TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Forst- Geo- Hydrowissenschaften, Fachrichtung Wasserwesen, Institut für Hydrologie und Meteorologie, Professur Meteorologie

Gedanken zur Spektralanalyse

Dipl. Hydrol. U. Spank
TU- Dresden
Institut für Hydrologie und Meteorologie
Pienner Straße 23
01737 Tharandt
Tel.: 0351-463 39107
Mail: Uwe.Spank@tu-dresden.de

Tharandt, 22.09.2010

- **Turbulente Transport in der atmosphärischen Grenzschicht = Überlagerung von Luftwirbeln verschiedener Größen**
- **unter stationären Bedingungen → Superposition von Schwingungen mit unterschiedlichen Frequenzen auffassen**
- **Analyse der Schwingungen = Spektralanalyse**
- von einem Messsystem kann jedoch nur eine bestimmte Größenordnung von Luftwirbeln und somit nur ein bestimmter Frequenzbereich erfasst werden
- durch die unvollständige Erfassung → spektralen Dämpfung
- spektrale Dämpfung = Superpositionierung verschiedener (durch Systemkomponenten verursachter) Hoch- und Tiefpassfilter

(1) Wie kann man Schwingungen (Frequenzen) des maßgebenden Transports/ der maßgebenden Turbulenz bestimmen und darstellen → Spektralanalyse

(2) Beschreibung von Spektren mit Modellen

(3) Praktische Beispiele

→ Beschränkung auf Fourier- Transformation (Fourieranalyse)

Alternativen: Wavelet- Analysen, LOMB- Scargle- Algorithmus, Autokorrelation)

Fourier- Transformation: Darstellung einer Zeitreihe durch Superpositionierung von Sinus-Funktionen

- → unterschiedliche Frequenz
- → unterschiedliche Phase
- → unterschiedliche Amplitude

Daten-/ Originalbereich ⇨ **Bild-/ Spektralbereich**

Direkte Fourier-Transformation (DFT)

Daten-/ Originalbereich → **Bild-/ Spektralbereich**

$$T_{FT}(c) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k}{n} \cdot \exp\left(-i \cdot 2\pi c \cdot \frac{k}{n}\right)$$

$$x_k = \sum_{c=0}^{n-1} T_{FT}(c) \cdot \exp\left(i \cdot 2\pi c \cdot \frac{k}{n}\right)$$

x_k… k-te Element der Datenreihe
n… Anzahl der Elemente
c… Wellenzahl im Bildbereich

→ DFT sehr rechenintensiv → Fast Fourier- Transformation (FFT)

→ Anzahl der Datenpunkte beschränkt auf 2^x *(Originaldatenreihe kürzen !)*

Euler- Notation: $\rho \exp(i\varphi) = \rho(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = \mathrm{Re} + i\,\mathrm{Im}$

→ Ergebnis: Imaginäre Zahlen

→ Betrag ρ = Amplitude der Schwingung

→ Winkel φ = Phase

→ Wellenzahl c → Frequenz

Umrechnung Wellenzahl → Frequenz

$$f_k = \frac{c_k}{n} \cdot f_M = \frac{c_k}{n \cdot T_M}$$

$$\Delta f = f_{k+1} - f_k = \frac{1}{n} \cdot f_M = \frac{1}{n \cdot T_M}$$

f_M… Frequenz im Originalbereich
T_M… Messintervall im Originalbereich
c_k… k-te Wellenzahl im Bildbereich
f_k… k-te Frequenz im Bildbereich
Δf… Spektrale Auflösung (Bildbereich)
n… Anzahl der Elemente

KEINE Auflösung von Frequenzen > $f_M/2$ → Nyquistkriterium

$_{Ny}$… Nyquist-Frequenz

$$\boxed{f_{Ny} = \frac{f_M}{2} = \frac{1}{2 \cdot T_M}}$$

KEINE Auflösung von Frequenzen < f_M/n

c = 0 → Mittelwert der Datenreihe (~ Offset der Schwingungen)

- **Phase für viele meteorologische Anwendungen nicht benötigt**
- **Amplitude (Betrag der Imaginären Zahl) → Energie-/ Powerspektrum E(c)**

n geradzahlig: $E(c) = 2 \cdot |T_{FT}(c)|^2$ **für** $1 \leq c \leq \frac{n}{2} - 1$ **und** $E(c) = |T_{FT}(c)|^2$ **für** $c = \frac{n}{2}$

n ungerade: $E(c) = 2 \cdot |T_{FT}(c)|^2$ **für** $1 \leq c \leq \frac{n}{2}$

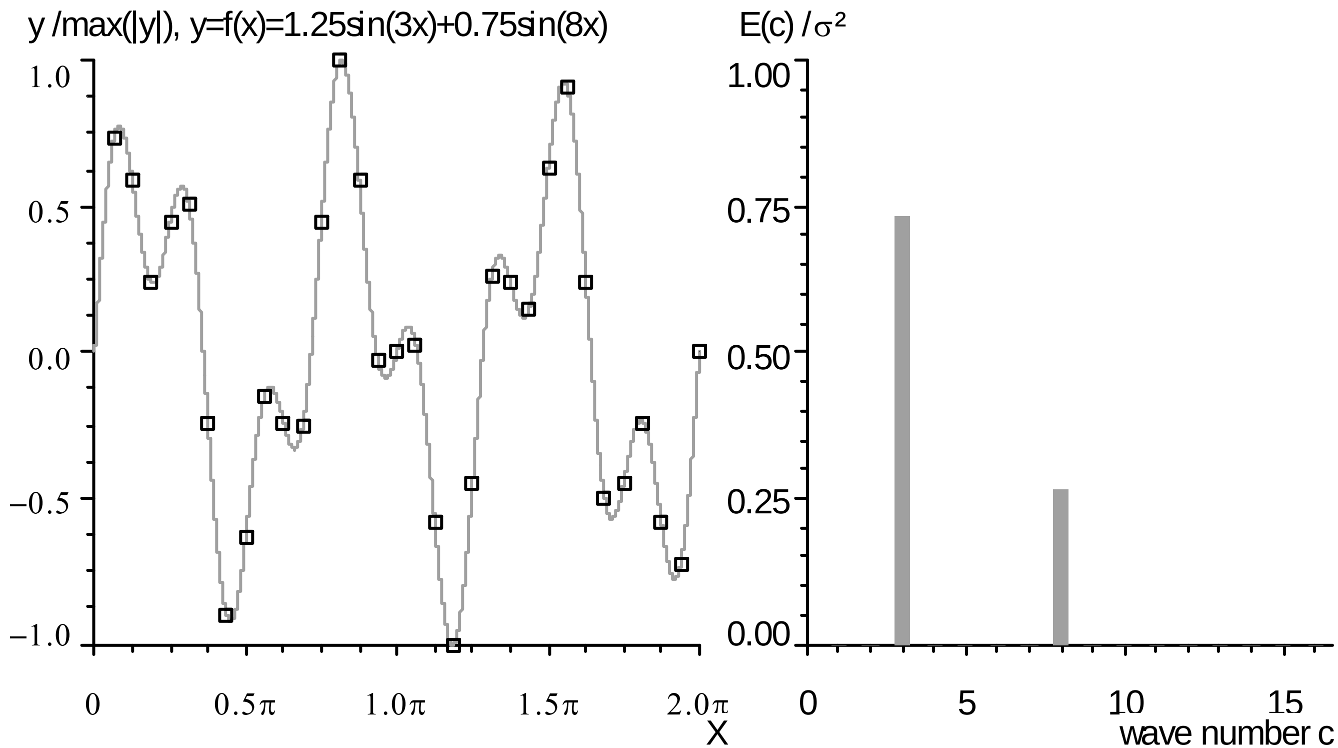
→ Summe des Energiespektrums = nicht biaskorrigierte Varianz

$$\boxed{\sigma^2_{biased}(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1}(x - \bar{x})^2}{n} = \sum_{k=1}^{n/2} E(c_k)}$$

→ Normierung mit Messfrequenz/ Spektraler Auflösung → Energiedichtespektrum $S(f_k) = \frac{E(c_k)}{\Delta f} = E(c_k) \cdot \frac{n}{f_M} = E(c_k) \cdot n \cdot T_M$

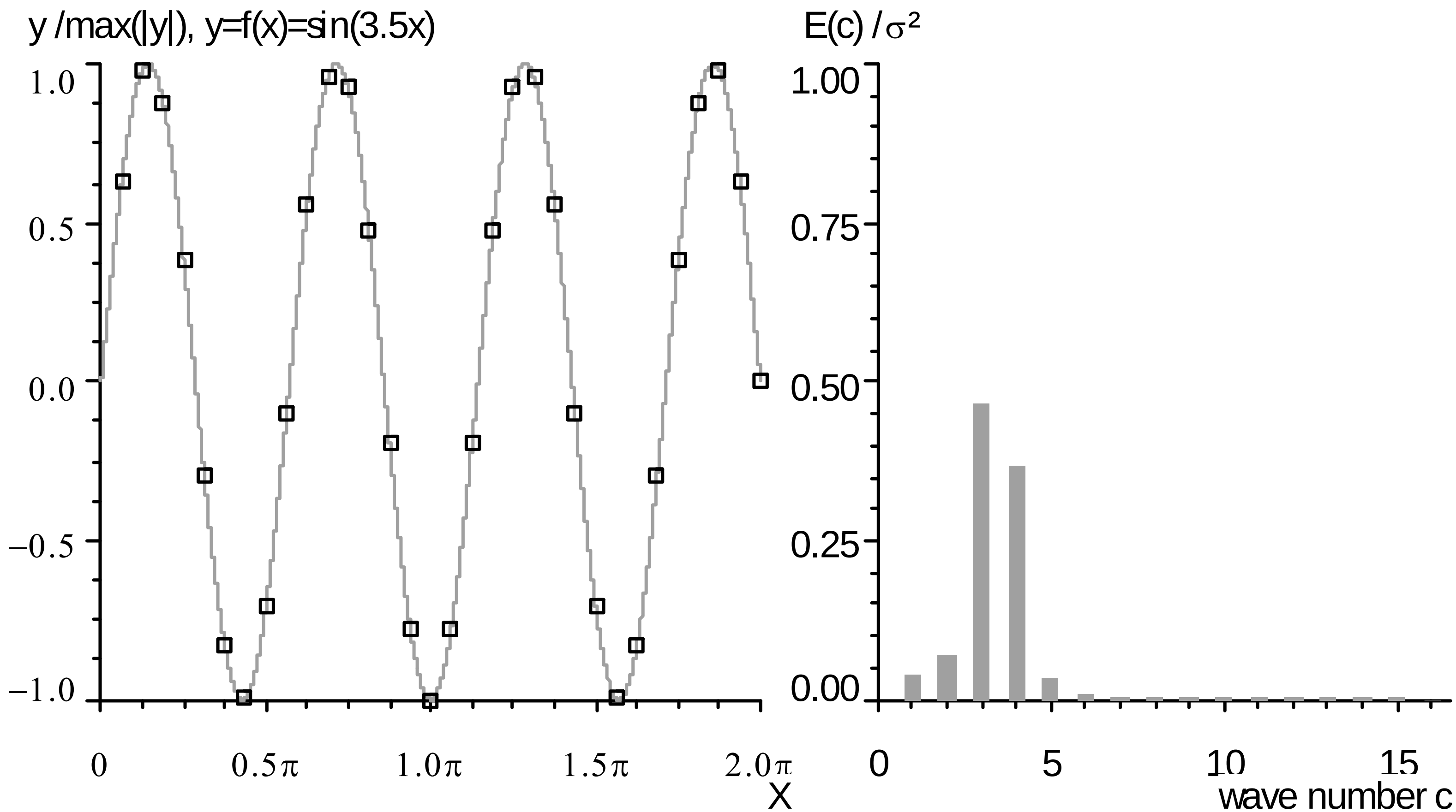
$$\boxed{\sigma^2_{biased}(x) = \sum_{f(c=1)}^{f_{NY}} \Delta f \cdot S_x(f) \rightarrow \int_{\lim f \to 0}^{\infty} S_x(f)\,df = \int_{\lim f \to 0}^{\infty} f \cdot S_x(f)\,d\log f}$$

Rechenbeispiele (1)



Superpositionierung von Schwingungen (Bsp. 1), links: Zeitreihe, rechts normiertes diskretes Energiespektrum

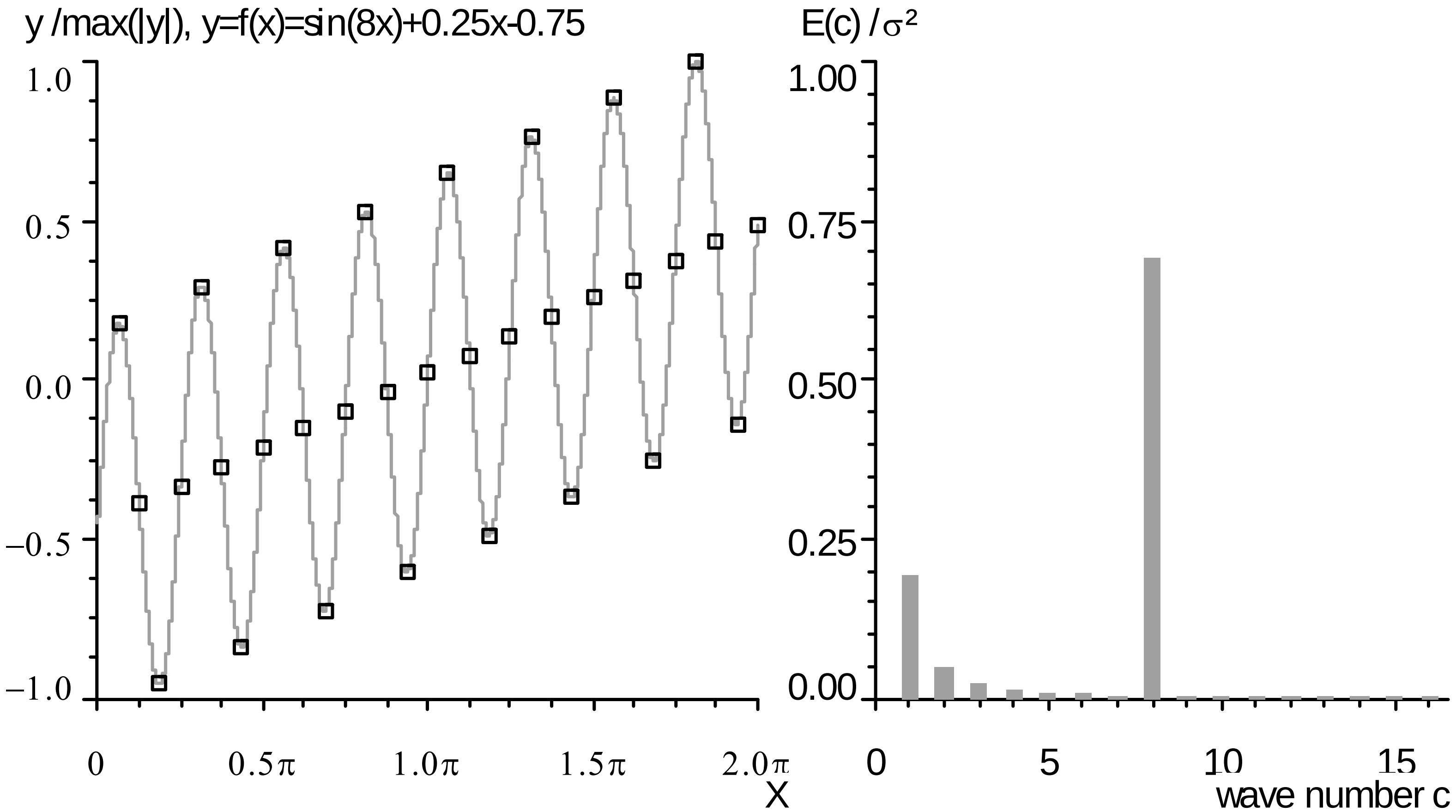
→ Abbildung ganzzahliger Wellenzahlen



Superpositionierung von Schwingungen (Bsp. 2), links: Zeitreihe, rechts normiertes diskretes Energiespektrum

→ gebrochenzahlige Wellenzahl → NICHT abbildbare Wellenzahlen Aufweitung des Spektrums → Rauschen

Rechenbeispiele (3)

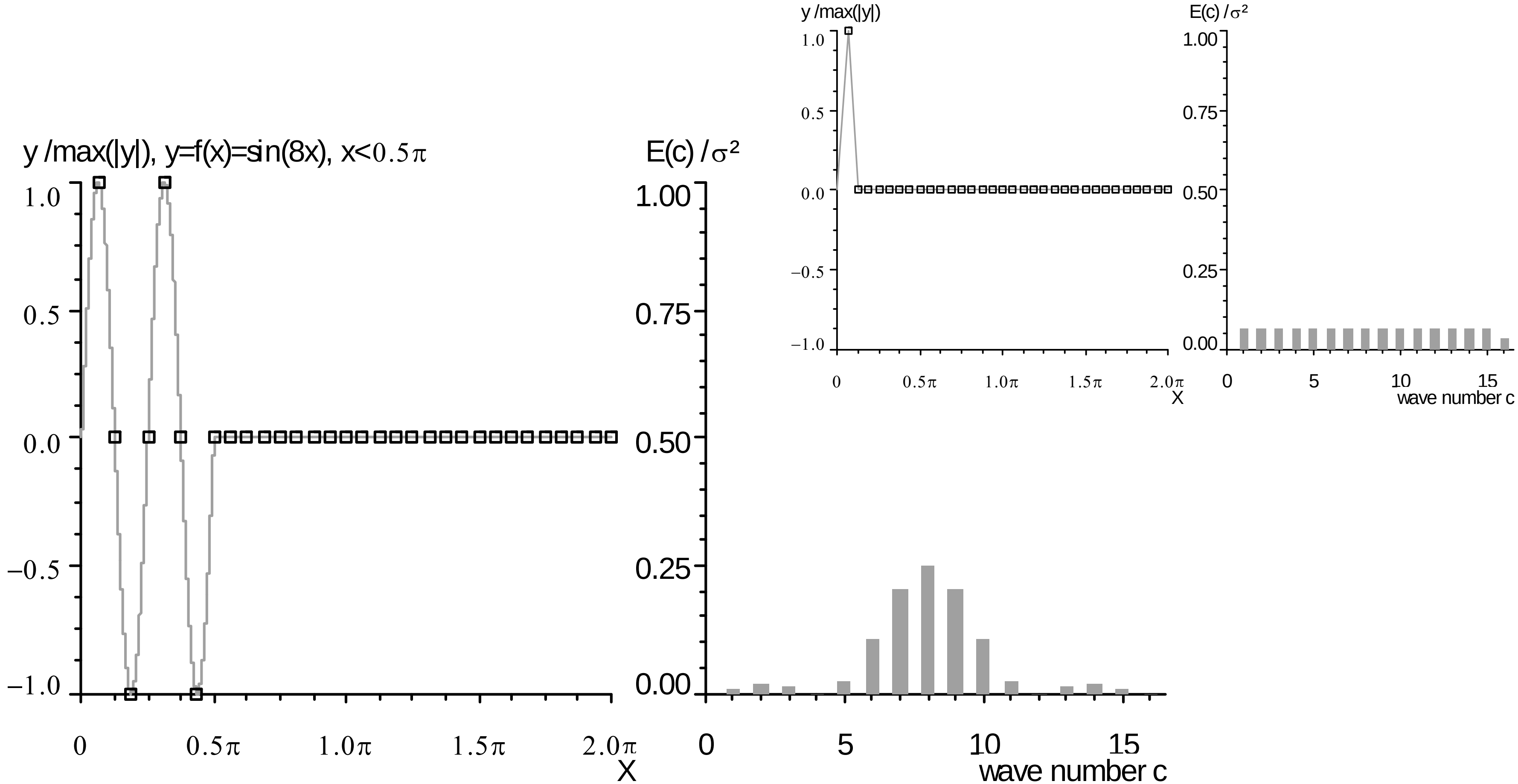


Superpositionierung von Schwingungen (Bsp. 3), links: Zeitreihe, rechts normiertes diskretes Energiespektrum

→ **linearer Trend → Red- Noise** (genauere Unterscheidung in Pink- [f^{-1}] Noise und in eine Brown- [f^{-2}] Noise)

→ **Hochpassfilter (Mindestens Detrending der Datenreihe) !!!**

Rechenbeispiele (4)



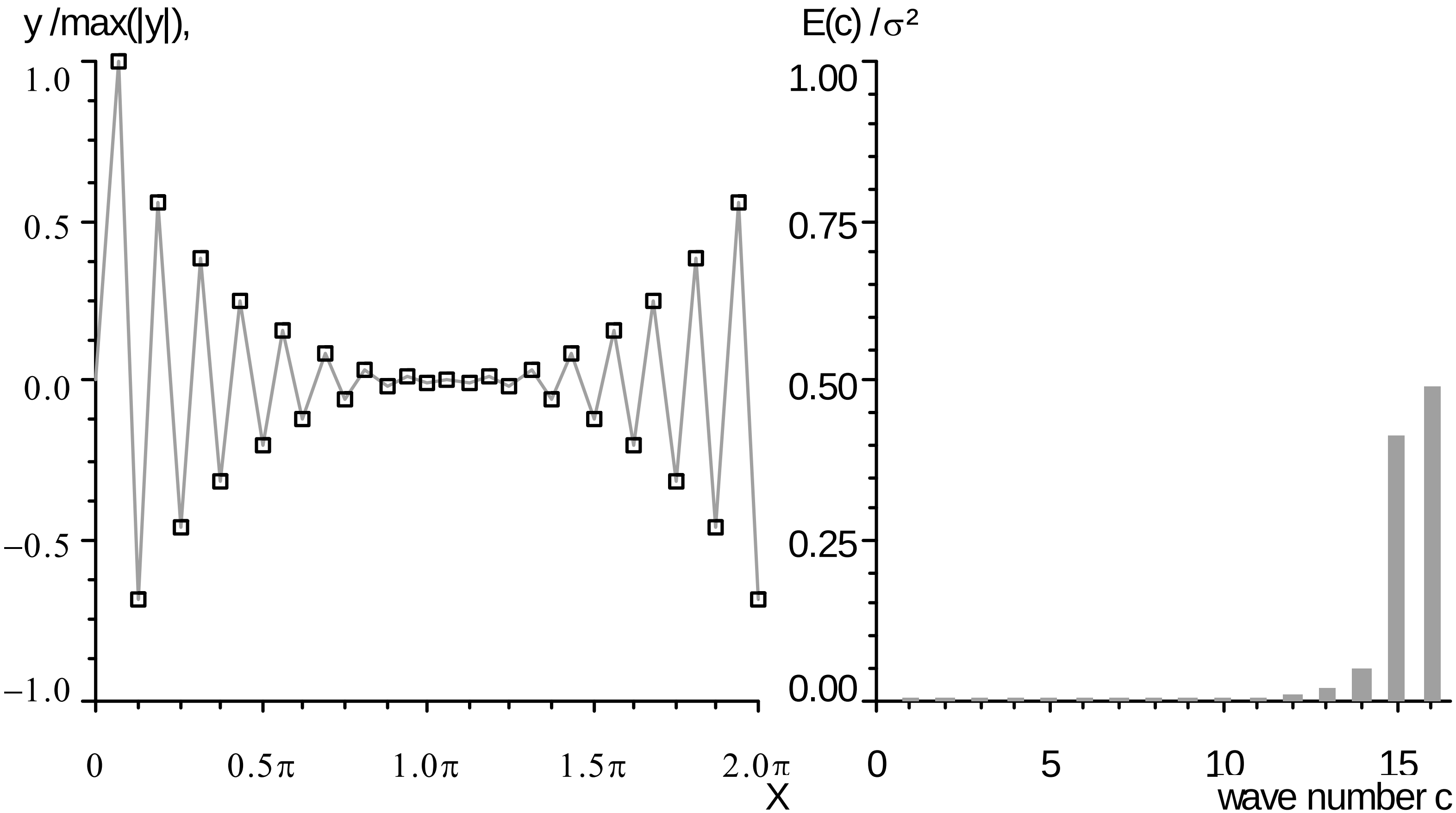
Superpositionierung von Schwingungen (Bsp. 4), links: Zeitreihe, rechts normiertes diskretes Energiespektrum

→ Leakage (Fehlende Daten/ nicht abgebildete Schwingungen) → White Noise

→ Datenlücken ergänzen (ABER WIE ?)

→ Messfrequenz muss zur Messwertauflösung passen !

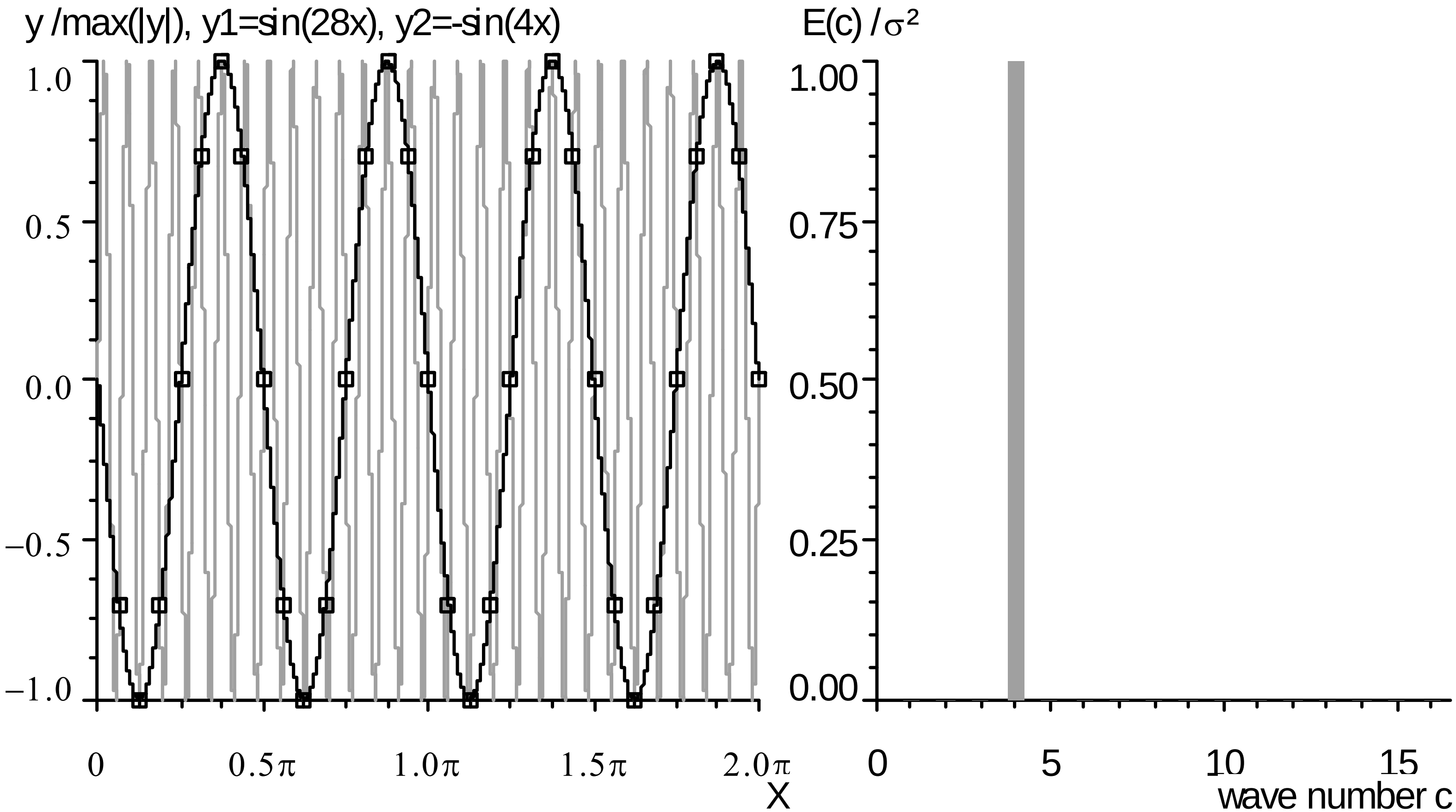
Rechenbeispiele (5)



Superpositionierung von Schwingungen (Bsp. 5), links: Zeitreihe, rechts normiertes diskretes Energiespektrum

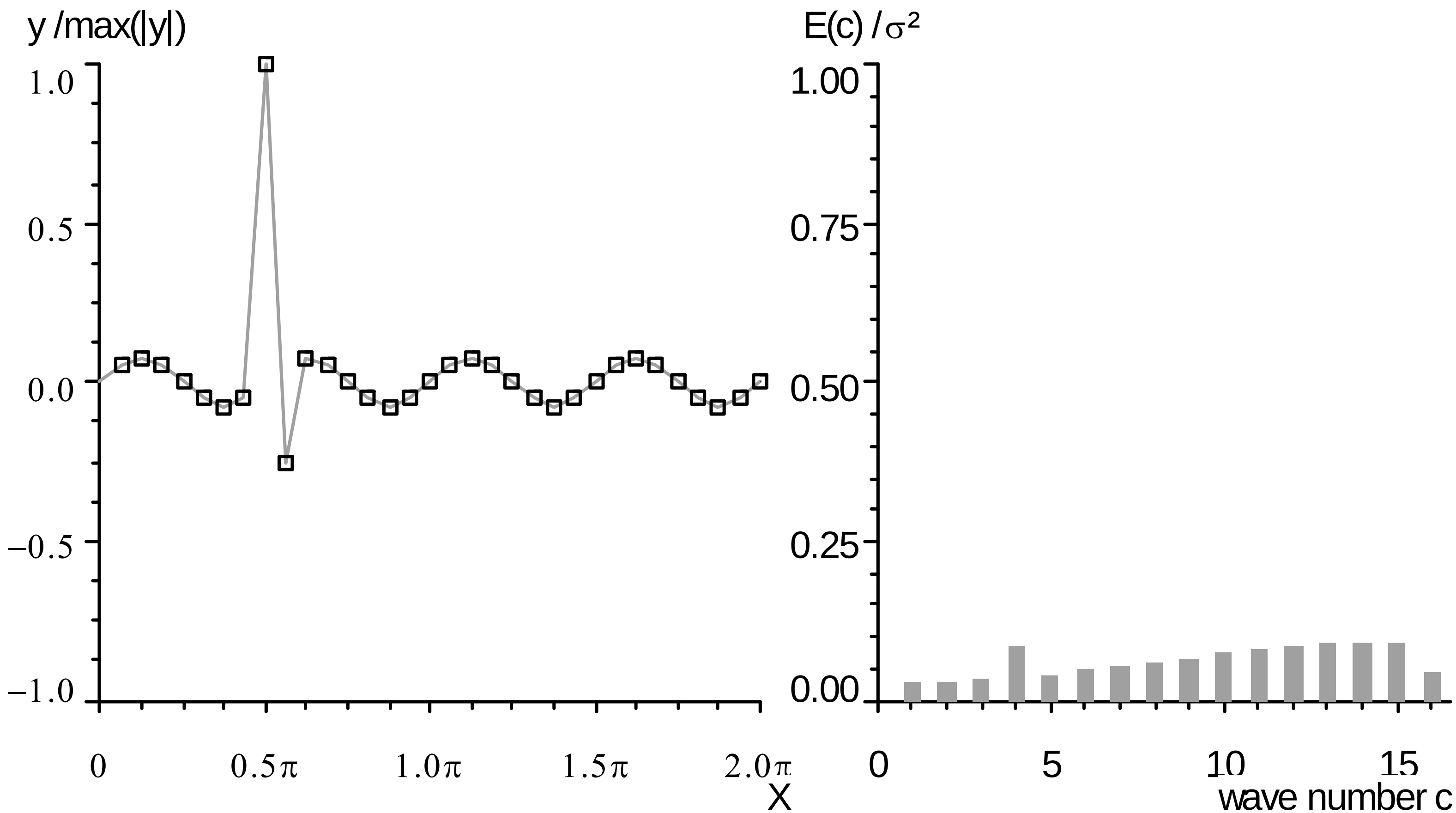
→ **Ansteigen des Spektrums in höheren Frequenzen → Blue Noise** (genauere Unterscheidung Azure- [f] und Purple- [f^2] Noise)

→ Verschieden Ursachen: Instationarität, nicht abbildbare hohe Frequenzen, Leakages, nicht Einhaltung des Nyquist- Kriterium



Superpositionierung von Schwingungen (Bsp. 6), links: Zeitreihe, rechts normiertes diskretes Energiespektrum

→ **Nicht Einhaltung des Nyquist- Kriteriums** (→ Frequenzen oberhalb $f_M/2$ NICHT abbildbar → werden durch niederfrequente Schwingungen interpretiert)



Superpositionierung von Schwingungen (Bsp. 7), links: Zeitreihe, rechts normiertes diskretes Energiespektrum

→ **Spikes → White- und Blue- Noise** (nicht vorhandene Schwingungen werden interpretiert)

→ **Ausreißer- Tests ! (→ Was ist Ausreißer? → Faustregel > 3 bis 10σ; 5σ → iterativer Prozess)**

Probleme bei der Fourier- Analyse realer Daten

- → **instationäre Daten → zeitliche Veränderung des Spektrums im Datensatz (schon innerhalb einer ½ Stunde)**
- → **Red-, White- und Blue Noise treten gleichzeitig auf**
- → **Nicht abbildbare Frequenzen → Frequenzkontinuum statt diskreter Frequenzen**
- → **Datensatz nur Fenster des Spektralenbereichs** (inverse Betrachtung)

→ Data- Windowing

- → **für meteorologische Anwendung → nicht der einzelne Peak sondern Verlauf des Spektrums interessant**

→ Glättung

→ Datensatz = Ausschnitt (Datenfenster) einer unendlichen Zeitreihe

→ Fouriertransformation basiert auf Annahme → diese unendliche Zeitreihe beschreibbar durch Aneinanderreihung des zugrunde liegenden Datenfensters

→ alle enthalten Schwingungen würden sich ins Unendliche fortsetzen

→ bei meteorologischen Daten kann eine Periodizität → nur für einen bestimmten (stationären) Zeitbereich angenommen

→ **Daten selbst verursachen ein Leakage mit den entsprechenden Folgen**

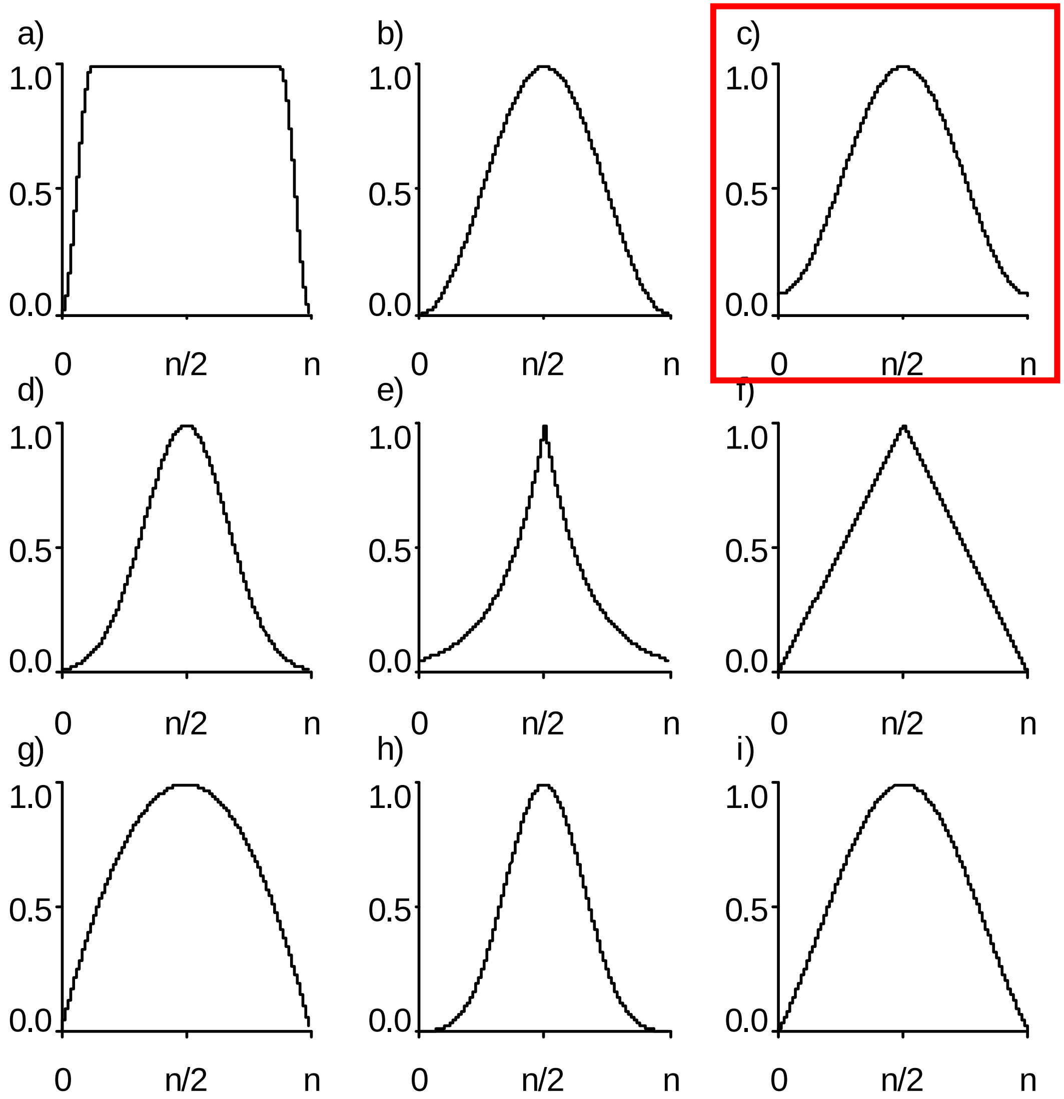
→ Eindämmung dieses Problems → Schaffung eines kontinuierlichen Ein- und Austritt in das Datenfenster

→ **Multiplikation des trendbereinigten Datensatzes mit einer Taper- Funktion (Window- Funktion)**

→ Praktisch: häufig mit Verstärkung der Red- Noise verbunden ?!?

Taper- Funktionen

Name der Taper- Funktion	Funktion
Cosine	$t(k) = 0.5 - 0.5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\alpha \cdot n} \cdot \left(k - \frac{1}{2}\right)\right) \rightarrow k < \alpha \cdot n$ $t(k) = 1.0 \rightarrow \alpha \cdot n \le k \le (1-\alpha) \cdot n$ $t(k) = 0.5 - 0.5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\alpha \cdot n} \cdot \left(n - k + \frac{1}{2}\right)\right) \rightarrow k > (1-\alpha) \cdot n$
Hanning	$t(k) = 0.5 + 0.5 \cdot \cos\left(\pi \cdot \left(\frac{2k}{n} - 1\right)\right)$
Hamming	$t(k) = 0.54 + 0.46 \cdot \cos\left(\pi \cdot \left(\frac{2k}{n} - 1\right)\right)$
Gaussian	$t(k) = \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \alpha^2 \cdot \left(\frac{2k}{n} - 1\right)^2\right)$
Poisson	$t(k) = \exp\left(-\alpha \cdot \left\lvert\frac{2k}{n} - 1\right\rvert\right)$
Triangle (Barlett)	$t(k) = 1 - \left\lvert\frac{2k}{n} - 1\right\rvert$
Welch (Parzen I)	$t(k) = 1 - \left(\frac{2k}{n} - 1\right)^2$
Parzen (Parzen II)	$t(k) = 1 - 6 \cdot \left(\frac{2k}{n} - 1\right)^2 + 6 \cdot \left\lvert\frac{2k}{n} - 1\right\rvert^3 \rightarrow k \le \frac{1}{4} n \text{ or } k \ge \frac{3}{4} n$ $t(k) = 2 \cdot \left(1 - \left\lvert\frac{2k}{n} - 1\right\rvert^3\right) \rightarrow \frac{1}{4} n < k < \frac{3}{4} n$
Daniell	$t(k) = \dfrac{\sin\left(\pi \cdot \left(\frac{2k}{n} - 1\right)\right)}{\pi \cdot \left(\frac{2k}{n} - 1\right)}$



Datenfenster verschiedener Taper- Funktionen a) Cosine-, b) Hanning, c) Hamming, d) Gaussian, e) Poisson, f) Triangle, g) Welch, h) Parzen, i) Daniell- Taper

Verlauf steht im Vordergrund → meist Peaks nebensächlich

→ ABER: stehende Wellen durch Pumpen/ Ventilatoren z.B. im Ansaugschlauch von Closed- Path- EC- Systemen?

Hanning- Glätter → wiederholte Anwendung

$$\tilde{S}_x(f_k) = \frac{1}{4} \cdot \left(S_x(f_{k-1}) + 2 \cdot S_x(f_k) + S_x(f_{k+1}) \right)$$

- 👍 nur geringe Verzerrung
- 👎 Betonung von Peaks, Wiederholte Ausführung
- → für kleine Datensatze oder für Untersuchungen spezieller Frequenzbereiche

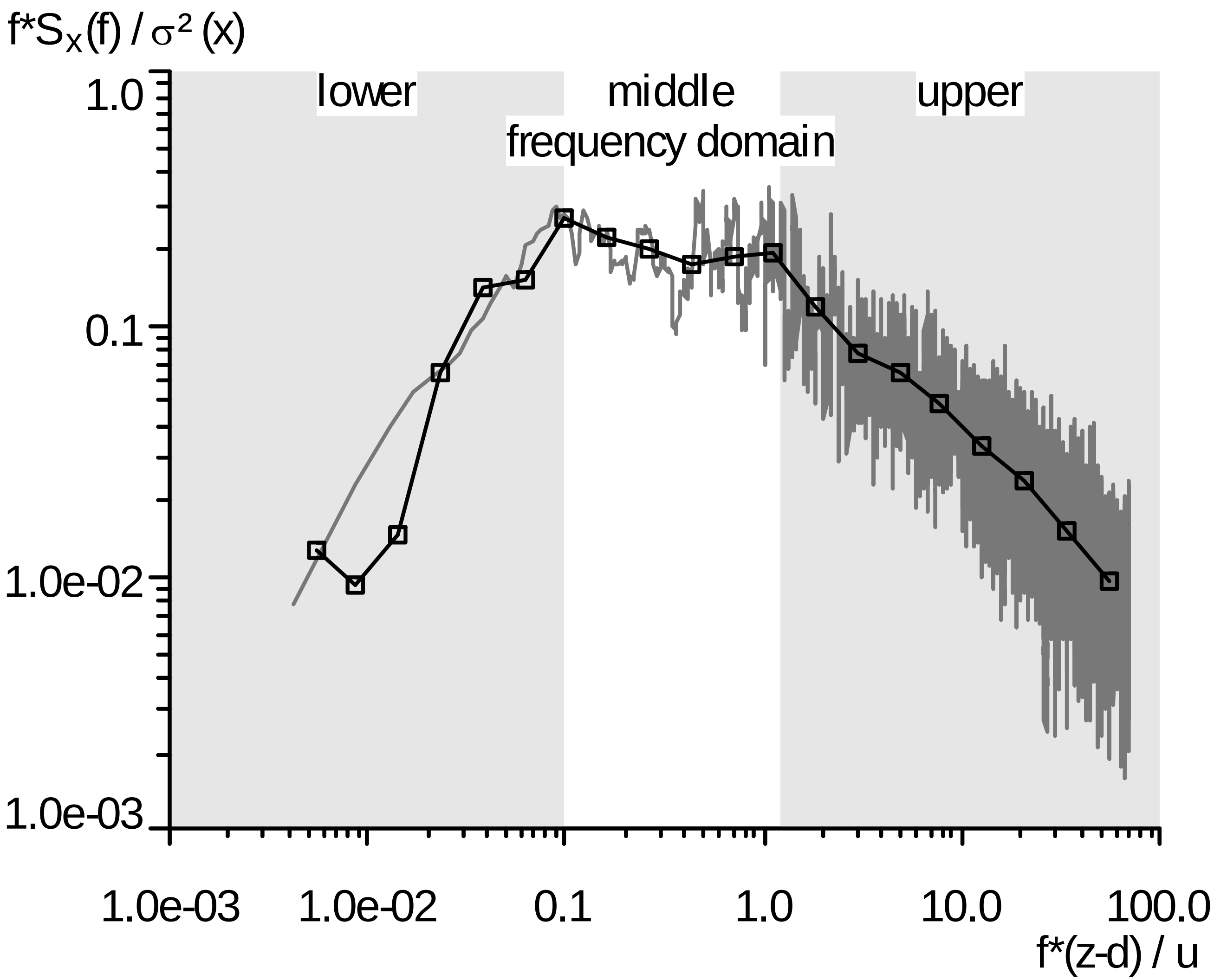
Daniell- Glätter

$$\tilde{S}_x(f_k) = \frac{1}{2b+1} \cdot \sum_{j=-b}^{b} S_x(f_{k+j})$$

- 👍 einfach (~ gleitendes Mittel), wählbare Breite
- 👎 Verzerrung
- → für Untersuchung der Form/ von Anstiegen (Slopes) des Spektrum (Methode der Wahl bei numerischen Analysen)

Blockmittel → Logarithmische- Klassenbildung

- 👍 einfach, gute grafische Darstellung möglich
- 👎 analytische Untersuchungen ?
- → Visualisierung



Vergleich von Daniell- Glätter und Logarithmischen Blockmittel

(Normiertes Spektrum des Vertikalwindes an der ASTW, 07.05.1998 16:30)

Stull R.B. (1988): An Introduction to Boundary Layer Meteorology, Kluwer Academic Publishers, 670 pp.

Vergleich mit Modell

Normierung der y-Achse nach f S(f)/σ²

σ²… Varianz

Normierung der x-Achse nach f (z-d)/u

z… Messhöhe

d… Nullpunktverschiebung

u… Windgeschwindigkeit

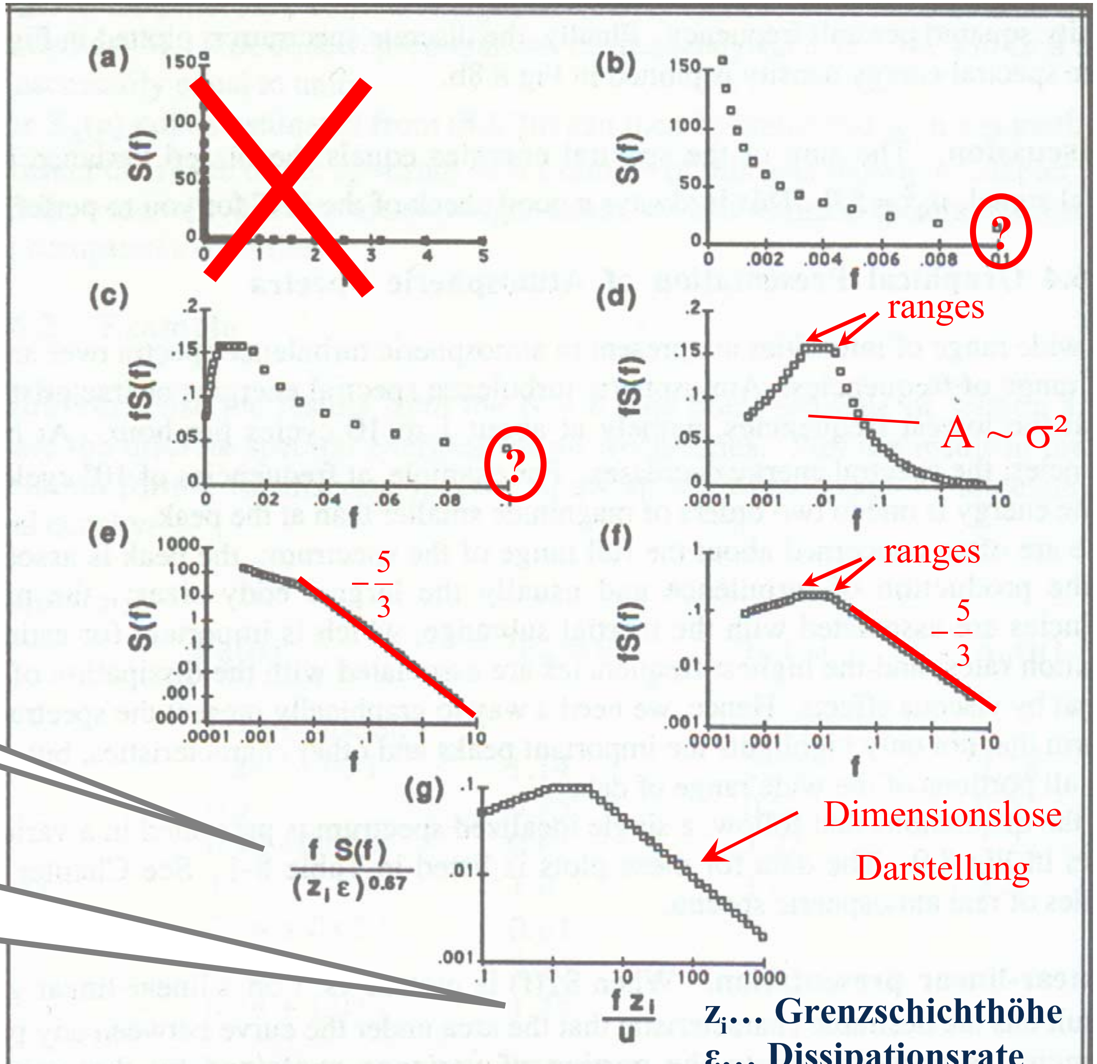
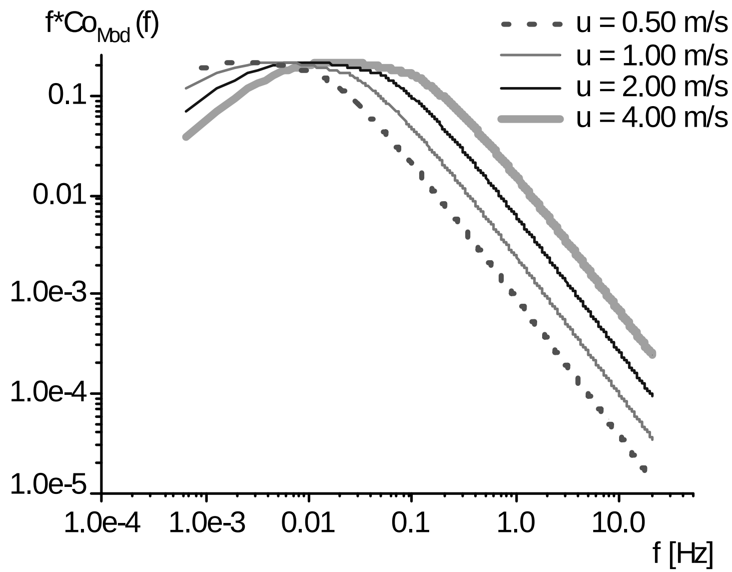


Fig. 8.9 Different presentations of the same spectrum (see text for details).

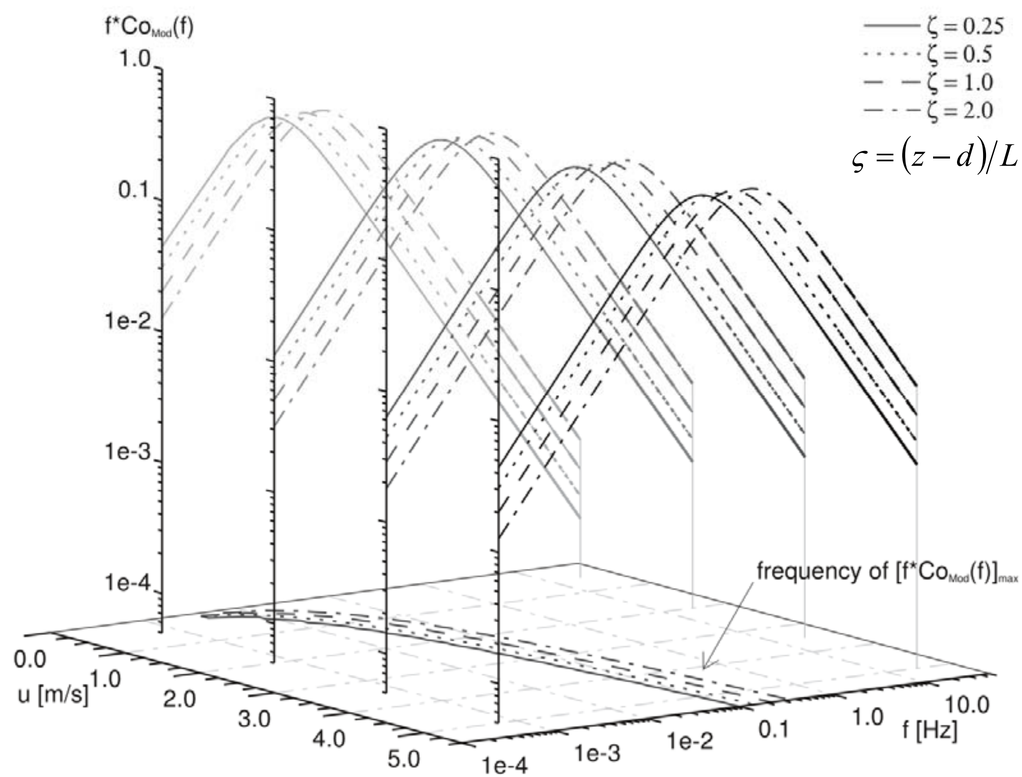
Darstellung von Spektren

Modelle basierend auf Kansas- und Minnesota- Boundary- Layer- Experiments (Kaimal et al. 1972, 1976) → NICHT unumstritten Massman and Lee (2004)



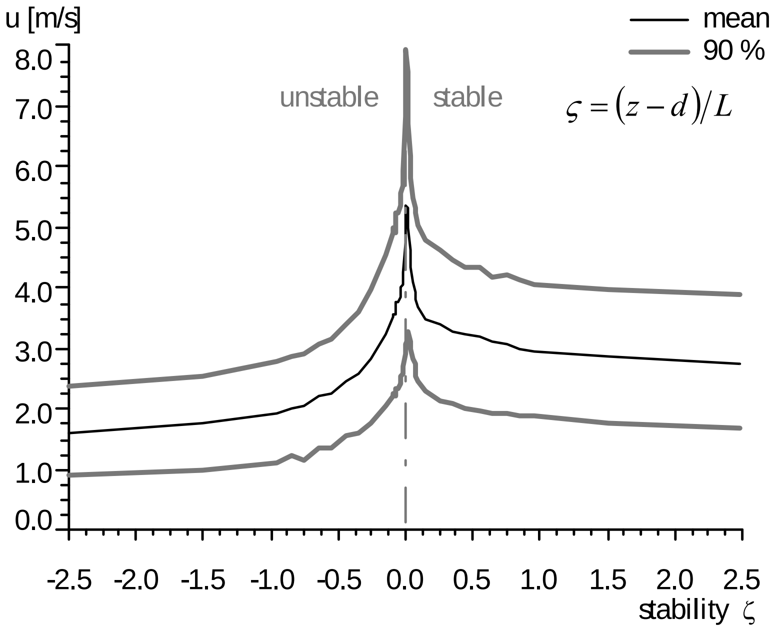
↑ Modell des Kospektrum für labile Schichtung in Abhängigkeit der Windgeschwindigkeit u (am Beispiel der ASTW) → Kein Einfluss Stabilität

Modell des Kospektrum für stabile Schichtung in Abhängigkeit der Windgeschwindigkeit u und Stabilität ζ (am Beispiel der ASTW) ↓



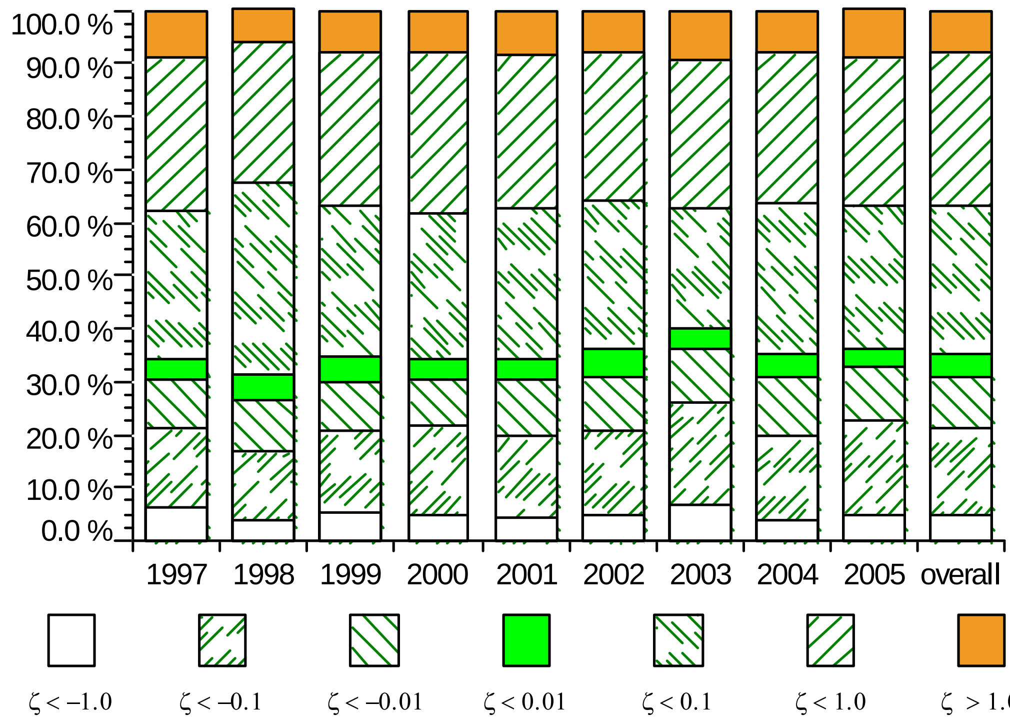
ABER: praktisch u > 2.5 m/s → neutrale Schichtung

Verteilung der atmosphärischen Stabilität

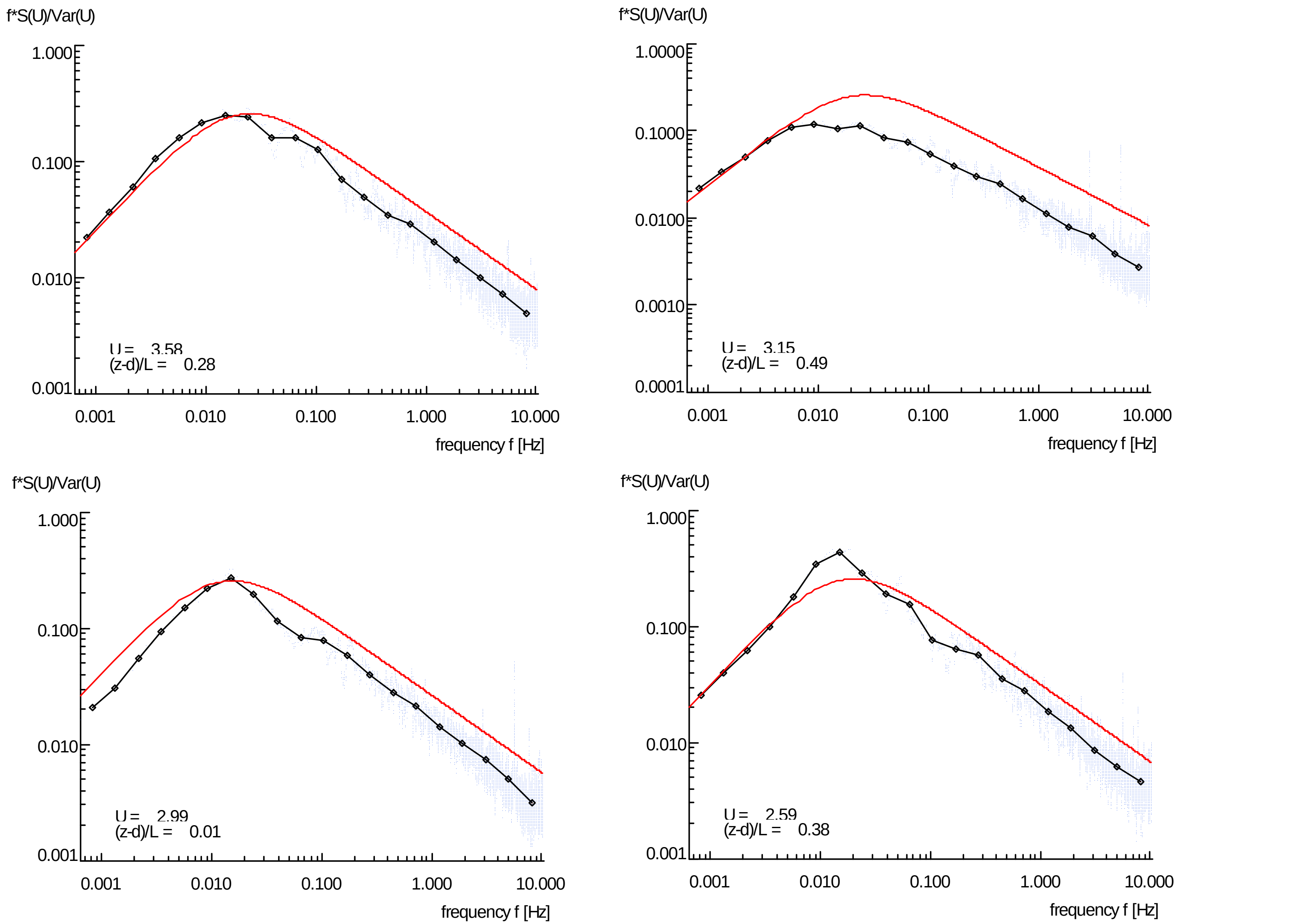


↑ Zusammenhang Windgeschwindigkeit und Stabilität an der ASTW

Verteilung verschiedener Schichtungszustände and der ASTW ↓



Gemessene Spektren



VGL gemessener Spektren (horizontal Wind u) mit Modellspektren

(Daten ASTW, Mai 1998)

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN

Danke für Ihre Aufmerksamkeit

Dipl. Hydrol. U. Spank
TU- Dresden
Institut für Hydrologie und Meteorologie
Pienner Straße 23
01737 Tharandt
Tel.: 0351-463 39107
Mail: Uwe.Spank@tu-dresden.de