s}$

Die Zeitleitwerte ergeben sich zu:

$$G_{Zn} = \frac{S \cdot b \cdot (\Delta x_n + \Delta x_{n+1})}{2 \cdot \Delta t}$$

Da es sich hier um einen ungespannten Grundwasserleiter geringer Mächtigkeit handelt, wird $S = n_0$ gesetzt.

G_{Z1}	G_{Z2}	G_{Z3}
$0,000145 \frac{m^2}{s}$	$0,000109 \frac{m^2}{s}$	$0,00076 \frac{m^2}{s}$

Damit erhält die Matrixgleichung folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} 0,000545 \frac{m^2}{s} & -0,0002 \frac{m^2}{s} & 0 \\ -0,0002 \frac{m^2}{s} & 0,000709 \frac{m^2}{s} & -0,0004 \frac{m^2}{s} \\ 0 & -0,0004 \frac{m^2}{s} & 0,00118 \frac{m^2}{s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_{R1t} \\ z_{R2t} \\ z_{R3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,00345 \frac{m^3}{s} \\ 0,00109 \frac{m^3}{s} \\ 0,00680 \frac{m^3}{s} \end{pmatrix}$$

Damit ergeben sich die Wasserstände an den Knoten in erster Näherung wie folgt:

$$z_{R1t}^{(1)} = 9,75m$$

$$z_{R2t}^{(1)} = 9,32m$$

$$z_{R3t}^{(1)} = 8,92m$$

Mit diesen Wasserständen müssen neue T -Werte berechnet werden:

$$T_1^{(2)} = k \cdot z_{R1} = 0,01 \frac{m^2}{s}$$

$$T_2^{(2)} = k \cdot z_{R2} = 0,009 \frac{m^2}{s}$$

$$T_3^{(2)} = k \cdot z_{R3} = 0,009 \frac{m^2}{s}$$

Dies führt wiederum zu verbesserten Leitwerten:

$G_{F11}^{(2)}$	$G_{12}^{(2)}$	$G_{23}^{(2)}$	$G_{34}^{(2)}$
$0,000197 \frac{m^2}{s}$	$0,0002 \frac{m^2}{s}$	$0,00036 \frac{m^2}{s}$	$0,0000189 \frac{m^2}{s}$

Die Zeitleitwerte müssen nicht iteriert werden, da hier kein geschichteter Grundwasserleiter vorliegt und es sich noch um den selben Zeitschritt handelt.

Die Matrixgleichung erhält damit die Werte:

$$\begin{pmatrix} 0,000533 \frac{m^2}{s} & -0,00019 \frac{m^2}{s} & 0 \\ -0,00019 \frac{m^2}{s} & 0,00066 \frac{m^2}{s} & -0,00036 \frac{m^2}{s} \\ 0 & -0,00036 \frac{m^2}{s} & 0,00114 \frac{m^2}{s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_{R1t} \\ z_{R2t} \\ z_{R3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,00342 \frac{m^3}{s} \\ 0,00109 \frac{m^3}{s} \\ 0,00678 \frac{m^3}{s} \end{pmatrix}$$

Die Lösung ergibt sich zu:

$$z_{R1t}^{(2)} = 9,76m$$

$$z_{R2t}^{(2)} = 9,33m$$

$$z_{R3t}^{(2)} = 8,91m$$

Man erkennt, dass sich das Ergebnis innerhalb der Iteration nicht wesentlich, sondern nur im Zentimeterbereich, geändert hat. Dieses gute Iterationsverhalten ist auf die Nichtlinearität des Gleichungssystems zurückzuführen. Bei Wiederanstiegsproblemen wirkt sich die Nichtlinearität demgegenüber divergierend aus.

Der Grundwasserspiegel hat nach einem Tag demzufolge folgenden Verlauf (siehe Abbildung 9.15):

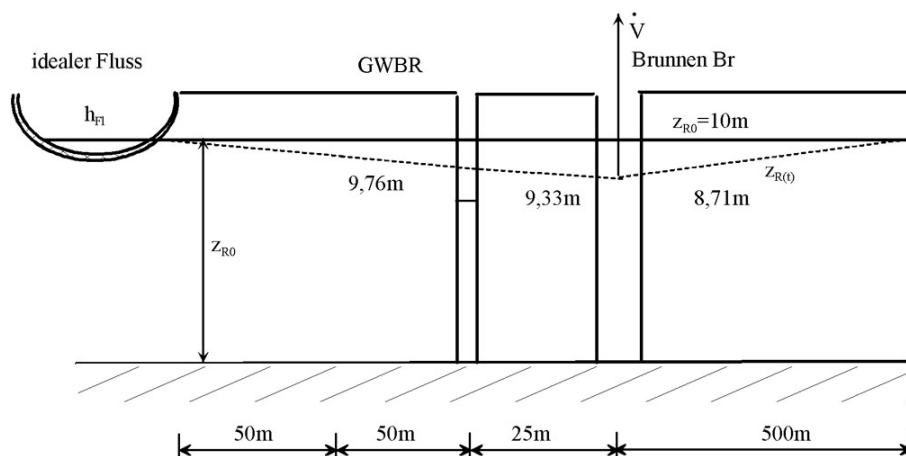


Abbildung 9.15: Grundwasserstand nach einem Tag

- zu Aufgabe 6 (s. S. 308)

(a) Wir betrachten folgendes Schema:

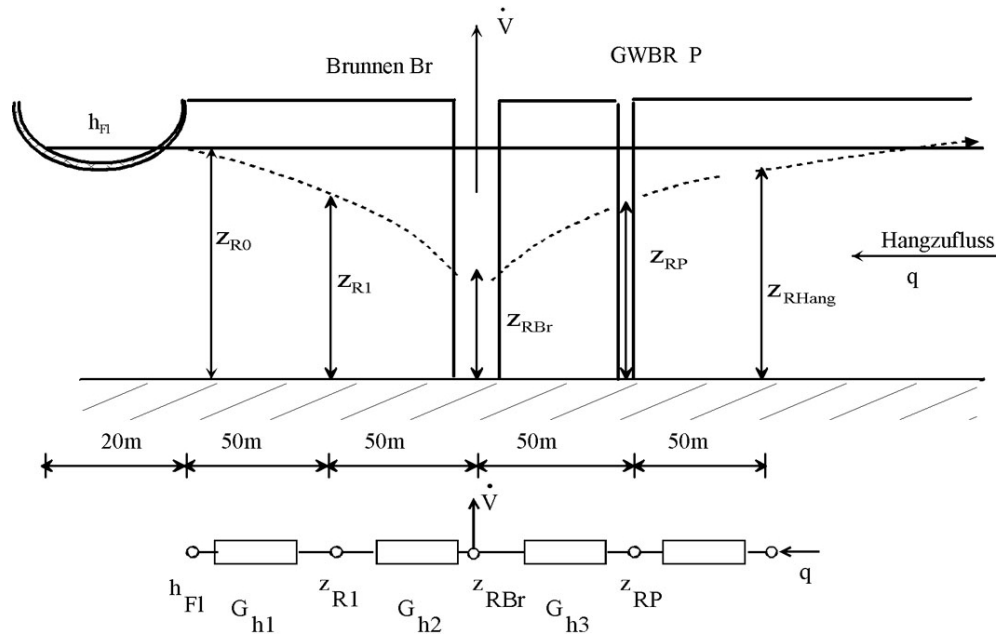


Abbildung 9.16: Grundwasserleiter mit Quantisierungsschema

(b) Zur Berechnung der Wasserstände im Quantisierungsschema der Abbildung 9.16 werden die Bilanzgleichungen an jedem Knotenpunkt aufgestellt. Da es sich laut Aufgabenstellung um eine stationäre Strömung handelt, sind die Speichereffekte nicht zu berücksichtigen.

Knoten 1: $(z_{R1} - h_{Fl})G_{h1} + (z_{R1} - z_{RBr})G_{h2} = 0$

Knoten 2: $(z_{RBr} - z_{R1})G_{h2} + (z_{RBr} - z_{RP})G_{h3} + \dot{V}_{Br} = 0$

Knoten 3: $(z_{RP} - z_{RBr})G_{h3} - \dot{V}_{Hang} = 0$

Der Hangzufluss wird durch den hydraulischen Leitwert G_{h4} nicht beeinflusst, da keine Verzweigung auftritt. Damit kann auch der rechte Knoten außer Betracht gelassen werden.

Die nach Wasserständen geordneten Knotengleichungen lauten:

$$\textbf{Knoten 1: } z_{R1}(G_{h1} + G_{h2}) + z_{RBr}(-G_{h2}) = h_{Fl}G_{hl}$$

$$\textbf{Knoten 2: } z_{R1}(-G_{h2}) + z_{RBr}(G_{h2} + G_{h3}) + z_{RP}(-G_{h3}) = -\dot{V}_{Br}$$

$$\textbf{Knoten 3: } z_{RBr}(-G_{h3}) + z_{RP}(G_{h3}) = \dot{V}_{Hang}$$

oder in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} (G_{h1} + G_{h2}) & (-G_{h2}) & 0 \\ (-G_{h2}) & (G_{h2} + G_{h3}) & (-G_{h3}) \\ 0 & (-G_{h3}) & (G_{h3}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_{R1} \\ z_{RBr} \\ z_{RP} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{Fl}G_{hl} \\ -\dot{V}_{Br} \\ \dot{V}_{Hang} \end{pmatrix}$$

Dieses System von drei Gleichungen mit drei Unbekannten lässt sich z. B. nach dem Einsetzverfahren lösen.

Man kann Knotengleichung 3 nach dem Brunnenwasserstand z_{RBr} auflösen:

$$\textbf{Knoten 3: } z_{RBr} = \frac{\dot{V}_{Hang} + z_{RP}(G_{h3})}{G_{h3}}$$

$$\begin{aligned} \textbf{Knoten 1: } z_{R1}(G_{h1} + G_{h2}) - \frac{\dot{V}_{Hang} + z_{RP}(G_{h3})}{G_{h3}}(-G_{h2}) &= h_{Fl}G_{hl} \\ z_{R1}(G_{h1} + G_{h2}) - \frac{\dot{V}_{Hang}(-G_{h2})}{G_{h3}} + z_{RP}(-G_{h2}) &= h_{Fl}G_{hl} \end{aligned}$$

$$\textbf{Knoten 2: } z_{R1}(-G_{h2}) - \frac{\dot{V}_{Hang} + z_{RP}(G_{h3})}{G_{h3}}(G_{h2} + G_{h3}) + z_{RP}(-G_{h3}) = -\dot{V}_{Br}$$

bzw. umgeformt:

$$z_{R1} = \frac{\dot{V}_{Br}}{G_{h2}} - \frac{\dot{V}_{Hang}(G_{h2} + G_{h3})}{G_{h2} \cdot G_{h3}} + z_{RP}$$

Die Gleichung von Knoten 2 in die Gleichung von Knoten 1 eingesetzt ergibt:

$$-\frac{\dot{V}_{Hang}(G_{h2} + G_{h3}) \cdot (G_{h1} + G_{h2})}{G_{h2} \cdot G_{h3}} + z_{RP}(-G_{h2}) = h_{Fl}G_{hl} \frac{\dot{V}_{Hang}(-G_{h2})}{G_{h3}}$$

Diese Gleichung zusammengefasst liefert:

$$\begin{aligned} z_{RP} &= h_{Fl} - \frac{\dot{V}_{Br}(G_{h1} + G_{h2})}{G_{h1} \cdot G_{h2}} + \frac{\dot{V}_{Hang}(G_{h2} + G_{h3}) \cdot (G_{h1} + G_{h2})}{G_{h1} \cdot G_{h2} \cdot G_{h3}} + \frac{\dot{V}_{Hang}(-G_{h2})}{G_{h1} \cdot G_{h3}} \\ z_{RP} &= h_{Fl} - \frac{\dot{V}_{Br}(G_{h1} + G_{h2})}{G_{h1} \cdot G_{h2}} + \dot{V}_{Hang} \left(\frac{1}{G_{h1}} + \frac{1}{G_{h2}} + \frac{1}{G_{h3}} \right) \end{aligned}$$

Die Absenkung gegenüber dem stationären Ausgangszustand, d.h. Grundwasserspiegel gleich Flusswasserspiegel, ergibt sich am Pegel zu:

$$z_{RP} = h_{Fl} - \dot{V}_{Br}(R_{h1} + R_{h2}) + \dot{V}_{Hang}(R_{h1} + R_{h2} + R_{h3})$$

$$s = h_{Fl} - z_{RP} = \dot{V}_{Br}(R_{h1} + R_{h2}) - \dot{V}_{Hang}(R_{h1} + R_{h2} + R_{h3})$$

Man beachte, dass trotz der in den Zwischenschritten etwas komplizierten Gleichungen ein relativ einfaches und leicht interpretierbares Ergebnis erhalten wird.

Der Grundwasserspiegel, identisch mit dem Flusswasserspiegel ($h_{Fl} = z_{R0}$), wird um den Anteil, der durch den Förderstrom des Brunnens hervorgerufen wird, vermindert und durch den des Hangzuflusses erhöht. Die Absenkung durch den Brunnen hätte man auch direkt aus dem Ersatzschaltbild ablesen können, denn der Quotient drückt nichts anderes aus als die Reihenschaltung der beiden Leitwerte G_{h1} und G_{h2} aus. Würde keine Förderung stattfinden, käme es, hervorgerufen durch den Hangzufluss, zu einem Grundwasseranstieg.

Zur überschlägigen Prüfung von derartigen Gleichungen sollte man feststellen, ob die Dimensionen der einzelnen Summanden stimmen. Des Weiteren darf in Gleichungen solcher Widerstandsnetzwerke ein Widerstand oder Leitwert nicht mit sich selbst multipliziert werden (G_n^2 bzw. R_n^2 sind unzulässig!).

- (c) Die hydraulischen Leitwerte berechnen sich aus der Reihenschaltung der Teilleitwerte der Planungselemente:

$$G_{hn} = \frac{G_{hn} \cdot G_{hn+1}}{G_{hn} + G_{hn+1}}$$

$$= k \cdot \frac{z_{Rn} \cdot z_{Rn+1} \cdot b}{(z_{Rn} + z_{Rn+1}) \cdot \frac{\Delta x}{2}}$$

$$G_{hn} = k \cdot \frac{z_{Rn} \cdot z_{Rn+1} \cdot 2b}{(z_{Rn} + z_{Rn+1}) \cdot \Delta x_n}$$

Als wirksame Länge wird jeweils die halbe Ortsquantisierungsschrittweite angesetzt, da jedes Planungselement zwei Teilleitwerte besitzt.

Für die einzelnen Leitwerte gilt:

$$G_{h1} = \frac{h_{Fl} \cdot z_{R1}}{h_{Fl} + z_{R1}} \cdot 4 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s}$$

$$G_{h2} = \frac{z_{R1} \cdot z_{RBr}}{z_{R1} + z_{RBr}} \cdot 4 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s}$$

$$G_{h3} = \frac{z_{RP} \cdot z_{RBr}}{z_{RP} + z_{RBr}} \cdot 4 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s}$$

Für die erste Näherung dieser nichtlinearen hydraulischen Leitwerte setzt man z.B. die Ausgangswasserhöhe von $z_{R0} = 15m$ für alle Knoten ($z_{R1}^{(1)} = z_{RBr}^{(1)} = z_{RP}^{(1)} = 15m$) an und erhält:

$$G_{h1}^{(1)} = G_{h2}^{(1)} = G_{h3}^{(1)} = 3 \cdot 10^{-2} \frac{m^2}{s}$$

Mit der Lösung von Aufgabe 6b (s. S. 335) ergibt sich ein Wasserstand am GWBR P in erster Näherung zu:

$$\begin{aligned} z_{RP}^{(1)} &= h_{Fl} - \frac{\dot{V}_{Br}(G_{h1} + G_{h2})}{G_{h1} \cdot G_{h2}} + \dot{V}_{Hang} \left(\frac{1}{G_{h1}} + \frac{1}{G_{h2}} + \frac{1}{G_{h3}} \right) \\ &= 15m - \frac{50 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{s} \cdot 2}{3 \cdot 10^{-2} \frac{m^2}{s}} + 0,001 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{s \cdot m^2} \cdot 100m \cdot 15m \frac{3}{3 \cdot 10^{-2} \frac{m^2}{s}} \\ &= 15m - 3,333m + 0,15m \\ z_{RP}^{(1)} &= 11,82m \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis stellt eine erste Näherung dar, da für die Leitwerte eine konstante durchströmte Mächtigkeit von $15m$ angenommen wurde. Mit der erzielten Lösung müssten jetzt neue Wasserstände $z_{R1}^{(2)}$ und $z_{RBr}^{(2)}$ und daraus neue Leitwerte berechnet werden, daraus wiederum ein neuer Wasserstand $z_{RP}^{(2)}$ am GWBR P .

- (d) Die beiden Effekte Kolmation und Unvollkommenheit werden durch zusätzliche Strömungswiderstände bzw. Leitwerte berücksichtigt (siehe Abbildung 9.17):
Damit ergibt sich eine neue Knotenpunktgleichung für den Knoten Fl':

Knoten Fl' $(h_{Fl} - h_{Fl})G_{Fl} + (h_{Fl} - z_{R1})G_{h1} = 0$

Knoten 1: $(z_{R1} - h_{Fl})G_{h1} + (z_{R1} - z_{RBr})G_{h2} = 0$

Knoten 2: $(z_{RBr} - z_{R1})G_{h2} + (z_{RBr} - z_{RP})G_{h3} + \dot{V}_{Br} = 0$

Knoten 3: $(z_{RP} - z_{RBr})G_{h3} - \dot{V}_{Hang} = 0$

Damit erhält man vier Gleichungen mit vier Unbekannten. Die nach Wasserständen geordneten Knotengleichungen lauten:

Knoten Fl' $h_{Fl}(G_{Fl} + G_{h1}) + z_{R1}(-G_{h1}) = h_{Fl}G_{Fl}$

Knoten 1: $h_{Fl}(-G_{h1}) + z_{R1}(G_{h1} + G_{h2}) + z_{RBr}(-G_{h2}) = 0$

Knoten 2: $z_{R1}(-G_{h1} - G_{h2}) + z_{RBr}(G_{h2} + G_{h3}) + z_{RP}(-G_{h3}) = -\dot{V}_{Br}$

Knoten 3: $z_{RBr}(-G_{h3}) + z_{RP}(G_{h3}) = \dot{V}_{Hang}$


$$\begin{pmatrix} G_{Fl} + G_{h1} & -G_{h1} & 0 & 0 \\ -G_{h1} & G_{h1} + G_{h2} & -G_{h2} & 0 \\ 0 & -G_{h2} & G_{h2} + G_{h3} & -G_{h3} \\ 0 & 0 & -G_{h3} & G_{h3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{Fl} \\ z_{R1} \\ z_{R2} \\ z_{R3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{Fl} G_{Fl} \\ 0 \\ -\dot{V}_{Br} \\ \dot{V}_{Hang} \end{pmatrix}$$
$$G_{1,2} = \frac{1}{R_1 + R_2} = \frac{G_1 \cdot G_2}{G_1 + G_2}$$

$$G_{Fl} = \frac{1}{R_{Kolm} + R_{unvoll}} = \frac{G_{Kolm} \cdot G_{unvoll}}{G_{Kolm} + G_{unvoll}}$$

Der Widerstand der Kolmationsschicht berechnet sich entsprechend den geometrischen Verhältnissen und der Durchlässigkeit.

Der allgemeine hydraulische Widerstand ist geprägt durch die spezifische Leitfähigkeit (k -Wert), die senkrecht durchströmte Fläche (A_{\perp} = Bogenlänge der Flusssohle B_{Fl}) multipliziert

mit einer Breite b) und die Länge (d = Dicke der Kolmationsschicht):

$$R_{hydr} = \frac{1}{k} \cdot \frac{d}{A_{\perp}}$$

Mit der Bogenlänge der Flusssohle ($A_{\perp} = \frac{\pi}{2} B_{Fl}$)

$$\begin{aligned} R_{Kolm} &= \frac{1}{k_{Kolm}} \cdot \frac{M_{Kolm}}{\frac{\pi}{2} B_{Fl} \cdot b} \\ &= \frac{1}{5 \cdot 10^{-5} \frac{m}{s}} \frac{1m}{10m \cdot 100m} \\ R_{Kolm} &= 6,37 \frac{s}{m^2} \end{aligned}$$

Unvollkommenheit

Für die Berücksichtigung der Unvollkommenheit kann man vorteilhafterweise den gleichen Weg beschreiben, wie er bei der analytischen Lösung im gleichen Zusammenhang beschrieben wird. Damit ergibt sich hier aus dem entsprechenden Diagramm eine Ersatzlänge von

$$\frac{\Delta L_1}{B} \approx 0,43$$

$$\Delta L_1 \approx 6m$$

und der entsprechende Widerstand

$$\begin{aligned} R_{unvoll} &= \frac{1}{k} \cdot \frac{\Delta L_1}{z_{R0} \cdot b} \\ &= \frac{1}{10^{-5} \frac{m}{s}} \frac{6m}{15m \cdot 100m} \\ R_{unvoll} &= 4 \frac{s}{m^2} \end{aligned}$$

Gesamtleitwert

Damit ergibt sich der Gesamtleitwert zu

$$\begin{aligned} G_{Fl} &= \frac{1}{R_{Kolm} + R_{unvoll}} \\ &= \frac{1}{6,37 + 4} \frac{m^2}{s} \\ G_{Fl} &= 0,09643 \frac{m^2}{s} \end{aligned}$$

Durch den zusätzlichen Widerstand, hervorgerufen durch die Kolmation, und die Unvollständigkeit des Flusses als Randbedingung, ergibt sich ein zusätzlicher Potentialverlust, d.h. die Absenkung wird größer. Vergleicht man die anderen Leitwerte mit dem Zusatzleitwert,

so erkennt man dessen Einfluss:

Das Ergebnis der Lösung zu Aufgabe 6c. (s. S. 337) war:

$$\begin{aligned} z_{RP} &= h_{Fl} - \frac{\dot{V}_{Br}(G_{h1} + G_{h2})}{G_{h1} \cdot G_{h2}} + \dot{V}_{Hang} \left(\frac{1}{G_{h1}} + \frac{1}{G_{h2}} + \frac{1}{G_{h3}} \right) \\ &= h_{Fl} - \dot{V}_{Br}(R_{h1} + R_{h2}) + \dot{V}_{Hang}(R_{h1} + R_{h2} + R_{h3}) \end{aligned}$$

Dabei sind die Leitwerte in Widerstände umgeformt worden. Substituiert man in obiger Gleichung den Widerstand R_{h1} durch $R_{hFl} + R_{h1}$, so ergibt sich das veränderte Potential am GWBR P .

$$z_{RP} = h_{Fl} - \dot{V}_{Br}((R_{hFl} + R_{h1}) + R_{h2}) + \dot{V}_{Hang}((R_{hFl} + R_{h1}) + R_{h2} + R_{h3})$$

Für die erste Näherung dieser nichtlinearen hydraulischen Leitwerte setzt man z.B. die Ausgangswasserhöhe von $z_{R0} = 15m$ für alle Knoten ($z_{R1}^{(1)} = z_{RBr}^{(1)} = z_{RP}^{(1)} = 15m$) an und erhält:

$$G_{h1} = G_{h2} = G_{h3} = 3 \cdot 10^{-2} \frac{m^2}{s}$$

$$R_{h1} = R_{h2} = R_{h3} = 33,33 \frac{s}{m^2}$$

$$R_{hFl} = 10,37 \frac{s}{m^2}$$

Die Absenkung gegenüber dem stationären Ausgangszustand, d.h. Grundwasserspiegel = Flusswasserspiegel, ergibt sich am Pegel P zu:

$$z_{RP} = h_{Fl} - \dot{V}_{Br}((R_{hFl} + R_{h1}) + R_{h2}) + \dot{V}_{Hang}((R_{hFl} + R_{h1}) + R_{h2} + R_{h3})$$

$$s = h_{Fl} - z_{RP} = \dot{V}_{Br}((R_{hFl} + R_{h1}) + R_{h2}) + \dot{V}_{Hang}((R_{hFl} + R_{h1}) + R_{h2} + R_{h3})$$

$$s = (\dot{V}_{Br} \cdot R_{hFl} - \dot{V}_{Hang} \cdot R_{hFl}) + (\dot{V}_{Br} \cdot (R_{h1} + R_{h2}) - \dot{V}_{Hang} (R_{h1} + R_{h2} + R_{h3}))$$

$$s = s_{R_{Fluss}} + s_{R_{GWL}}$$

Da der Flusswiderstand R_{hFl} rund ein Sechstel der Summe von $R_{h1} + R_{h2} + R_{h3}$ ausmacht, ergibt sich der geringe Einfluss.

Man sieht, dass mit dem Zusatzwiderstand des Flusses die Absenkung um ca. 13% stärker wird. Auf Grund der Nichtlinearität der ungespannten Grundwasserströmung lässt sich keine genauere Abschätzung geben.

Kapitel 10

Simulationsprogrammsystem ASM

Aufgaben zu 10:

1. Simulieren Sie die Absenkung für die gegebenen Punkte im Abstand r und die Zeiten (t) infolge einer Wasserförderung \dot{V} im Brunnen für folgenden Grundwasserleiter und stellen Sie das Ergebnis grafisch dar:

$$k = 1 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s}, \quad M = 10m, \quad S = 0,001, \quad a = \frac{S}{T} = 0,1 \frac{s}{m^2}$$

$$r_0 = 0,25m, \quad \dot{V} = 0,015 \frac{m^3}{s}, \quad h_n = 16m$$

$$r = 5; 10; 20; 50 \text{ m}$$

$$t = 1; 2; 5; 10; 20; 30; 45; 60; 90; 120 \text{ min}$$

2. Simulieren Sie für den o.g. Grundwasserleiter die Absenkung im Punkt ($r = 10m$) aller $10min$ bis maximal $100min$, wenn der Volumenstrom des Förderbrunnens folgender Zeitstaffelung unterliegt und stellen Sie das Ergebnis grafisch dar:

Volumenstrom $[\frac{m^3}{s}]$	0,005	0,010	0,015	0,020	0,025	0,030	0,000
Förderbeginn $[min]$	0	10	20	30	40	50	60

3. In einem Grundwasserleiter in der Nähe eines Flusses soll eine Baugrube abgesenkt werden. Die Mitte der Baugrube ist $100m$ vom Fluss entfernt, die Entwässerungsbrunnen $80m$. Es sind drei Brunnen parallel zum Fluss angeordnet, die jeweils $25m$ voneinander entfernt sind. Die Brunnen besitzen einen Durchmesser von $r_0 = 0,3m$ und fördern mit jeweils $\dot{V} = 0,015 \frac{m^3}{s}$.
Der Fluss besitzt eine Breite von $B = 20m$ und eine Kolmationsschicht von $k' = 3 \cdot 10^{-6} \frac{m}{s}$; $M' = 1m$.

Der Grundwasserleiter hat folgende Eigenschaften:

$$k = 5 \cdot 10^{-4} \frac{m}{s}; n_0 = 0,20; h_n = 15m; M = 20m.$$

Wird nach zehn Tagen im Zentrum der Baugrube die Zielabsenkung von $2,5m$ erreicht?

4. Überprüfen Sie mittels des Simulationsprogramms ASM, ob der Mittelpunkt der Baugrube nach einer Zeit von 7 Tagen bei einer Förderleistung von $\dot{V} = 0,01 \frac{m^3}{s}$, $r_0 = 0,30m$ mit einer Sicherheit von $0,5m$ entwässert ist (siehe Abbildung 10.1).
5. Aus einem Brunnen, der an einem idealen Fluss liegt ($Br_{(100m,500m)}$) wird ein konstanter Volumenstrom von $25 \frac{l}{s}$ gefördert. Der Brunnen hat einen Radius von $r_0 = 0,35m$. Der Grundwasserleiter ist durch folgende Parameter gekennzeichnet:
 $h_n = 15m$, $M = 17m$, $k = 1 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s}$, $S_0 = 0,0002$, $n_0 = 0,25$.

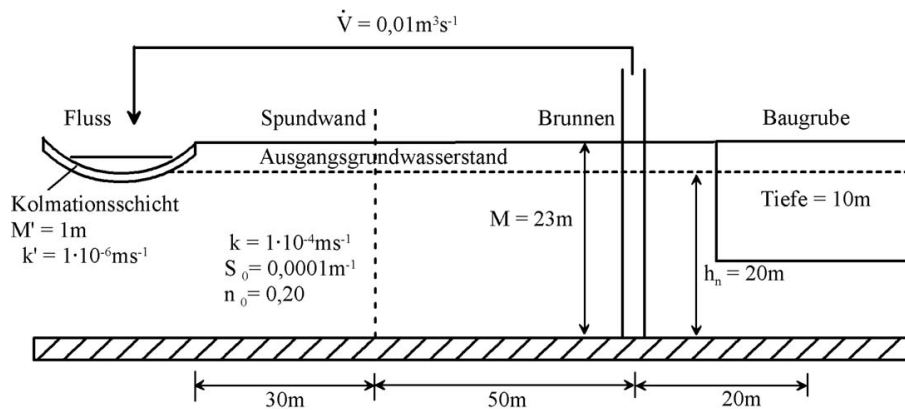


Abbildung 10.1: Grundwasserleiter mit Brunnen und Baugrube

Simulieren Sie den stationären Endzustand (Anteil der zeitlichen Funktionalität soll kleiner als 0,001 sein) für den Punkt ($P_{(600\text{m}, 200\text{m})}$). Ab wann ist mit ihm zu rechnen?

6. Simulieren Sie folgende eindimensionalen Grundwasserströmungen:
 - a) Simulieren Sie mittels einer eindimensionalen stationären Grabenströmung (siehe Abbildung 10.2) die Lage der freien Oberfläche in Abhängigkeit von x und ermitteln Sie den Abfluss aus dem Oberwasser und den Zufluss zum Unterwasser. Verwenden Sie dabei fünf Quantisierungselemente.

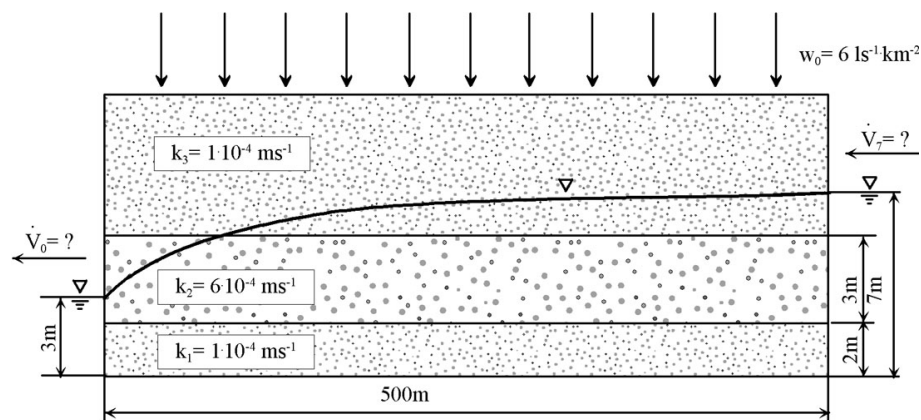


Abbildung 10.2: Geschichteter Grundwasserleiter mit stationärem Strömungsregime

- b) Simulieren Sie mittels einer eindimensionalen instationären Grabenströmung (siehe Abbildung 10.3) die Lage der freien Oberfläche in Abhängigkeit von x und der Zeit t .
7. In einem Grundwasserleiter soll ein Tunnel (U-Bahn) parallel zu einem Fluss eingebaut werden (siehe Abbildung 10.4). Simulieren Sie, zu welchen Grundwasserstandsänderungen es für den stationären Fall durch diesen Einbau kommt. Wählen Sie dazu ein geeignetes grobes Quantisierungsschema.

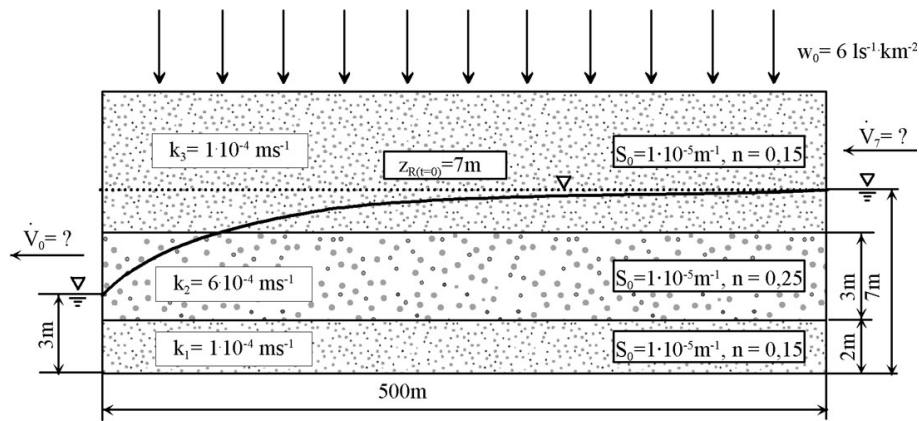


Abbildung 10.3: Geschichteter Grundwasserleiter mit instationärem Strömungsregime

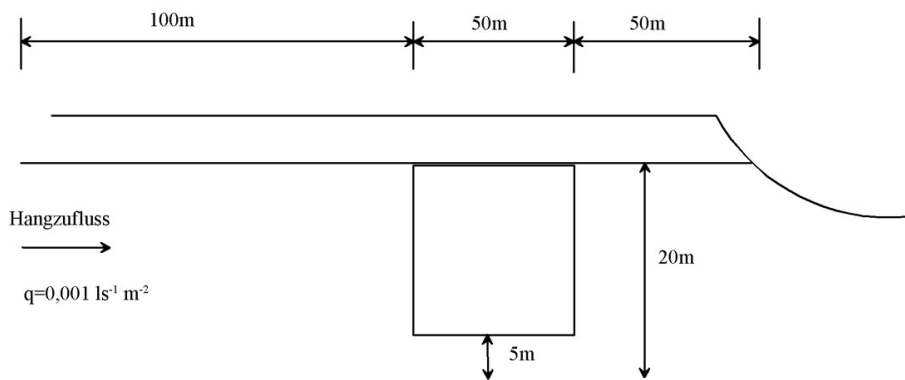


Abbildung 10.4: Einbau eines Tunnelbauwerkes in einem Grundwasserleiter

8. In einer Flussniederung soll mittels eines Deichbauwerkes entsprechend dem vereinfachten Schema in Abbildung 10.5 das Poldergebiet vor Hochwasser geschützt werden.

a) Ermitteln Sie die Zeit, nach welcher sich ein stationäres Strömungsregime eingestellt hat, wenn das Hochwasser über lange Zeit 5m über Normal steht.

b) Wieviel Wasser fließt pro Meter Deichlänge in das Poldergebiet?

Deich: $k = 10^{-4} \frac{m}{s}$, $n_0 = 0,15$, $S_0 = 0,002 m^{-1}$;

Dichtungsmaterial: $k = 10^{-5} \frac{m}{s}$; $n_0 = 0,05$; $S_0 = 0,001 m^{-1}$

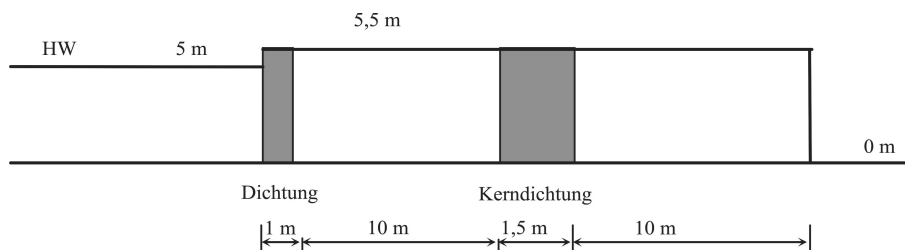


Abbildung 10.5: Deichbauwerk mit Kerndichtung

-
9. Modellieren Sie mittels des Programmsystems ASM folgenden horizontalen Grundwasserleiter, der rechts und links von zwei vollkommen ausgebauten Vorflutern mit einer Wasserhöhe von $50m$ begrenzt wird. Der Grundwasserleiter besitzt eine Mächtigkeit von $20m$, eine Transmissibilität von $T = 0,01 \frac{m^2}{s}$, einen Speicherkoeffizient von $S = 0,001$ und eine Porosität von $0,1$. In der Mitte des Modellgebietes liegt ein Brunnen mit einer Förderleistung von $\dot{V} = 0,05 \frac{m^3}{s}$.
- Simulieren Sie die Wasserstandsverteilung (Isohypsenplan) nach einer Förderzeit des Brunnens von einem Tag.
 - Stellen Sie grafisch die Wasserstandsganglinien am Brunnen und jeweils $200m$ entfernt dar (parallel und senkrecht zum Vorfluter).
 - Berechnen Sie die Wasserbilanz für das Modellgebiet nach eintägiger Förderung, sowie den Zufluss von dem linken Vorfluter
 - Untersuchen Sie zu dem hydraulischen System der Aufgabe c) den Einfluss der Orts- und Zeitquantisierungsschrittweiten und den der Lösungsverfahren. Stellen Sie dazu vor allem die Hydroisohypsen nach einem Tag dar und vergleichen Sie diese.

Teil III

Aufgaben und Lösungen - Systemtheorie und Modellierung

Kapitel 11

Grundlagen

Die Aufgaben dieses Kapitels sind bereits in Kapitel 5.1 besprochen worden. Daher hier nur der Hinweis dort hin (s.S. 128).

Kapitel 12

Modellbestimmung an Hand von Kenngrößen

12.1 Übertragungsfunktionen

Aufgaben zu 12.1:

1. Berechnen Sie die Absenkungskurve für eine Förderleistung von $\dot{V} = 0,005 \frac{m^3}{s}$ mittels der Methode der Übertragungsglieder bei einem Volumenstrom von $\dot{V} = 0,015 \frac{m^3}{s}$, wenn ein Pumpversuch folgende Werte lieferte (siehe Tabelle). Stellen Sie das Ergebnis grafisch dar.

Zeit [s]	Absenkung [m]
320	0,63
426	0,69
564	0,73
743	0,77
976	0,81
1279	0,85
1673	0,88

Zeit [s]	Absenkung [m]
2185	0,92
2850	0,96
3715	0,99
4839	1,03
6302	1,06
8202	1,10
10.000	1,14

(Lösung s. S.360)

2. Bestimmen Sie für folgende Messreihe, die durch Einspeisung einer Funktion entstanden ist, die Übertragungsfunktion einschließlich deren Parameter:

$t [min]$	0	1	2	4	8	15
$\dot{V} \left[\frac{m^3}{s} \right]$	0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
$s [m]$	0	0,1	0,08	0,13	0,19	0,25

(Lösung s. S. 363)

3. Bei einem Pumpversuch ist für einen Grundwasserstandort folgende Abhängigkeit zwischen Förderstrom \dot{V} und Grundwasserabsenkung s gefunden worden:

$\dot{V} \left[\frac{m^3}{s} \right]$	0	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
$s [cm]$	0	0	3	8	20	30	35	37	38
$t [min]$	-1	0	1	2	4	10	20	40	100

Berechnen Sie den Verlauf der Absenkung bei einer Förderrate von $\dot{V} = 0.15 \frac{m^3}{s}$. Verwenden Sie dazu die Methode der Übertragungsfunktionen. Stellen Sie die Messwerte und die Berechnungsergebnisse grafisch dar.

(Lösung s.S. 367)

4. Bei einem Gütepumpversuch wurden für zwei unterschiedliche Standorte $P1$ und $P2$, die sich in einer Entfernung vom Infiltrationsbrunnen von $r_1 = 350m$ und $r_2 = 1000m$ befinden, nachfolgende Konzentrationswerte C des eingebrachten Tracers gemessen. In den Infiltrationsbrunnen wird eine dauerhafte Konzentration von $C_{(0,t)} = 10 \frac{g}{m^3}$ beigegeben.

$t [10^7 s]$	$C_{r1} \left[\frac{g}{m^3} \right]$	$C_{r2} \left[\frac{g}{m^3} \right]$
0,5	2,4	2,4
1,0	2,7	2,7
1,5	3,05	3,04
2,0	3,55	3,32
2,5	4,80	3,57
3,0	6,50	3,81
3,5	7,95	4,01
4,0	8,70	4,20
4,5	9,10	4,37
5,0	9,20	4,53
5,5	9,25	4,67

Berechnen Sie die Übertragungsfunktionen für diese Systeme.

5. Bei einem Tracerversuch wird an dem Brunnen 1 eine Stoffkonzentration von 50kg konzentrierte NaCl-Lösung 5min lang in den Boden infiltriert. Berechnen Sie den Verlauf einer möglichen Schadstoffausbreitung, wenn durch eine Havarie 1000kg Lösung in den Boden gelangt wären. Stellen Sie die Messwerte und die prognostizierten Wertegrafisch dar.

$t [\text{min}]$	24	30	35	40	42	50	60	70	80	90	100	120
$C \left[\frac{\text{mg}}{\text{l}} \right]$	0	2,0	7,0	9,7	9,8	7,5	5,0	3,5	1,5	0,5	0,3	0

(Lösung s. S. 374)

6. Bei einem Pumpversuch wurden folgende Grundwasserstände gemessen:

$t [\text{min}]$	$s [\text{cm}]$	$\dot{V} \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$
0	16,00	0
15	15,25	0,015
30	15,12	0,015
45	15,07	0,015
60	15,01	0,015
75	14,96	0,015
90	14,95	0,015
105	14,94	0,015
120	14,94	0,015
135	14,938	0,015

Der Grundwasserleiter hat folgende Parameter:

$$h_n = 16\text{m}, M = 10\text{m}, k = 0,001 \frac{\text{m}}{\text{s}}, S_0 = 0,0001, n_0 = 0,20$$

Stellen Sie für dieses Modell die ersten vier Gleichungen des Faltungsintegrals bis zum Beobachtungszeitpunkt von $t = 135\text{min}$ auf.

(Lösung s. S. 377)

7. Prognostizieren Sie den Temperaturverlauf in einer Uferfiltratsfassung $\delta_{Fa,p}$ unter Verwendung des Faltungsintegrals, wenn für den Fluss δ_{Fl} und für die Fassung $\delta_{Fa,g}$ folgende Messwerte bekannt sind:

$\delta_{Fl} [^{\circ}C]$	$\delta_{Fa,g} [^{\circ}C]$	$\delta_{Fa,p} [^{\circ}C]$	Zeit [d]
14,2	8,5		0
16,0	10,0		15
17,7	11,4		30
19,4	14,0		45
17,2	14,1		60
16,0	14,7		75
17,6	15,4		90
18,6	15,8		105
14,8	15,6		120
12,0	14,9		135
13,7	14,1		150

- Berechnen Sie den Temperaturverlauf ab dem sechsten Zeitschritt unter Verwendung von jeweils drei Gleichungen des Faltungsintegrals.
- Vergleichen Sie die berechneten Temperaturen in der Fassung mit den gemessenen und korrigieren Sie die Gewichtsfunktionsanteile unter Berücksichtigung der gemessenen Werte.

(Lösung s. S.379)

8. Bei einem Säulen-Durchlaufversuch wurde folgende Impulsantwortfunktion auf einen Konzentrationsstoß eines Schadstoffes von $30mg/l$ gemessen (siehe Abbildung 12.1).
- Bestimmen Sie zu diesen Messwerten die Gewichtsfunktion und die Übertragungsfunktion.
 - Prognostizieren Sie die Konzentration nach $160min$, wenn die Eingangskonzentration folgenden zeitlichen Verlauf hat:

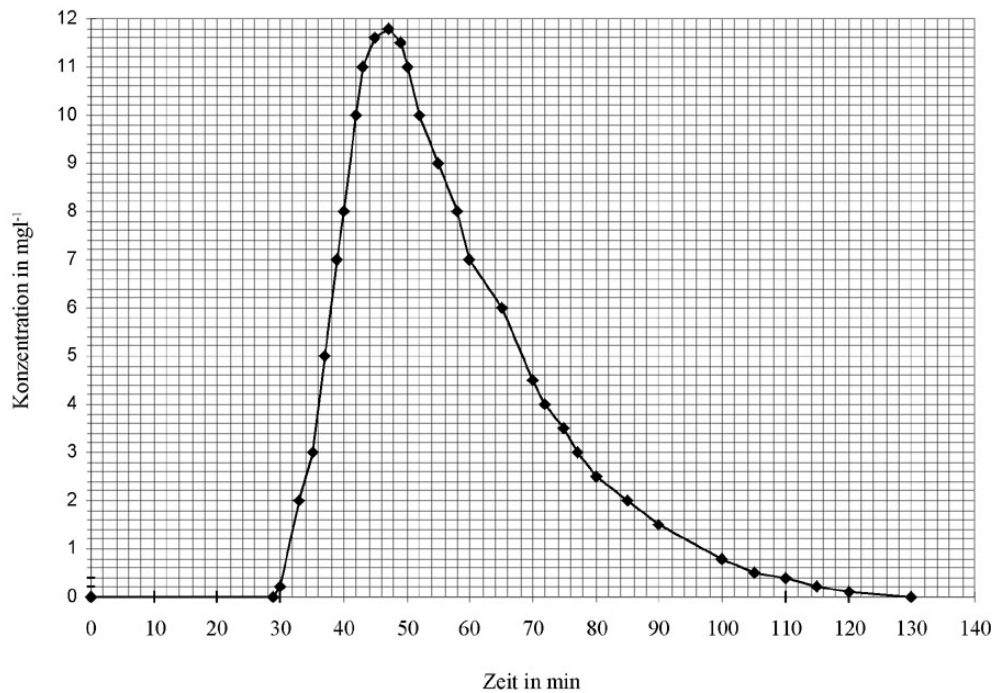


Abbildung 12.1: Impulsantwort eines Säulen-Durchlaufversuches

$t \text{ [min]}$	0	20	40	60	80	100	120	140
$C \left[\frac{\text{mg}}{\text{l}} \right]$	30	50	80	60	100	50	10	0

(Lösung s. S. 12.1)

9. In einem Grundwasserbeobachtungsrohr wurden nachfolgende Konzentrationen infolge eines Tracerversuches gemessen. Bei dem Tracerversuch wurden 50 kg konzentrierte NaCl-Lösung innerhalb von 5 Stunden infiltriert.
- Berechnen Sie den Verlauf des Gesamtsalztransportes im Pegelrohr, wenn folgende Einzelmesswerte gewonnen wurden.
 - Stellen Sie die Messkurve und die berechnete Funktion grafisch dar.

$t \text{ [d]}$	0	1	2	4	5	7	9
$C_{\text{NaCl}} \left[\frac{\text{mg}}{\text{l}} \right]$	0	0	1	2	1,5	1	0

- Berechnen Sie mittels der Methode der Übertragungsfunktion die zu erwartende Durchbruchkurve und stellen Sie sie grafisch dar, wenn mit einer Infiltration von 100 kg innerhalb von 2,5 Stunden gearbeitet wurde.

10. Bei einem Pumpversuch wurden folgende Grundwasserstände gemessen.

(siehe Abbildung 12.2)

a. Berechnen Sie das Wasserdefizit (Volumen) des Absenkungstrichters, wenn der Grundwasserleiter folgende Kennwerte besitzt.

$$h_n = 16\text{m}, M = 10\text{m}, k = 0,001\text{m} \cdot \text{s}^{-1}, S_0 = 0,0001\text{m}^{-1}, n_0 = 0,20$$

b. Berechnen Sie mittels der Methode der Übertragungsglieder und dem unter a) gefundenen Wert für den Volumenstrom \dot{V} die Absenkungskurve für eine Förderleistung von $0,005\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

Stellen Sie für dieses Modell die ersten vier Gleichungen des Faltungsintegrals bis zum Beobachtungszeitpunkt von $t = 1\text{d}$ auf.

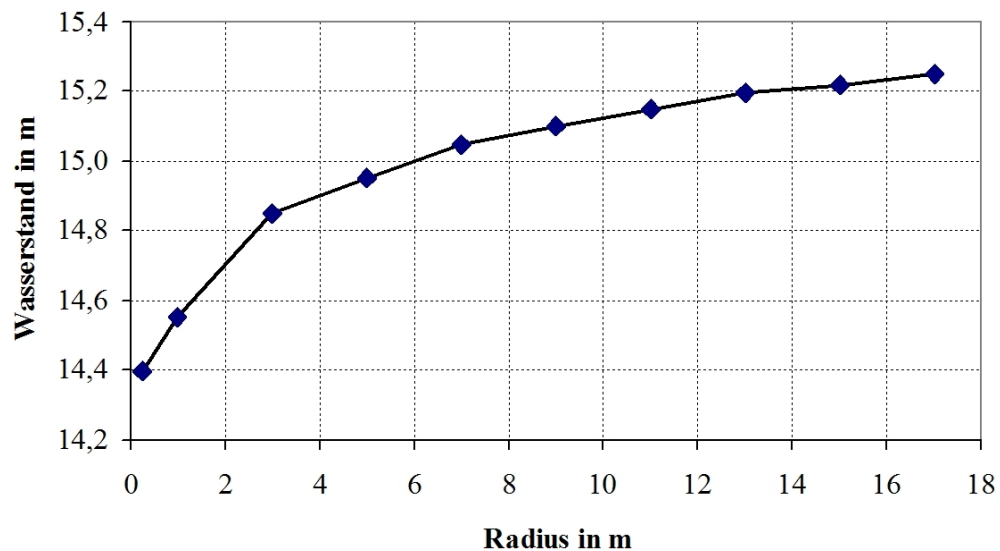


Abbildung 12.2: Grundwasserstand in Abhängigkeit vom Radius

Lösungen:**• zu Aufgabe 1 (s. S.354)**

Der zeitliche Verlauf des Grundwasserstandes kann durch ein Verzögerungsverhalten 1. Ordnung angenähert werden:

$$x_a = K \cdot x_e \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

Dieses Übertragungsverhalten ergibt sich aus der Lösung der Differentialgleichung

$$T \cdot \frac{dx_a}{dt} + x_a = f(t)$$

unter der Besonderheit, dass $f(t)$ eine Sprungfunktion mit der Sprunghöhe x_e ist (siehe Abschnitt Analytische Methoden, Differentialgleichungen erster Ordnung, z. B. Aufgabe 4, Seite 152 und GRÄBER, LB Systemanalyse, Abschnitt Analytische Methoden, Differentialgleichungen erster Ordnung) ergibt sich:

$$s = K \cdot \dot{V} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

$$s_{t \rightarrow \infty} = s_{\max}$$

$$s_{t \rightarrow \infty} = 1,14m$$

$$\dot{V} = 0,015 \frac{m^3}{s}$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{x_{a\infty}}{x_{e\infty}} = \frac{s_{\max}}{\dot{V}} \\ &= \frac{1,14m}{0,015m^3} \end{aligned}$$

$$K = 76 \frac{s}{m^2}$$

Die Zeitkonstante T wird aus dem Diagramm in Abbildung 12.3 abgelesen.

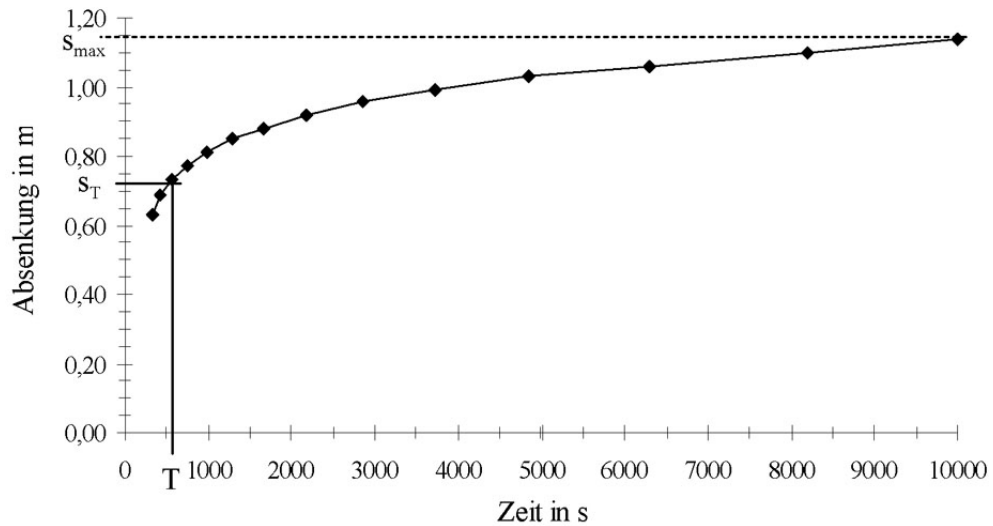
Für den Zeitpunkt $t = T$ und unter Beachtung von $K = \frac{s_{\max}}{\dot{V}}$ gilt z.B.:

$$s = K \cdot \dot{V} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

$$s_{t=T} = K \cdot \dot{V} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

$$= s_{\max} \cdot (1 - e^{-1})$$

$$s_{t=T} = s_{\max} \cdot 0,632$$

Abbildung 12.3: Bestimmung der Zeitkonstanten T aus dem Absenkungsverlauf

D.h. wenn die Absenkung den Wert $s = 0,632s_{max}$ erreicht hat, ist eine Zeit $t = T$ vergangen. Für diese Aufgabenstellung erhält man:

$$s_{t=T} = 0,632s_{max} = 0,72m$$

Aus dem Diagramm kann ein Wert von $T \approx 9 \text{ min}$ abgelesen werden. Damit ergibt sich die Lösung der Aufgabenstellung für eine Förderleistung von $\dot{V} = 0,005 \frac{m^3}{s}$ zu:

$$\begin{aligned}
 s &= \dot{V} \cdot 0,76 \frac{s}{m^3} (1 - e^{-\frac{t}{9min}}) \\
 &= 0,005 \frac{m^3}{s} \cdot 0,76 \frac{s}{m^3} (1 - e^{-\frac{t}{9min}}) \\
 s &= 0,38m (1 - e^{-\frac{t}{9min}})
 \end{aligned}$$

s_{0min}	$= 0,38m \cdot (1 - e^{-0})$	$= 0,000m$
s_{1min}	$= 0,38m \cdot (1 - e^{-\frac{1}{9}})$	$= 0,040m$
s_{2min}	$= 0,38m \cdot (1 - e^{-\frac{2}{9}})$	$= 0,076m$
s_{4min}	$= 0,38m \cdot (1 - e^{-\frac{4}{9}})$	$= 0,136m$
s_{9min}	$= 0,38m \cdot (1 - e^{-1})$	$= 0,240m$
s_{18min}	$= 0,38m \cdot (1 - e^{-2})$	$= 0,329m$
s_{27min}	$= 0,38m \cdot (1 - e^{-3})$	$= 0,361m$
s_{36min}	$= 0,38m \cdot (1 - e^{-4})$	$= 0,373m$
s_{72min}	$= 0,38m \cdot (1 - e^{-8})$	$= 0,380m$
s_{144min}	$= 0,38m \cdot (1 - e^{-16})$	$= 0,380m$

Die Werte dieser Tabelle sind in Abbildung 12.4 grafisch dargestellt.

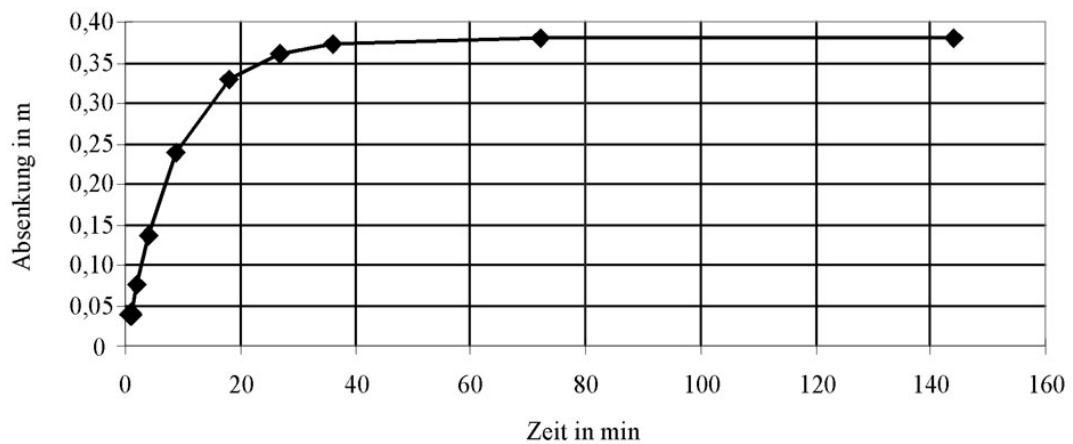


Abbildung 12.4: Absenkungsverlauf bei $\dot{V} = 0,005m^3s^{-1}$

- zu Aufgabe 2 (s. S. 354)

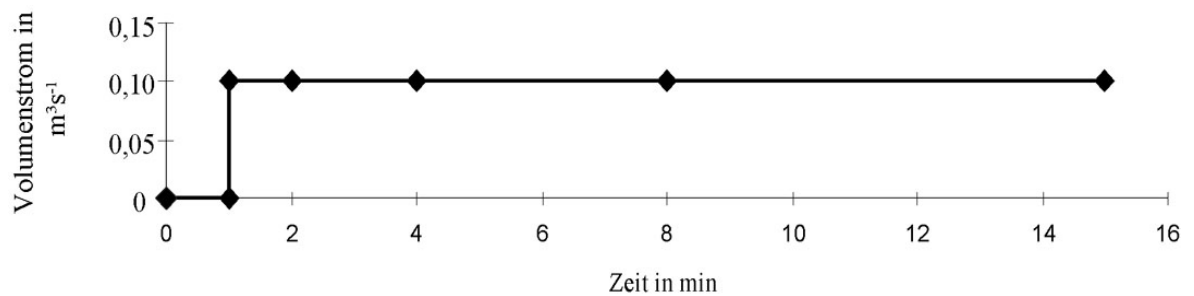
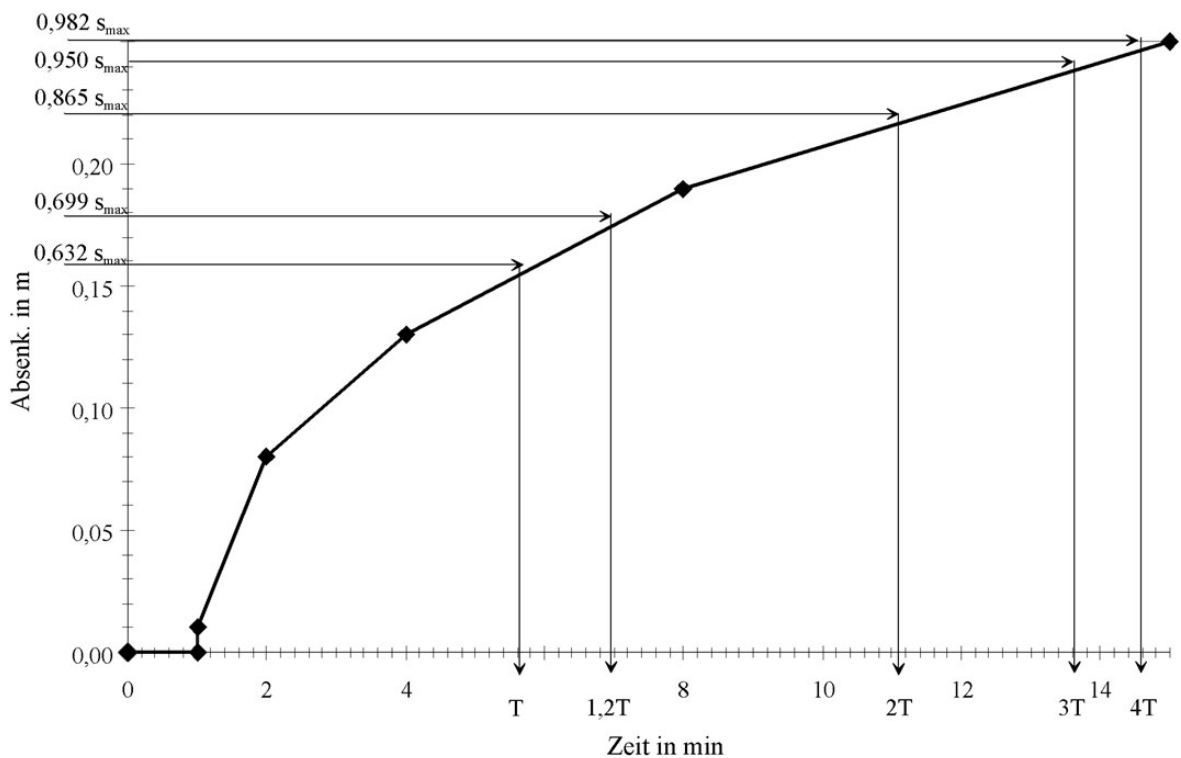
Abbildung 12.5: Eingangssignal $\dot{V} = 0,1 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ 

Abbildung 12.6: Bestimmung der Zeitkonstante

Übertragungsverhalten

Bei dem vorliegenden System, dessen Sprungantwortsignal in Abbildung 12.6 dargestellt ist, handelt es sich offensichtlich um ein Übertragungsverhalten mit Verzögerung 1. Ordnung, ein so genanntes PT_1 -Glied. Dabei muss beachtet werden, dass das Sprungsignal erst zum Zeitpunkt 1 min beginnt. Die vorliegende Absenkung von 1 cm nach einer Sekunde ist dabei Messfehlern zuzuordnen, da beim Anspringen der Pumpe noch keine Absenkung vorhanden sein kann. Damit müssen auch die Parameter der Übertragungsfunktion auf diesen Zeitpunkt bezogen werden, d.h. es wird eine neue Zeitachse definiert, die gegenüber der Originalachse

genau um der Laufzeit $t_L = 1min$ verschoben ist:

$$x_a = K \cdot x_e \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T_1}}) \quad bzw.$$

$$G_{(P)} = \frac{K}{(1 + pT_1)}$$

$$s = K \cdot \dot{V} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T_1}})$$

Parameter:

Ermittlung von K:

$$s_{t=\infty} = K \cdot \dot{V}_{t=\infty} \cdot (1 - e^{-\frac{\infty}{T_1}})$$

$$s_{t=\infty} = K \cdot \dot{V}_{t=\infty}$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{s_{t=\infty}}{\dot{V}_{t=\infty}} \\ &= \frac{0,25m \cdot s}{0,1m^3} \end{aligned}$$

$$K = 2,5 \frac{s}{m^2}$$

Die Bestimmung von T_1 ist nach drei Varianten möglich:

Variante 1

\Rightarrow bei $t = T_1$ gilt:

$$\begin{aligned} s_{t=T_1} &= K \cdot \dot{V}_{t=T_1} \cdot (1 - e^{-\frac{T_1}{T_1}}) \\ &= K \cdot \dot{V}_{t=T_1} \cdot 0,632 \end{aligned}$$

Unter Beachtung, dass das Sprungsignal über alle Zeiten T den gleichen Wert besitzt (Def. des Sprungsignals), kann gesetzt werden:

$$K \cdot \dot{V}_{t=T_1} = K \cdot \dot{V}_{t=\infty} = s_{t=\infty}$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} s_{t=T_1} &= s_{t=\infty} \cdot 0,632 \\ &= 0,25m \cdot 0,632 \end{aligned}$$

$$s_{t=T_1} = 0,158m$$

Aus dem Diagramm lässt sich ablesen:

$$\Rightarrow t = T_1 = 5,6 \text{min} - 1 \text{min}$$

$$T_1 = 4,6 \text{min}$$

Variante 2

\Rightarrow aus dem Anstieg im Null-Punkt:

$$\begin{aligned} \tan \delta_{t'=0} &= \frac{s_{t'=0} - s_{t'=1 \text{min}}}{t'_0 - t'_{1 \text{min}}} \\ &= \frac{0,08 \text{m}}{1 \text{min}} \\ \tan \delta_{t'=0} &= 0,08 \frac{\text{m}}{\text{min}} \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt der Tangente (Sekante) mit der Asymptote ist:

$$s_{t \text{Tangente}} = \tan \delta \cdot T_1$$

$$s_{t \text{Tangente}} \equiv s_{t=\infty}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{s_{t=\infty}}{\tan \delta} \\ &= \frac{0,25 \text{m} \cdot \text{min}}{0,08 \text{m}} \\ T_1 &= 3,125 \text{min} \end{aligned}$$

Der Unterschied zwischen der ersten und der zweiten Berechnung resultiert daraus, dass Messfehler sich besonders stark in der Anfangsphase des Pumpversuchs auswirken. Weiterhin wurde statt der geforderten Tangente die Sekante benutzt.

Variante 3

Hier wird das Verfahren der Variante 1 auf das ganzzahlige Vielfache der Zeitkonstanten ausgedehnt. Setzt man in der Übergangsfunktion die Werte $t = 1 \cdot T_1; 1,2 \cdot T_1; 2 \cdot T_1; 3 \cdot T_1$ und $4 \cdot T_1$ ein, so ergibt sich folgende Tabelle:

$n = \frac{t_n}{T}$	1	1, 2	2	3	4
$\frac{x_a}{x_{a\infty}}$	0,632	0,699	0,865	0,950	0,982
$s_{t=nT} = 0,25m \frac{x_a}{x_{a\infty}}$	0,158	0,175	0,216	0,238	0,246
$t_n [min]$	4,6	6,2	9,8	12,2	13,4
$T = \frac{t_n}{n} [min]$	4,6	5,2	4,9	4,1	3,35
Mittelwert T [min]	4,5				

Dieses Verfahren ermöglicht die Eliminierung statistischer Messfehler. Die Abweichung der Zeitkonstanten bei steigender Zeit liegt u.a. an der fehlerhaften Ermittlung des asymptotischen Endwertes $s_{a\infty}$. Auch liegen für den Bereich zwischen $8min$ und $15min$ keine Messwerte vor. Es sind dort nur die linear interpolierten Werte benutzt worden.

Das Übergangsverhalten dieses Pumpversuchs hat damit folgendes Aussehen:

$$s_t = 2,5 \frac{s}{m^2} \cdot \dot{V} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{4,6min}} \right)$$

- zu Aufgabe 3 (s. S. 354)

Der erste Schritt bei der Bestimmung von Übertragungsfunktionen ist die grafische Darstellung der Messwerte.

Es handelt sich hier um zwei Übertragungsfunktionen (Wirkungen), welche die gleiche Ursache haben. Man sollte sie zur besseren Übersicht in getrennten Diagrammen behandeln.

Bestimmung der Konzentration C_{r1}

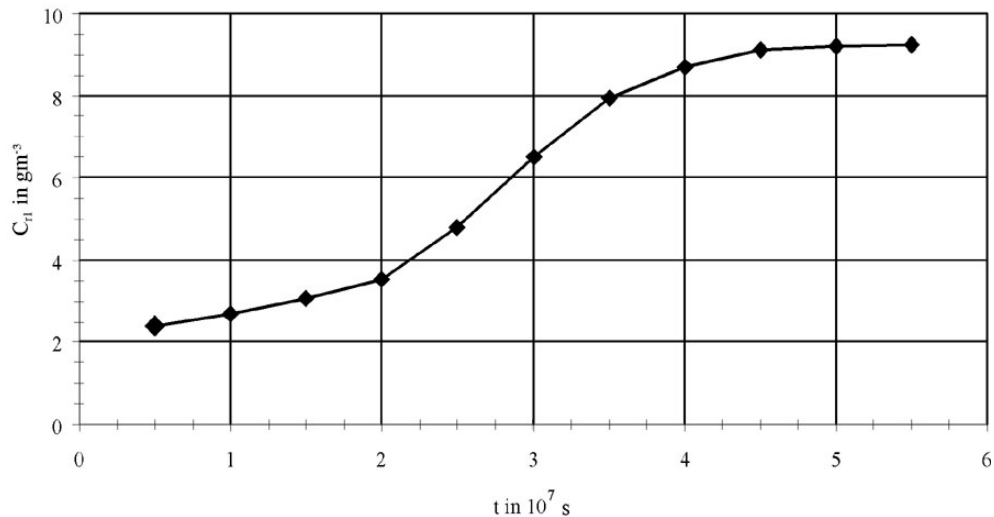


Abbildung 12.7: Konzentrationsverlauf C_{r1}

Aus der Abbildung 12.7 sieht man deutlich, dass es sich um ein Übertragungsverhalten mit Verzögerung zweiter Ordnung handelt. Da der Vorgang nicht mit einer Konzentration von $C_{r1} = 0 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$ beginnt, muss man, bevor die charakteristischen Werte eingetragen werden, eine Koordinatentransformation durchführen. Der Wert von $0,5 \text{ s}$ muss als Laufzeit T_L abgezogen werden. Aus der Abbildung 12.8 lassen sich alle charakteristischen Werte ablesen:

Laufzeit:	T_L	$0,5 \cdot 10^7 \text{ s}$
Verzugszeit:	T_u	$1,3 \cdot 10^7 \text{ s}$
Wendepunktzeit:	T_w	$2,4 \cdot 10^7 \text{ s}$
Anlaufzeit:	T_a	$2 \cdot 10^7 \text{ s}$
	τ_u	$\tau_u = C_u = 4,2 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$
Wendepunktkonz.:	Ca_W	$(5,6 \frac{\text{g}}{\text{m}^3} - 2,4 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}) = 3,2 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$
Konz. für $t = \infty$	C_∞	$6,8 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$

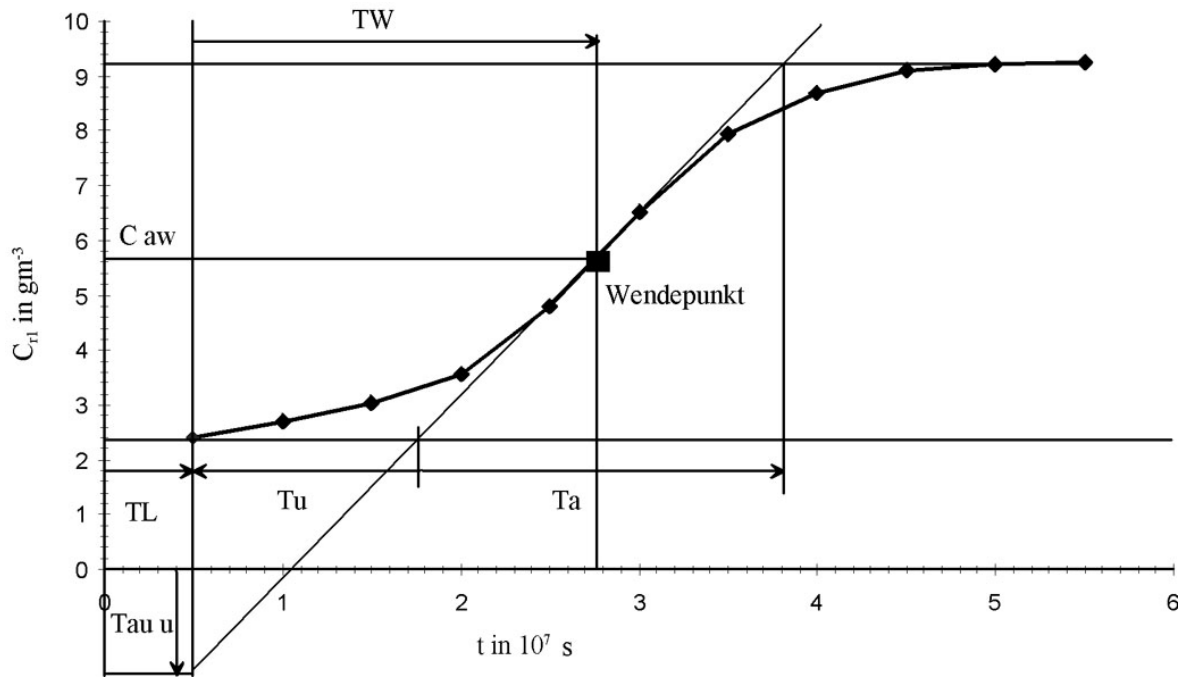


Abbildung 12.8: Konzentrationsverlauf mit ausgewählten Punkten zur Parameterbestimmung

Die Konzentration am Wendepunkt ergibt sich aus der gemessenen Konzentration, vermindert um die "Ruhekonzentration" bei der Laufzeit T_L . Dies entspricht der Verschiebung des Koordinatensystems um die "Ruhekonzentration". Außerdem wurde eine Verschiebung des Koordinatensystems um die Totzeit T_L vorgenommen.

Mit diesen Werten lässt sich unterscheiden, ob es sich um ein Übertragungsverhalten nach Modell I oder II handelt. Dazu werden die normierten Werte h_{aW} und τ_u berechnet und mit den Werten der Tabelle nach SREJC in Vergleich gesetzt:

Modelltyp nach STREJC	$\frac{x_{aW}}{x_{a\infty}}$	$\frac{\tau_u}{x_{a\infty}}$
I	$\leq 0,264$	$\leq 0,104$
II	$> 0,264$	$> 0,104$

h_{aW}	$= \frac{C_{aW}}{C_\infty} = \frac{3,2 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}}{6,8 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}} = 0,47$	$> 0,264$
τ_u	$= \frac{C_U}{C_\infty} = \frac{4,2 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}}{6,8 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}} = 0,62$	$> 0,104$

Damit handelt es sich hier um ein Übertragungsverhalten nach Modell II, d.h. mit gleichen Zeitkonstanten:

$$G(p) = \frac{K e^{pT_L}}{(1 - p\tau)^n} \quad \text{für Modelltyp II}$$

n	$\frac{\tau_U}{x_{a\infty}}$	$\frac{x_{aW}}{x_{a\infty}}$	$\frac{T_W}{\tau}$	$\frac{T_u}{\tau}$	$\frac{T_a}{\tau}$
1	0	0	0	0	1
2	0,104	0,264	1	0,282	2,718
3	0,218	0,323	2	0,805	3,695
4	0,319	0,352	3	1,425	4,463
5	0,410	0,371	4	2,100	5,119
6	0,493	0,384	5	2,811	5,699
7	0,570	0,394	6	3,549	6,226
8	0,642	0,401	7	4,307	6,711

Wenn man in oben aufgeführter Tabelle 3, Kenngrößenbestimmung für Modelltyp II, die Werte für $\frac{h_{aW}}{h_{a\infty}}$ und $\frac{\tau_u}{h_{a\infty}}$ vergleicht, so erkennt man, dass es sich hier um eine Übergangsfunktion mit $n = 8$ gleichen Zeitkonstanten handelt.

$$x_a = x_e \cdot K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t'}{\tau}}\right)^8 \quad \text{bzw.}$$

$$C_{I_{r1}} = C'_{0,t} \cdot K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t'}{\tau}}\right)^8$$

Berechnung der Zeitkonstanten τ

Dazu gibt es, entsprechend den unterschiedlichen charakteristischen Werten, drei Methoden:

Gleichung	Messwert [$10^7 s$]	Zeitkonstante τ [$10^7 s$]
$\frac{T_W}{\tau} = 7$	2,40	0,34
$\frac{T_u}{\tau} = 4,307$	1,30	0,30
$\frac{T_a}{\tau} = 6,711$	2,00	0,30
Mittelwert		0,31

Die Konstante K wird, wie bereits mehrfach durchgeführt, aus dem Wert $C_{t=\infty}$ berechnet.

$$K = \frac{C_{r1,t=\infty}}{C'_{0,t}} = \frac{6,8 \frac{g}{m^3}}{10 \frac{g}{m^3}} = 0,68$$

oder man setzt die Gleichung direkt in die Übergangsfunktion ein und berücksichtigt, dass für das Sprungsignal gilt: $C_{0,t=\infty} = C_{0,t}$

In der endgültigen Gleichung muss die eingangs durchgeführte Koordinatentransformation bezüglich der Zeitachse um den Betrag der Laufzeit T_L wieder rücktransformiert werden: $t = t' + T_L$

Auch für die Konzentrationswerte muss die eingeführte Koordinatentransformation rückgängig gemacht werden: $C_{r1} = C_{r1}' + C_{Grund}$

Damit erhält man die Übergangsfunktion, mit deren Hilfe sich das Zeitverhalten der Konzentration C_{r1} am Punkt P_{r1} für beliebige Eingangskonzentrationen berechnen lässt:

$$C_{r1} = \begin{cases} C_{Grund} & 0 \leq t < T_L \\ C'_{r1,t=\infty} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-T_L}{\tau}}\right)^8 + C_{Grund} & t \geq T_L \end{cases}$$

bzw. mit konkreten Zahlenwerten:

$$C_{r1} = \begin{cases} 2,4 \frac{g}{m^3} & 0 \leq t < 0,5 \cdot 10^7 s \\ 6,85 \frac{g}{m^3} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-0,5 \cdot 10^7 s}{0,31 \cdot 10^7 s}}\right)^8 + 2,4 \frac{g}{m^3} & t \geq 0,5 \cdot 10^7 s \approx 58d \end{cases}$$

Nach dieser ermittelten Übergangsfunktion kann eine Überprüfung der angepassten Kurve durchgeführt werden (siehe Abbildung 12.9).

Dabei zeigt sich, dass für eine brauchbare Anpassung der berechneten Funktionswerte an

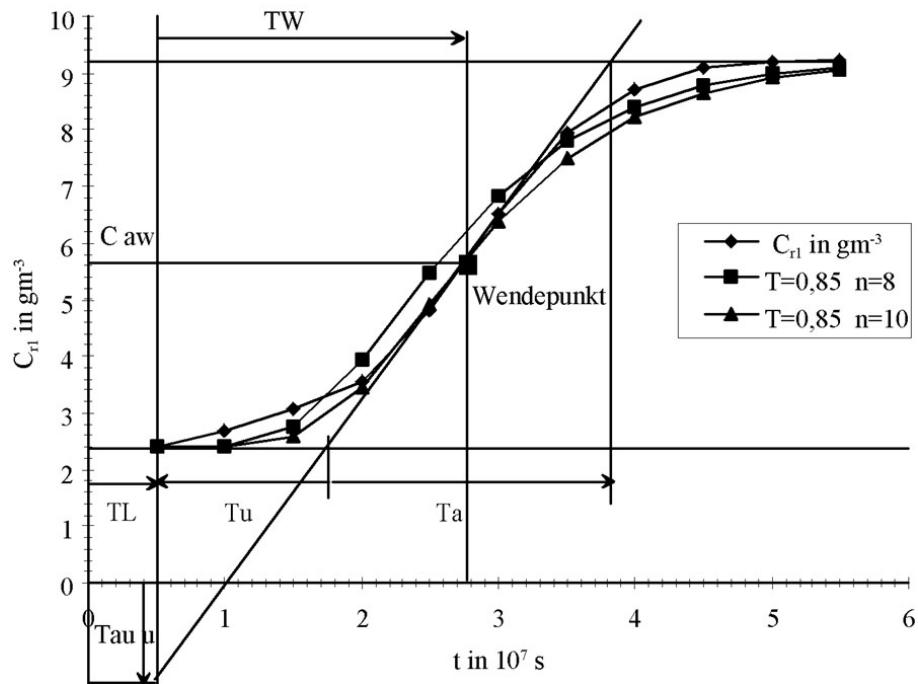


Abbildung 12.9: Konzentrationsverlauf C_{r1} mit Bestimmung der Parameter

die gemessenen der Parameter T auf einen höheren Wert gesetzt werden muss (siehe Reihe 2, $T = 0,85$). Eine weitere Verbesserung der Anpassung erreicht man, wenn auch der Exponent erhöht wird (siehe Reihe 3, $T = 0,85, n = 10$). **Bestimmung der Konzentration C_{r2}** Die Auswertung der Messwerte des zweiten Messpunktes erfolgt in analoger Weise.

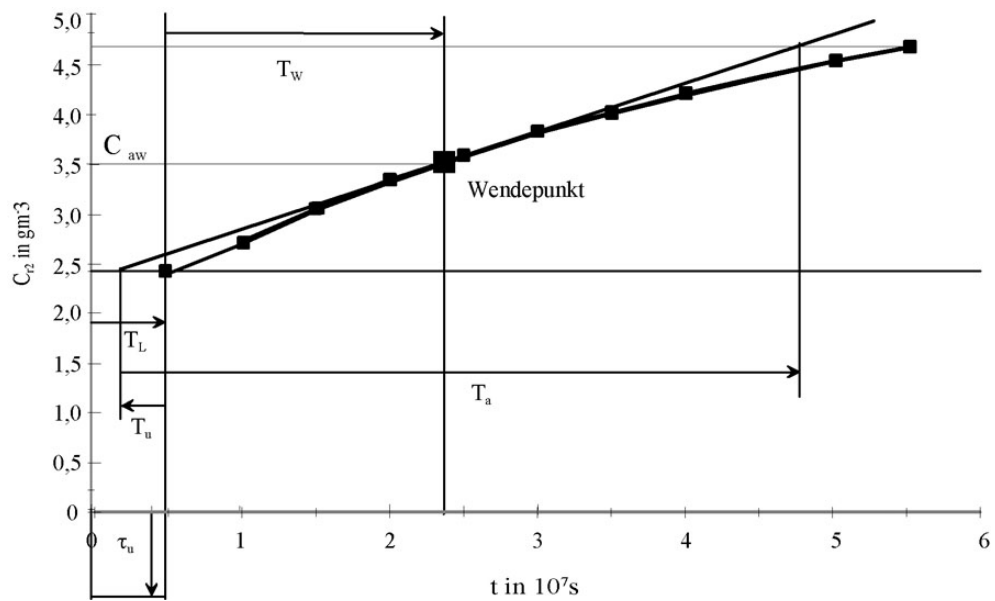


Abbildung 12.10: Konzentrationsverlauf C_{r2} und Parameterbestimmung

Laufzeit:	T_L	$0,5 \cdot 10^7\text{s}$
Verzugszeit:	T_u	$0,3 \cdot 10^7\text{s}$
Wendepunktzeit:	T_w	$1,975 \cdot 10^7\text{s}$
Anlaufzeit:	T_a	$4,55 \cdot 10^7\text{s}$
Hintergrundkonzentration	C_L	$2,4 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$
Wendepunktkonzentration:	C_{aw}	$1,1 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$
Konzentration für $t = \infty$	C_∞	$2,3 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$
Konzentration für $t = 0$:	C_L	$2,4 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$

Aus dem Diagramm (siehe Abbildung 12.10) lassen sich alle charakteristischen Werte ablesen. Dabei ist zu beachten, dass eine Verschiebung des Koordinatensystems um die Laufzeit T_L und die Hintergrundkonzentration C_L (=Konzentration, die unabhängig vom betrachteten Prozess ständig vorhanden ist) erfolgen muss.

Mit diesen Werten lässt sich nach STREJC (siehe Tabelle, Seite 368) unterscheiden, ob es sich um das Modell I oder II handelt. Dazu werden die normierten Werte h_{aW} berechnet und mit den Tabellenwerten verglichen:

$$\begin{aligned} h_{aW} &= \frac{C_{aW}}{C_{\infty}} \\ &= \frac{1,1 \frac{g}{m^3}}{2,3 \frac{g}{m^3}} \end{aligned}$$

$$h_{aW} = 0,478 > 0,264$$

Damit handelt es hier um ein Übertragungsverhalten nach Modell II, d.h. mit gleichen Zeitkonstanten.

Wenn man in Tabelle II die Werte für h_{aW} vergleicht, so erkennt man, dass es sich um eine Übergangsfunktion mit $n = 8$ gleichen Zeitkonstanten handelt.

Berechnung von τ :

Gleichung	Messwert [$10^7 s$]	Zeitkonstante τ [$10^7 s$]
$\frac{T_W}{\tau} = 7$	1,98	0,28
$\frac{T_u}{\tau} = 4,307$	0,30	0,07
$\frac{T_a}{\tau} = 6,711$	4,55	0,68
Mittelwert		0,34

Man sieht hier, dass die berechneten Werte für t sehr stark streuen. Das deutet darauf hin, dass die angesetzte Übergangsfunktion wenig geeignet ist, diesen Vorgang anzunähern. Wahrscheinlich ist es sinnvoller, die Näherung durch eine Übergangsfunktion 1. Ordnung nachzubilden. Eine weitere Fehlerquelle besteht darin, dass die Messwerte nicht bis zum stationären Endzustand aufgenommen wurden, d.h. der Versuch wurde zu zeitig abgebrochen. Dies erkennt man daran, dass die Kurve noch nicht das typisch asymptotische Verhalten bei großen Zeiten zeigt.

• zu Aufgabe 5 (s. S. 354)

Der erste Schritt bei der Bestimmung von Übertragungsfunktionen ist die grafische Darstellung der Messwerte: (siehe Abbildung 12.11) Man sieht hier die Antwortfunktion auf eine

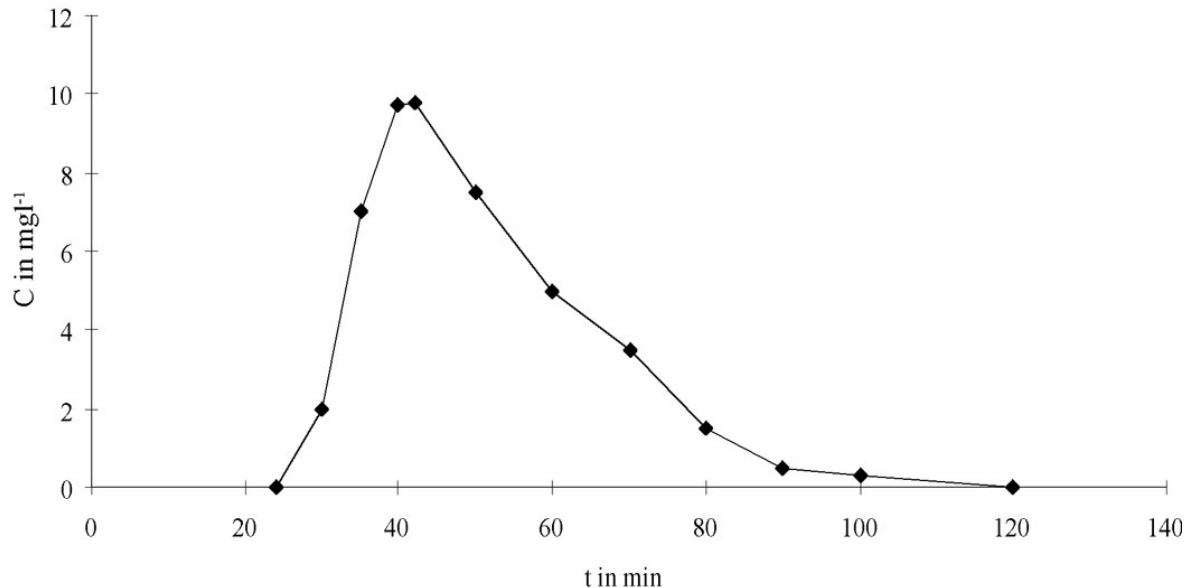


Abbildung 12.11: Impulsantwort eines Säulen-Durchlaufversuches

Impulsanregung, die in der Aufgabenstellung auch angedeutet war.

Die Übergangsfunktion für ein solches System lautet:

$$x_a = x_e \cdot K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t'}{T'}}\right)^n \quad \text{bzw.}$$

$$C_{I_{r1}} = C'_{0,t} \cdot K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t'}{T'}}\right)^n$$

Auch hier gilt es, aus der grafischen Darstellung die unbekannten Größen T und n zu bestimmen (siehe Abbildung 12.12). Aus diesem Diagramm lassen sich folgende Werte ablesen, wobei beachtet werden muss, dass hier eine Koordinatentransformation um den Wert der Laufzeit von $T_L = 24min$ erfolgen muss:

maximale Konzentration:	$C_{(T_m)}$	$9,8 \frac{mg}{l}$
Zeitpunkt der maximalen Konzentration:	T_m	$18min$
Halbierte Zeitspanne:	$\frac{T_m}{2}$	$9min$
Konzentration bei $\frac{T_m}{2}$	$C_{(\frac{T_m}{2})}$	$4,9 \frac{mg}{l}$

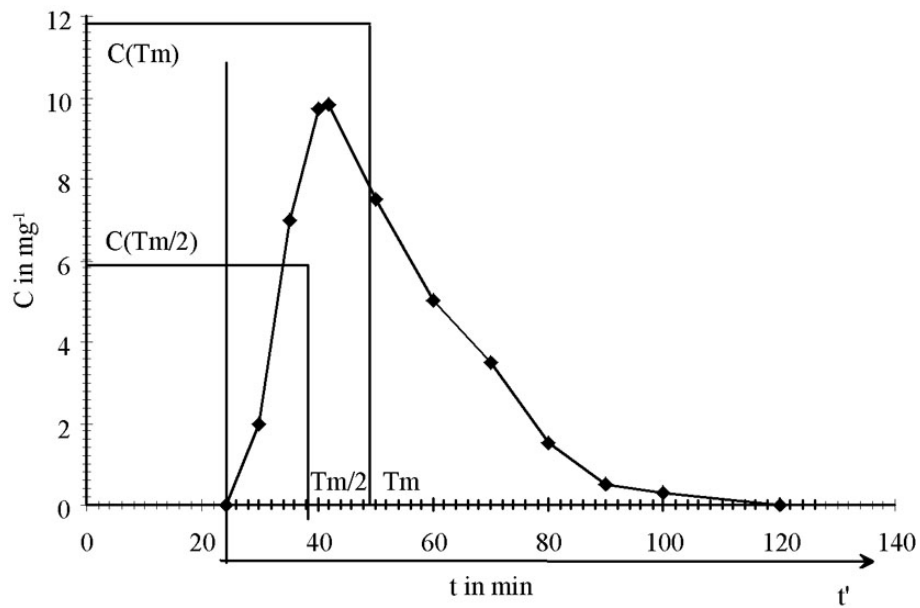


Abbildung 12.12: Auswertung der Impulsantwort

Aus dem Verhältnis von

$$\frac{C_{(T_m)}}{C_{(T_m/2)}} = \frac{9,8 \frac{mg}{l}}{4,9 \frac{mg}{l}} = 2,0$$

und der Tabelle 3, Seite 369 ergibt sich, dass n zwischen 4 und 5 liegen muss. Daraus resultiert auch die Berechnung der Zeitkonstanten τ und der Konstanten K :

n	$\frac{T_m}{T}$	T	$\frac{T \cdot C_{(T_m)}}{A \cdot K}$	K
4	3	6	0,224	$1,05 \cdot 10^{-6}$
5	4	4,5	0,196	$9,0010^{-7}$

$$T_m = 18min$$

$$C_{(T_m)} = 9,8 \frac{mg}{l}$$

$$A = 50kg \cdot 5min$$

Die Größe A ist der Energie- bzw. Masseinhalt des realen Impulses, der eingewirkt hat. Dies entspricht der Gesamtmenge des eingebrachten Tracers.

Damit lautet die Übergangsfunktion unter Berücksichtigung der Koordinatenrücktransformation:

$$C = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & 0 \leq t < T_L \\ C_0 \cdot K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-T_L}{T'}}\right)^n & T_L \leq t \end{array} \right\}$$

bzw. mit Zahlenwerten für das Modell $n = 4$:

$$C = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & 0 \leq t < 24 \text{ min} \\ 50 \text{ kg} \cdot 1,05 \cdot 10^{-6} \frac{\text{mg}}{\text{l} \cdot \text{kg}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-24 \text{ min}}{6 \text{ min}}}\right)^4 & 24 \text{ min} \leq t \end{array} \right\}$$

bzw. für das Modell mit $n = 5$:

$$C = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & 0 \leq t < 24 \text{ min} \\ 50 \text{ kg} \cdot 0,9 \cdot 10^{-6} \frac{\text{mg}}{\text{l} \cdot \text{kg}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-24 \text{ min}}{4,5 \text{ min}}}\right)^4 & 24 \text{ min} \leq t \end{array} \right\}$$

• zu Aufgabe 6 (s. S. 354)

Ausgangspunkt für den Ansatz des Faltungsintegrals ist die zeitliche Grundwasserstandskurve am Punkt P mit $x_p = 105,00m$ und $y_p = 100m$. (siehe Abbildung 12.13). Als Eingangsfunktion wird die Förderrate der Pumpe angesetzt, die konstant $0,015 \frac{m^3}{s}$ betragen soll. Das Abtastzeitintervall ergibt sich daraus, dass laut Aufgabenstellung die ersten vier Gleichungen aufgestellt werden sollen. Daraus folgt, dass sieben Zeitintervalle (x_{e1} bis x_{e7}) zu berücksichtigen sind.

$$\begin{aligned}\Delta t &= T \\ &= \frac{t_{\max}}{8} \\ &= \frac{120min}{8}\end{aligned}$$

$$\Delta t = 15min$$

Die ersten vier Gleichungen des Faltungsintegrals lauten:
allgemein:

$$x_{an} = T(g_n x_{en-3} + g_{n-1} x_{en-2} + g_{n-2} x_{en-1} + g_{n-3} x_{en})$$

speziell:

$$h_4 = T(g_4 \dot{V}_1 + g_3 \dot{V}_2 + g_2 \dot{V}_3 + g_1 \dot{V}_4)$$

$$h_5 = T(g_4 \dot{V}_2 + g_3 \dot{V}_3 + g_2 \dot{V}_4 + g_1 \dot{V}_5)$$

$$h_6 = T(g_4 \dot{V}_3 + g_3 \dot{V}_4 + g_2 \dot{V}_5 + g_1 \dot{V}_6)$$

$$h_7 = T(g_4 \dot{V}_4 + g_3 \dot{V}_5 + g_2 \dot{V}_6 + g_1 \dot{V}_7)$$

mit $T = 15min$, \dot{V}_1 bis $\dot{V}_7 = 0,015 \frac{m^3}{s}$, $h_4 = 14,96m$, $h_5 = 14,95m$, $h_6 = 14,945m$ und $h_7 = 14,94m$ kann das Gleichungssystem gelöst und h_8 prognostiziert werden.

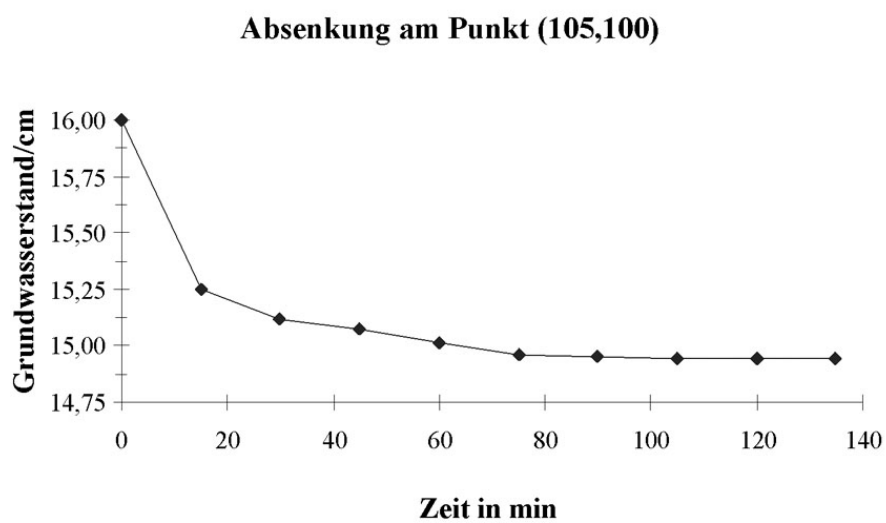
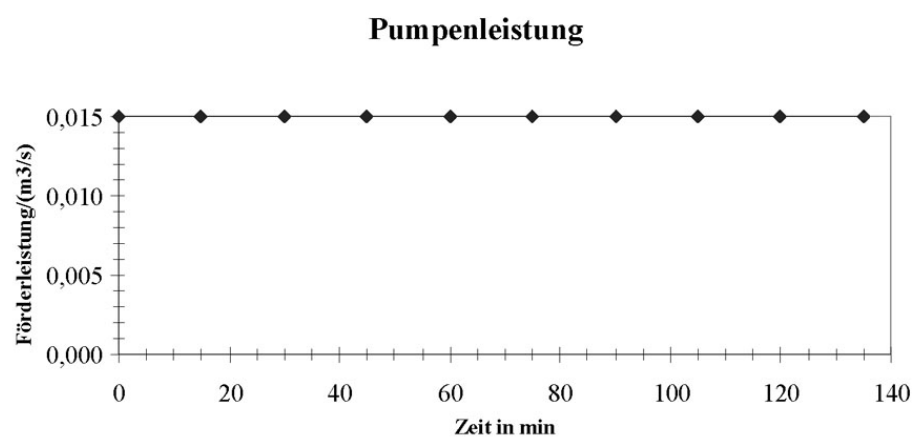


Abbildung 12.13: Antwortsignal eines Pumpversuches

- zu Aufgabe 7 (s. S.354)

Der Temperaturverlauf des Flusses δ_{Fl} und des Grundwassers an der Fassung $\delta_{Fa,g}$ hat die Messwerte:

$\delta_{Fl} [^{\circ}C]$	$\delta_{Fa,g} [^{\circ}C]$	$\delta_{Fa,p} [^{\circ}C]$	Zeit [d]
14,2	8,5		0
16,0	10,0		15
17,7	11,4		30
19,4	14,0		45
17,2	14,1		60
16,0	14,7		75
17,6	15,4		90
18,6	15,8		105
14,8	15,6		120
12,0	14,9		135
13,7	14,1		150

Damit ergibt sich der in Abbildung 12.14 dargestellte Verlauf.

Entsprechend der Bildung der Gleichungen zur Bestimmung der Übergangsfunktion $g(t)$ können nachfolgende Gleichungen aufgestellt werden. Laut Aufgabenstellung sind nur drei Gleichungen mit drei Unbekannten g_1 , g_2 und g_3 aufzustellen und zu lösen:

Allgemein gilt:
$$x_{an} = T(g_n x_{en-2} + g_{n-1} x_{en-1} + g_{n-2} x_{en})$$

oder in konkreter Form:
$$\delta_{Fan} = T(g_n \delta_{Fln-2} + g_{n-1} \delta_{Fln-1} + g_{n-2} \delta_{Fln})$$

Mit dem vorgegebenen Abtastintervall von $T = 15d$ ergibt sich speziell:

$$11,4 = 15d(g_3 \cdot 14,2 + g_2 16,0 + g_1 \cdot 17,7)$$

$$14,0 = 15d(g_3 \cdot 16,0 + g_2 17,7 + g_1 \cdot 19,4)$$

$$14,1 = 15d(g_3 \cdot 17,7 + g_2 19,4 + g_1 \cdot 17,2)$$

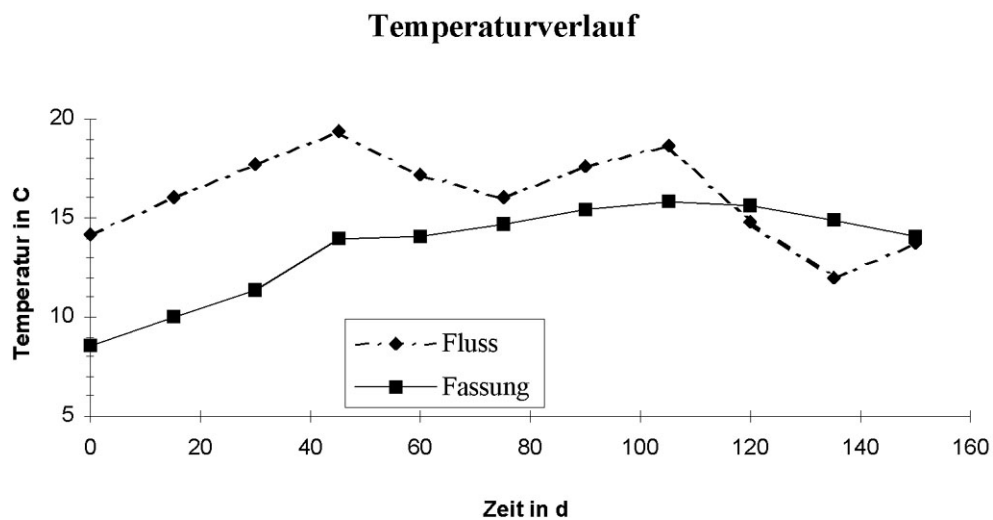


Abbildung 12.14: Temperaturverlauf des Fluss- und des Grundwassers in der Fassung

Dieses Gleichungssystem mit drei Unbekannten kann z. B. mit den Methoden der Determinantenrechnung bestimmt werden:

$$\begin{pmatrix} 213,0 & 240,0 & 265,0 \\ 240,0 & 265,5 & 291,0 \\ 265,5 & 291,0 & 258,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_3 \\ g_2 \\ g_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11,4 \\ 14,0 \\ 14,1 \end{pmatrix}$$

Man erhält folgende Werte:

$$g_3 = 0,339 \quad g_2 = -0,291 \quad g_1 = 0,034$$

Werden diese Werte in die Prognosegleichung eingesetzt, so erhält man:

$$\begin{aligned}\text{prognostiziert: } \delta_{Fa6} &= 15d \cdot (g_3 \cdot 19,4 + g_2 17,2 + g_1 \cdot 16,0) \\ &= 13,4^{\circ}C\end{aligned}$$

$$\text{gemessen: } \delta_{Fa6} = 14,7^{\circ}C$$

Die schlechte Übereinstimmung zwischen Prognose und Messung rührt hier von dem sehr kurzen Beobachtungszeitraum her (nur drei Zeitintervalle).

Bei Erweiterung des Beobachtungszeitraumes auf 5 Zeitpunkte ergeben sich folgende Werte:

$$\begin{pmatrix} 213,0 & 240,0 & 265,5 & 291,0 & 258,0 \\ 240,0 & 265,5 & 291,0 & 258,0 & 240,0 \\ 265,5 & 291,0 & 258,0 & 240,0 & 264,0 \\ 291,0 & 258,0 & 240,0 & 264,0 & 279,0 \\ 258,0 & 240,0 & 264,0 & 279,0 & 222,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_5 \\ g_4 \\ g_3 \\ g_2 \\ g_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8,5 \\ 10,0 \\ 11,4 \\ 14,0 \\ 14,1 \end{pmatrix}$$

$$g_5 = 0,087 \quad g_4 = 0,008 \quad g_3 = -0,032 \quad g_2 = 0,039 \quad g_1 = -0,058$$

Für die Prognoserechnung ergibt sich:

$$\begin{aligned}\text{prognostiziert: } \delta_{Fa6} &= 15d \cdot (g_5 \cdot 16,0 + g_4 \cdot 17,7 \\ &\quad + g_3 \cdot 19,4 + g_2 17,2 + g_1 \cdot 16,0) \\ &= 13,4^{\circ}C\end{aligned}$$

$$\text{gemessen: } \delta_{Fa6} = 14,7^{\circ}C$$

• zu Aufgabe 8 (s. S.354)

a. Aus der Theorie der Übertragungsglieder ist bekannt, dass in Fällen der Impulsantwortfunktionen folgende Übertragungsfunktion gilt:

$$G(p) = \frac{K e^{pT_L}}{(1 + p\tau)^n}$$

Die unbekannten Parameter T_L , t und n sind aus der Messwertkurve zu bestimmen.

Entsprechend dem gegebenen Diagramm (siehe Abbildung 12.15) gilt:

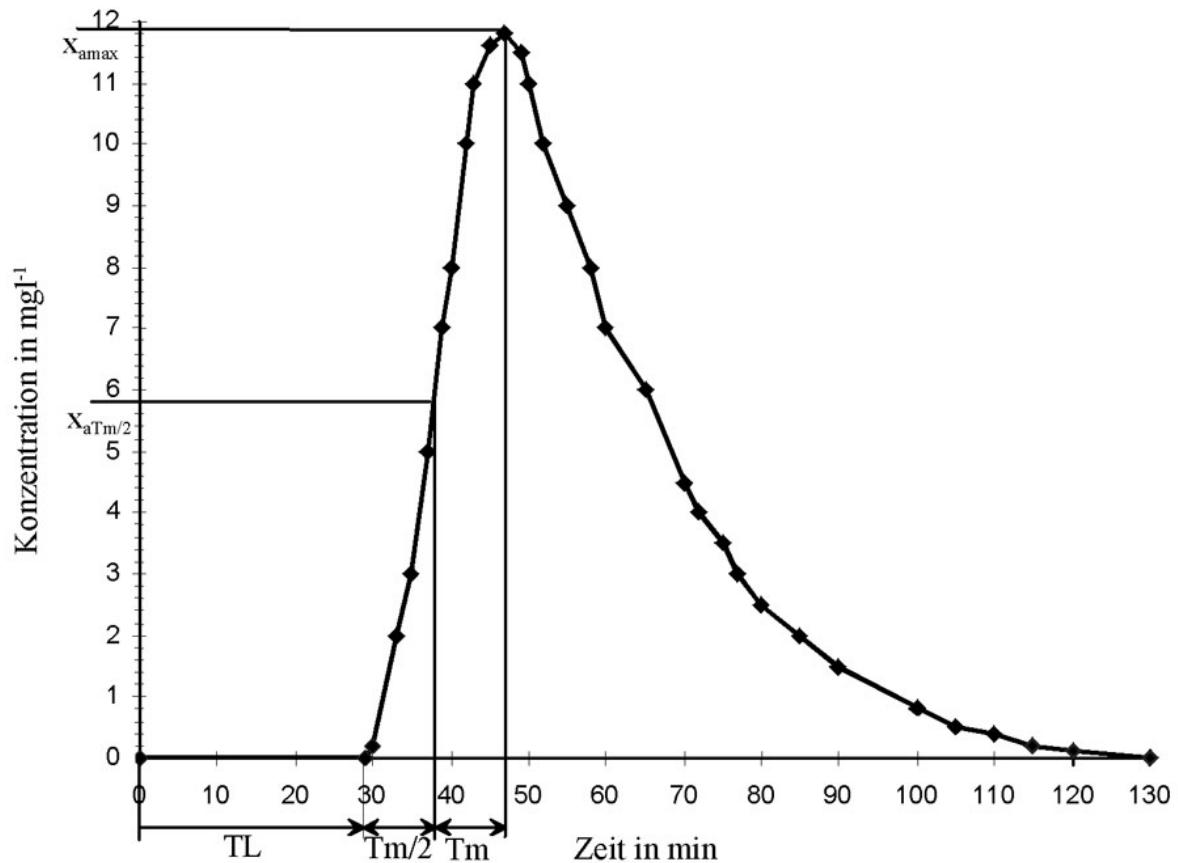


Abbildung 12.15: Impulsantwort mit Parameterbestimmung

Hieraus lassen sich folgende Werte ablesen:

$$T_L = 29 \text{ min} \quad x_a(T_m) = 11,9 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$$

$$T_m = 18 \text{ min} \quad x_a\left(\frac{T_m}{2}\right) = 5,8 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$$

Aus diesen Werten erhält man das Verhältnis von:

$$\frac{x_a(T_m)}{x_a\left(\frac{T_m}{2}\right)} = \frac{11,9 \frac{\text{mg}}{\text{l}}}{5,8 \frac{\text{mg}}{\text{l}}} = 2,05$$

Aus der Tabelle für Systeme n -ter Ordnung

$\frac{x_a(T_m)}{x_a(\frac{T_m}{2})}$	n	$\frac{T_m}{\tau}$	$\frac{\tau x_a(T_m)}{A \cdot K}$
1,785	4	3	0,224
2,165	5	4	0,196

findet man unter der Anpassung auf ganzzahlige n , dass n zwischen 4 und 5 liegt.

Da der Wert des Verhältnisses $\frac{x_a(T_m)}{x_a(\frac{T_m}{2})}$ näher an 2,165 liegt, wird $n = 5$ angenommen. Damit ergibt sich für die Zeitkonstante ein Verhältnis von $\frac{T_m}{\tau} = 4$ bzw. $t = \frac{18min}{4min} = 4,5$.

Die Übertragungskonstante K wird aus der letzten Spalte obiger Tabelle gewonnen, wobei berücksichtigt wird, dass A die Impulsfläche darstellt und hier mit $30 \frac{mg}{l}$ (oder $30 \frac{mg}{l} \cdot 1min$) angenommen wird:

$$\begin{aligned}
 0,196 &= \frac{\tau x_a(T_m)}{A \cdot K} \\
 \hookrightarrow K &= \frac{\tau x_a(T_m)}{A \cdot 0,196} \\
 &= \frac{4,5min \cdot 11,9mg \cdot l}{30mg \cdot l} \\
 K &= 9,11min
 \end{aligned}$$

Damit lautet die Übertragungsfunktion:

$$G(p) = \frac{K e^{-pT_L}}{(1 + p\tau)^n} = \frac{9,11min \cdot e^{-p \cdot 29min}}{(1 + p \cdot 4,5min)^5}$$

Zur Erzeugung der Gewichtsfunktion kann man entweder die Gleichung benutzen oder die Übertragungsfunktion mittels der LAPLACESchen Rücktransformation in die Zeitebene bringen.

Für die Gewichtsfunktion erhält man den Ausdruck:

$$\begin{aligned}
 x_a(t) &= \frac{A \cdot K}{\tau^n} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{30mg \cdot 9,11min}{(4,5min)^5 l} \frac{t [min]^4}{4!} e^{-\frac{t[min]}{4,5min}} \\
 &= \frac{30mg \cdot 9,11}{4,5^5 l} \frac{t^4}{4!} e^{-\frac{t}{270s}}
 \end{aligned}$$

bzw. als normierte Größe ohne Berücksichtigung der Laufzeit:

$$g(t) = \frac{9,11}{4,5^5} \frac{t^4}{4!} e^{-\frac{t}{270s}}$$

bzw. mit Berücksichtigung der Laufzeit:

$$g(t) = \frac{9,11}{4,5^5} \frac{(t - T_L)^4}{4!} e^{-\frac{t-T_L}{270s}}$$

$$g(t) = \frac{9,11}{4,5^5} \frac{(t - 29min)^4}{4!} e^{-\frac{t-29min}{270s}}$$

b. Die Prognose des Wertes für 160min ergibt sich entsprechend des quantisierten Faltungsintegrals zu:

$$C_{160min} = \Delta t (g_1 x_{e8} + g_2 x_{e7} + g_3 x_{e6} + g_4 x_{e5} + g_5 x_{e4} + g_6 x_{e3} + g_7 x_{e2} + g_8 x_{e1})$$

Δt ist entsprechend den gegebenen Werten zu 20min zu setzen.

Die Werte für die Gewichtsfunktion erhält man aus der Aufgabenstellung, bzw. aus der Lösung von a). Die Kurve der Aufgabenstellung ist eine Antwort auf ein impulsförmiges Eingangssignal, d.h. diese Antwort entspricht, bis auf einen Normierungsfaktor und eine Zeitverschiebung um eventuelle Laufzeiten, der Gewichtsfunktion. Wenn man die Kurve der Aufgabenstellung zugrunde legt, muss man beachten, dass die Werte der Kurve an den einzelnen Zeitstützstellen noch durch die Impulsfläche A (hier $30 \frac{mg}{l}$) dividiert werden müssen. Bei Verwendung des analytischen Ausdrucks für $g(t)$ können diese direkt eingesetzt werden. Man erhält also aus der Kurve der Aufgabenstellung unter Beachtung einer Normierung folgende Gewichtsfunktionsanteile $g(t)$:

τ	1	2	3	4	5	6	7	8
$g(\tau)$	0	0	0,270	0,230	0,083	0,033	0,003	0

Die aktuelle Eingangskonzentration, für die eine Prognose aufgestellt werden soll, hat laut Aufgabenstellung folgenden zeitlichen Verlauf:

Zeit [min] (t_n)	0	20	40	60	80	100	120	140
Index	1	2	3	4	5	6	7	8
C_n [$\frac{mg}{l}$]	30	50	80	60	100	50	10	0

Entsprechend den Vorschriften zur Faltungsoperation ergibt sich die Prognose zu:

$$C_{160min} = \Delta t (g_1 x_{e8} + g_2 x_{e7} + g_3 x_{e6} + g_4 x_{e5} + g_5 x_{e4} + g_6 x_{e3} + g_7 x_{e2} + g_8 x_{e1})$$

In dieser Gleichung sieht man, dass die Indizes von Gewichts- und von Eingangsfunktion eine entgegengesetzte Laufrichtung aufweisen. Der Impuls (Anteil der Eingangsfunktion), der am "ältesten" ist (Index 1, $xe(t_1) = C_1$), wird deshalb mit dem "letzten" Gewichtungsfunktionsanteil (Index 8, g_8) multipliziert.

Zur besseren rechnerischen Behandlung werden deshalb die Eingangswerte rückläufig notiert:

τ	1	2	3	4	5	6	7	8
$g(\tau)$	0	0	0,27	0,23	0,083	0,033	0,003	0
$\mathbf{x}_e(8 - \tau + 1)$	0	10	50	100	60	80	50	30
$g(\tau) \cdot \mathbf{x}_e(8 - \tau + 1)$	0	0	13,5	23	4,98	2,64	0,15	0

Damit ergibt sich der zu prognostizierende Wert von C_{160min} als Summe der letzten Zeile, multipliziert mit $\Delta t = 20min$, zu $C_{160min} = 44,27 \frac{mg}{l}$.