Kapitel 2

Vektoralgebra und -analysis

Ausgehend von einfachen, bekannten Darstellungen der Vektorrechnung werden die Grundregeln der Vektoralgebra aufgeführt. Anschließend werden die Regeln für die Differenzierung im Zusammenhang mit Vektoren behandelt und mit anschaulichen Beispielen unterlegt.

2.1 Einheitsvektoren

Vektoren lassen sich in Abhängigkeit von dem verwendeten Koordinatensystem durch verschiedene Einheitsvektoren darstellen. Dabei ergibt sich der Vektor $\vec{a}$ aus der Summe der Vielfachen (Komponenten) der Einheitsvektoren. Die Einheitsvektoren besitzen die Länge (Betrag) Eins $|e| = 1$, sie sind stets parallel zu den Koordinatensystemachsen gerichtet.
Für die praktische Arbeit in der Wasserwirtschaft haben sich drei Koordinatensysteme, das kartesische, das zylindrische und das sphärische, durchgesetzt. Ein und derselbe Vektor $\vec{a}$ lässt sich dann in den in Tabelle 2.1 dargestellten Arten beschreiben (siehe auch Abbildungen 2.2 und 2.1).

Tabelle 2.1: Koordinatensysteme zur Darstellung von Vektoren

Koordinaten-system	**Einheits-vektoren**	**Vektor $\vec{a}$**
Kartesisch	$\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$	$\overrightarrow{a} = a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}$
Zylindrisch	$\overrightarrow{r}, \overrightarrow{\phi}, \overrightarrow{z}$	$\overrightarrow{a} = a_r \overrightarrow{r} + a_\phi \overrightarrow{\phi} + a_z \overrightarrow{z}$
Sphärisch	$\overrightarrow{r}, \overrightarrow{\theta}, \overrightarrow{\phi}$	$\overrightarrow{a} = a_r \overrightarrow{r} + a_\theta \overrightarrow{\theta} + a_\delta \overrightarrow{\phi}$

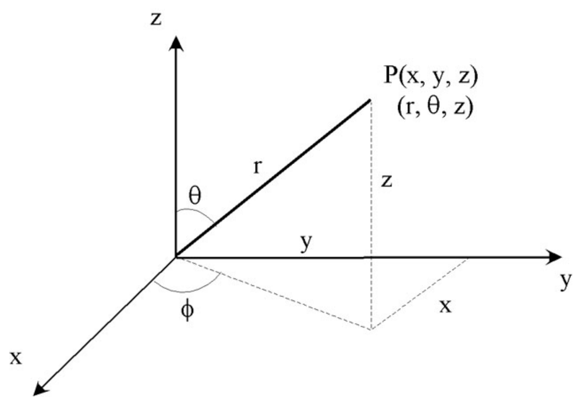

Abbildung 2.1: Vektordarstellung im kartesischen Koordinatensystem

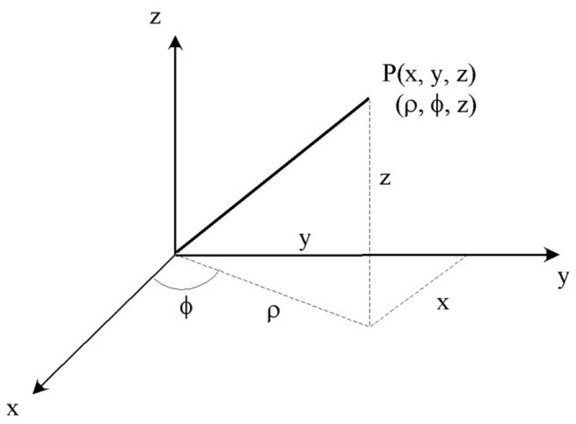

Abbildung 2.2: Vektordarstellung im sphärischen Koordinatensystem

Im zweidimensionalen Raum wird das Polarkoordinatensystem verwendet (siehe Abbildung 2.3).

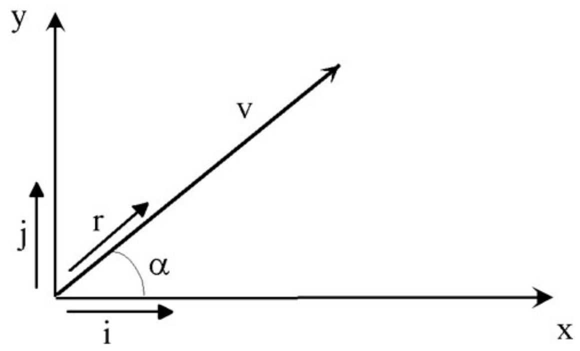

Abbildung 2.3: Vektordarstellung im zweidimensionalen Raum

Da der Vektor $\vec{a}$ unabhängig vom verwendeten Koordinatensystem ist, gelten zwischen dem kartesischen und dem Polarkoordinatensystem folgende Umrechnungen:

$$\begin{aligned} a_r &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = |\vec{a}| \\ a_\alpha &= \arctan\left(\frac{a_y}{a_x}\right) \\ a_x &= \cot\left(a_\alpha\right) \cdot a_y \\ a_x &= \cos\left(a_\alpha\right) \cdot |\vec{a}| \end{aligned} \tag{2.1}$$

2.2 Rechenregeln

Im Folgenden sollen einige wichtige Grundrechenregeln für Vektoren am Beispiel der kartesischen Koordinatendarstellung gezeigt werden.

- **Addition**
  Bei der Addition zweier Vektoren werden die Argumente der kartesischen Einheitsvektoren komponentenweise addiert:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\,\vec{i} + (a_y + b_y)\,\vec{j} + (a_z + b_z)\,\vec{k} \tag{2.2}$$

  Bemerkung:
  Diese Beziehung gilt **nur** für das kartesische Koordinatensystem und kann auf die anderen Koordinatensysteme **nicht** übertragen werden.
  In der Vektoralgebra gelten folgende Gesetze:

Kommutativgesetz	$\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B} + \overrightarrow{A}$	(2.3)
Distributivgesetz	$m\left(n\overrightarrow{A}\right) = (mn)\,\overrightarrow{A} = n\left(m\overrightarrow{A}\right)$	(2.4)
Distributivgesetz	$(m+n)\,\overrightarrow{A} = m\overrightarrow{A} + n\overrightarrow{A}$	(2.5)
Distributivgesetz	$m\left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\right) = m\overrightarrow{A} + m\overrightarrow{B}$	(2.6)
Assoziativgesetz	$\overrightarrow{A} + \left(\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}\right) = \left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\right) + \overrightarrow{C}$	(2.7)

- **Betrag**
  Der Betrag eines Vektors ist gleich seiner Länge und damit ein Skalar, der richtungsunabhängig ist:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{2.8}$$

  Insbesondere gilt, dass der Betrag der Einheitsvektoren gleich Eins ist:

$$\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = |\vec{r}| = |\vec{\alpha}| = \left|\vec{\delta}\right| = 1 \tag{2.9}$$

- **Produkt**
  In der Vektoralgebra unterscheidet man zwei Arten von Produkten, das Skalarprodukt (Punktprodukt) und das Vektorprodukt (Kreuzprodukt).
  Das **Skalarprodukt** zwischen zwei Vektoren ist definiert zu:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\left(\vec{a};\vec{b}\right) \tag{2.10}$$

  Daraus folgt, dass das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren gleich Null ist, wenn diese senkrecht zueinander stehen. Insbesondere gilt, dass das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst, d.h. das Quadrat, gleich dem Quadrat des Betrages des Vektors ist:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{cases} 0 & \vec{a} \perp \vec{b} \\ |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| & \vec{a} \upuparrows \vec{b} \\ -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| & \vec{a} \upharpoonleft\downharpoonright \vec{b} \\ |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\left(\vec{a};\vec{b}\right) & \text{beliebig} \end{cases} \tag{2.11}$$

Insbesondere gilt für die Einheitsvektoren:

$$\begin{array}{llllll} \vec{i}\cdot\vec{j}=0; & \vec{i}\cdot\vec{k}=0; & \vec{j}\cdot\vec{k}=0; & \vec{r}\cdot\vec{\alpha}=0; & \vec{r}\cdot\vec{z}=0; & \\ \vec{i}\cdot\vec{i}=1; & \vec{j}\cdot\vec{j}=1; & \vec{k}\cdot\vec{k}=1; & \vec{r}\cdot\vec{r}=1; & \vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}=1; & \vec{z}\cdot\vec{z}=1; \end{array} \tag{2.12}$$

Die Bildung des Skalarprodukts in kartesischer Koordinatenschreibweise lautet unter Berücksichtigung obiger Regeln:

$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{b} &= \left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\cdot\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right) \\ &= a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z \end{aligned} \tag{2.13}$$

Aus dieser und der oben angeführten Gleichung ergibt sich der Winkel zwischen zwei Vektoren zu:

$$\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}} \tag{2.14}$$

Das **Vektorprodukt** zwischen zwei Vektoren:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{v} \tag{2.15}$$

liefert im Gegensatz dazu einen Vektor, dessen Betrag gleich dem von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramm ist:

$$|\vec{v}|=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\vec{a};\vec{b}\right)$$

und dessen Richtung senkrecht zu $\vec{a}$ und senkrecht zu $\vec{b}$ steht:

$$\begin{array}{c} \vec{v}\perp\vec{a} \\ \vec{v}\perp\vec{b} \end{array}$$

Allgemein gilt:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\begin{cases} 0 & \vec{a}\|\vec{b} \\ |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right| & \vec{a}\perp\vec{b} \\ -|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right| & \vec{b}\perp\vec{a} \\ |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\vec{a};\vec{b}\right) & \text{beliebig} \end{cases} \tag{2.16}$$

Für das kartesische Koordinatensystem gilt:

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{2.17}$$

Insbesondere gilt für die Einheitsvektoren:

$$\begin{array}{llllll} \left|\vec{i}\times\vec{j}\right|=1; & \left|\vec{i}\times\vec{k}\right|=1; & \left|\vec{j}\times\vec{k}\right|=1; & |\vec{r}\times\vec{\alpha}|=1; & |\vec{r}\times\vec{z}|=1; & \\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k} & \vec{i}\times\vec{k}=\vec{j} & \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i} & \vec{r}\times\vec{\alpha}=\vec{z} & \vec{r}\times\vec{z}=\vec{\alpha} & \\ \left|\vec{i}\times\vec{i}\right|=0; & \left|\vec{j}\times\vec{j}\right|=0; & \left|\vec{k}\times\vec{k}\right|=0; & |\vec{r}\times\vec{r}|=0; & |\vec{\alpha}\times\vec{\alpha}|=0; & |\vec{z}\times\vec{z}|=0; \end{array} \tag{2.18}$$

Beachte:
Für das **Vektorprodukt** gilt das **Kommutativgesetz nicht**, sondern es gilt:

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a} \tag{2.19}$$

Demgegenüber gilt aber das **Distributivgesetz.**

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} + \overrightarrow{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \overrightarrow{c} \tag{2.20}$$

- **Differentiation**
  Im Zusammenhang mit der Vektorrechnung spricht man von drei verschiedenen Arten der Differentiation, der **Gradienten**- (grad), der **Divergenz**- (div) und der **Rotation**sbildung (rot). Für alle drei Verfahren gilt ein einheitlicher Differentialvektor, der NABLA-**Operator** ∇ (siehe Tabelle 2.2). Tabelle 2.3 (Seite 55) zeigt im Überblick die Schreibweisen der verschiedenen Differentiationsarten in Abhängigkeit vom verwendeten Koordinatensystem. Zur weiteren Vereinfachung der Schreibweise kann auch der LAPLACE-**Differential-Operator** $\triangle$ verwendet werden. Dieser entspricht der zweifache Anwendung des NABLA-Operators:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla \tag{2.21}$$

Tabelle 2.2: Beschreibung des NABLA-Operators in verschiedenen Koordinatensystemen

Koordinatensystem	
kartesisch	$\bigtriangledown = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$
zylindrisch	$\bigtriangledown = \frac{\partial}{\partial r}\vec{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}\overrightarrow{\varphi} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{z}$
sphärisch	$\bigtriangledown = \frac{\partial}{\partial r}\vec{r} + \frac{1}{r \cdot \sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}\overrightarrow{\varphi} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\overrightarrow{\theta}$

Bei der **Gradientenbildung**

$$\begin{array}{rcl} \nabla\varphi & = & \operatorname{grad}\varphi \\ \text{Skalar } \varphi & \Longrightarrow & \text{Vektor } \nabla\varphi \end{array} \tag{2.22}$$

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{k}\right)\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\overrightarrow{k}$$

wird der NABLA-Operator auf ein skalares Potentialfeld φ angewendet. Das Ergebnis der Gradientenbildung ist ein Vektor. Die Gradientenbildung kann als die formale Multiplikation des NABLA-Operators mit einer skalaren Größe angesehen werden. Im Bereich der Hydrogeologie können dies Grundwasserstände h, Temperaturfelder T, Konzentrationsverteilungen C, Verdunstungs- oder Grundwasserneubildungsraten v_N und viele andere physikalische oder chemische Größen sein. Diese skalaren Größen (Potentiale) sind nicht gerichtet und haben damit keinen Vektorcharakter. Sie besitzen aber eine Ortsabhängigkeit. Die wichtigste Anwendung der Gradientenbildung ist das DARCY-Gesetz zur Berechnung der Grundwasserströmungsgeschwindigkeit (siehe Abschnitt 7.1, Seite 162).

$$\vec{v} = -k \ \operatorname{grad} \ h \tag{2.23}$$

Beispiel zur Anwendung der Gradientenbildung:
Der Grundwasserstand eines Grundwasserleiters wird durch die Funktion

$$h = 2xy - 3x + 2$$

angegeben. Man berechne die Grundwasserströmungsgeschwindigkeit, wenn der Durchlässigkeitskoeffizient des Grundwasserleiters $k = 2 \cdot 10^{-3} m \cdot s^{-1}$ ist.
Es gilt:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v} &= -k \ \mathrm{grad}\,(h) \\
&= -2 \cdot 10^{-3} \left(\frac{\partial\,(2xy - 3x + 2)}{\partial x} \overrightarrow{i} + \frac{\partial\,(2xy - 3x + 2)}{\partial y} \overrightarrow{j} + \frac{\partial\,(2xy - 3x + 2)}{\partial z} \overrightarrow{k} \right) \frac{m}{s} \\
&= (6 - 4y)\, 10^{-3} \frac{m}{s} \cdot \overrightarrow{i} - 4 \cdot x \cdot 10^{-3} \frac{m}{s} \cdot \overrightarrow{j}
\end{aligned}$$

Daraus ist zu erkennen, dass

1. es keine vertikale Strömung gibt und dass
2. die Geschwindigkeit abhängig von den Koordinaten ist. Die Strömung im Grundwasserleiter ist also ortsabhängig und nicht konstant.

Unter **Divergenz** versteht man die Anwendung des NABLA-Operators auf einen Vektor:

$$\begin{array}{ccc} \nabla \vec{v} & = & \mathrm{div}\,\vec{v} \\ \text{Vektor } \vec{v} & \Longrightarrow & \text{Skalar} \end{array} \tag{2.24}$$

$$\nabla \overrightarrow{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \overrightarrow{i} + \frac{\partial}{\partial y} \overrightarrow{j} + \frac{\partial}{\partial z} \overrightarrow{k} \right) \cdot \left(v_x \overrightarrow{i} + v_y \overrightarrow{j} + v_z \overrightarrow{k} \right) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Das Ergebnis der Divergenzbildung ist eine skalare Größe. Die Divergenz kann als die formale Anwendung der Skalarproduktbildung zwischen dem NABLA-Operator und einem Vektor angesehen werden. Entsprechend der Regel zur Skalarproduktbildung ist die Divergenz eines Vektors eine skalare Größe. Die Divergenz, auch als Ergiebigkeit eines Gebietes G bezeichnet, gibt an, welche Quell- oder Senkenaktivitäten in diesem Gebiet vorhanden sind. Ist die Divergenz eines Vektorfeldes gleich Null ($\nabla \vec{v} = \mathrm{div}\ \vec{v} = 0$), so ist das Gebiet quell- und senkenfrei.
Nach dem **Satz von GAUSS** lässt sich die gesamte Quell- und Senkenaktivität eines Gebietes G durch das Volumenintegral über die Divergenz berechnen. Gleichzeitig ist aus den Bilanzgesetzen bekannt, dass die Differenz zwischen den Quell- und den Senkenaktivitäten, d.h. der Volumenströme, über die Oberfläche abfließen muss:

$$\iiint\limits_G \mathrm{div}\ \vec{v}\, dV = \oint\!\!\oint\limits_S \vec{v} \cdot \vec{n}\, dS \tag{2.25}$$

Für den zweidimensionalen Raum gilt analog:

$$\iint\limits_A \mathrm{div}\ \vec{v}\, dA = \oint\limits_L \vec{v} \cdot \vec{n}\, dL \tag{2.26}$$

$\vec{n}$ ist ein normaler (senkrecht stehender) Einheitsvektor zur Oberfläche oder zum Umfang. Mit diesem Satz von GAUSS lassen sich Volumenintegrale in Integrale über die Oberfläche bzw. Flächenintegrale in Integrale über die Berandung umwandeln. Auch die Divergenz spielt in der Hydrogeologie eine fundamentale Rolle, da alle Prozesse bei ihrer mathematischen Beschreibung einer Bilanzierung unterzogen werden müssen. Insbesondere basiert auf folgender Relation eine grosse Anzahl weiterer Ableitungen:

$$\text{div } \vec{v} = \text{div}\,(-k \text{ grad } h) = q \tag{2.27}$$

Beispiel zur Berechnung der Divergenz:
Man berechne die Divergenz des Geschwindigkeitsvektors $\overrightarrow{v}$ des vorigen Beispiels:

$$\nabla \overrightarrow{v} = \frac{\partial}{\partial x}(3-2y)\,2\cdot 10^{-3} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-4\cdot 10^{-3}x\right) = 0$$

Das Gebiet ist also quell- und senkenfrei.

Bei der **Rotationsbildung** wird der NABLA-Operator formal mittels Vektorprodukt mit einem Vektor verknüpft:

$$\begin{aligned} \text{rot}\,\vec{v} \quad &= \quad \nabla \times \vec{v} \\ \text{Vektor}\,\vec{v} \quad &\Rightarrow \quad \text{Vektor}\,\nabla \times \vec{v} \end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\text{rot } \vec{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} - \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}$$

Das Ergebnis stellt wieder einen Vektor dar.
Wenn $\text{rot } \vec{v} = 0$ ist, spricht man von einem wirbelfreien Feld. Man kann daraus auch ableiten, dass $\text{rot grad}\,\varphi = 0$ stets für wirbelfreie Potentialfelder φ gilt.

Weitere Rechenregeln im Zusammenhang mit der vektoriellen Differentiation ergeben sich durch Anwendung anderer Vektorregeln und der erweiterten Regel zur Differentiation von Produkten:

$$\nabla(\varphi_1 \cdot \varphi_2) = \varphi_1 \nabla \varphi_2 + \varphi_2 \nabla \varphi_1 = \varphi_1 \,\text{grad}\, \varphi_2 + \varphi_2 \,\text{grad}\, \varphi_1 \tag{2.29}$$

$$\nabla \cdot (\varphi\,(\vec{a})) = \varphi \nabla \vec{a} + \vec{a} \cdot \nabla \varphi = \varphi \,\text{div}\,(\vec{a}) + \vec{a} \cdot \text{grad}\,(\varphi) \tag{2.30}$$

$$\nabla \times (\varphi \vec{a}) = \varphi \nabla \times \vec{a} + \vec{a} \times \nabla \varphi = \varphi \text{rot}\,(\vec{a}) + \vec{a} \times \text{grad}\,(\varphi) \tag{2.31}$$

Untersucht man die Quell- und Senkenaktivität eines Grundwasserleiters, so kann man das DARCY-Gesetz wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{v}) &= \text{div}\,(-k \cdot \text{grad } h) = q \\ \nabla(\vec{v}) &= \nabla\,(-k \cdot \nabla\, h) = q \\ \nabla(\vec{v}) &= \nabla\,(-k) \cdot \nabla\, h - k \cdot \nabla\,(\nabla h) = q \\ \nabla(\vec{v}) &= \nabla\,(-k) \cdot \nabla\, h - k \cdot \Delta h = q \\ \text{div}(\vec{v}) &= \text{grad}\,(-k) \cdot \text{grad}(h) - k \cdot \text{div}(\text{grad}(h)) = q \end{aligned} \tag{2.32}$$

Nur für den homogenen isotropen Grundwasserleiter darf $\text{grad}\,(-k) = 0$ gesetzt werden, und die Grundwasserleitergleichung heißt dann:

$$\text{div } (\vec{v}) = -k \text{ div}(\text{grad } h) = q \tag{2.33}$$

Tabelle 2.3: Differentialoperatoren in den Koordinatensystemen

	Koordinatensystem	
Bezeichnung	**kartesisch**	**zylindrisch**
Nabla-Operator ∇	$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$	$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\vec{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{\varphi} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{z}$
Gradient $\operatorname{grad} h = \nabla h$	$\nabla h = \frac{\partial h}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial h}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial h}{\partial z}\vec{k}$	$\nabla h = \frac{\partial h}{\partial r}\vec{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial \varphi}\vec{\varphi} + \frac{\partial h}{\partial z}\vec{z}$
Divergenz $\operatorname{div}\vec{v} = \nabla \cdot \vec{v}$	$\nabla \cdot v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial (r v_r)}{r \partial r} + \frac{\partial v_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$
Laplace-Operator $\Delta h = \operatorname{div}(\operatorname{grad} h) = \nabla^2 h$	$\Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}$	$\Delta h = \frac{\partial \left(r \frac{\partial h}{\partial r}\right)}{r \partial r} + \frac{\partial^2 h}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}$
Rotation $\operatorname{rot}\vec{v} = \nabla \times \vec{v}$	$\nabla \times \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{k}$	$\nabla \times \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{r \partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\right)\vec{r} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\vec{\varphi} + \left(\frac{\partial (r\, v_\varphi)}{r \partial r} - \frac{\partial v_r}{r \partial \varphi}\right)\vec{z}$
Volumen dV	$dV = dx \cdot dy \cdot dz$	$dV = r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz$

2.3 Beispiele zur Vektorrechnung

1. Die Filtergeschwindigkeit $\vec{v}$ setzt sich aus den Komponenten
$v_x = 3 \cdot 10^3 m \cdot s^{-1}$, $v_z = -5 \cdot 10^{-4} m \cdot s^{-1}$ und $v_y = 0$ zusammen.
Skizzieren und berechnen Sie die Filtergeschwindigkeit in Vektorschreibweise und geben Sie den Betrag und den Richtungswinkel an.
Der Betrag eines Vektors berechnet sich zu:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Mit den gegebenen Zahlenwerten erhält man den Betrag zu:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(3 \cdot 10^{-3})^2 + (-5 \cdot 10^{-4})^2} = 3,04 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s}$$

Der Richtungswinkel errechnet sich aus dem Anstieg, der gleich dem Tangens des Richtungswinkels ist:

$$\begin{aligned} \alpha &= \arctan\left(\frac{v_z}{v_x}\right) = \arctan\left(\frac{-5 \cdot 10^{-4}}{3 \cdot 10^{-3}}\right) \\ &= \arctan\,(-0,166) = 350,52^{\,o} = 6,12\ rad \end{aligned}$$

Damit lautet der Vektor der Aufgabenstellung in kartesischen und Polarkoordinaten:

$$\vec{v} = 3 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s} \cdot \vec{i} + 5 \cdot 10^{-4} \frac{m}{s} \cdot \vec{k} = 3,04 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s} \cdot \vec{r} + 6,12 \frac{m}{s} \cdot \vec{\alpha}$$

2. Ein Schadstoffpartikel wird durch die Konvektion ($\vec{v}_{konv}$) und durch die hydrodynamische Dispersion ($\vec{v}_{disp}$) bewegt. Stellen Sie grafisch dar und berechnen Sie den zurückgelegten Weg und den Endpunkt, wenn das Partikel mit folgenden Anteilen

$$\begin{aligned} \vec{v}_{konv} &= 1 \cdot 10^{-4} \frac{m}{s} \vec{i} + 10^{-3} \frac{m}{s} \vec{j} \qquad \text{und} \\ \vec{v}_{disp} &= 3 \cdot 10^{-10} \frac{m}{s} \vec{r} + 0,785 \vec{\alpha} \end{aligned}$$

vom Koordinatenursprung transportiert wird.

In der Aufgabenstellung werden zwei verschiedene Koordinatendarstellungen verwendet. Da die Naturprozesse unabhängig von der Darstellungsart sind, kann die Aufgabe unter Benutzung der kartesischen Koordinatendarstellung oder mittels der Polarkoordinaten gelöst werden. In beiden Fällen ist eine Umrechnung zwischen den beiden Systemen notwendig.

Für den hier vorliegenden zweidimensionalen Fall gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} \\
\vec{a} &= a_r\vec{r} + a_\alpha\vec{\alpha} \\
a_r &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = |\vec{a}| \\
a_\alpha &= \arctan\frac{a_y}{a_x} \\
a_x &= \cos(a_\alpha)\cdot a_r \\
a_y &= \sin(a_\alpha)\cdot a_r \qquad bzw. \\
a_x &= \tan(a_\alpha)\cdot a_y
\end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass a_α meist in Bogenmaß anzugeben ist und folgende Relation gilt:

$$\frac{\widehat{\alpha}}{2\,\pi} = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$$

Mit den gegebenen Zahlenwerten findet man:

$$\vec{v} = \vec{v}_{konv} + \vec{v}_{disp}$$

Laut obiger Definition gilt:

$$\begin{aligned}
v_{r\,konv} &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(10^{-4})^2 + (10^{-3})^2} = 10^{-7}\frac{m}{s} \\
\alpha_{konv} &= \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = 84,29^o
\end{aligned}$$

3. Konstruieren und berechnen Sie den Endpunkt eines Schadstoffpartikels nach einem Tag, wenn er vom Punkt $x = 0m$, $y = 0m$ durch eine Konvektion in Folge eines Potentialgefälles von $\Delta h = 1m$ zwischen den Punkten $x = 0m$, $y = 0m$ und $x = 30m$, $y = 40m$ bei einem k-Wert von $k = 5\cdot 10^{-4} m/s$ bewegt wird.
   Als Basis der Konvektion wird die Filtergeschwindigkeit $\vec{v}$ angesetzt. Exakterweise hätte hier die Abstandsgeschwindigkeit benutzt werden müssen, was aber nicht Gegenstand der Aufgabe sein sollte. Die mittlere Abstandsgeschwindigkeit $\vec{v}_a$ wird dabei der Porengeschwindigkeit gleichgesetzt.

$$\vec{v}_a = \frac{\vec{v}}{n'} \qquad \text{mit: } \vec{v} \text{ Filtergeschwindigkeit,} \qquad n' \text{ durchströmte Porosität}$$

$$\vec{v} = -k\ \text{grad}\ h \qquad (\text{DARCY-Gesetz})$$

$$v_r = k\,\frac{dh}{dr} \qquad \Rightarrow\ v_r \approx k\frac{\Delta h}{\Delta r}$$

$$\Delta r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(30\,m)^2 + (40\,m)^2} = 50\,m$$

$$v_r = 5\cdot 10^{-4}\frac{m}{s}\cdot\frac{1\,m}{50\,m} = 10^{-5}\,\frac{m}{s}$$

Weg s: $\quad s = v_r\cdot t = 10^{-5}\frac{m}{s}\cdot 86400\,s = 0,864\,m$

Lage:
$$\begin{aligned}
s &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
x^2 &= s^2 - y^2
\end{aligned}$$

Aus der Geradengleichung $y = m\,x + n$ bzw. der Zweipunktegleichung einer Geraden ergibt sich:

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Mit $x_0 = y_0 = 0$ und $x_1 = 30m$ bzw. $y_1 = 40m$ ergibt sich:

$$\frac{y}{x} = \frac{40}{30} = \frac{4}{3} \qquad \text{bzw. } y = \frac{4}{3}x = m \cdot x$$

$$y^2 = m^2 \cdot x^2 = m^2 \cdot \left(s^2 - y^2\right)$$

$$y^2 = \frac{m^2 \cdot s^2}{(1 + m^2)}$$

$$y = \sqrt{\frac{m^2 \cdot s^2}{(1 + m^2)}} = \sqrt{\frac{1,333^2\;(0,864\,m)^2}{(1 + 1,7778)}} = \sqrt{0,4777\,m} = 0,689\,m$$

$$x = \frac{y}{m} = 0,517\,m$$

Man kann y sofort in die Gleichung der Länge s einsetzen und erhält:

$$y = \frac{4}{3}x$$

$$s = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$s = \sqrt{x^2 + (\frac{4}{3}x)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{16}{9}x^2} = \frac{5}{3}x$$

Mit $s = 0,864m$ erhält man den gleichen Wert:

$$x = \frac{3s}{5} = 0,6 \cdot 0,864m = 0,518\,m$$

$$y = \frac{4}{3}x = 0,69\,m$$

2.4 Aufgaben

Aufgaben zu 2:

1. Die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind durch ihre Koordinaten gegeben:
   $a_x = 5 \quad b_x = 3 \quad c_x = -6$
   $a_y = 7 \quad b_y = -4 \quad c_y = -9$
   $a_z = 8 \quad b_z = 6 \quad c_z = -5$
   Bestimmen Sie die Länge des Vektors $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

2. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = 2\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + 5\,\vec{k}$ und $\vec{b} = 3\,\vec{i} - w\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$.
   Berechnen Sie w so, dass die Vektoren senkrecht zueinander stehen.

3. Berechnen Sie für $\varphi = xy + yz + zx$ und $\vec{A} = x^2y\,\vec{i} + y^2z\,\vec{j} + z^2x\,\vec{k}$:

   (a)$\vec{A} \cdot \nabla\varphi$ (b)$\varphi\nabla \cdot \vec{A}$ (c) $(\nabla\varphi) \times \vec{A}$

4. Ein Partikel bewegt sich entlang einer Raumkurve mit den Koordinaten $x = t^3 + 2t$, $y = -3e^{-2t}$, $z = 2\sin 5t$.
   Berechnen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Partikels für eine beliebige Zeit t.
   Geben Sie ihren Betrag sowie auch den zurückgelegten Abstand für $t = 0$ und $t = 1$ an.

5. Gegeben ist das skalare Potentialfeld in einem Filter $h = xy + yz + xz$.
   a) Bestimmen Sie die Filtergeschwindigkeit (Vektor und Betrag)
   b) Gibt es Quellen- und Senkenaktivität im Filter?
   c) Ist die Strömung im Filter wirbelfrei?

   Gegeben sind $k = 10^{-4}ms^{-1}$ und $\mathrm{grad}(-k) = 0$.

6. Eine Schadstofffahne hat sich im Untergrund ausgebreitet. Die Verteilung des Schadstoffes entspricht im Wertebereich $x ::= 0$ bis 10 und $y ::= 0$ bis 10 folgender geometrischen Figur:

   $$C(x,y) = 50 - \left((x-5)^2 + (y-5)^2\right)$$

   a) Skizzieren Sie die Äquipotentiallinien für die Konzentrationswerte im Bereich von $C(x,y) = 0$mg bis 50mg mit einer Schrittweite $\delta C(x,y) = 10$.
   b) Berechnen Sie den Gradienten am Punkt $P(3,4)$ und bestimmen Sie den Betrag und den Richtungswinkel.

7. Eine Schadstofffahne hat sich im Untergrund ausgebreitet. Die Verteilung des Schadstoffes entspricht im Wertebereich $x ::= 0$ bis 10 und $y ::= 0$ bis 10 folgender geometrischen Figur:

   $$C(x,y) = 125 - \left((2x-10)^2 + (y-5)^2\right)$$

   a) Skizzieren Sie die Äquipotentiallinien für die Konzentrationswerte im Bereich von $C(x,y) = 0$mg bis 125mg mit einer Schrittweite $\delta C(x,y) = 25$.

b) Berechnen Sie den Gradienten am Punkt $P(5,10)$ und bestimmen Sie den Betrag und den Richtungswinkel.

8. Der Grundwasserstand eines einseitig durch eine Barriere begrenzten Grundwasserleiters und eines Brunnens soll durch folgende geometrische Figur beschrieben werden:

$$z_R = \frac{1}{2}\frac{(y-10)^2}{x}$$

a) Skizzieren Sie die Hydroisohypsen im Bereich von $z_R = 1m$ bis $z_R = 5m$ mit einer Schrittweite $\delta z_R = 1m$ für die Koordinaten $0 \leq x \leq 10$

b) Berechnen Sie die Filtergeschwindigkeit mit $k = 0,0001ms^{-1}$ am Punkt $P(5,5)$; bestimmen Sie den Betrag und den Richtungswinkel α.

c) Ist dieses Feld quell- und senkenfrei?

9. Der Grundwasserstand einer Grabenanströmung im Grundwasserleiters soll durch folgende geometrische Figur beschrieben werden.

$$z_R = y + 3x$$

a) Skizzieren Sie die Hydroisohypsen im Bereich von $z_R = 1m$ bis $5m$ mit einer Schrittweite $\delta z_R = 1m$.

b) Berechnen Sie die Filtergeschwindigkeit mit $k = 0,0001ms^{-1}$ am Punkt $P(5,5)$; bestimmen Sie den Betrag und den Richtungswinkel

c) Ist dieses Feld quell- und senkenfrei?