TU Dresden
Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik
Institut Grundlagen der Elektrotechnik und Elektronik
Prof. Dr.-Ing. habil. Renate Merker

Skript

Elektrische und magnetische Felder

Vorlesung für Studiengang Mechatronik,
Regenerative Energiesysteme
Wirtschaftsingenieurwesen, Lehramt

Sommersemester 2014

Gliederung:

1. Grundlagen des elektrischen Feldes
2. Stationäres elektrisches Strömungsfeld
3. Elektrostatisches Feld
4. Magnetfeld

Anhang: Mathematische Grundlagen

1. Grundbegriffe des elektrischen Feldes

1.1 Ladungsdichten

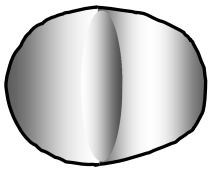
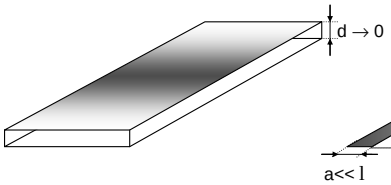
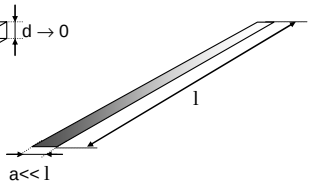
Raumladung	**Flächenladung**	**Linienladung**
stetige Verteilung einer Ladung Q über		
Volumen V	Fläche A	Linie mit Länge l
		
mit	mit	mit
Raumladungsdichte	Flächenladungsdichte	Linienladungsdichte
$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V}$	$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A}$	$\lambda = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l}$
$[\rho] = \frac{C}{m^3}$	$[\sigma] = \frac{C}{m^2}$	$[\lambda] = \frac{C}{m}$

Bild 1-1

1.2 Felder im Raum

a) Feldbegriff

Feld: Jedem Punkt eines Raumes ist eindeutig ein Wert einer physikalischen Größe zugeordnet.

Feldgröße: physikalische Größe, die den Raumzustand definiert

(Beispiele: Temperatur, Druck, Geschwindigkeit, Feldstärke)

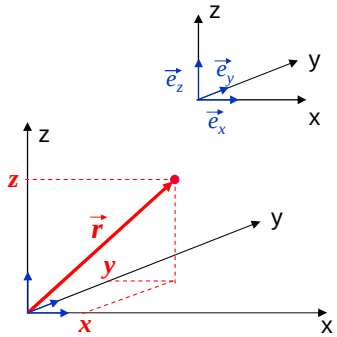
Feldbild: Graphische Darstellung eines Feldes

Bild 1-2

b) Ortsvektoren

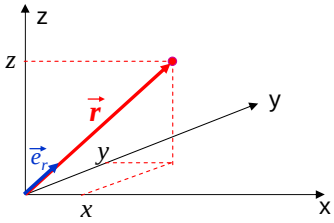
Ortsvektoren

- kartesisches Koordinatensystem:



$$\vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- Kugelkoordinatensystem:



$$\vec{r} = |\vec{r}|\,\vec{e}_r = r\,\vec{e}_r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\vec{e}_r$$

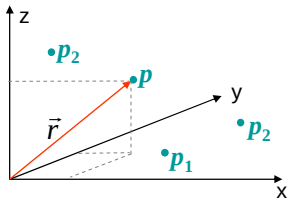
$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

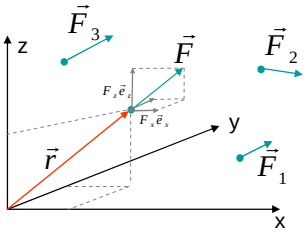
Bild 1-3

c) Skalar- und Vektorfelder

Skalarfeld — Jedem Raumpunkt $\vec{r}$ ist zugeordnet ein — Vektorfeld

skalarer Wert — vektorieller Wert





Darstellung

$$p = f(\vec{r})$$
$$p = f_k(x,y,z)$$

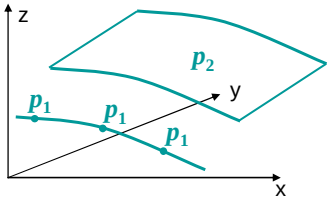
$$\vec{F} = f(\vec{r})$$
$$\vec{F} = F_x(x,y,z)\vec{e}_x + F_y(x,y,z)\vec{e}_y + F_z(x,y,z)\vec{e}_z$$

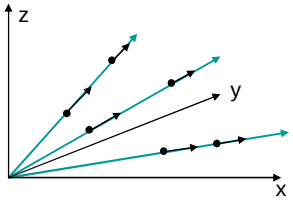
Bild 1-4

Skalarfeld — Feldbilder — Vektorfeld

Flächen (Linien) mit gleichen Werten

Feldlinien → Richtung der Linien; Dichte der Linien





Beispiele:

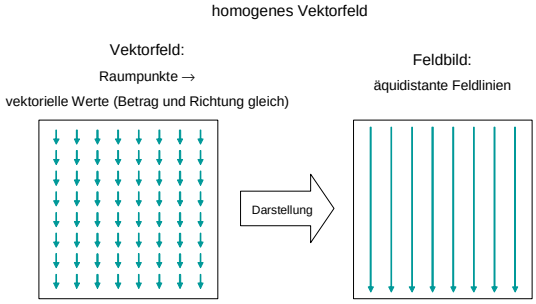
- Äquipotentialflächen
- Isothermen (*iso* : gleich)
- Isobaren (*baros:* Druck)

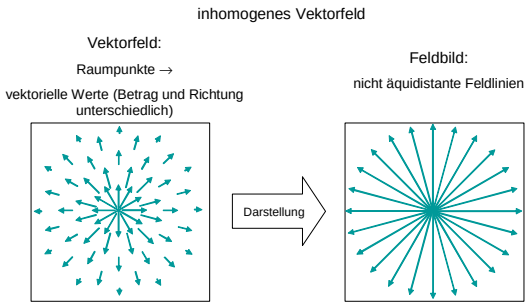
je größer der Betrag der vektoriellen Werte, umso dichter die Feldlinien

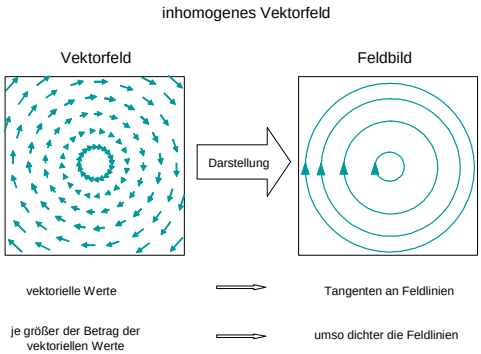
Vektorfelder können homogen oder inhomogen sein

Bild 1-5

Beispiele für Feldbilder:







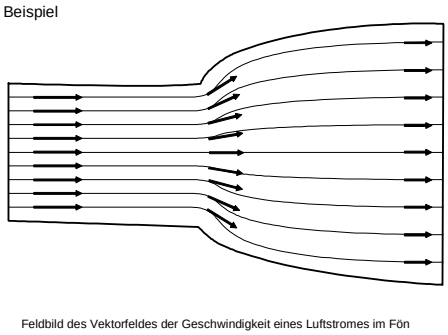
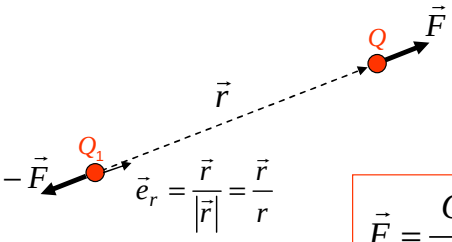


Bild 1-6 – Bild 1-9

1.3 Coulombsches Gesetz

Coulombsches Gesetz in Vektorform



$Q_1, Q > 0$

$$\vec{F} = \frac{Q_1 Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r = \frac{Q_1 Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{Q_1 Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

Beispiel:

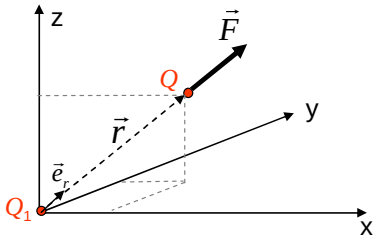
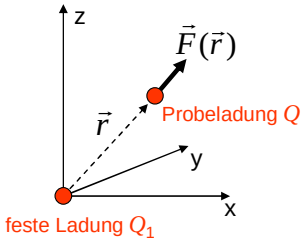


Bild 1-10

1.4 Elektrische Feldstärke



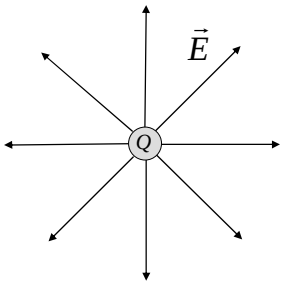
Feste Ladung Q_1 versetzt Raum in den Zustand, dass auf eine Probeladung Q in jedem Raumpunkt $\vec{r}$ eine Kraft

$$\vec{F}(\vec{r})$$

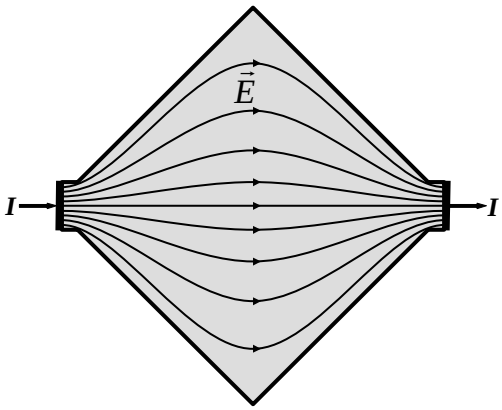
ausgeübt wird.

Bild 1-11

Beispiele von Feldbildern der elektrischen Feldstärke:



Feldbild der elektrischen Feldstärke
einer Punktladung

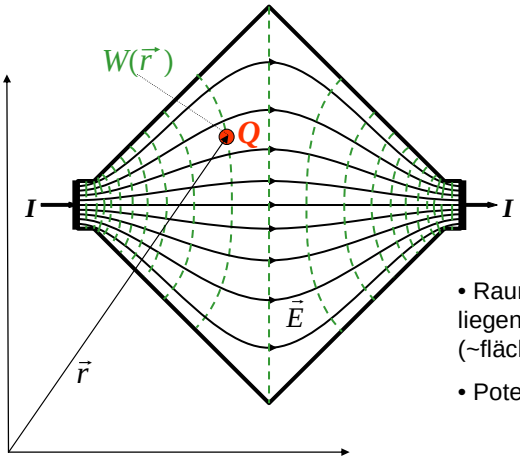


Feldbild der elektrischen Feldstärke
eines flächenhaften Leiters

Bild 1-12

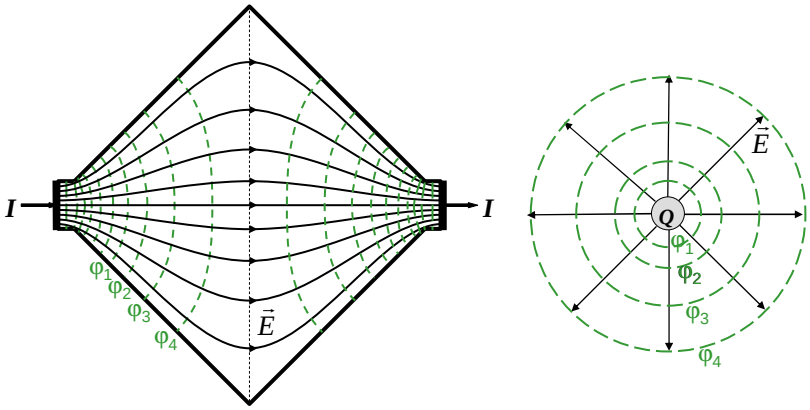
1.5 Spannung und Potenzial

a) *Definition des Potenzials*



- Raumpunkte gleichen Potenzials liegen auf Äquipotenziallinien (~flächen)
- Potenzialfeld ist ein Skalarfeld

Bild 1-13



- Potenzial nimmt in Richtung der Feldstärke ab:
  $\varphi_1 > \varphi_2 > \varphi_3 > \varphi_4$
- Äquipotenzialflächen so zeichnen, dass zwischen benachbarten gleiche Potenzialdifferenz: $\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_3 = \varphi_3 - \varphi_4 = \ldots$

Bild 1-14

Bezugspotenzial:

Beispiele für Wahl des Bezugspotenzials

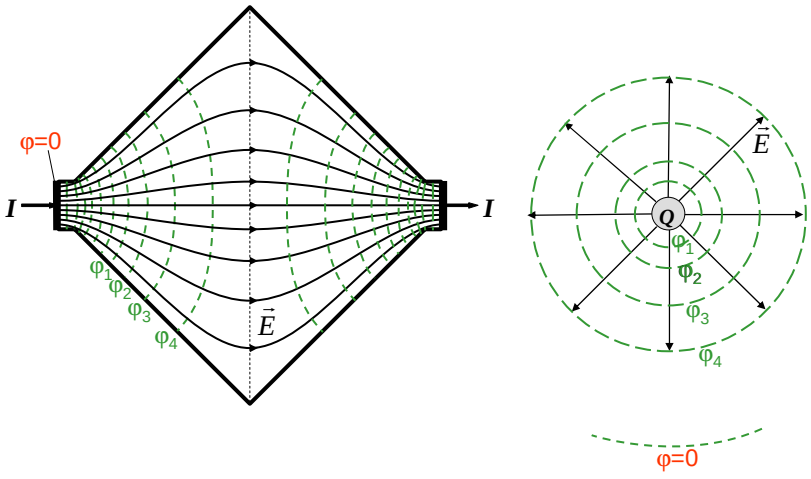
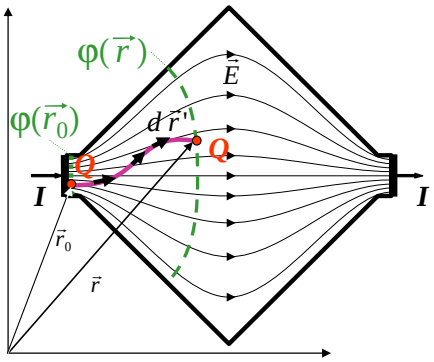


Bild 1-15

b) *Berechnung des Potenzials aus der Feldstärke*



Die Ladung Q hat im Raumpunkt $\vec{r}_0$ die potenzielle Energie $W(\vec{r}_0)$. Bei der Bewegung der Ladung Q zum Raumpunkt $\vec{r}$ gibt sie die Energie

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}')\, d\vec{r}'$$ ab.

Die potenzielle Energie $W(\vec{r})$ der Ladung Q im Raumpunkt $\vec{r}$ ergibt sich zu:

$$W(\vec{r}) = W(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}')\, d\vec{r}'$$

mit $W(\vec{r}) = \varphi(\vec{r})\, Q$ und $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r})\, Q$ folgt:

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}')\, d\vec{r}'$$

Bestimmung des Potenzials aus der elektrischen Feldstärke

Bezugspotenzial

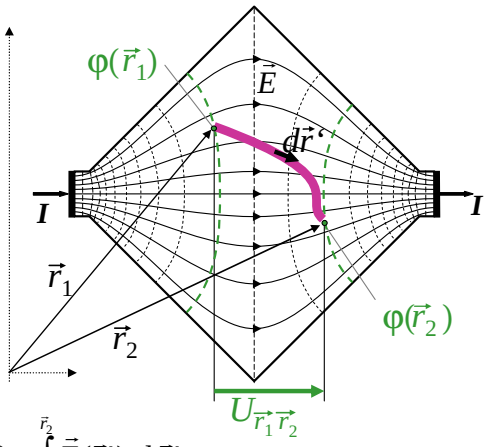
Linienintegral der elektrischen Feldstärke

Bild 1-16

c) *Spannung*

$U_{\vec{r}_1\vec{r}_2}$:

Spannung zwischen
den Raumpunkten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$



$$U_{\vec{r}_1\vec{r}_2} = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2)$$

$$= \varphi(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{E}(\vec{r}')\, d\,\vec{r}' - \varphi(\vec{r}_0) + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}')\, d\,\vec{r}'$$

$$U_{\vec{r}_1\vec{r}_2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}')\, d\,\vec{r}'$$

Definition der Spannung

Linienintegral der elektrischen Feldstärke

Bild 1-17

Beispiel zur Berechnung von Potenzial und Spannung im homogenen elektrischen Feld:

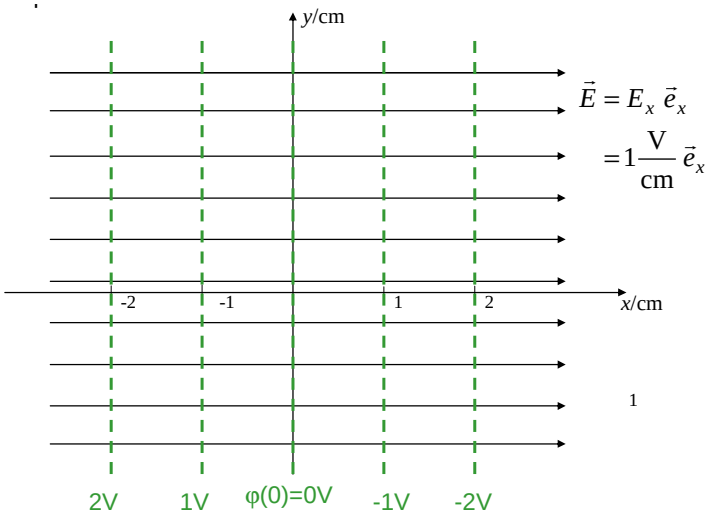


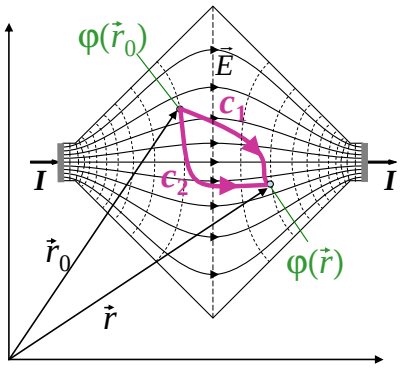
Bild 1-18

d) *Existenzbedingungen für das Potenzial*

Existenzbedingung für das Potenzial:

Zu einem Vektorfeld $\vec{E}$ existiert ein Potenzialfeld (d.h. jedem Raumpunkt ist eindeutig ein Potenzialwert zugeordnet), wenn das Linienintegral

$\int_{\vec{r}_0,c}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}')d\,\vec{r}'$ vom Weg c unabhängig ist, d.h.:



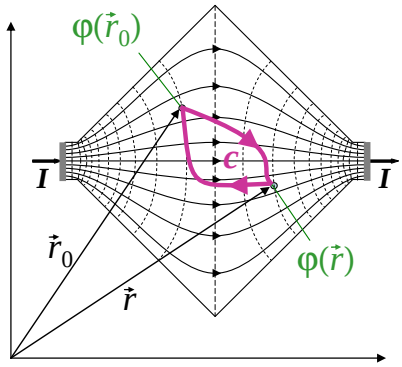
$$\int_{\vec{r}_0,c_1}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}')d\,\vec{r}' = \int_{\vec{r}_0,c_2}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}')d\,\vec{r}'$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{\vec{r}_0,c_1}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}')d\,\vec{r}' + \int_{\vec{r},-c_2}^{\vec{r}_0} \vec{E}(\vec{r}')d\,\vec{r}' = 0$$

$$\Downarrow$$

Bild 1-19



$$\Downarrow$$

$$\oint_c \vec{E}(\vec{r}')d\,\vec{r}' = 0$$

Umlaufintegral
(Zirkulation von $\vec{E}$) ist Null.

Folgerung:
Maschensatz ($dU = E\,dr$)

allgemein gilt:

Ein Vektorfeld $\vec{A}$ hat genau dann ein Potenzial, wenn das Umlaufintegral

$$\oint_c \vec{A}(\vec{r})\,d\vec{r} = 0$$

auf einem geschlossenen Integrationsweg c verschwindet.

$\vec{A}$ heißt dann wirbelfrei.

Bild 1-20

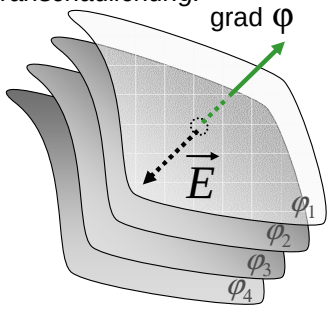
e) *Berechnung der Feldstärke aus dem Potenzial*

Berechnung der Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ aus einem gegebenen Potenzial $\varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z)$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -grad\ \varphi(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{e}_z\right)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \qquad\qquad = E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y + E_z\vec{e}_z$$

Veranschaulichung:



$\varphi_1 > \varphi_2 > \varphi_3 > \varphi_4$

Gradient φ (grad φ): Vektor in Richtung des steilsten Anstieges des Potenzials

Feldstärke $\vec{E}$ = - grad φ : in Richtung des steilsten Sinkens des Potenzials

Bild 1-21

Beispiel zur Berechnung des Feldstärkefeldes aus dem Potenzialfeld:

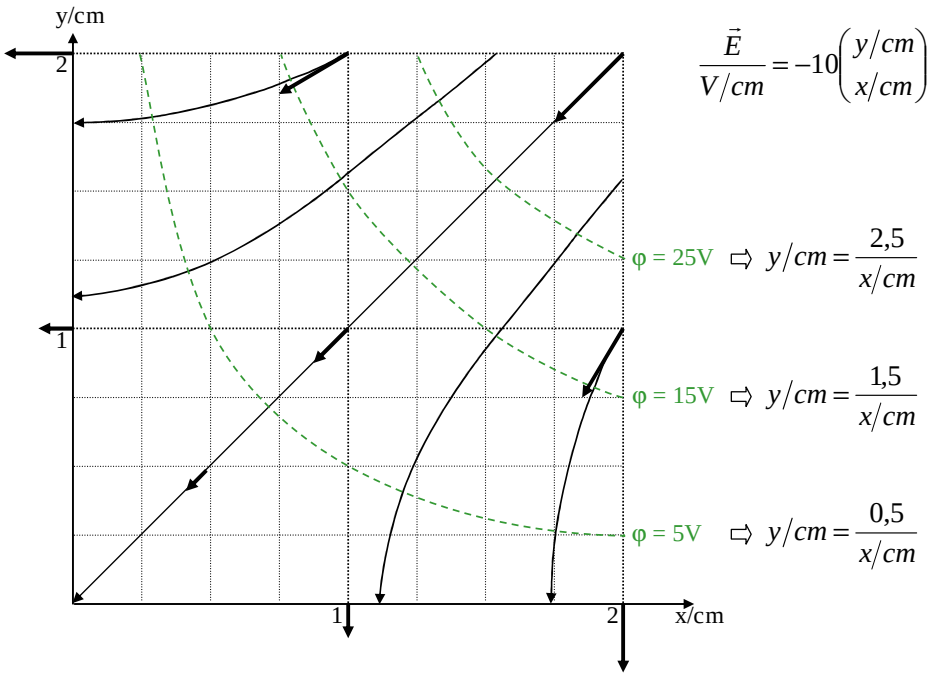
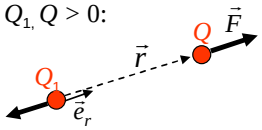

y/cm
2
1
1
2
x/cm
φ = 25V ⇨ $y/cm = \frac{2{,}5}{x/cm}$
φ = 15V ⇨ $y/cm = \frac{1{,}5}{x/cm}$
φ = 5V ⇨ $y/cm = \frac{0{,}5}{x/cm}$
$\frac{\vec{E}}{V/cm} = -10\begin{pmatrix} y/cm \\ x/cm \end{pmatrix}$

Bild 1-22

1.6 Zusammenfassung

Coulombsches Gesetz: $\vec{F} = \frac{Q_1 Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r = \frac{Q_1 Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$

$Q_1, Q > 0$:



$\vec{r} = r\vec{e}_r = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$

elektrische Feldstärke

$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$

$\vec{E}(\vec{r}) = -grad\ \varphi(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z\right)$

$U_{\vec{r}_1,\vec{r}_2} = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}')d\vec{r}'$

$\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}')d\vec{r}'$

$\varphi(\vec{r}_0)$ Bezugspotenzial

elektrische Spannung

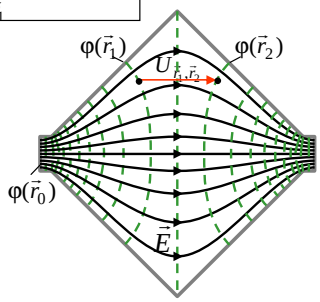
$U_{\vec{r}_1,\vec{r}_2}$

elektrisches Potenzial

$\varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z)$

Vektorfeld (Feldliniendarstellung)

Skalarfeld (Isolinien ~flächen-darstellung)



Prof. Merker, TU Dresden

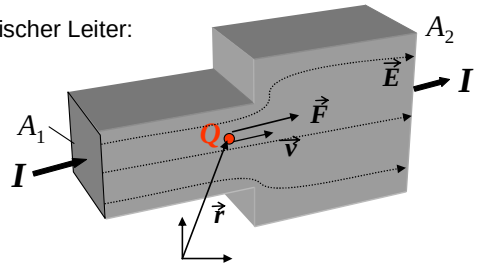
1-23

2. Stationäres elektrisches Strömungsfeld

2.1 Wesen des stationären elektrischen Strömungsfeldes

Wesen des stationären elektrischen Strömungsfeldes

elektrischer Leiter:



- Medium: elektrischer Leiter beliebiger Form (linienhafter, flächenhafter, räumlicher Leiter)
- Stationäres Strömungsfeld: $I = \frac{dQ}{dt}$ = konst.
- für das Leitergebiet gilt das Ohmsche Gesetz: $U = IR$
- im Leitergebiet: Ladungsströmung mit Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r})$:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \mu\, \vec{E}(\vec{r}), \qquad [\mu] = \frac{[v]}{[E]} = \frac{m^2}{Vs}$$

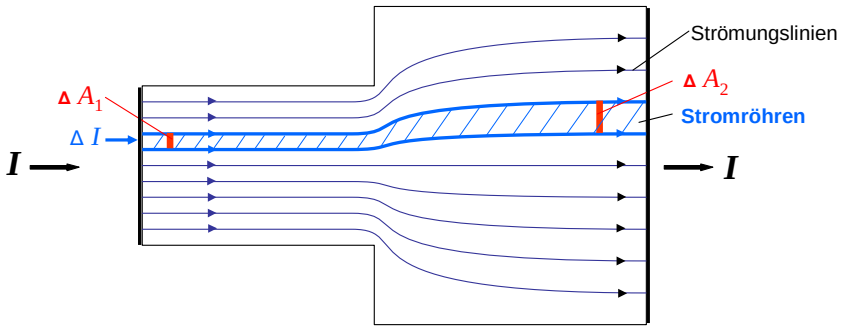
μ Beweglichkeit der Ladungsträger

Bild 2-1

- Gesamtstrom I teilt sich auf in gleiche Teilströme ΔI in Teilvolumen mit Querschnitt ΔA

  → Stromröhren

  Spuren der Stromröhren: Strömungslinien



Strömungsfeld im Querschnitt eines elektrischen Leiters

Bild 2-2

2.2 Stromdichte

a) Definition

Spezialfall: homogenes Strömungsfeld

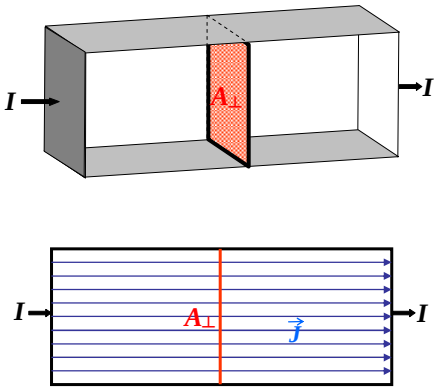


Bild 2-3

b) Zusammenhang zwischen Stromdichte und Feldstärke

	elektrische Leitfähigkeit κ $(\Omega^{-1}\ m^{-1})$	spezifischer Widerstand $\rho=1/\kappa$ $(\Omega\ m)$
Silber	$60{,}6\ 10^{6}$	$16{,}5\ 10^{-3}$
Leitungskupfer	$56{,}8\ 10^{6}$	$17{,}5\ 10^{-3}$
Leitungsaluminium	$36\ 10^{6}$	$27{,}8\ 10^{-3}$
Messing	$13\ 10^{6}$	$80\ 10^{-3}$
Destilliertes Wasser	$10^{-5}\ldots10^{-4}$	$10^{4}\ldots10^{5}$
Holz	$10^{-11}\ldots10^{-8}$	$10^{8}\ldots10^{11}$
Glas	$10^{-14}\ldots10^{-10}$	$10^{10}\ldots10^{14}$
Porzellan	$2\ 10^{-13}$	$5\ 10^{12}$
Erdboden	$10^{-4}\ldots10^{-2}$	$10^{2}\ldots10^{4}$

Bild 2-4

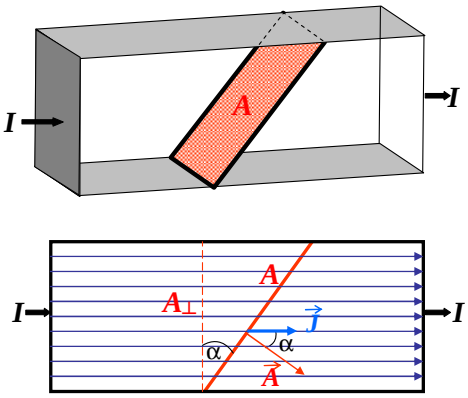
c) Beziehung zwischen Strom und Stromdichte

Spezialfall:

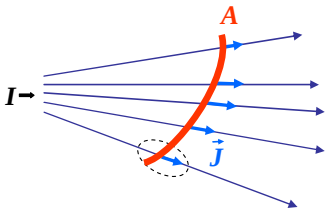
allgemeiner Fall:

- homogenes Strömungsfeld

Fläche A wird um Winkel α geneigt:



- inhomogenes Strömungsfeld



Zerlegung der Fläche A in Flächenelemente dA, durch die Strom dI fließt :

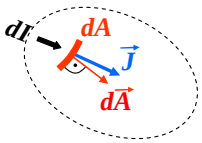


Bild 2-5

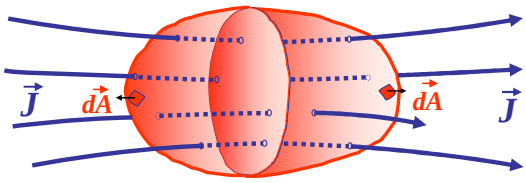
d) Kontinuität der Stromdichte

Kontinuität der Stromdichte:

Der Gesamtstrom durch eine geschlossene Hülle ist stets NULL:

$$I_{ges} = \oiint_{H} \vec{J}\, d\vec{A} = 0$$

Naturgesetz



Hüllfläche: ***H***

Das Stromdichtefeld ist quellenfrei. Folgerung: Es gilt der Knotenpunktsatz.

Bild 2-6

e) Ausgewählte Beispiele für Stromdichten

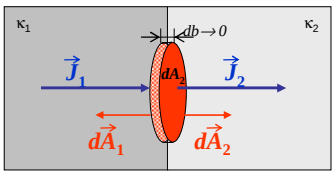
Stromdichte	*J / (A/mm2)*
elektrische Freileitung	1
Isolierte Leiter (Al, Cu, 1,5mm^2 Durchmesser)	10,7
Elektrogeräte, Motoren	3…8
Halbleiterbauelemente	10…100
Elektronenröhre (an Katoden)	0,1

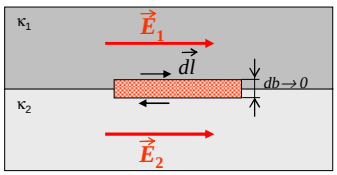
Bild 2-7

2.3 Bedingungen an Grenzflächen

a) senkrechte und tangentiale Strömung

$\kappa_1 < \kappa_2$



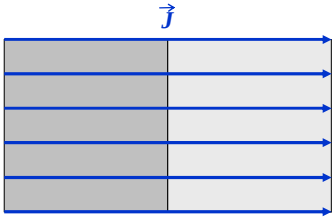


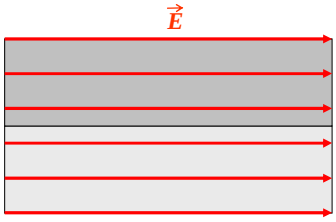
$$\oiint \vec{J}\, d\vec{A} = J_2\, dA_2 - J_1\, dA_1 = 0$$

$$\rightarrow \boxed{J_1 = J_2 = J}$$

$$\oint \vec{E}\, d\vec{r} = E_1\, dl - E_2\, dl = 0$$

$$\rightarrow \boxed{E_1 = E_2 = E}$$



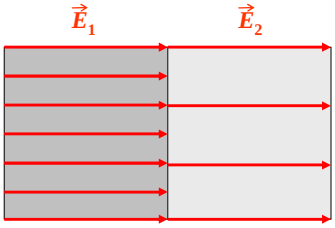


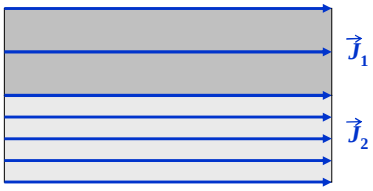
$$J_1 = \kappa_1 E_1 = \kappa_2 E_2 = J_2$$

$$\boxed{\frac{E_1}{E_2} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}}$$

$$E_1 = \frac{J_1}{\kappa_1} = \frac{J_2}{\kappa_2} = E_2$$

$$\boxed{\frac{J_1}{J_2} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}}$$





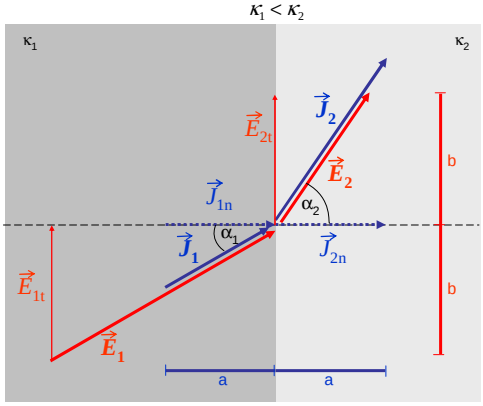
$\kappa_1 < \kappa_2$

Bild 2-8

Bild 2-9

b) Brechungsgesetz für Feldlinien

$\kappa_1 < \kappa_2$



Beim Übergang in ein besser (schlechter) leitendes Medium werden die Feldlinien vom (zum) Einfallslot weg (hin) gebrochen.

Dabei gilt: $J_{1n} = J_{2n}$

$E_{1t} = E_{2t}$

$$\tan\alpha_1 = \frac{E_{1t}}{E_{1n}} = \frac{J_{1t}}{J_{1n}}$$

$$\tan\alpha_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}} = \frac{J_{2t}}{J_{2n}}$$

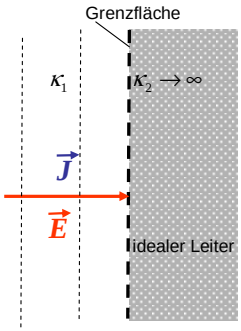
$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{J_{1t}}{J_{2t}} = \frac{\kappa_1 E_{1t}}{\kappa_2 E_{2t}} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$$

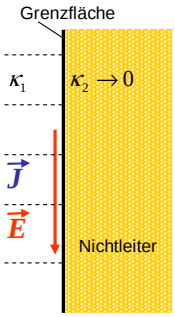
$$\boxed{\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}}$$

Brechungsgesetz für Feldlinien

Bild 2-10

c) Grenzfläche zum idealen Leiter und Nichtleiter





Feldlinien senkrecht auf Grenzfläche

Grenzfläche ist Äquipotenzialfläche

⇩

Eine Äquipotenzialfläche kann durch eine ideal leitende Grenzfläche ersetzt werden, ohne dass sich das Feldbild ändert.

Feldlinien entlang der Grenzfläche (Grenzfläche ist Einhüllende der Feldlinien)

Äquipotenzialflächen senkrecht auf Grenzfläche

⇩

Eine Hüllfläche von Feldlinien kann durch eine ideal nicht leitende Grenzfläche ersetzt werden, ohne dass sich das Feldbild ändert.

Bild 2-11

Anwendung:

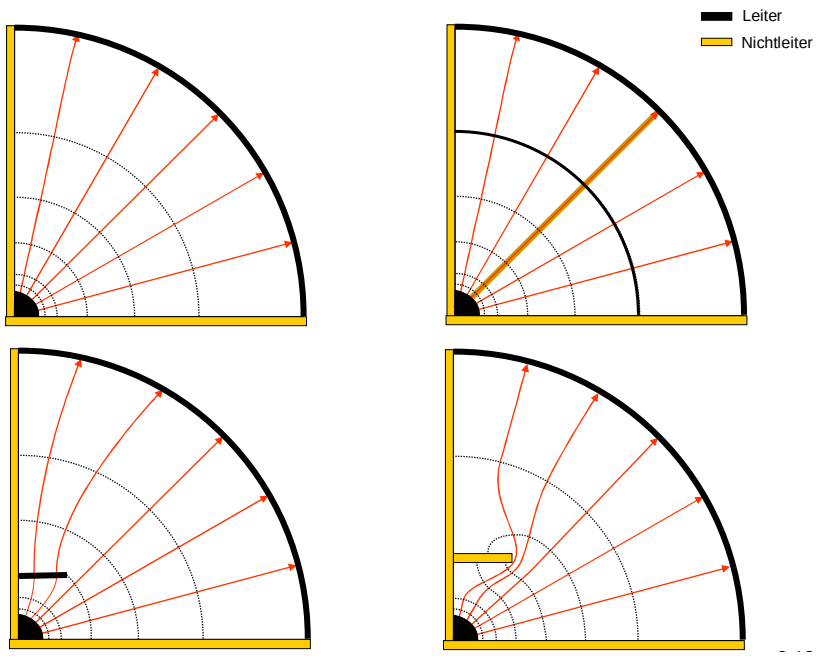


Bild 2-12

2.4 Berechnung elementarer Strömungsfelder

Rechenschema für elementare Strömungsfelder:

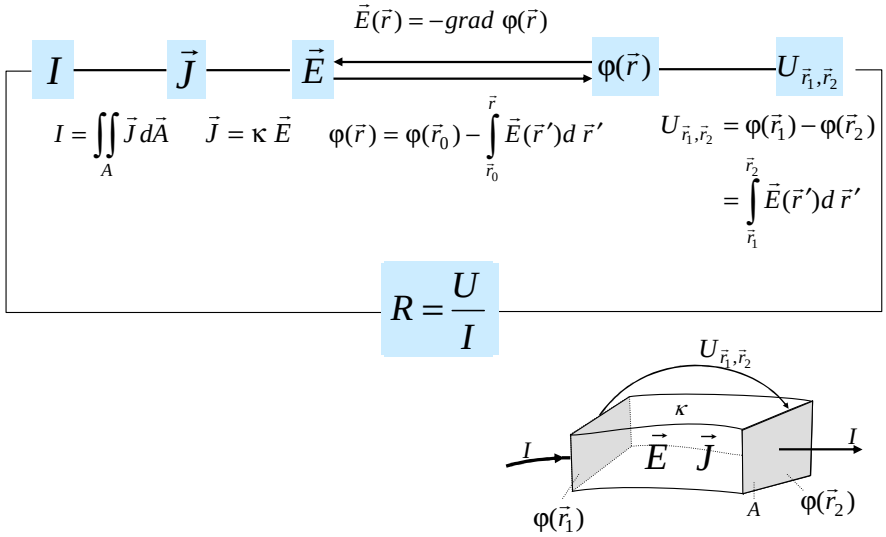
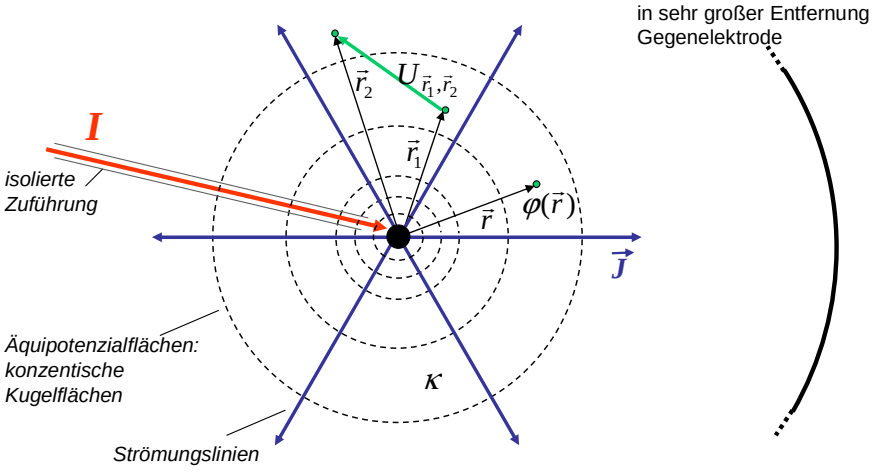


Bild 2-13

2.4.1 Kugelsymmetrische Anordnung

a) Punkt- Einströmung

Feldbild:



Strom I verteilt sich gleichmäßig in alle Richtungen

Bild 2-14

Berechnung der Größen für die Punkt-Einströmung:

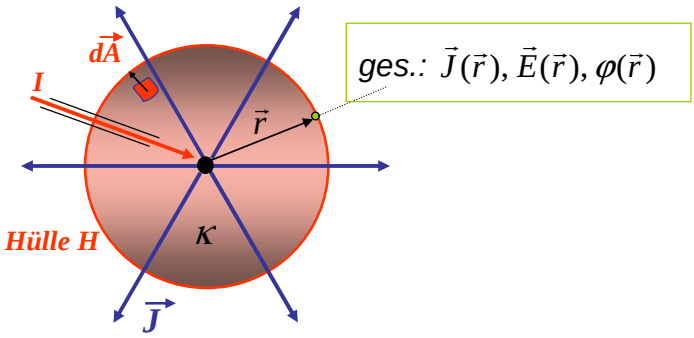


Bild 2-15

b) Anwendung: Halbkugelerder

Halbkugelerder (Radius r_E)

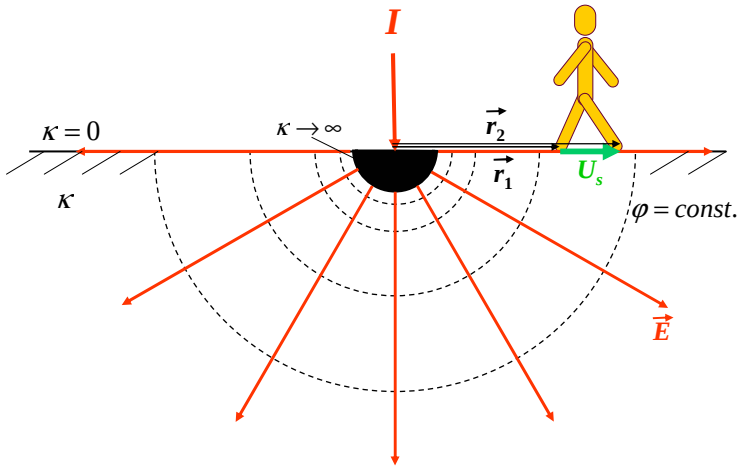


Bild 2-16

Berechnung:

Ersatzanordnung:
Feld einer Punkt-Einströmung

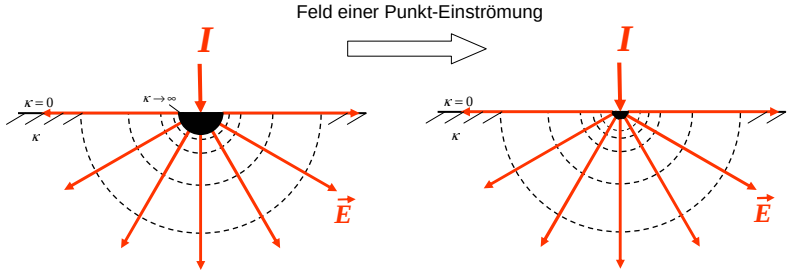
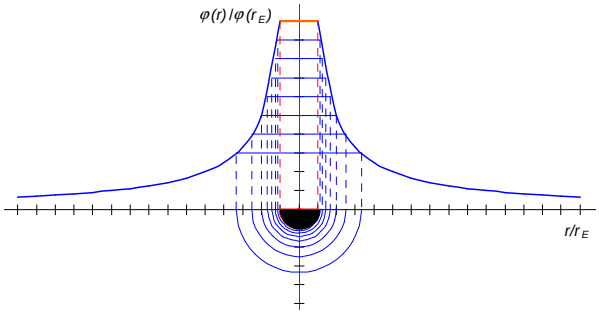


Bild 2-17

Darstellung des Potenzials (Potenzialtrichter) und der Äquipotenzialflächen



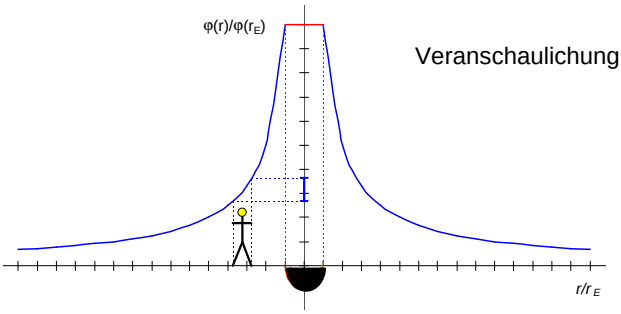
$$\varphi(r) = \frac{I}{2\pi\kappa r}, \qquad \varphi(r_E) = \frac{I}{2\pi\kappa r_E}$$

für $r > r_E$: $\dfrac{\varphi(r)}{\varphi(r_E)} = \dfrac{1}{r/r_E}$

für $r \le r_E$: $\varphi(r) = \varphi(r_E)$

(da innerhalb der Halbkugel $\kappa \to \infty$ und somit $\vec{E} = \dfrac{\vec{J}}{\kappa} = 0$ gilt)

Bild 2-18



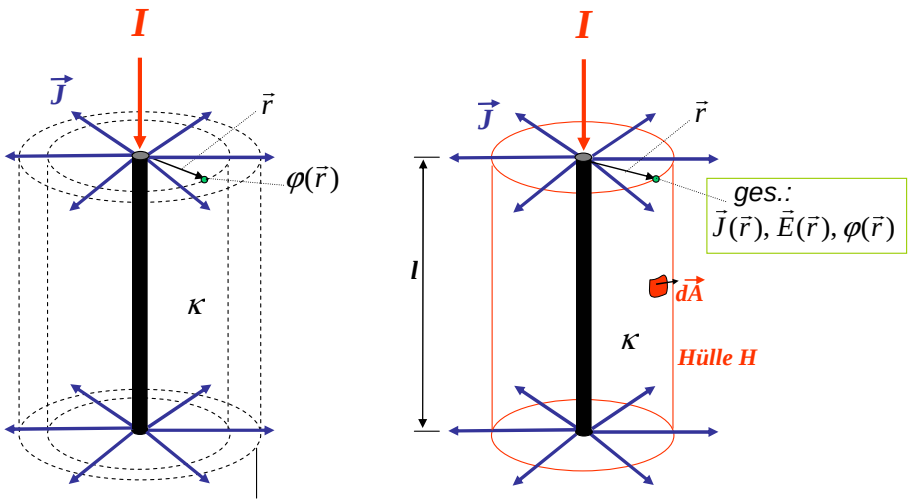
Veranschaulichung der Schrittspannung

Bild 2-19

2.4.2 Zylindersymmetrische Anordnung

Einströmung in unendlich ausgedehnten Linienleiter

Feldbild: Berechnung:



Strom I verteilt sich gleichmäßig radial senkrecht zum Leiter

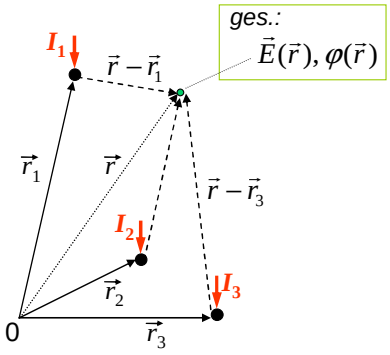
Äquipotenzialflächen: konzentische Zylindermantelflächen

Bild 2-20

2.4.3 Überlagerung von Feldern

Überlagerungssatz für mehrere Punkt-Einströmungen:

Die Feldgrößen ($\vec{E}$, φ) der einzelnen Einströmungen addieren sich (vektoriell, skalar) in jedem Raumpunkt $\vec{r}$.



$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{3} \vec{E}_n(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\kappa} \sum_{n=1}^{3} \frac{I_n(\vec{r}-\vec{r}_n)}{|\vec{r}-\vec{r}_n|^3}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{3} \varphi_n(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\kappa} \sum_{n=1}^{3} \frac{I_n}{|\vec{r}-\vec{r}_n|}$$

Bild 2-21

Beispiel: Überlagerung der Felder zweier gleich gerichteter Punkt-Einströmungen

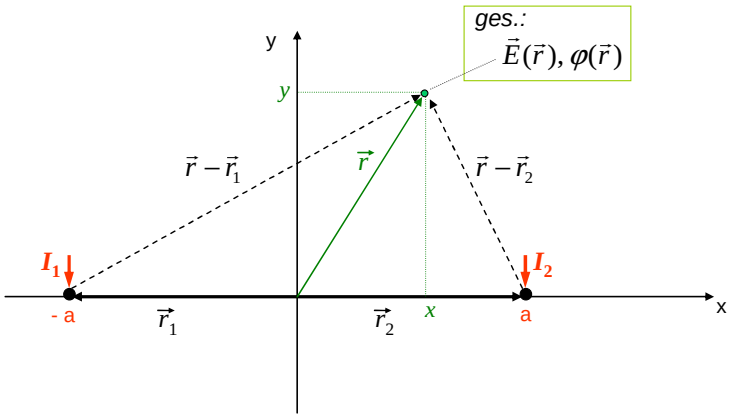
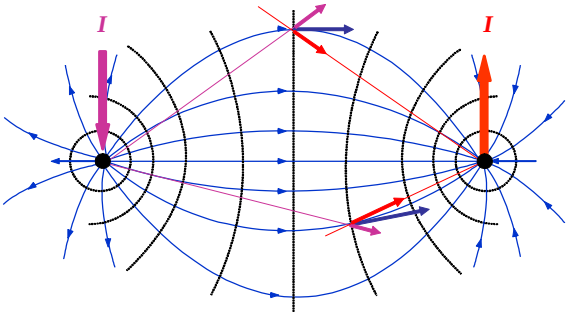


Bild 2-22

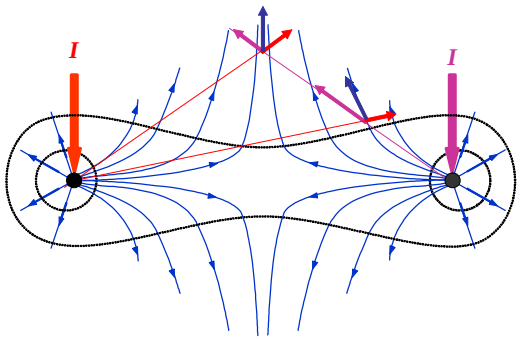
Spezialfälle:

Feldbilder:
- elektrische Feldstärke

Überlagerung zweier entgegengesetzt gerichteter Punkt-Einströmungen

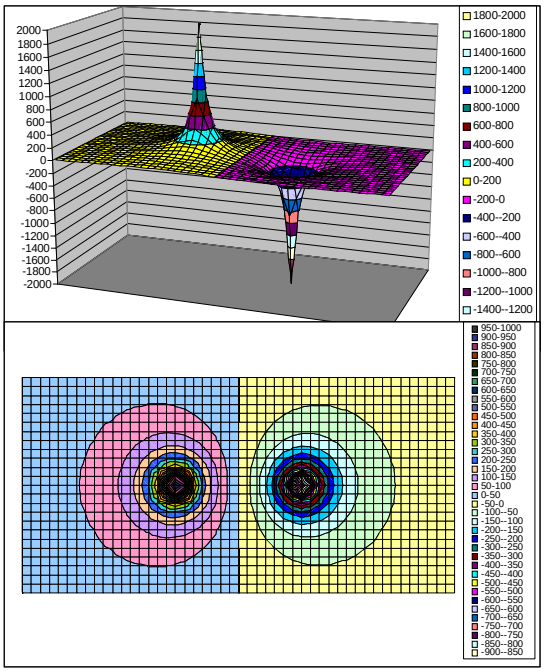


Überlagerung zweier gleich gerichteter Punkt-Einströmungen

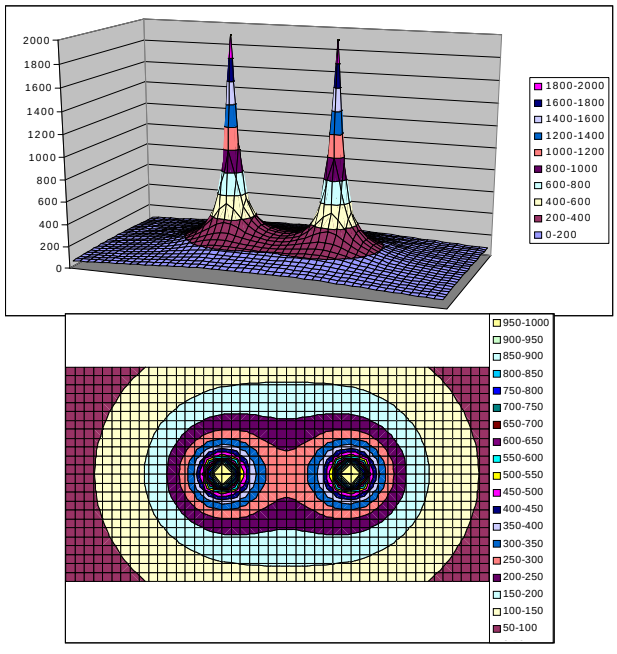


- Potenzial:

Potential (Angaben in V)



Potential (Angaben in V)

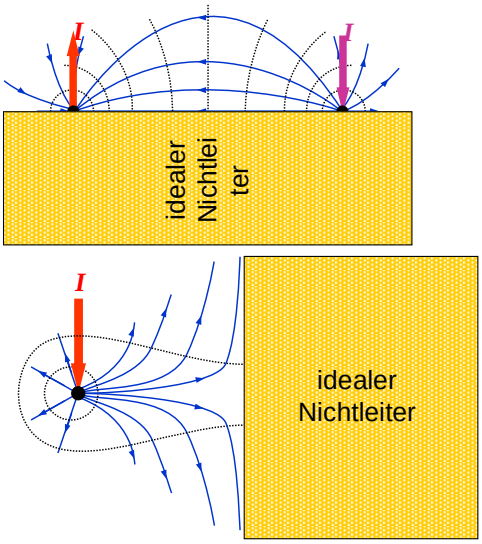


Bilder 2-23-2-26

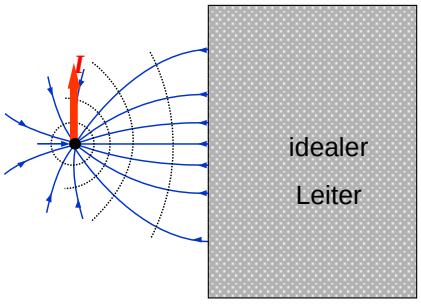
Spiegelungsprinzip

keine Feldänderungen beim:

Schneiden mittels eines idealen Nichtleiters entlang Strömungslinien:



Schneiden mittels eines idealen Leiters entlang Äquipotenzialflächen:

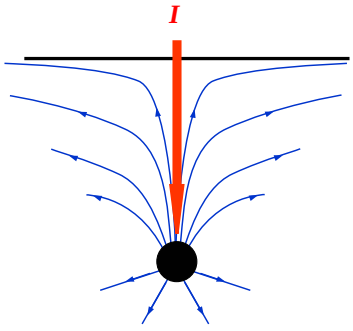


2-26

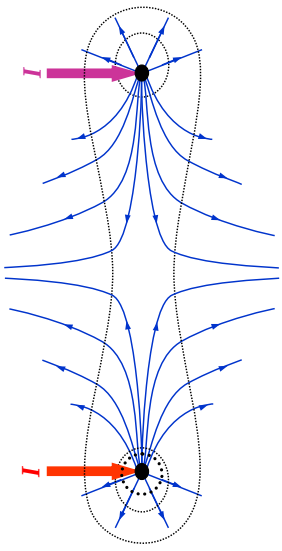
Bild 2-27

Anwendung des Spiegelungsprinzips:

Kugelerder in endlicher Tiefe



Modell



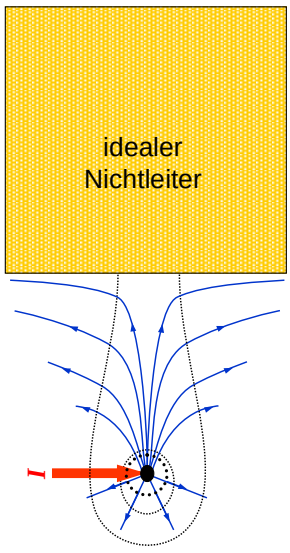
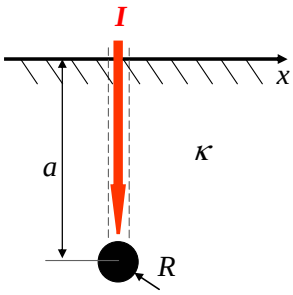


Bild 2-28

Beispiel für die Anwendung des Spiegelungsprinzips:

Aufgabe:
geg.: Kugelerder mit Radius R in Tiefe a
ges.: $E(x)$, $\varphi(x)$ auf der Erdoberfläche



Ersatzanordnung (Modell): Überlagerung zweier gleich gerichteter Punkt-Einströmungen

Modell zur Lösung:

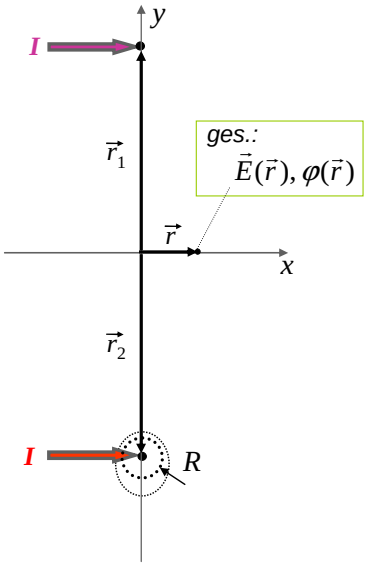


Bild 2-29

2.5 Verlustleistungsdichte im Strömungsfeld

Abschnitt einer Stromröhre mit Volumen $\Delta V = \Delta A \ \Delta l$:

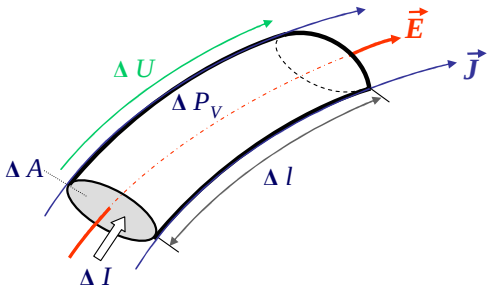
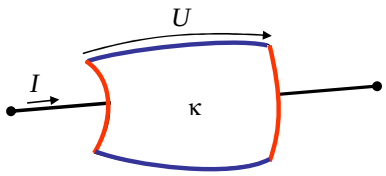


Bild 2-30

2.6 Widerstandsberechnung räumlicher Leiter

Problemstellung: geg.: räumliche Leiteranordnung mit Leitfähigkeit κ



ges.: Widerstand $R=U/I$ oder Leitwert $G = I/U$ der Anordnung

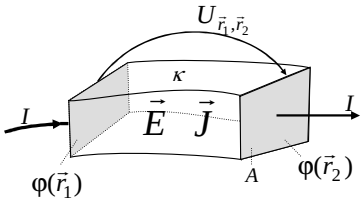
Lösungsmöglichkeiten:

a) Berechnung über Feldgrößen und Definitionsgleichung (siehe Kap. 2.4)

Bedingung:
1. Kontaktflächen sind Äquipotenzialflächen
2. Begrenzungen zum Nichtleiter sind Einhüllende von Stromlinien

Bild 2-31

Rechenschema: Widerstandsberechnung räumlicher Leiter über Feldgrößen:



$$I = \iint_A \vec{J}\,d\vec{A} \qquad \boxed{I} \;\rightarrow\; \vec{J} \;\rightarrow\; \vec{E} \;\rightarrow\; \varphi(\vec{r}) \;\rightarrow\; U_{\vec{r}_1,\vec{r}_2} = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}\,')\,d\vec{r}\,'$$

$$R = \frac{U}{I} \qquad G = \frac{I}{U}$$

$$\text{allg.: } R_{\vec{r}_1,\vec{r}_2} = \frac{\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}\,')\,d\vec{r}\,'}{\iint_A \vec{J}\,d\vec{A}}$$

Bild 2-32

Beispiel: Berechnung des „Kugelwiderstandes“ einer konzentrischen Anordnung

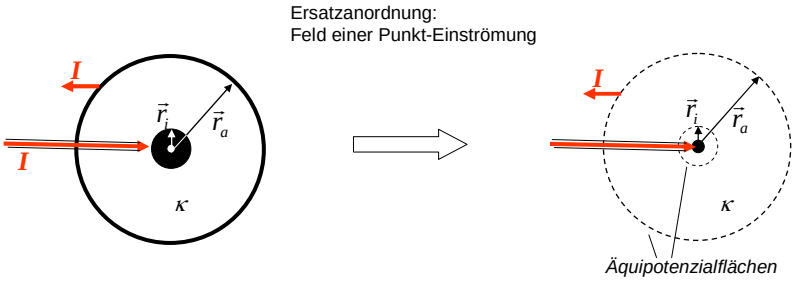
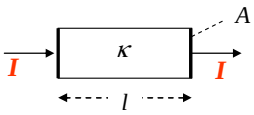


Bild 2-33

b) Widerstandsberechnung räumlicher Leiter über die Bemessungsgleichung des Widerstandes/Leitwertes für das homogene Feld

über Bemessungsgleichung des Widerstandes/Leitwertes für homogenes Feld:

$$R = \frac{l}{\kappa A} \qquad G = \frac{\kappa A}{l}$$



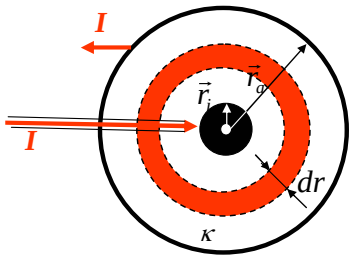
Weg:

1. Zerlegung des Feldraumes in differentielle Raumelemente mit annähernd homogener Feldverteilung
2. Bestimmung des Widerstandes dR / Leitwertes dG des differentiellen Raumelementes, wenn Raumelemente in Serie/ parallel geschaltet sind
3. Berechnung des Gesamtwiderstandes/Gesamtleitwertes durch Integration

Bild 2-34

Beispiele:

- Berechnung des „Kugelwiderstandes“ einer konzentrischen Anordnung



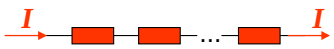


Bild 2-35

• Widerstand eines bogenförmigen Leiters
radiale Durchströmung

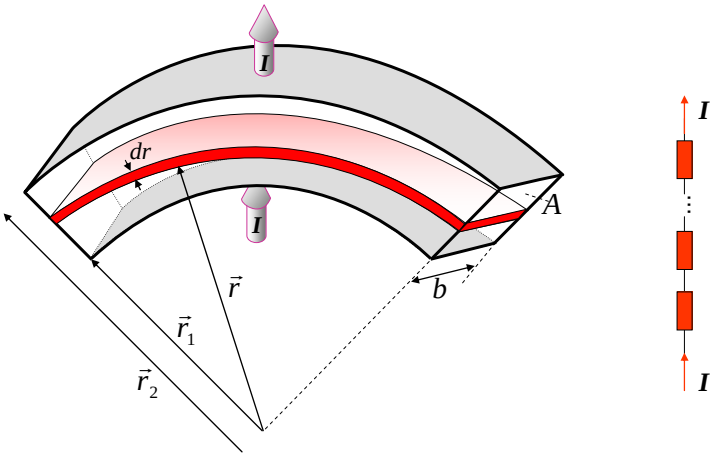


Bild 2-36

• Widerstand eines bogenförmigen Leiters
Längsdurchströmung

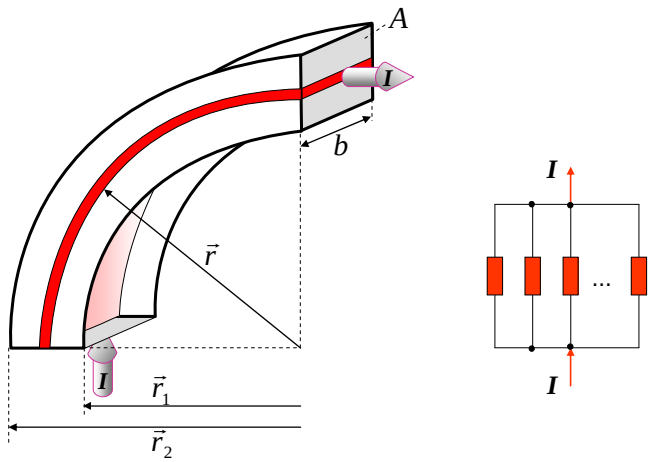
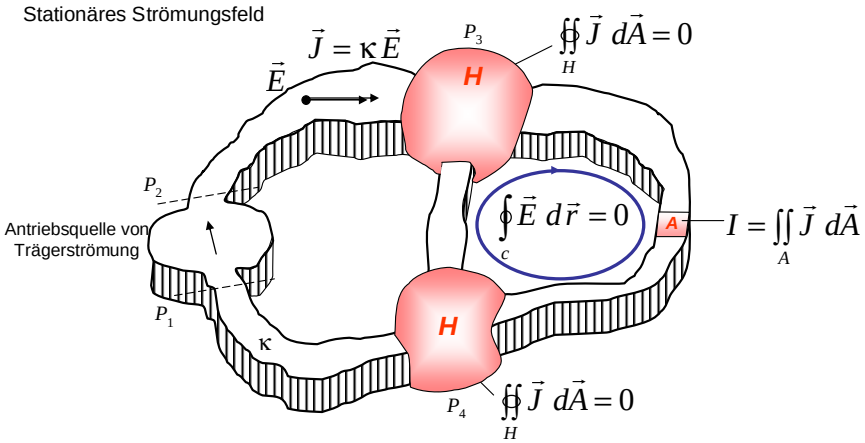
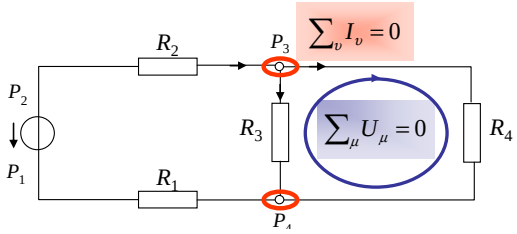


Bild 2-37

2.7 Zusammenfassung



Gleichstromkreis (Integralverhalten zwischen ausgezeichneten Schnittstellen P):



Quelle: R. Paul, ET1

Bild 2-38

3. Elektrostatisches Feld
3.1 Wesen des elektrostatischen Feldes

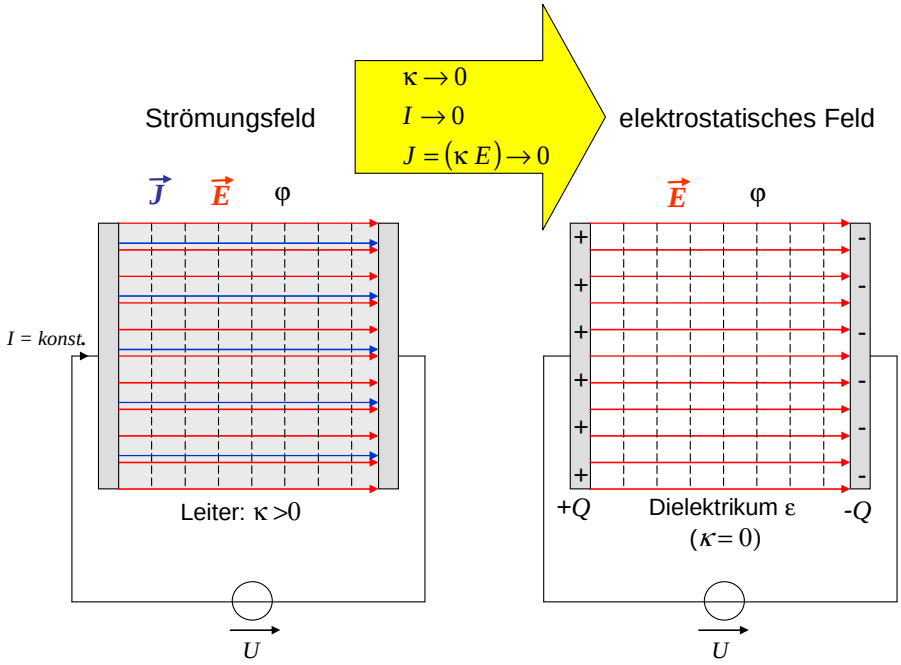
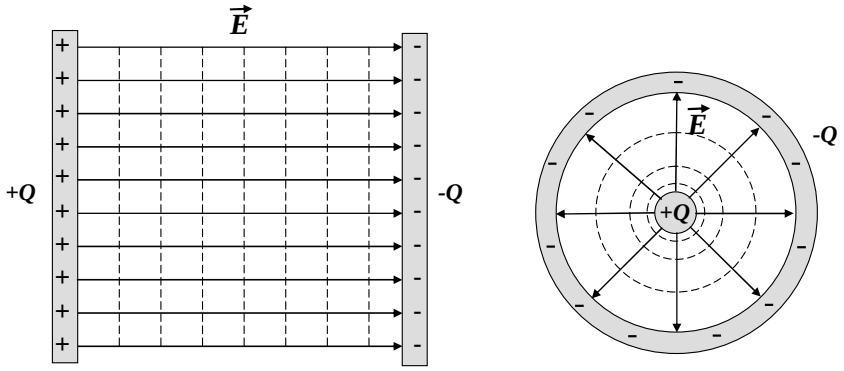


Bild 3-1

Beispiele elektrostatischer Felder



Plattenkondensator

kugelsymmetrische Anordnung

+Q hat immer **–Q** als Partner im Raum

Bild 3-2

3.2 Influenz

Influenz:

In einem Leiter im elektrischen Feld werden Ladungen getrennt (verschoben):

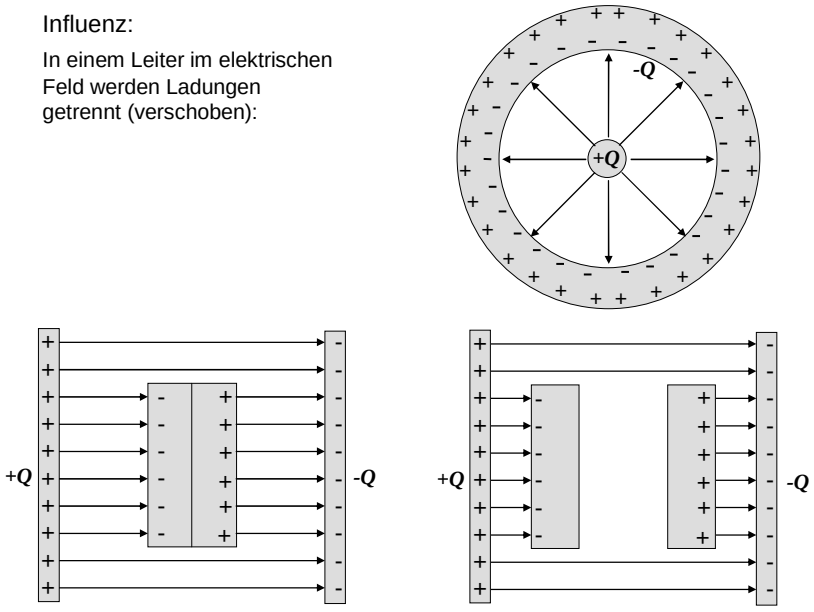


Bild 3-3

Anwendung:

Abschirmung einer Ladung durch kurzzeitig geerdete Metallhülle:

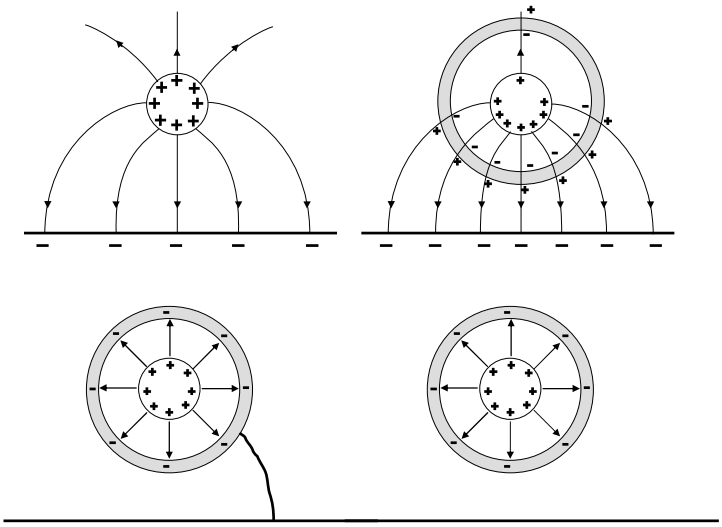


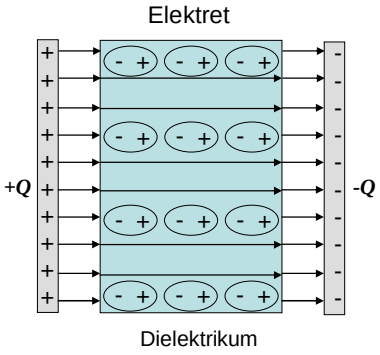
Bild 3-4

Dielektrische Polarisation:

z.B. in M.Ahlbach: Grundlagen der Elektrotechnik 1

Dielektrische Polarisation

verschiedene Arten der dielektrischen Polarisation:
z.B. atomare Polarisation, Dipol-Polarisation



Elektret-

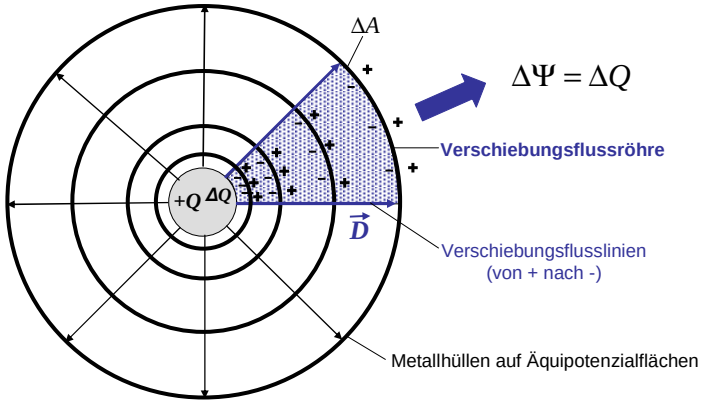
elektrisches Analogon zum Dauermagneten

Anwendungen: bei Erfordernis eines elektrischen Feldes: Luftfilter, Elektret-Mikrofone etc.

Bild 3-5

3.3 Physikalische Größen des elektrostatischen Feldes
a) Verschiebungsfluss und Verschiebungsflussdichte

Ladung Q (bzw. ΔQ) bewirkt in den Metallhüllen (bzw. Teilen der Metallhüllen) eine Ladungsverschiebung (Flusscharakter):



- In allen Metallhüllen werden gleiche Ladungen verschoben.

• Die auf einer geschlossenen Metallhülle insgesamt verschobene Ladung ist gleich der umhüllten Ladung.

• Ladungsverschiebung bei Q = konstant ist unabhängig vom Dielektrikum

Bild 3-6

Spezialfall: homogenes Feld

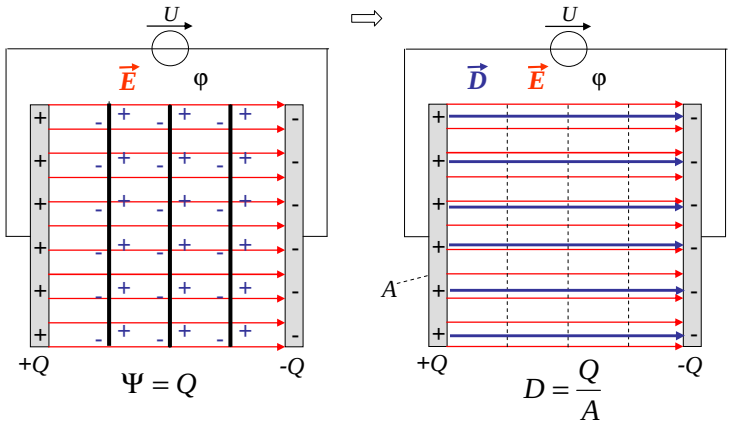


Bild 3-7

Grundeigenschaft:

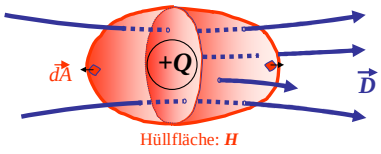
Der Verschiebungsfluss Ψ im nicht leitenden Medium durch eine geschlossene Hülle H ist gleich der eingeschlossenen Ladung Q:

$$\oiint_H \vec{D}\, d\vec{A} = Q$$

Naturgesetz (Gaußsches Gesetz der Elektrostatik)

Analogie SF:

$$I_{ges} = \oiint_H \vec{J}\, d\vec{A} = 0$$



Das elektrostatische Feld ist ein Quellenfeld.

Bild 3-8

Beispielanordnung:

Hüllfläche ***H: Kugeloberfläche***

eingeschlossene Ladung: $-Q_1$

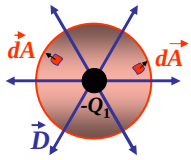


Bild 3-8

b) Zusammenhang zwischen Verschiebungsflussdichte und Feldstärke

	relative Dielektrizitätskonstante ε_r (bei 20°C)
Bariumtitanat	einige 1000
Glas	5…12
Holz	2…7
Papier	1,5…3
Destilliertes Wasser	80
Porzellan	5
Polystyren	2,6
Metalle	1
Silizium	12
Galiumarsenid	11

Bild 3-9

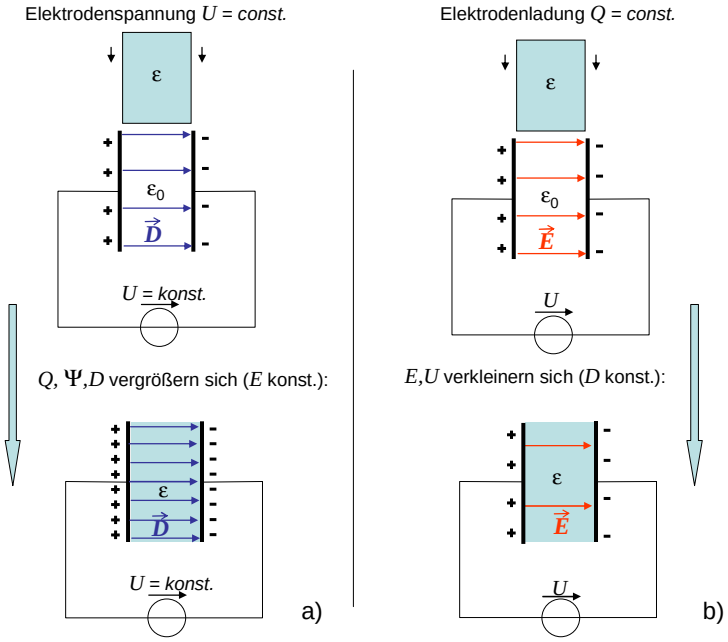
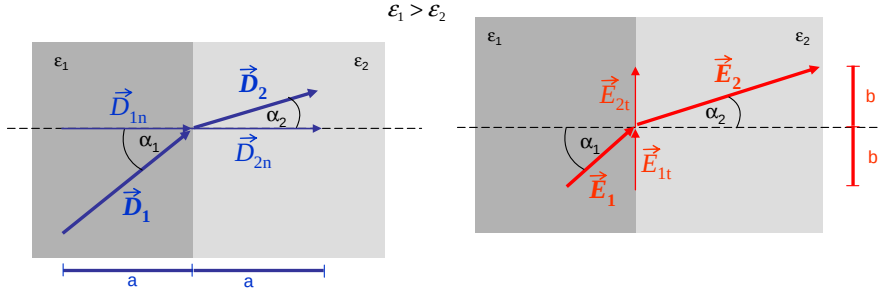


Bild 3-10

c) Bedingungen an Grenzflächen

Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika

$\varepsilon_1 > \varepsilon_2$



$$D_{1n} = D_{2n} \qquad E_{1t} = E_{2t}$$

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}$$

Ladungsfluss durch Grenzfläche ist stetig. Grenzfläche ist Quelle (Senke) von Feldlinien.

Spezialfall: Grenzfläche zu Leitern

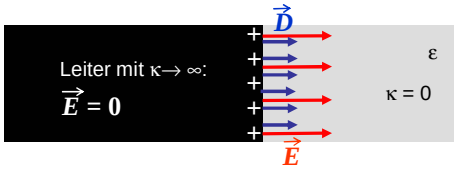
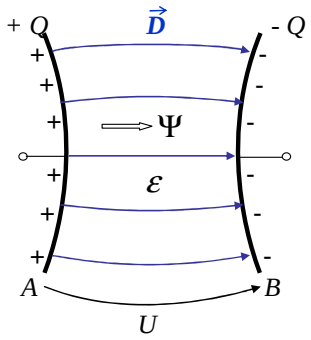


Bild 3-11

d) Kapazität



$$\Psi = Q \sim U$$

Proportionalitätskonstante: Kapazität C

$$C = \frac{Q}{U}$$ Definition der Kapazität

Analogie SF: $G = \frac{I}{U}$

(**Q** ist Ladung auf einer Elektrode)

$$[C] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{As}{V} = \frac{C}{V} = F \quad (Farad)$$

anschaulich:

$$C = \frac{\text{Verschiebungsfluss } \Psi \text{ zwischen den Elektroden } A,B \text{ mit Ladungen } \pm Q}{\text{Spannung } U \text{ zwischen den Elektroden } A,B}$$

Kapazität C ist die Eigenschaft des Bauelementes Kondensator,Schaltzeichen des Kondensators:

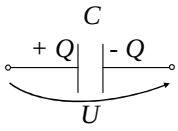


Bild 3-12

3.4 Berechnung einfacher elektrostatischer Felder

Rechenschema:

Berechnung elementarer elektrostatischer Felder

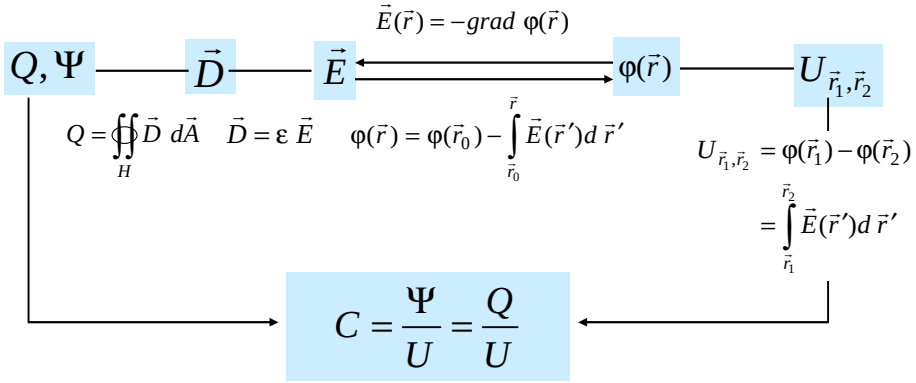


Bild 3-13

a) homogenes Feld (z.B. Feld eines Plattenkondensators)

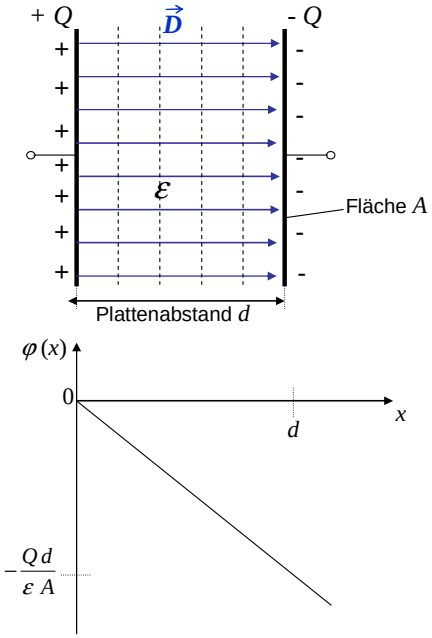
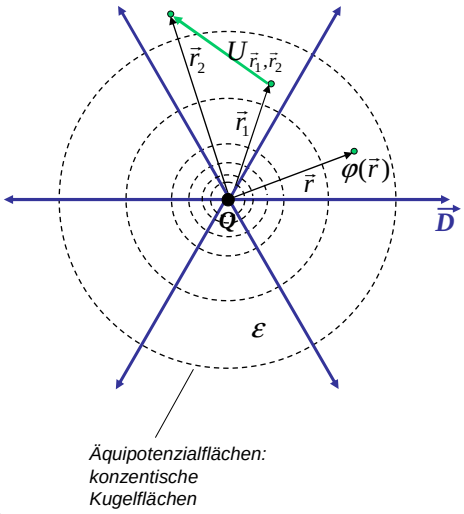


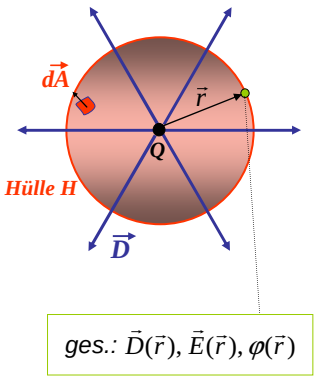
Bild 3-14

b) Feld einer Punktladung Q (kugelsymmetrisches Feld)

Feldbild:

Berechnung:





ges.: $\vec{D}(\vec{r}), \vec{E}(\vec{r}), \varphi(\vec{r})$

Bild 3-15

Anwendung: Berechnung der Kapazität eines Kugelkondensators:

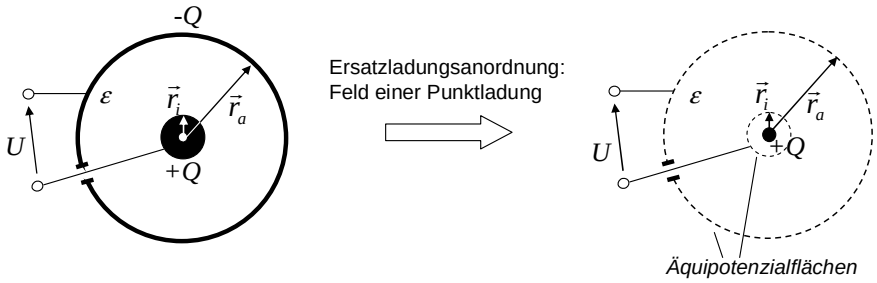


Bild 3-16

c) Feld einer Linienladung Q (zylindersymmetrisches Feld)

Feldbild:

Berechnung:

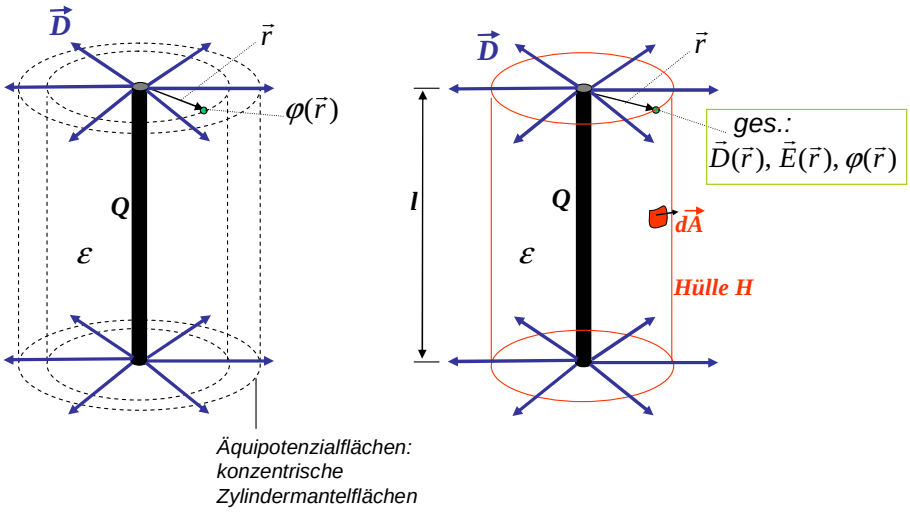


Bild 3-17

Anwendung: Berechnung der Kapazität eines Zylinderkondensators/Koaxialkabels

1 Innenleiter, 2 Dielektrikum,
3 Außenleiter, 4 Schutzmantel

Ersatzladungsanordnung:
Feld einer Linienladung

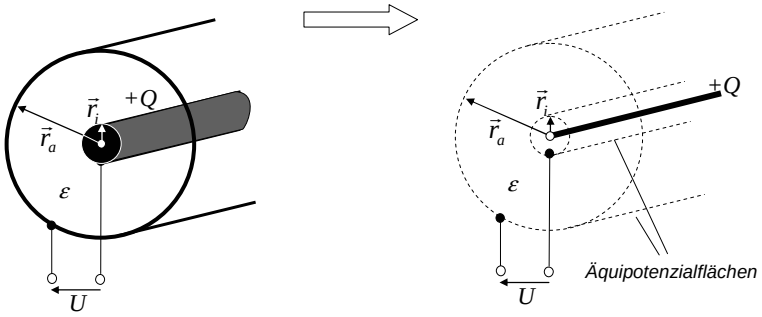
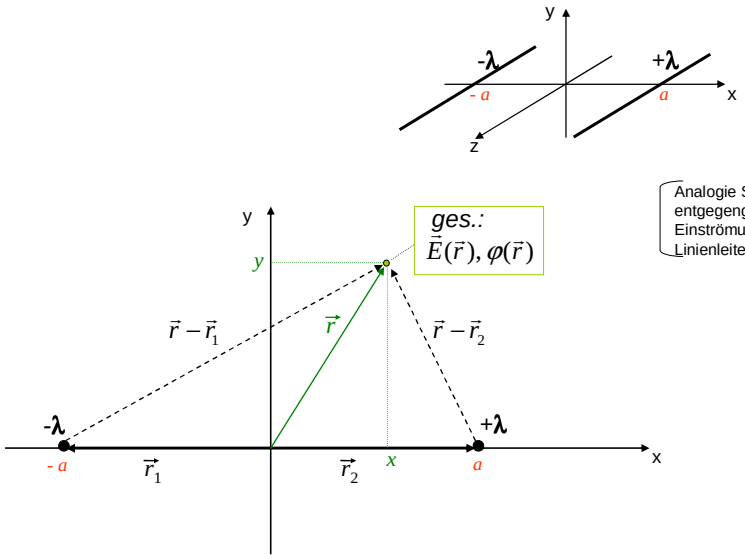


Bild 3-18

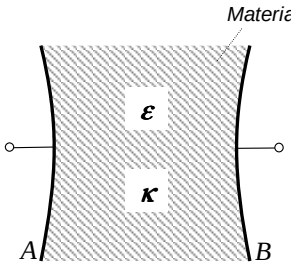
d) Feld zweier paralleler Linienladungen



Analogie SF: entgegengesetzte Einströmungen in Linienleiter

Bild 3-19

e) Elektrostatisches Feld und Strömungsfeld treten gemeinsam auf



C_{AB} Kapazität der Anordnung im Dielektrikum (ε)

R_{AB} Widerstand der Anordnung im Leiter (κ)

$$R_{AB} \cdot C_{AB} = \frac{U}{I}\frac{Q}{U} = \frac{\iint_A \vec{D}\, d\vec{A}}{\iint_A \vec{J}\, d\vec{A}} = \frac{\varepsilon}{\kappa} = \tau$$

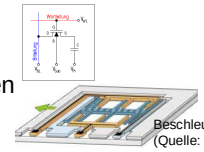
τ: Relaxationszeit

Bild 3-20

3.5 Kondensatoren

Kondensatoren sind wichtige passive Bauelemente mit Einsatz z.B. für

- Energiespeicherung (z.B. Blitzgerät)
- Informationsspeicherung (DRAM)
- Sensoren in mikro-elektro-mechanischen Systemen (MEMS)



Beschleunigungssensors (Quelle: Bosch)

Klassifikation nach Bauformen/praktische Ausführungsformen:

- Röhrchenkondensatoren
- Scheibenkondensatoren
- Mehrschichtkondensatoren

z.B. in M.Ahlbach: Grundlagen der Elektrotechnik 1

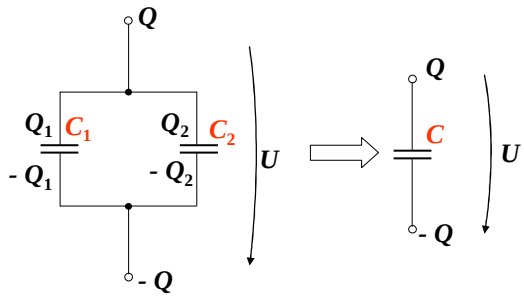
mit unterschiedlichen Dielektrika wie Papier, Keramik, Kunststofffolie

Bild 3-21

3.5.1 Bemessungsgleichung (homogenes Feld)

3.5.2 Zusammenschaltung von Kondensatoren

a) Parallelschaltung



$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_1 + Q_2}{U} = C_1 + C_2$$

$$U = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$$

Ladungsteiler:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

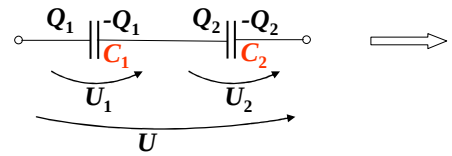
allgemein:

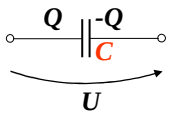
$$C = C_1 + \ldots + C_n = \sum_{\mu=1}^{n} C_\mu$$

Die Kapazitätswerte addieren sich bei parallel geschalteten Kondensatoren.

Bild 3-22

b) Reihenschaltung





$$U = U_1 + U_2 \qquad Q = Q_1 = Q_2$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{U_1 + U_2} = \frac{1}{\frac{U_1}{Q} + \frac{U_2}{Q}}$$

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

Voraussetzung: Es fließen keine Ladungen ab.

Spannungsteiler:

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} \quad U_2 = \frac{Q}{C_2} \quad U = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{C_2}{C_1}$$

$$\frac{U_1}{U} = \frac{\frac{1}{C_1}}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

allgemein:

$$\frac{1}{C} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{1}{C_\mu}$$

Bild 3-23

Anwendungen:

Beschleunigungssensor

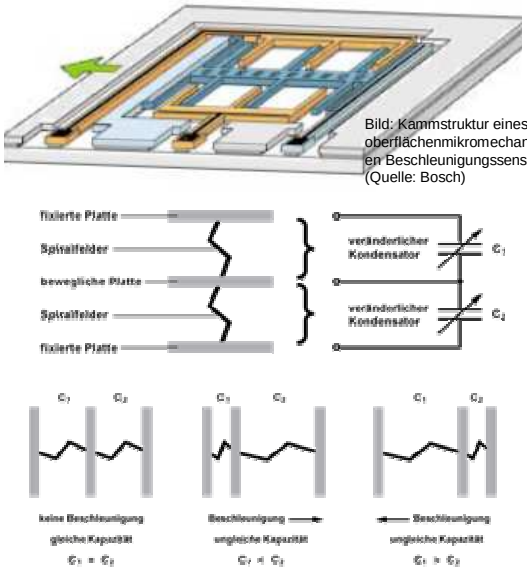


Bild: Kammstruktur eines oberflächenmikromechanischen Beschleunigungssensors. (Quelle: Bosch)

Drehratensensor

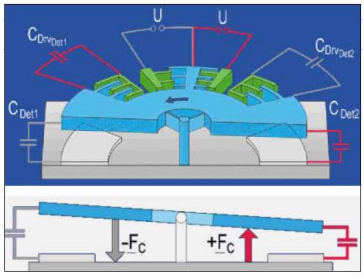


Bild: Funktionsprinzip eines oberflächenmikromechanischen Drehratensensors. (Quelle: Bosch)

Bild 3-24

c) RC – Netze bei Gleichspannung

Ersatzschaltbilder für RC-Kombinationen für den stationären Zustand, d.h. für $t \to \infty$:

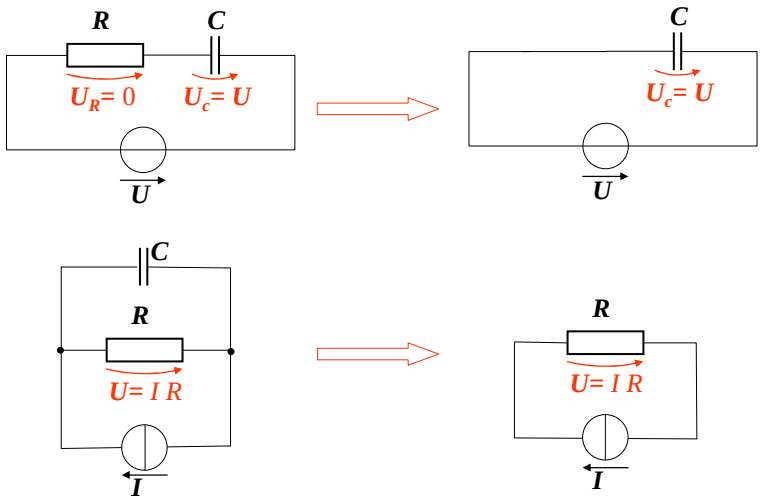
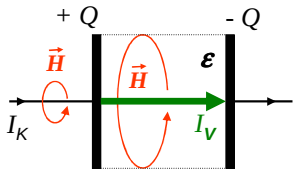


Bild 3-25

3.6 Verschiebungsstrom

a) Erscheinung und Definition



I_K Konvektionsstrom
(Ladungsträgerstrom)

- Gesetzmäßigkeit:
Jeder Strom wird von einem Magnetfeld umwirbelt.

- für den Fall $\frac{dQ}{dt} \neq 0$ gilt: Im Dielektrikum ist ein Magnetfeld nachweisbar.

⇩

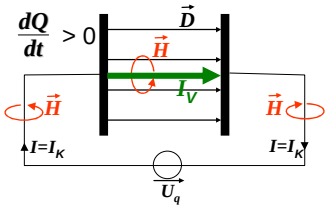
- Durch das Dielektrikum fließt ein Strom:
  I_V Verschiebungsstrom
- Magnetfelder um I_K und I_V sind gleich groß.
  → $I_K = I_V$

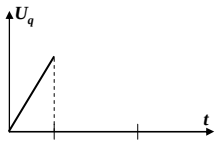
Bild 3-26

Verschiebungsstrom bei Auf- und Entladung eines Kondensators:

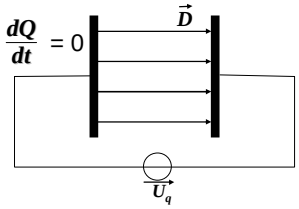
Aufladung des Kondensators

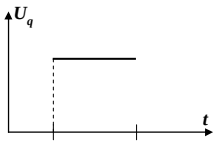
I_v in Richtung von $\vec{D}$ ($\vec{E}$, Ψ)





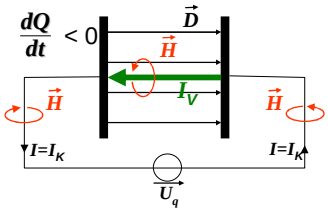
$I_v = 0$

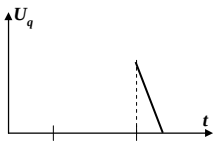




Entladung des Kondensators

I_v entgegen Richtung von $\vec{D}$ ($\vec{E}$, Ψ)

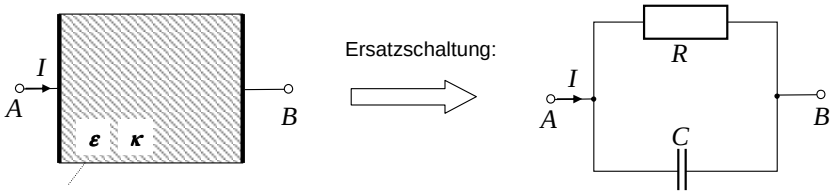




3-27

b) Verschiebungsstromdichte

c) Heterostrukturen



Materialien (z.B. Halbleiter), die gleichzeitig Leitfähigkeit κ und Dielektrizitätskonstante ε besitzen

C Kapazität der Anordnung
R Widerstand der Anordnung

Bild 3-28

Anwendung: Ersatzschaltung einer Anordnung:

Anordnung: Ersatzschaltung:

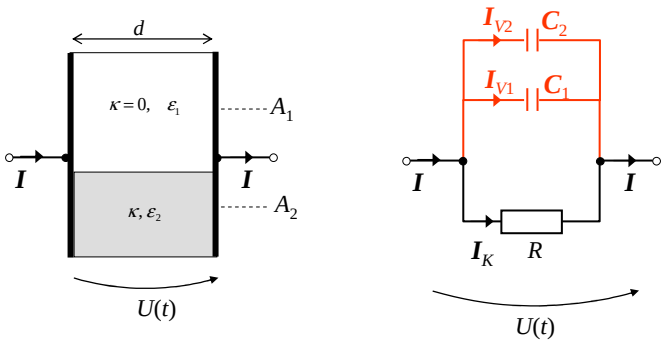
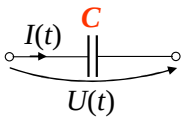
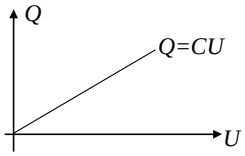


Bild 3-29

3.7 *UI* - Beziehung am Kondensator



Annahme: lineare Kapazität C



Es gilt: $I_K = I_V$

$$I(t) = I_K = I_V = \frac{dQ}{dt}$$ mit $Q = C\,U$ folgt:

$$I(t) = \frac{d(C\,U)}{dt} = C\frac{d\,U(t)}{d\,t}$$ (C unabhängig von U und t)

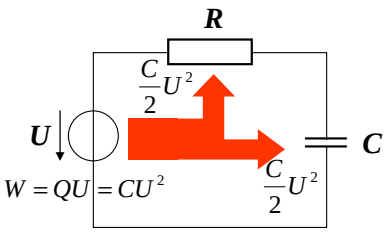
Bild 3-30

3.8 Energie im elektrostatischen Feld

a) Energie

Energiespeicherung im Kondensator ist reversibel:

Ladevorgang:



Annahme: $W_0 = 0, \quad Q_0 = 0$

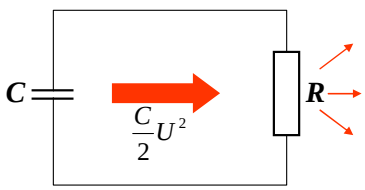
$$W = \int_0^Q U \, dQ'$$

Spannungsquelle: U =konst.: $W = UQ$

Kondensator:

$$U = \frac{Q}{C}, \quad W = \int_0^Q \frac{Q}{C} dQ' = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C}{2}U^2$$

Entladevorgang:

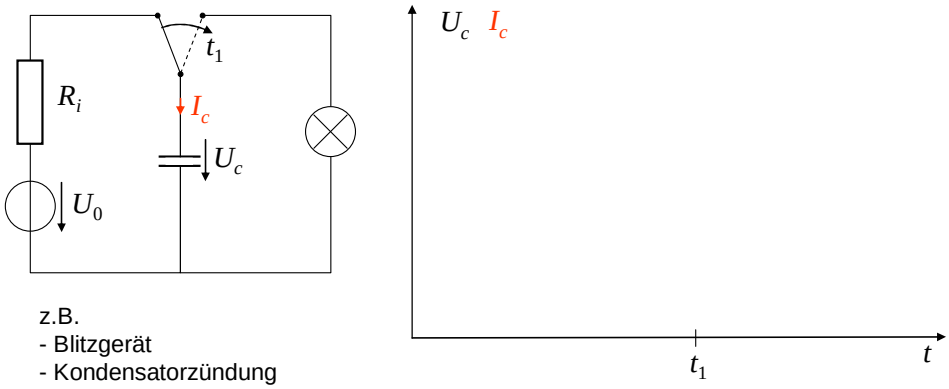


Gespeicherte Energie im Kondensator kann zurück gewonnen werden.

Bild 3-31

Beispiele für Energiespeicherung:

Energieakkumulation und stoßartige Abgabe



z.B.
- Blitzgerät
- Kondensatorzündung
- Impulsstromschweißen

Bild 3-32

b) Energiedichte

Energie wird im elektrostatischen Feld gespeichert.

Für Volumen $\Delta V = \Delta A \ \Delta l$ gilt:

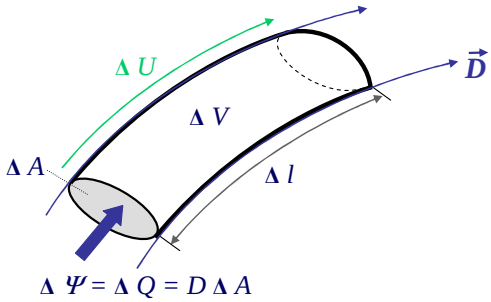
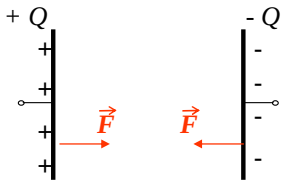


Bild 3-33

3.9 Kraft auf Grenzflächen

3.9.1 Kraft auf leitende Grenzflächen

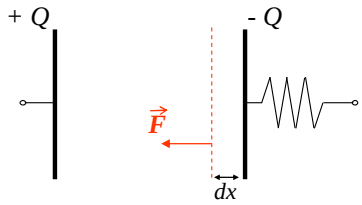


Beobachtung:

Kraft $\vec{F}$ zwischen geladenen Elektroden, die Anziehung dieser bewirkt.

Bild 3-34

a) globale Kraftgleichung (F ausgedrückt durch C)



Energiebilanz bei Verschiebung der rechten Platte um *dx:*

$$W_{Feld} = W_F = \frac{Q^2}{2C}$$ nimmt ab

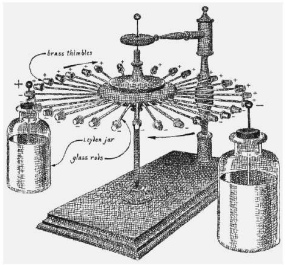
$$W_m = F \cdot x$$ nimmt zu

$Q = konst. \rightarrow E = konst., D = konst.$

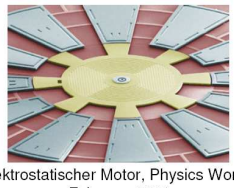
Bild 3-35

Anwendungen:

Elektrostatischer Motor



Benjamin Franklins
Elektrostatischer Motor, 1748



elektrostatischer Motor, Physics World, February 2001

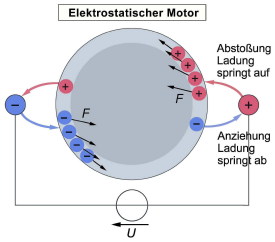


Bild 3-36

DMD: Digital Mirror Device

digitale Steuerung und Projektion von Licht

Bild 3: Die mikroskopisch kleinen Kippspiegel auf dem DMD lassen sich individuell ansteuern und innerhalb von 13 µs von ihrer Ruhelage aus in die ausgelenkte Stellung oder umgekehrt kippen

Quelle: BioPhotonik 2008

- Kantenlänge: 10,8 µm,
- 12° aus horizontaler Ruhelage kippbar
- einzeln pro Sekunde tausendfach bewegbar

> 2 Millionen Mikrospiegel

Prinzip:

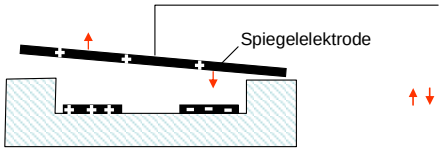


Bild 3-37

3.9.2 Kraft auf ladungsfreie Grenzflächen

a) quergeschichtete Dielektrika

a) quer geschichtete Dielektrika

$I = 0 \rightarrow Q = konst. \rightarrow D = konst.$

nach Grenzflächenbedingungen nur Normalkomponenten:

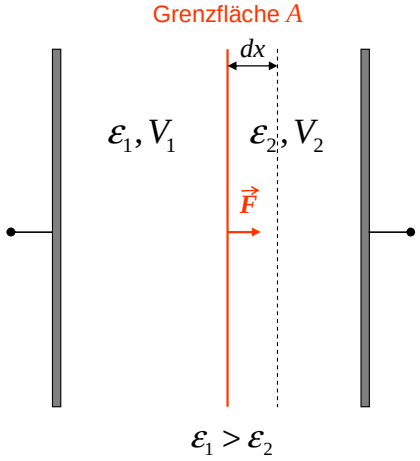
$D_{1n} = D_{2n} = D, \quad E_{1n}, E_{2n}$

$dW_F + dW_m = 0$

$$\frac{D^2}{2\varepsilon_1} dV_1 + \frac{D^2}{2\varepsilon_2} dV_2 + F\,dx = 0$$

$$\underbrace{\frac{D^2}{2\varepsilon_1} A dx}_{\text{Energie-zunahme}} - \underbrace{\frac{D^2}{2\varepsilon_2} A dx}_{\text{Energie-abnahme}} + F\,dx = 0$$

$$p = \frac{F}{A} = \frac{D^2}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right) = \frac{E_{1n}\,E_{2n}}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$



$dV_1 = Adx$ *Volumenzunahme*

$dV_2 = -Adx$ *Volumenabnahme*

Kraftdichte p an Grenzfläche ist Differenz der Energiedichten beider Medien.

Bild 3-38

b) längsgeschichtete Dielektrika

b) längs geschichtete Dielektrika

$U = konst. \rightarrow E = konst.$

nach Grenzflächenbedingungen nur Tangentialkomponenten:

$E_{1t} = E_{2t} = E, \quad D_{1t}, D_{2t}$

$dW_F + dW_m = dW_{el}$

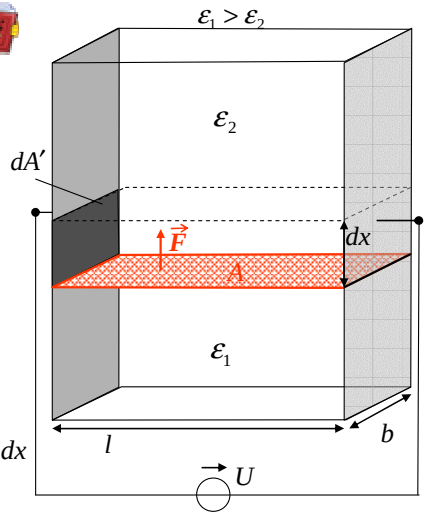
$$\frac{\varepsilon_1 E^2}{2} dV_1 + \frac{\varepsilon_2 E^2}{2} dV_2 + F\,dx = U dQ$$

$$dQ = (D_1 - D_2)\, dA'$$

$$\frac{\varepsilon_1 E^2}{2} A dx - \frac{\varepsilon_2 E^2}{2} A dx + F\,dx = E\,l\,E(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\, b\, dx$$

$$F = \frac{\varepsilon_1 E^2}{2} A - \frac{\varepsilon_2 E^2}{2} A$$

$$p = \frac{F}{A} = \frac{E^2}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \frac{D_{1t} D_{2t}}{2}\left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\right)$$



$dV_1 = A dx$ *Volumenzunahme*

$dV_2 = -A dx$ *Volumenabnahme*

$dA' = b\,dx, \quad A = lb$

Bild 3-39

c) Schlussfolgerungen

Kraft wirkt immer senkrecht auf die Trennfläche der Dielektrika in Richtung des Mediums mit der kleineren Dielektrizitätskonstanten

3.10 Zusammenfassung

Elektrostatisches Feld und Strömungsfeld

Korrespondenzen

elektrostatisches Feld		**elektrisches Strömungsfeld**
Feldstärke $\vec{E}$	$\vec{E}$ ist wirbelfrei $\oint \vec{E}\, d\vec{r} = 0$	Feldstärke $\vec{E}$
Verschiebungsfluss Ψ		Strom I
Verschiebungsflussdichte $\vec{D}$		Stromdichte $\vec{J}$
$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$		$\vec{J} = \kappa \vec{E}$
Kapazität C		Leitwert G

Unterschiede

$\vec{D}$ hat Quellen: $\oiint_H \vec{D}\, d\vec{A} = Q$	$\vec{J}$ ist quellenfrei: $\oiint_H \vec{J}\, d\vec{A} = 0$
ε variiert: 10^{-11}…10^{-7} As/Vm (4 Dekaden)	κ variiert: 10^{-17}…10^{8} A/Vm (25 Dekaden)
Es gibt kein Medium mit ε = 0.	Es gibt Nichtleiter mit praktisch κ = 0.

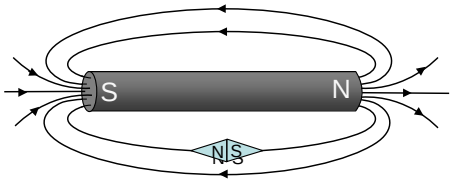
Bild 3-40

4. Magnetfeld

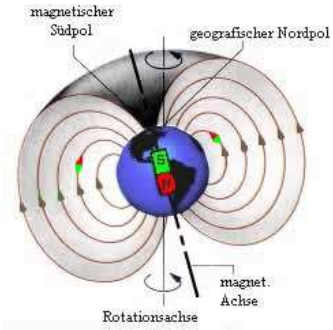
4.1 Wesen des magnetischen Feldes

Auftreten von Magnetfeldern z.B.:

- in der Umgebung von Naturmagneten:



- in der Umgebung der Erde:



Quelle: http://www.polarlichtinfo.de/cms/front_content.php?idcat=59

- in der Umgebung elektrischer Ströme (Jeder elektrische Strom ist von einem Magnetfeld umwirbelt.)

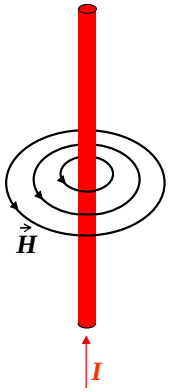
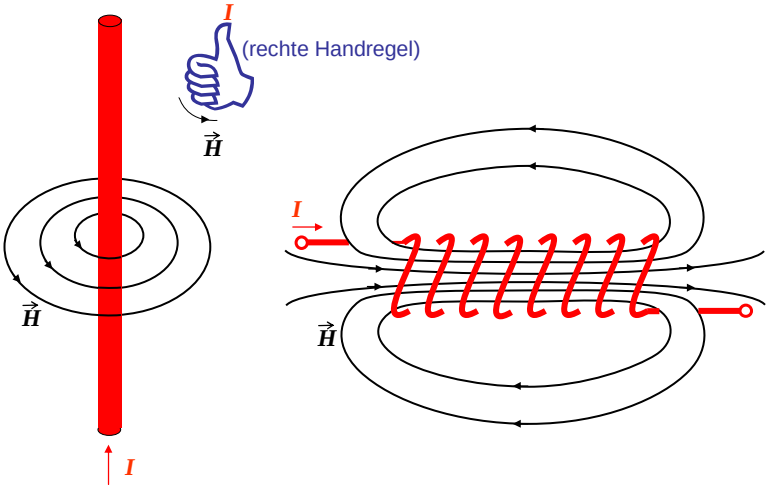


Bild 4-1

4.2 magnetische Feldgrößen

4.2.1 magnetische Feldstärke $\vec{H}$, Durchflutungsgesetz

Jeder elektrische Strom ist von einem Magnetfeld umwirbelt:



stromdurchflossener Leiter

stromdurchflossene Spule

Bild 4-2

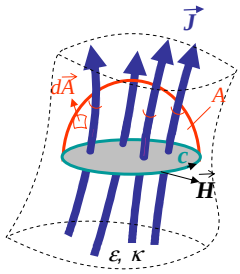
Durchflutungsgesetz (Naturgesetz):

Das Umlaufintegral über die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ auf einem geschlossenen Weg c ist gleich dem Gesamtstrom (Durchflutung) I_{umf} durch eine beliebige in c eingespannte Fläche A.

$$\oint_c \vec{H}\, d\vec{r} = \iint_A \vec{J}\, d\vec{A} = I_{umf}$$

mit

$$\vec{J} = \vec{J}_K + \vec{J}_V = \vec{J}_K + \frac{d\vec{D}}{dt}$$ folgt:



$$\oint_c \vec{H}\, d\vec{r} = \iint_A (\vec{J}_K + \frac{d\vec{D}}{dt})\, d\vec{A}$$

Durchflutungsgesetz
(1. Maxwellsche Gleichung, Integralform)

Bild 4-3

Spezialfall: Durchflutung bei stromführenden Leitern:

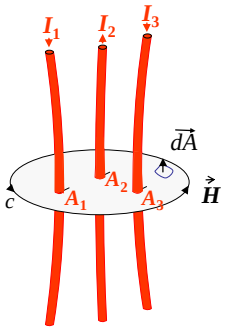
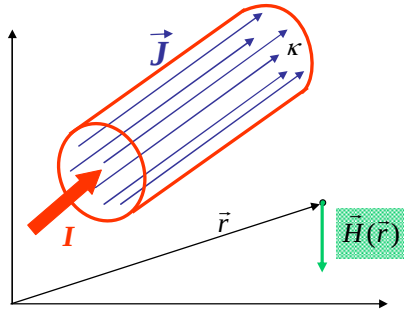


Bild 4-4

4.2.2 Berechnung einfacher Magnetfelder



geg.: nebenstehende vom Strom I durchflossene Anordnung, Stromdichte $\vec{J}$

ges.: magnetische Feldstärke $\vec{H}(\vec{r})$ im Raumpunkt $\vec{r}$

Bild 4-5

a) Berechnung mittels Durchflutungsgesetz

Beispiele:

1. <u>linienhafter Leiter</u>

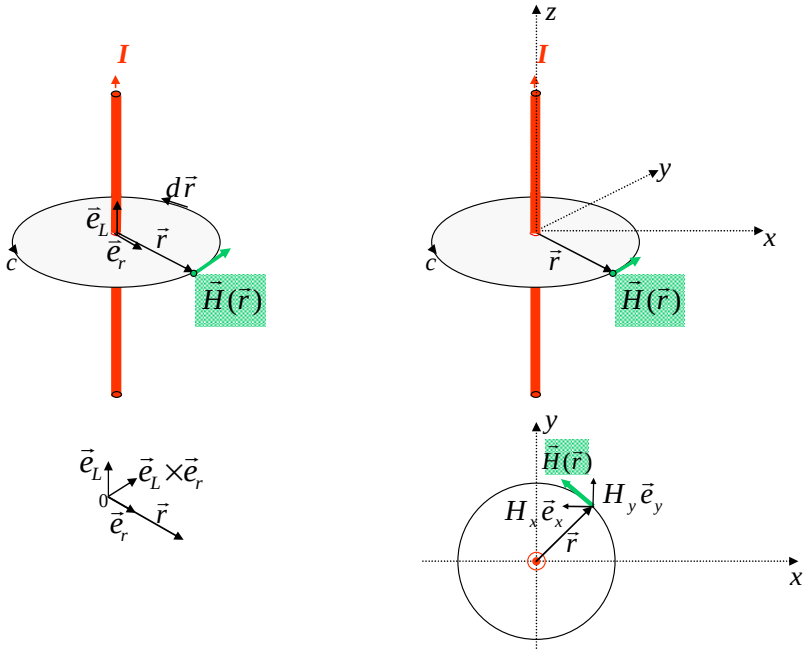


Bild 4-6

2. zylindrischer Leiter

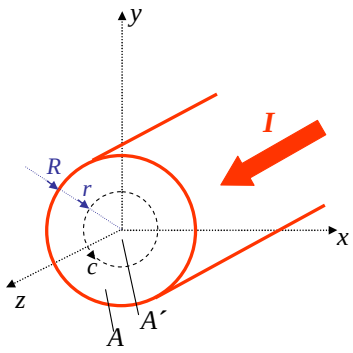
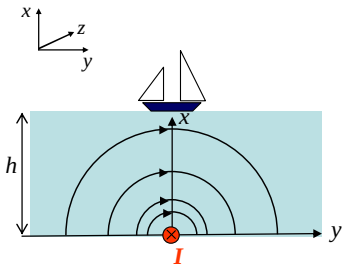


Bild 4-7

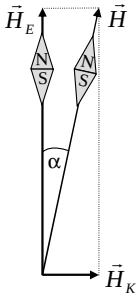
Anwendung: Kompassmissweisung durch stromführendes Kabel im Meer

Anordnung: Ein einpoliges Seekabel führt von Süden nach Norden einen Gleichstrom von $I = 1\mathrm{kA}$ und liegt in einer Tiefe von $h = 30\mathrm{m}$.



ges.:
Um wieviel Grad α weicht der Kompass im Schiff von der S-N-Richtung ab?

Magnetfeld der Erde: $\vec{H}_E = 16\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\vec{e}_z$



Lösung:

1. Berechnung der Feldstärke $\vec{H}_K$ an der Wasseroberfläche herrührend vom Kabel

$$\vec{H}_K(\vec{r}) = \frac{I}{2\pi r}(\vec{e}_L \times \vec{e}_r) = \frac{I}{2\pi r^2}(\vec{e}_L \times \vec{r}) \quad \text{mit} \quad \vec{e}_L = \vec{e}_z \quad \text{und} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

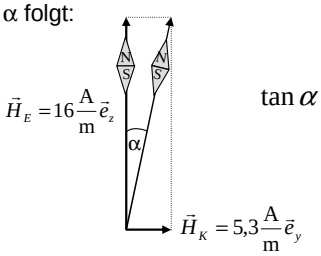
Bild 4-8

$$\vec{e}_L \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = -y\,\vec{e}_x + x\,\vec{e}_y = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{H}_K(x,y,0) = \frac{I}{2\pi(x^2+y^2)} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für die Feldstärke $\vec{H}_K$ an der Wasseroberfläche ($x = h$) im Schiff über dem Kabel ($y = 0$) folgt:

$$\vec{H}_K(h,0,0) = \frac{I}{2\pi(h^2+0)} \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{I}{2\pi h}\vec{e}_y \quad \Rightarrow \quad \vec{H}_K(h,0,0) = 5{,}3\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\vec{e}_y$$

Für den Winkel α folgt:



$$\tan\alpha = \frac{5{,}3\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}}{16\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}} = 0{,}33 \quad \rightarrow \quad \alpha = 18{,}3^\circ$$

Bild 4-9

3. Paralleldrahtleitung

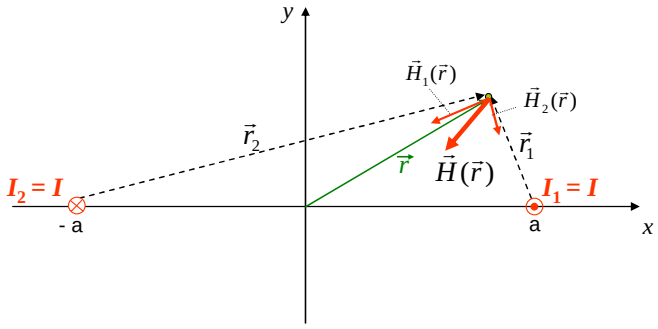


Bild 4-10

4. Zylinderspule der Länge l mit w Windungen

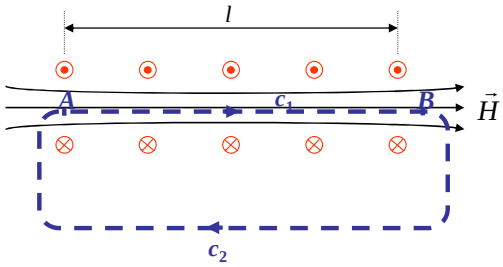
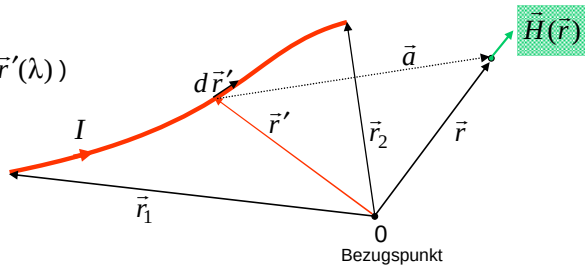


Bild 4-11

b) Berechnung der magnetischen Feldstärke mit dem Biot-Savartschen Gesetz

Biot-Savartsches Gesetz

geg.:
vom Strom I durchflossener
linienhafter Leiter (Raumkurve $\vec{r}'(\lambda)$)
ges.:
magnetische Feldstärke $\vec{H}(\vec{r})$
im Raumpunkt $\vec{r}$



Lösung: Biot-Savartsches Gesetz:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi}\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\frac{d\vec{r}'\times\vec{a}}{a^3} = \frac{I}{4\pi}\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\frac{d\vec{r}'\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$\vec{a} = \vec{r} - \vec{r}'$: Abstandsvektor von $\vec{r}$ nach $\vec{r}'$

$\vec{r}'(\lambda)$: Raumkurve, die den Leiter beschreibt

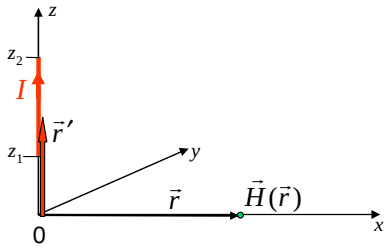
$d\vec{r}' = \frac{\partial \vec{r}'(\lambda)}{\partial \lambda} d\lambda$: Linienelement des Leiters

4-12

Bild 4-12

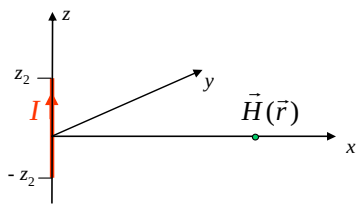
Beispiele:

1. Magnetfeld eines geraden Leiterstückes



ges.: Magnetfeld $\vec{H}(\vec{r})$ auf x –Achse herrührend von dem geraden vom Strom I durchflossenen Leiterstück auf der z –Achse

Bild 4-13


z
z2
y
I
H(r)
x
- z2

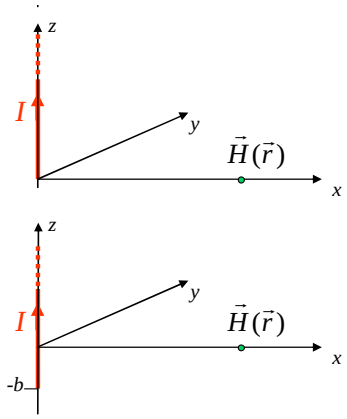
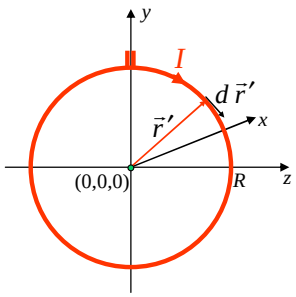


Bild 4-14

2. Kreisring in der *yz*-Ebene mit Radius R



ges.:
Magnetfeld $\vec{H}(0,0,0)$ im Raumpunkt $\vec{r} = (0,0,0)$ herrührend von dem vom Strom I durchflossenen Kreisring in der $y\,z$ –Ebene

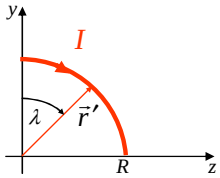
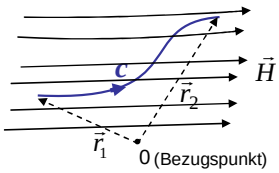


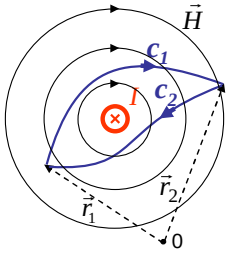
Bild 4-15

4.2.3 Weitere magnetische Feldgrößen

a) magnetische Spannung



$$\vec{V}_{\vec{r}_1\vec{r}_2} = \int_{\vec{r}_1,c}^{\vec{r}_2} \vec{H}\, d\,\vec{r}, \qquad [V] = \mathrm{A}$$



$$\oint_{c_1,c_2} \vec{H}\, d\,\vec{r} = \int_{\vec{r}_1,c_1}^{\vec{r}_2} \vec{H}\, d\,\vec{r} + \int_{\vec{r}_2,c_2}^{\vec{r}_1} \vec{H}\, d\,\vec{r} = I$$

(Die Addition der magnetischen Spannungen in einem geschlossenen Umlauf $c=c_1+c_2$ ergibt die Summe der eingeschlossenen Ströme.)

Schlussfolgerungen: - das Integral $\int_{\vec{r}_1,c}^{\vec{r}_2} \vec{H}\, d\,\vec{r}$ ist i.a. vom Weg c abhängig

- die magnetische Feldstärke hat i.a. kein skalares Potenzial

4-16

b) magnetischer Fluss und magnetische Flussdichte

magnetischer Fluss Φ

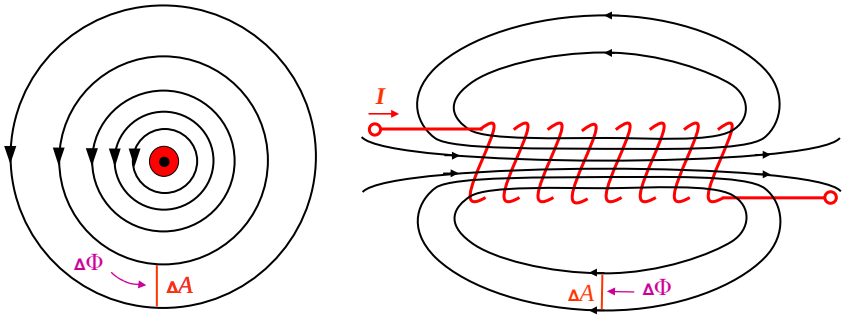


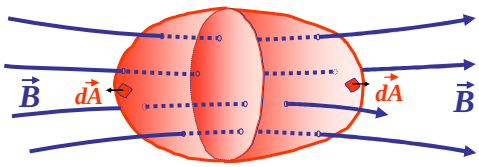
Bild 4-17

Kontinuität der magnetischen Flussdichte B:

Der Gesamtfluss durch eine geschlossene Hülle ist stets NULL:

$$\oiint_H \vec{B}\, d\vec{A} = 0$$

Naturgesetz



Hüllfläche: ***H***

Das Feld der magnetischen Flussdichte ist quellenfrei.

Folgerung: Es gilt der Knotenpunktsatz.

Bild 4-18

c) Zusammenhang zwischen magnetischer Feldstärke und magnetischer Flussdichte

Einteilung der Materialien in:

- nicht ferromagnetische Materialien

diamagnetische Stoffe	μ_r
Kupfer	0,999 990
Quecksilber	0,999 975
Silber	0, 999 981
Wasser	0,999 991
paramagnetische Stoffe	μ_r
Aluminium	1,000 022 0
Sauerstoff	1,000 001 3
Platin	1,000 360 0
Zinn	1,000 003 8

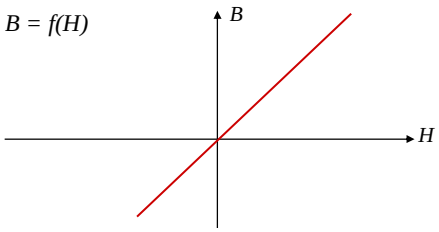


Bild 4-19

- ferromagnetische Materialien

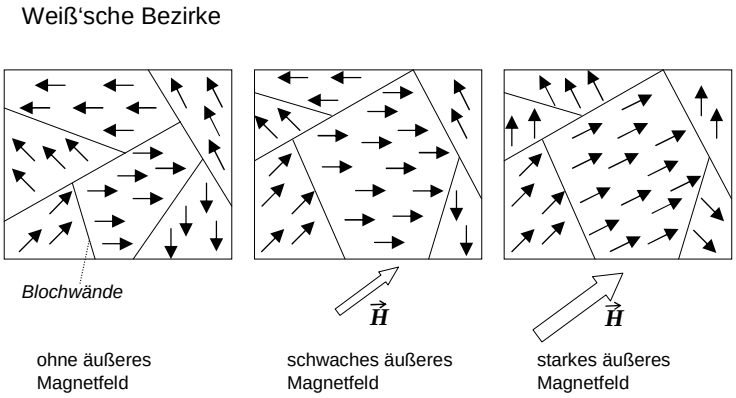
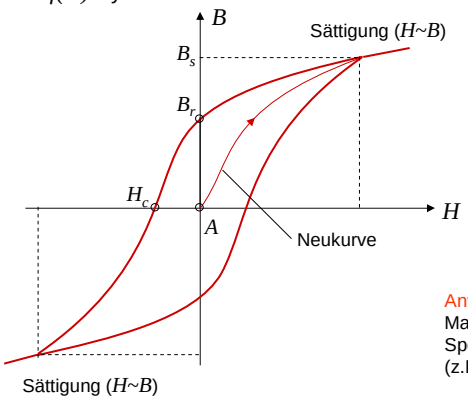


Bild 4-20

ferromagnetische Stoffe	μ_r
Eisen, rein	200…2 000
Mumetall (76% Ni, 5% Cu, 3% Mo, Fe Rest)	25 000
Supermalloy (80% Ni, 16% Fe, 4% Mo)	130 000

$B = f(H)$ Hysteresekurve



Anwendung:
magnetischer Fluss statischer und niederfrequenter Magnetfelder konzentriert sich im Stoff

A: unmagnetischer Zustand
B_r: Remanenzflussdichte
H_c: Koerzitivfeldstärke
B_s: Sättigungsflussdichte

Anwendung:
Magnetische Remanenz bildet Basis für alle Speicherverfahren auf Magnetismusbasis (z.B. Festplatten, Magnetbänder)

4-21

d) magnetischer Widerstand

e) Rechenschema

Berechnung elementarer magnetischer Felder, magnetischer Kreise

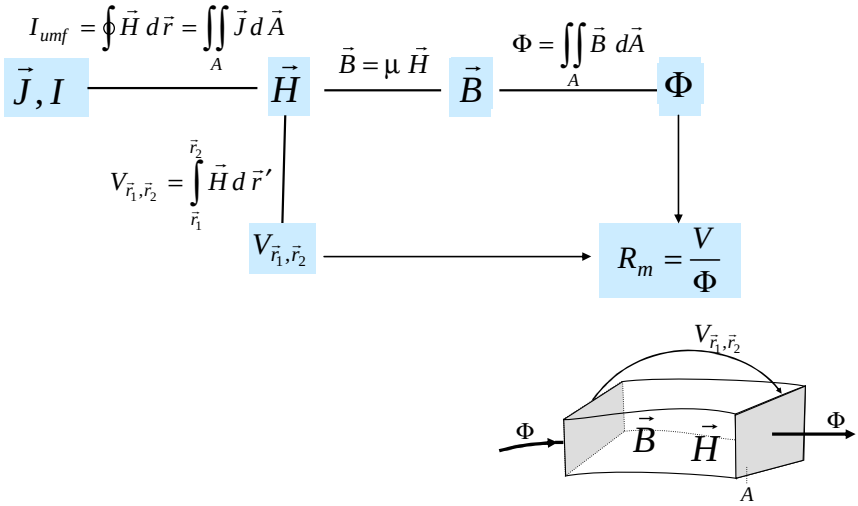


Bild 4-22

Beispiel:

Beispiel: Berechnung des magnetischen Flusses durch eine rechteckige Leiterschleife auf der x -Achse im Feld eines Linienleiters

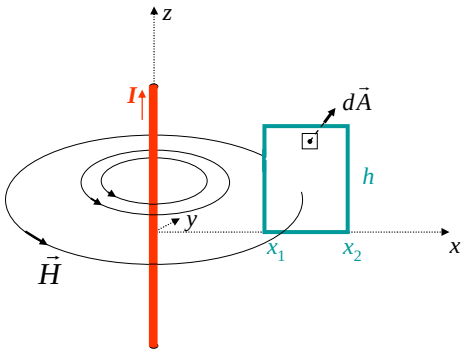


Bild 4-23

4.3 Magnetische Kreise

4.3.1 Grundgesetze

a) Durchflutungsgesetz

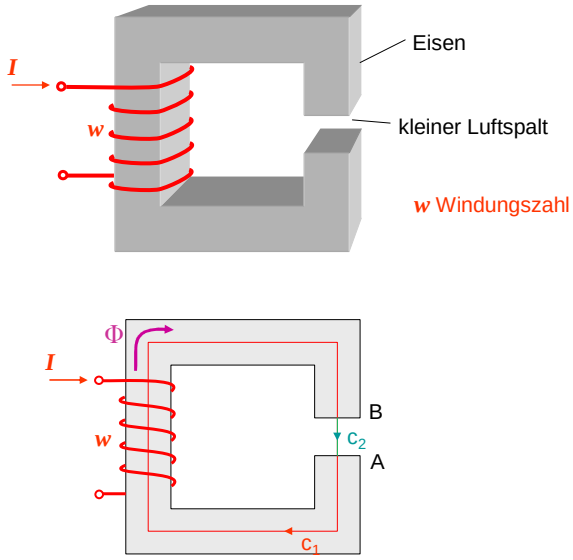


Bild 4-24

Beispiel:

magnetischer Kreis: elektrische Ersatzschaltung:

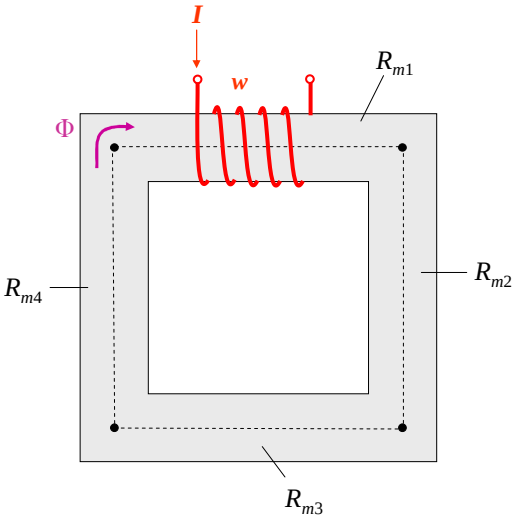
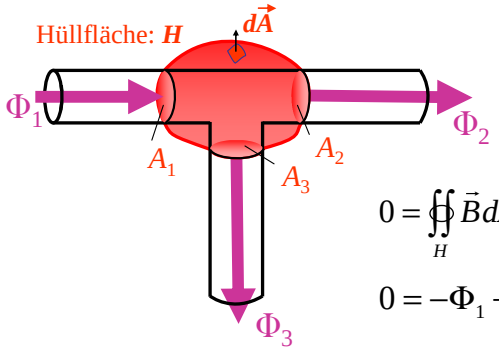


Bild 4-25

b) Kontinuitätsgesetz

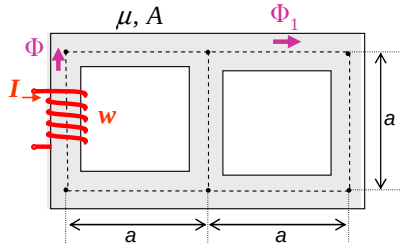


$$0 = \oiint_H \vec{B} d\vec{A} = \iint_{A_1} \vec{B} d\vec{A} + \iint_{A_2} \vec{B} d\vec{A} + \iint_{A3} \vec{B} d\vec{A}$$

$$0 = -\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$$

Bild 4-26

4.3.2 Beispiel für die Berechnung magnetischer Kreise

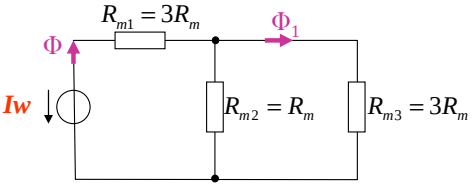


$$R_m = \frac{a}{\mu A}$$

gesucht: Φ_1

Lösung:

elektrische Ersatzschaltung:



$$\frac{\Phi_1}{\Phi} = \frac{R_{m2}}{R_{m2} + R_{m3}}$$

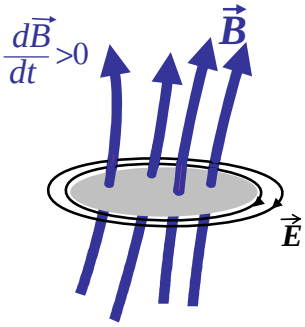
$$\Phi = \frac{wI}{R_{m1} + R_{m2} \| R_{m3}}$$

$$\Phi_1 = \frac{wI}{\left(R_{m1} + R_{m2} \| R_{m3}\right)} \frac{R_{m2}}{\left(R_{m2} + R_{m3}\right)}$$

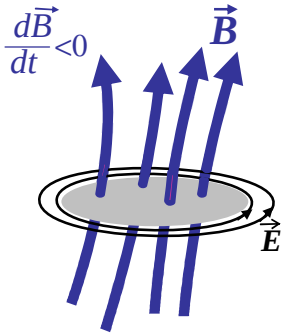
Bild 4-27

4.4 Induktion von Spannung
4.4.1 Induktionsgesetz

Induktionsgesetz:



Ändert sich die magnetische Flussdichte über der Zeit so ist sie von einem elektrischen (Wirbel-) Feld $\vec{E}$ umgeben.



$$\oint_c \vec{E}\,d\vec{r} = -\iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{A}$$

Induktionsgesetz (2. Maxwellsche Gleichung, Integralform)

Umlaufintegral der elektrischen Feldstärke auf geschlossenem Weg ***c*** *(Richtung: Rechtsschraube)*

Flächenintegral der Flussdichteänderung durch eine auf ***c*** aufgespannte Fläche *A*

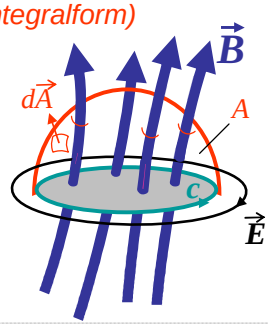
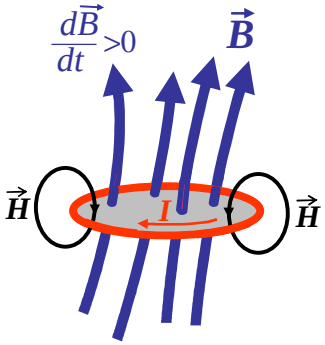


Bild 4-28

Längs des geschlossenen Weges ***c*** tritt eine Induktionsspannung U_i auf. Sie ist das Wegintegral der induzierten elektrischen Feldstärke:

$$U_i = \oint_c \vec{E}\,d\vec{r} = -\iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{A}$$

Lenzsche Regel:



Wird die sich ändernde magnetische Flussdichte durch eine Leiterschleife umschlossen, so entsteht in dieser Leiterschleife ein Induktionsstrom I.

Der Induktionsstrom I bewirkt ein Magnetfeld $\vec{H}$, das der Flussdichteänderung entgegenwirkt.

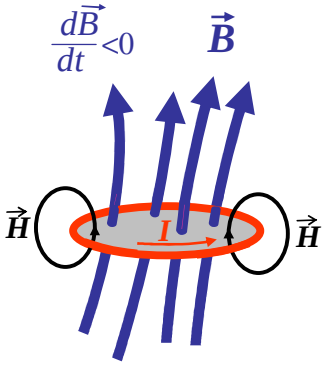


Bild 4-29

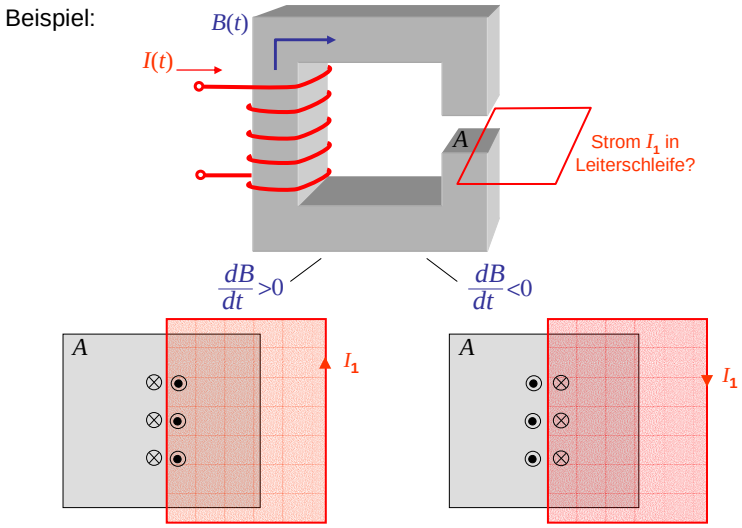
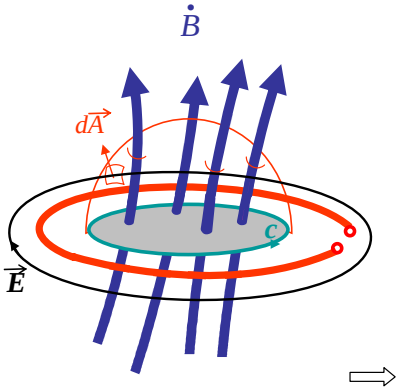


Bild 4-30

4.4.2 Ruheinduktion

a) induzierte Spannung in einer Leiterschleife $(w = 1)$

Anordnung: Ruhende Leiterschleife (mit vernachlässigbarer kleiner Öffnung) in einem zeitlich sich ändernden B - Feld



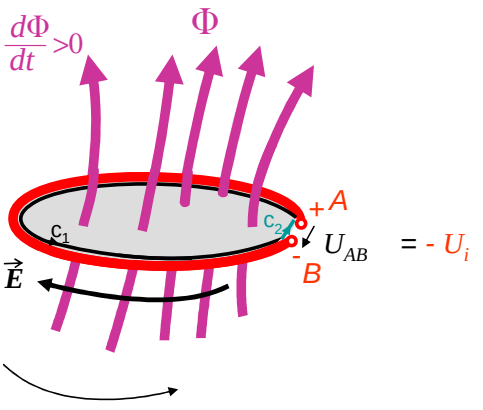
$$U_i = \oint_c \vec{E}\,d\vec{r} = -\iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{A}$$

mit A = konstant folgt:

$$-\iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{A} = -\frac{d}{dt}\iint_A \vec{B}\,d\vec{A} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{U_i = \oint_c \vec{E}\,d\vec{r} = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

Bild 4-31



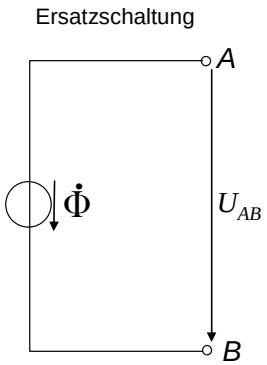


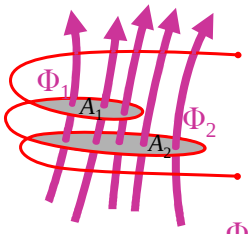
Bild 4-32

b) induzierte Spannung bei mehrfachem Umlauf $(w > 1)$

Induktionsfluss Ψ

$$\Psi = \sum_n \Phi_n$$

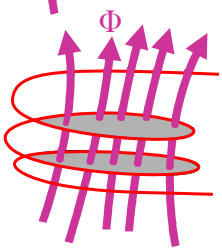
Φ_n: von der n-ten Windung umfasster magnetischer Fluss



Spezialfälle:

- alle w Windungen umfassen den magnetischen Fluss Φ

$$\Psi = w\Phi$$



- nur eine Windung

$$\Psi = \Phi$$

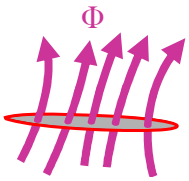
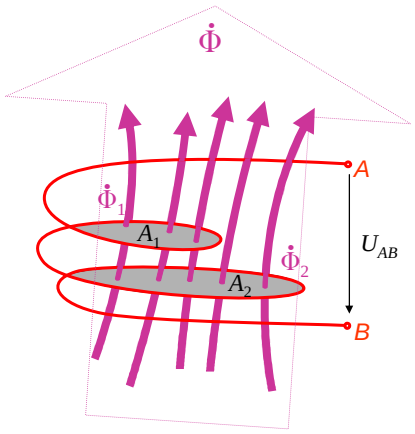


Bild 4-33

Induzierte Spannung bei mehrfachem Umlauf $(w > 1)$



$$U_{AB} = \sum_\nu \frac{d\Phi_\nu}{dt} = \frac{d\Psi}{dt}$$

für $\Psi = w\Phi$ gilt:

$$U_{AB} = w\frac{d\Phi}{dt}$$

Bild 4-34

c) Berechnung der Induktionsspannung bei Ruheinduktion

Anordnung:

Leiter, in dem Spannung U_{AB} erzeugt wird, umfasst ein zeitlich sich änderndes Magnetfeld

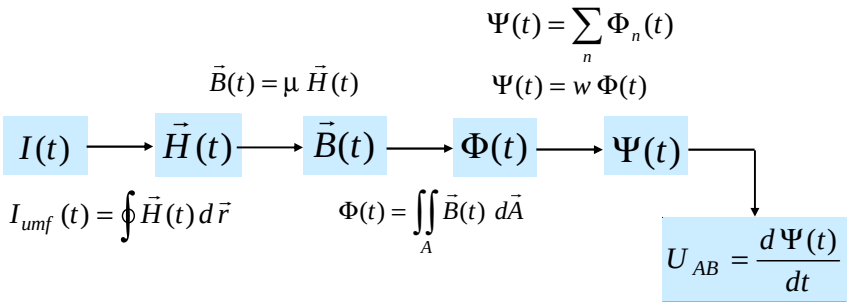
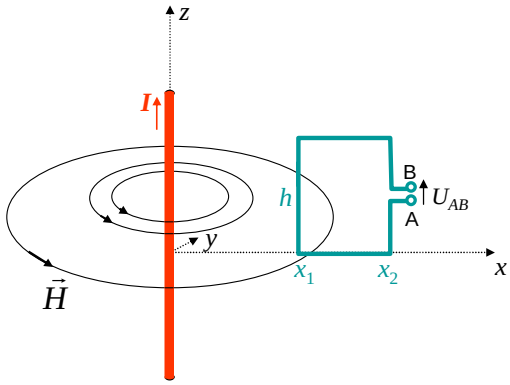


Bild 4-35

Beispiel:

Beispiel: Berechnung der Spannung U_{AB} an der rechteckigen Leiterschleife im zeitl. sich ändernden Magnetfeld eines Linienleiters



4-36

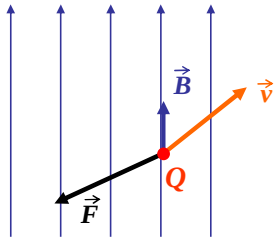
4.4.3 Bewegungsinduktion

a) Kraft auf Ladung im Magnetfeld –Lorentzkraft

Auf eine sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ in einem konstanten Magnetfeld $\vec{B}$ bewegende Ladung Q wird eine Kraft

$$\vec{F} = Q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$ *Lorentzkraft*

ausgeübt.



rechte Handregel für Richtung:

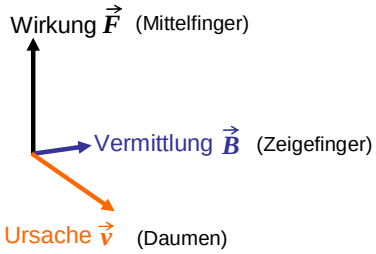


Bild 4-37

b) induzierte Spannung an einem bewegten Leiter in einem konstanten Magnetfeld

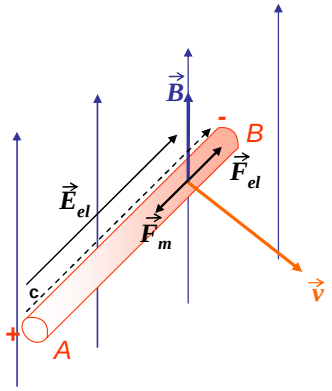


Bild 4-38

Spezialfälle:

Spezialfälle: Leiter der Länge l, $\vec{B}$ homogen, $\vec{v}$ konstant

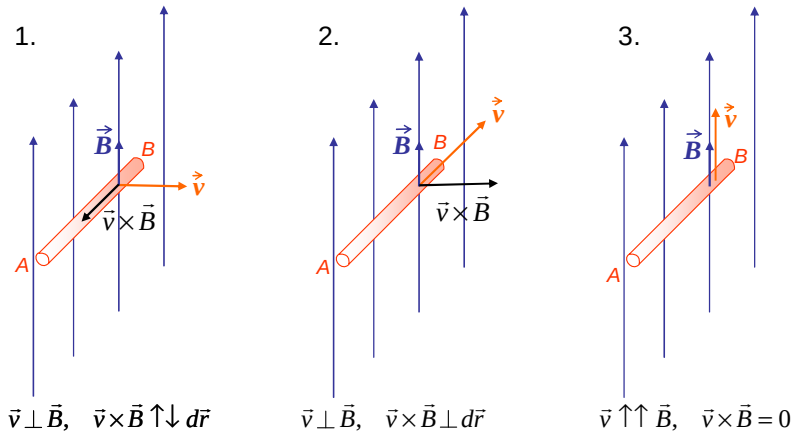
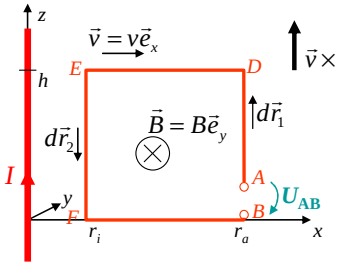


Bild 4-39

c) Beispiele

- <u>bewegte Leiterschleife in einem zeitlich konstanten Magnetfeld</u>



gesucht: induzierte Spannung U_{AB}

Lösung:

$$U_{AB} = -\int_{A(c)}^{B} (\vec{v}\times\vec{B})\,d\vec{r}$$

$$c:\quad A \to D \to E \to F \to G$$

$$U_{AB} = \underbrace{-\int_{A}^{D} (\vec{v}\times\vec{B})\,d\vec{r}}_{(\vec{v}\times\vec{B})\uparrow\uparrow d\vec{r}_1} \quad \underbrace{-\int_{D}^{E} (\vec{v}\times\vec{B})\,d\vec{r}}_{=0} \quad \underbrace{-\int_{E}^{F} (\vec{v}\times\vec{B})\,d\vec{r}}_{(\vec{v}\times\vec{B})\uparrow\downarrow d\vec{r}_2} \quad \underbrace{-\int_{F}^{B} (\vec{v}\times\vec{B})\,d\vec{r}}_{=0}$$

$$U_{AB} = -v\,B(r_a)\,h \qquad -0 \qquad +v\,B(r_i)\,h \qquad -0$$

$$B(x) = \mu_0 \frac{I}{2\pi x}$$

(siehe 4.2.3 e))

$$U_{AB} = \frac{v h \mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}\right) \qquad r_i = vt, \quad r_a = vt + (r_a - r_i)$$

4-40

- Unipolarmaschine

Unipolarmaschine

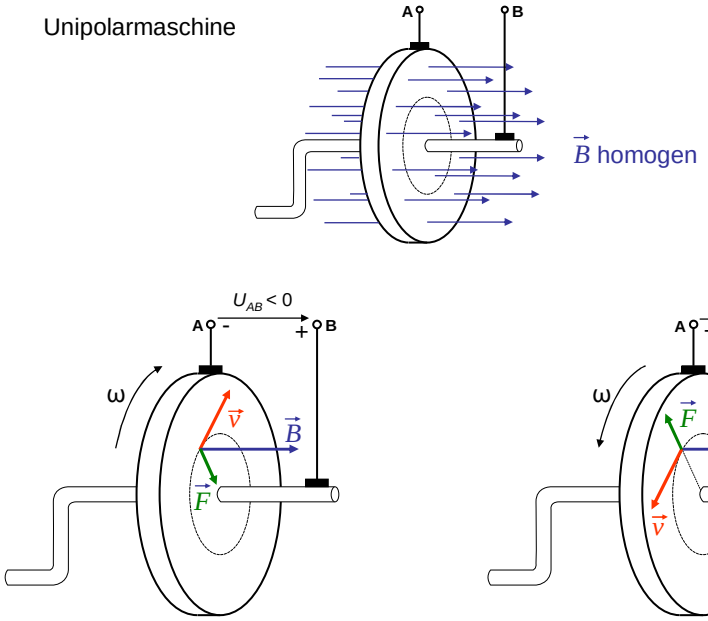
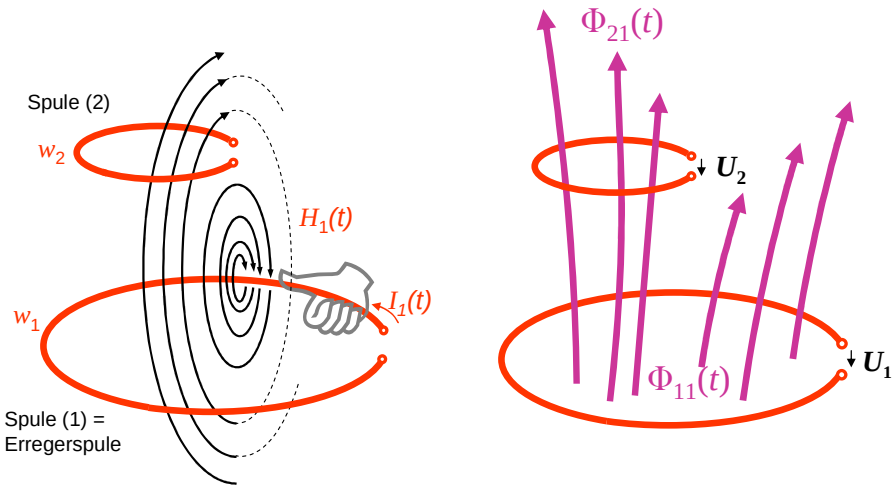


Bild 4-41

4.5 Selbst- und Gegeninduktion



$$I_1(t) \rightarrow H_1(t) \rightarrow B_1(t) \begin{cases} \Phi_{11}(t) \rightarrow U_1(t) & \text{Selbstinduktion} \\ \Phi_{21}(t) \rightarrow U_2(t) & \text{Gegeninduktion} \end{cases}$$

Bild 4-42

4.5.1 Selbstinduktion, Induktivität

a) Definition der Induktivität L

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\text{Induktionsfluss } \Psi \text{ durch die vom Strom } I \text{ umschlossene Fläche}}{\text{erregender Strom } I}$$

$$[L] = \frac{[\Psi]}{[I]} = \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}} = \Omega\,\mathrm{s} = \mathrm{H}\ (\text{Henry})$$

Bauelement: Spule: mit Induktivität L

Bild 4-43

Selbstinduktion, Induktivität

$$U_{AB} = \frac{d\Psi(t)}{dt}$$

$$I(t) \rightarrow \vec{H}(t) \rightarrow \vec{B}(t) \rightarrow \Phi(t) \rightarrow \Psi(t)$$

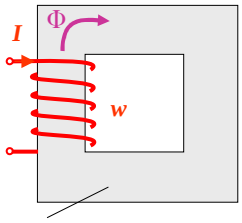
$$\vec{B}(t) = \mu\,\vec{H}(t)$$

linearer Fall $(\Psi = L\,I)$: $L = \frac{\Psi}{I}$

allgemeiner Fall: $\Psi = \Psi(I)$ (nicht in Vorlesung betrachtet)

Bild 4-44

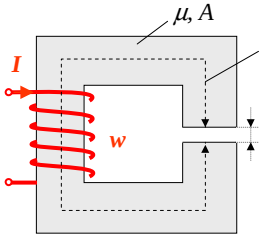
b) Bemessungsgleichung der Induktivität



R_m : magnetischer Widerstand, der von den Windungen w umschlungen wird

Bild 4-45

Beispiel: Bestimmung der Induktivität einer Eisendrossel mit Luftspalt



l_E : mittlere Eisenlänge

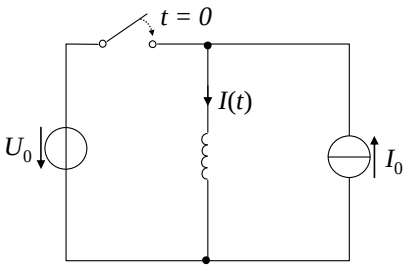
l_F : Luftspaltlänge

Bild 4-46

c) Strom-Spannungsbeziehung an der Spule (Induktivität)

Beispiel:

Anschalten einer Gleichspannung an eine Spule bei $t = 0$

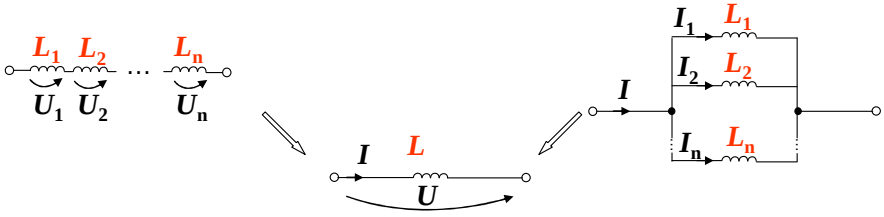


geg.: Strom $I(t) = I_0$ für $t \leq 0$

ges.: Strom $I(t)$ für $t > 0$

Bild 4-47

d) Reihen- und Parallelschaltung von nicht gekoppelten Spulen



$$U = U_1 + U_2 + \ldots U_n \qquad U = L\frac{dI(t)}{dt} \qquad I = I_1 + I_2 + \ldots I_n$$

$$L\frac{dI(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} L_i \frac{dI(t)}{dt} = \frac{dI(t)}{dt}\sum_{i=1}^{n} L_i \qquad \frac{dI(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\frac{dI(t)}{dt}, \qquad \frac{U}{L} = \sum_{i=1}^{n}\frac{U}{L_i}$$

$$\boxed{L = \sum_{i=1}^{n} L_i} \qquad \boxed{\frac{1}{L} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{L_i}}$$

nicht gekoppelte Spulen verhalten sich bei der Zusammenschaltung wie Widerstände

Bild 4-48

4.5.2 Gegeninduktion, Gegeninduktivität

a) Definition der Gegeninduktivität M

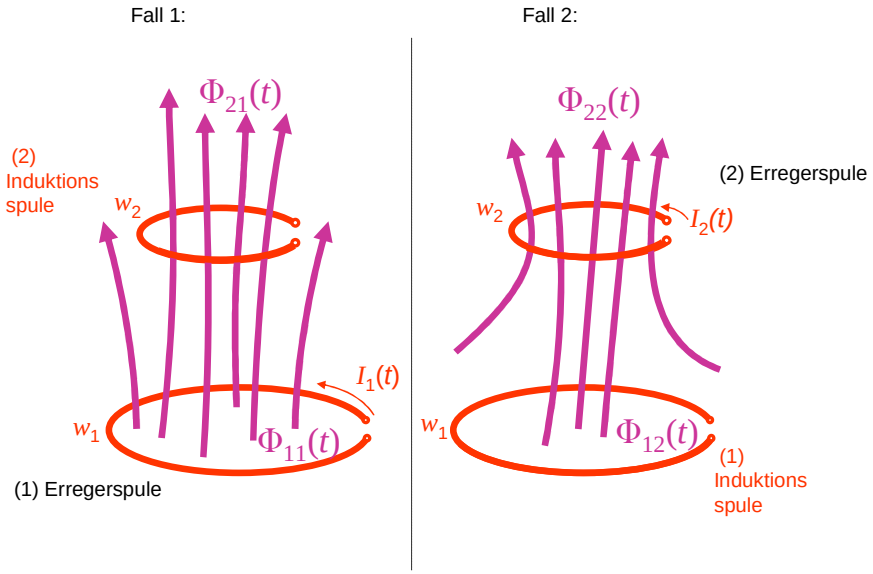


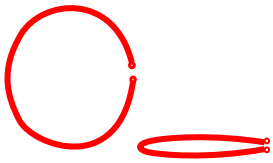
Bild 4-49

Spezialfälle der Kopplung von Spulen:

ideale Kopplung:

$$k_{21} = k_{12} = 1 \quad \Rightarrow \quad k = 1 \quad \Rightarrow \quad M^2 = L_1 L_2$$

keine Kopplung:

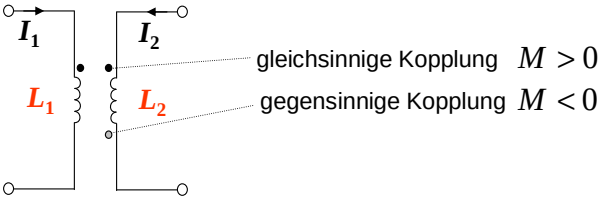


$$k_{21} = k_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 0 \quad \Rightarrow \quad M^2 = 0$$

(auch bei Abschirmung und großer Entfernung)

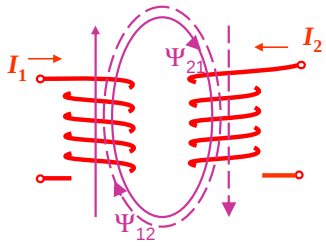
Bild 4-50

b) Zwei gekoppelte Spulen (Zweitor)



Punkte charakterisieren Windungsanfang

gleichsinnige Kopplung



gegensinnige Kopplung

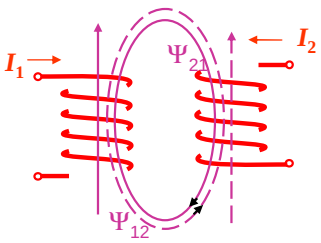


Bild 4-51

c) Beispiel zur Bestimmung von Induktivität und Gegeninduktivität zweier gleichsinnig gekoppelter Spulen

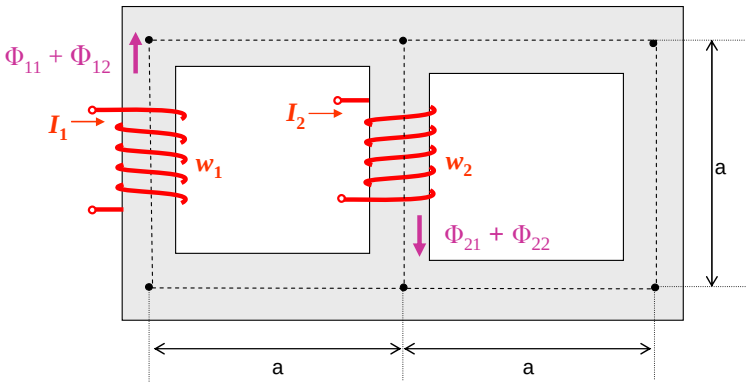
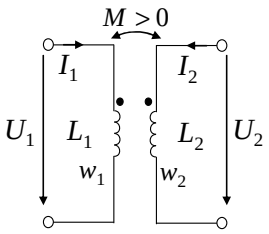


Bild 4-52

4.5.3 Strom- Spannungsbeziehungen an Gegeninduktivitäten

a) Grundgleichungen



Wirkungsschema:

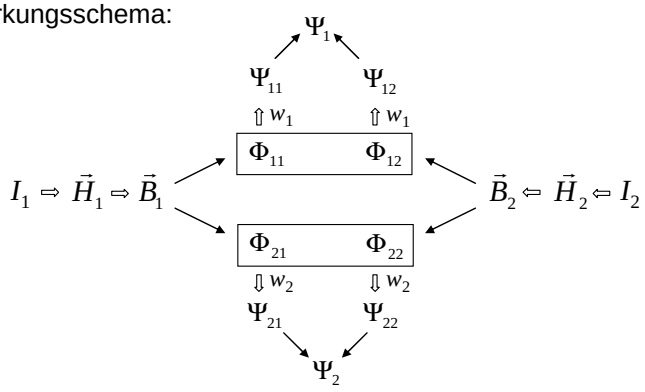


Bild 4-53

Beispiele für Spezialfälle:

Beispiele für Spezialfälle:

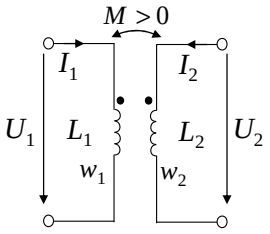
1. Spannungsbeziehung bei ausgangsseitigem Leerlauf:

$$I_2(t)=0 \quad \Rightarrow \quad U_1 = L_1\frac{dI_1}{dt}, \quad U_2 = M\frac{dI_1}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{U_1}{U_2}=\frac{L_1}{M}=\frac{L_1}{k\sqrt{L_1L_2}}=\frac{1}{k}\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}=\frac{\ddot{u}}{k}$$

für $R_{m1}=R_{m2}=R_m$:

$$\ddot{u}=\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}, \quad L_1=\frac{w_1^{\,2}}{R_m}, \quad L_2=\frac{w_2^{\,2}}{R_m} \quad \Rightarrow \quad \ddot{u}=\frac{w_1}{w_2}$$



$\ddot{u}$: Übersetzungsverhältnis

k : Koppelfaktor

2. Strombeziehung bei ausgangsseitigem Kurzschluss:

$$U_2(t)=0 \quad \Rightarrow \quad M\frac{dI_1}{dt}=-L_2\frac{dI_2}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$I_1(t)=-\frac{L_2}{M}I_2(t)+I_0$$

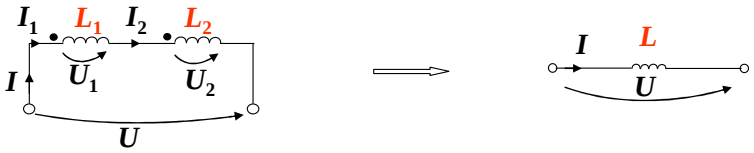
$$\frac{I_1}{I_2}=-\frac{L_2}{M}=-\frac{L_2}{k\sqrt{L_1L_2}}=-\frac{1}{k}\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}=-\frac{1}{\ddot{u}k}$$

4-54

b) Reihenschaltung gekoppelter Spulen

Reihenschaltung gekoppelter Spulen:

gleichsinnige Kopplung:



$$U=U_1+U_2 \qquad I=I_1=I_2$$

$$U=L_1\frac{dI_1}{dt}+M\frac{dI_2}{dt}+L_2\frac{dI_2}{dt}+M\frac{dI_1}{dt}$$

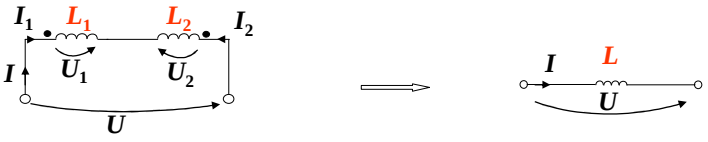
$$U=\left(L_1+L_2+2M\right)\frac{dI}{dt}$$

$$U=L\frac{dI}{dt}$$

$$\boxed{L=\left(L_1+L_2+2M\right)}$$

Bild 4-55

gegensinnige Kopplung:



$$U = U_1 - U_2 \qquad I = I_1 = -I_2$$

$$U = L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt}$$

$$U = \left(L_1 + L_2 - 2M\right) \frac{dI}{dt}$$

$$U = L \frac{dI}{dt}$$

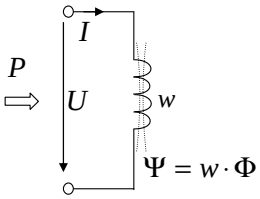
$$L = \left(L_1 + L_2 - 2M\right)$$

Bild 4-56

4.6 Energie und Kräfte im Magnetfeld

4.6.1 Energie und Energiedichte

a) Energie



$$P = U \cdot I = \frac{dW}{dt}$$

$$dW = U\ I\ dt$$

$$\Downarrow \quad U = \frac{d\Psi}{dt}$$

$$dW = I\ d\Psi$$

$$\Rightarrow \quad W(\Psi) = W(\Psi_1) + \int_{\Psi_1}^{\Psi} I\ d\Psi'$$

Energie bei Induktionsflussänderung von Ψ_1 auf Ψ.

Energie geht vom Stromkreis in das magnetische Feld der Spule und wird dort gespeichert.

Bild 4-57

Spezialfall:

- linearer I-Ψ- Zusammenhang: $\Psi = LI$
- Induktionsflussänderung von 0 auf Ψ durch Stromerhöhung von 0 auf I
- $W(0) = 0$

Für diesen Spezialfall gilt: $W = \int_0^I I'\ L\ dI' = L\ \frac{I^2}{2}$

$\Downarrow$

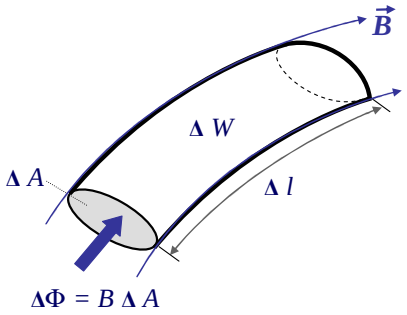
Die in der Spule mit der Induktivität L gespeicherte Energie:

$$W = L\ \frac{I^2}{2} = \frac{\Psi^2}{2L}$$

(Analogie ESTF: $W = C\ \frac{U^2}{2}$)

Bild 4-58

b) Energiedichte



$$\Delta W = \frac{\Delta \Psi^2}{2L} \quad \text{mit}$$

$$\Delta \Psi = w\,\Delta\Phi = w\,B\,\Delta A \quad \text{und}$$

$$L = \frac{w^2}{R_m} = \frac{w^2}{\Delta l}\,\mu\,\Delta A \quad \text{folgt:}$$

$$\Delta W = \frac{w^2\,B^2\,\Delta A^2}{2w^2\,\mu\,\Delta A}\,\Delta l = \frac{B^2}{2\mu}\,\Delta V$$

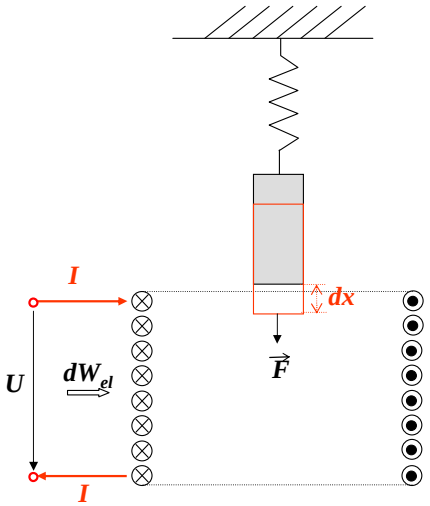
⇨ Energiedichte: $w = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{HB}{2}$ (Analogie ESTF: $w = \frac{DE}{2}$)

Bild 4-59

4.6.2 Kraftwirkungen im Magnetfeld

a) globale Kraftgleichung (F als Funktion von I und L)

Globale Kraftgleichung (Kraft F ausgedrückt als Funktion von I und L):



Prinzip der virtuellen Verschiebung:

$$dW_{el} = dW_{mag} + dW_{mech}$$

$$UIdt = d\left(\frac{L}{2}I^2\right) + Fdx$$

mit $Udt = d\Psi = d(LI),\ I = konst.$

folgt:

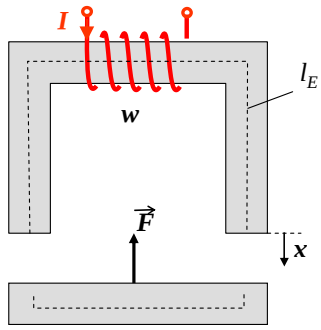
$$I^2 dL = \frac{I^2}{2}dL + Fdx$$

$$F = \frac{I^2}{2}\frac{dL}{dx}$$

Kraft wirkt immer in Richtung einer Induktivitätsvergrößerung

Bild 4-60

Beispiel: Elektromagnet



l_E: mittlere Eisenlänge

$$F = \frac{I^2}{2}\frac{dL}{dx}, \qquad L = \frac{w^2}{R_m},$$

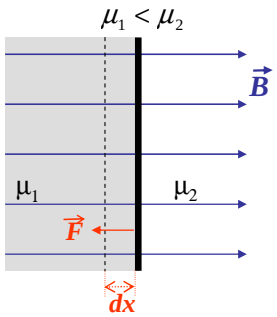
$$R_m = \frac{l_{Fe}}{\mu_0\mu_r A} + \frac{2x}{\mu_0 A} = \frac{\frac{l_{Fe}}{\mu_r} + 2x}{\mu_0 A}$$

$$\Longrightarrow \quad F = -\frac{I^2}{2}\frac{w^2\mu_0 2A}{\left(\frac{l_{Fe}}{\mu_r} + 2x\right)^2} = -\frac{(Iw)^2\mu_0 A}{\left(l_{Fe}^* + 2x\right)^2}$$

Kraft wirkt in Richtung einer Induktionsvergrößerung, d.h. x-Verkleinerung bzw. Verkürzung der Feldlinien

Bild 4-61

b) lokale Kraftgleichung (F als Funktion von H und B)



Annahme:

homogenes $\vec{B}$-Feld, $\vec{B}$, $\vec{H}$ zeitlich konstant
→ Φ = konst. (abgeschlossenes System)

Energiebilanz bei Verschiebung um dx:

$$dW_{mag} + dW_{mech} = 0$$

$$\frac{BH}{2}dV + Fdx = 0 \qquad dV = -Adx$$

(*Volumenabnahme*)

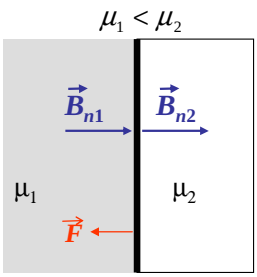
$$\rightarrow F = \frac{BH}{2}A$$

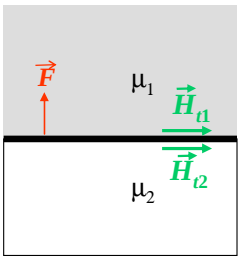
$$p = \frac{F}{A} = \frac{BH}{2}$$

Kraft pro Fläche, Druck auf Grenzfläche, Energiedichte, mechanische Spannung

Bild 4-62

Spezialfälle: quergeschichtetes Medium: längsgeschichtetes Medium:





$\mu_1 < \mu_2$

$$B_{n1} = B_{n2} = B_n$$

$$p = \frac{F}{A} = \frac{1}{2}B_n^2\left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}\right)$$

$$H_{t1} = H_{t2} = H_n$$

$$p = \frac{F}{A} = \frac{1}{2}H_t^2\left(\mu_1 - \mu_2\right)$$

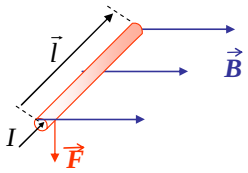
Kraft wirkt immer in Richtung des Mediums mit dem kleineren μ.

Bild 4-63

c) Kraft auf bewegte Ladungen im Magnetfeld (siehe Kapitel 4.4.3a) Lorentzkraft)

d) Kraft auf stromdurchflossene Leiter im Magnetfeld

Ein gerader Leiter der Länge l befindet sich in einem homogenen Magnetfeld mit der Flussdichte B und wird vom Strom I durchflossen:



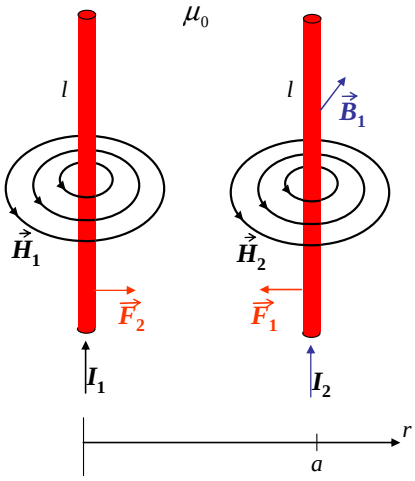
$$\vec{F} = I\left(\vec{l} \times \vec{B}\right)$$ *Kraft auf Leiter*

$\vec{l}$: Vektor der Länge l und der Richtung des Stromes I

Spezialfall: $\vec{l} \perp \vec{B} \Longrightarrow$ $$F = I\,l\,B$$

Bild 4-64

Anwendung:



$$I_1 \rightarrow H_1 = \frac{I_1}{2\pi r} \rightarrow B_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi r}$$

$$F_1 = I_2 B_1 l = \mu_0 \frac{I_1 I_2 l}{2\pi a}$$

Größenwerte:

$I_1 = I_2 = 100A,\ a = 1cm,\ l = 1m$

$F_1 = 0{,}2N = F_2$

- *Leiter mit gleichsinnigen Stromfluss ziehen einander an.*
- *Leiter mit ungleichsinnigen Stromfluss stoßen einander ab.*

Bild 4-65

5. Wechselseitige Verkopplung des elektrischen und des magnetischen Feldes

Maxwellsche Gleichungen in Integralform

1. Maxwellsche Gleichung (Durchflutungsgesetz)

$$\oint \vec{H}\, d\vec{r} = \iint_A \vec{J}\, d\vec{A} + \iint_A \frac{d\vec{D}}{dt}\, d\vec{A}$$

2. Maxwellsche Gleichung (Induktionsgesetz)

$$\oint \vec{E}\, d\vec{r} = -\iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{A}$$

Nebenbedingungen:

$$\oiint_H \vec{D}\, d\vec{A} = Q = \iiint_V \rho\, dV \qquad \text{(D-Feld hat Quellen)}$$

$$\oiint_H \vec{B}\, d\vec{A} = 0 \qquad \text{(B-Feld ist quellenfrei)}$$

Materialgleichungen (für isotrope und ruhende Materialien):

$$\vec{J} = \kappa \vec{E}, \qquad \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

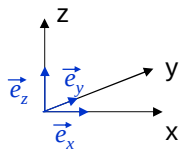
Bild 4-66

Mathematische Grundlagen

1. Ortsvektoren

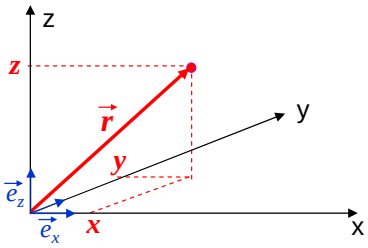
a) Darstellung

- im kartesischen Koordinatensystem



$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ … Einheitsvektoren in x, y, z –Richtung mit

$$|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = 1$$



Ortsvektor:

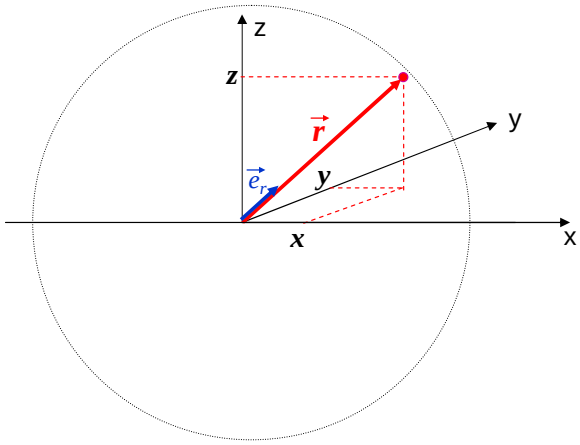
$$\vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$$

Betrag des Ortsvektors:

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Bild A-1

- im Kugelkoordinatensystem



$$\vec{r} = |\vec{r}|\,\vec{e}_r = r\,\vec{e}_r$$

$\vec{e}_r$ … Einheitsvektor in Richtung des Ortsvektors $\vec{r}$

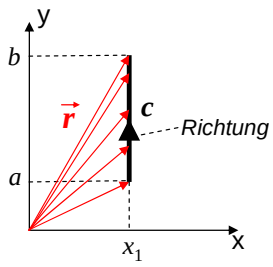
$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Bild A-2

b) Anwendung zur Beschreibung von Kurven *c*

Beispiele:

1.

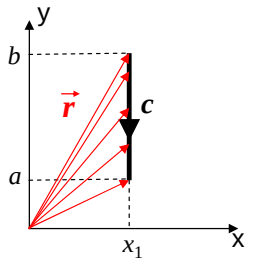


Beschreibung der Kurve *c:*

$$\vec{r} = x_1\vec{e}_x + \lambda\vec{e}_y$$

Parameter $\lambda : a \ldots b$

2.



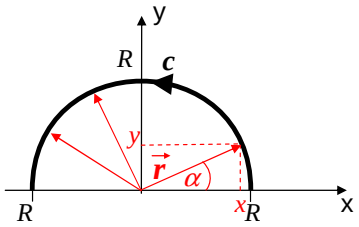
Beschreibung der Kurve *c:*

$$\vec{r} = x_1\vec{e}_x + \lambda\vec{e}_y$$

Parameter $\lambda : b \ldots a$

Bild A-3

3.



Beschreibung der Kurve *c:*

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$$

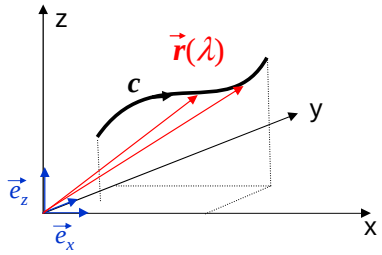
$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{r}|} = \frac{x}{R}, \quad \sin\alpha = \frac{y}{|\vec{r}|} = \frac{y}{R}$$

$$\vec{r} = R\cos\alpha \cdot \vec{e}_x + R\sin\alpha \cdot \vec{e}_y$$

Parameter $\alpha : 0 \ldots \pi$

Bild A-4

Allgemeine Beschreibung einer Kurve *c* :



$$\vec{r}(\lambda) = x(\lambda)\,\vec{e}_x + y(\lambda)\,\vec{e}_y + z(\lambda)\,\vec{e}_z$$

$\lambda : \quad a...b$

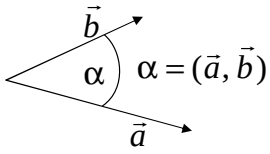
Bild A-5

2. Verknüpfung von Vektoren

- Skalarprodukt:

$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$$

$$\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}$$



Beispiele: $\vec{e}_x\,\vec{e}_x = 1$ $\qquad$ $\vec{e}_x\,\vec{e}_y = 0$

Berechnung: $\vec{a} = a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y, \quad \vec{b} = b_1\vec{e}_x + b_2\vec{e}_y$

$$\vec{a}\,\vec{b} = \left(a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y\right)\cdot\left(b_1\vec{e}_x + b_2\vec{e}_y\right)$$

$$= a_1b_1\underbrace{\vec{e}_x\vec{e}_x}_{=1} + a_1b_2\underbrace{\vec{e}_x\vec{e}_y}_{=0} + a_2b_1\underbrace{\vec{e}_y\vec{e}_x}_{=0} + a_2b_2\underbrace{\vec{e}_y\vec{e}_y}_{=1}$$

$$\vec{a}\,\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

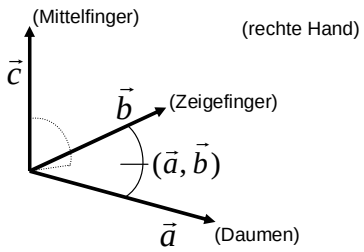
Bild A-6

- Vektorprodukt (Kreuzprodukt): $\boxed{\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}}$

Betrag:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$$

Richtung:



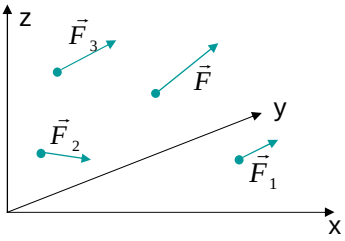
Berechnung:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y + a_3\vec{e}_z$$
$$\vec{b} = b_1\vec{e}_x + b_2\vec{e}_y + b_3\vec{e}_z$$
$$\Longrightarrow \quad \vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Bild A-7

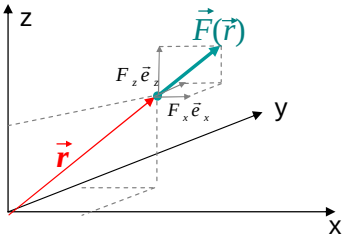
3. Linienintegrale

a) Vektorfeld: Feld von Vektoren



an jedem Raumpunkt mit Ortsvektor $\vec{r}$

existiert ein Vektor $\vec{F}(\vec{r}) = F_x(\vec{r})\vec{e}_x + F_y(\vec{r})\vec{e}_y + F_z(\vec{r})\vec{e}_z$



Beispiel: Kraftfeld: an jedem $\vec{r}$ wirkt Kraft $\vec{F}(\vec{r})$

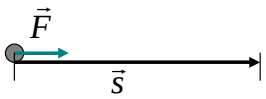
Bild A-8

b) Linienintegral

Beispiel:

Berechnung der Arbeit W, die von einem Kraftfeld $\vec{F}$ beim Verschieben eines Massepunktes auf einem Weg $\vec{s}$ verrichtet wird

Fall A:



es gilt: 1. $\vec{F} = \text{konstant}$

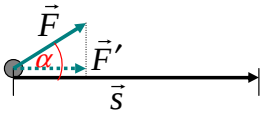
2. $(\vec{F}, \vec{s}) = 0^\circ$

$Arbeit = Kraft \cdot Weg$

$W = |\vec{F}|\ |\vec{s}|$

$W = F\ s$

Fall B:



$W = F'\ s$

$W = (F\cos\alpha)\ s$

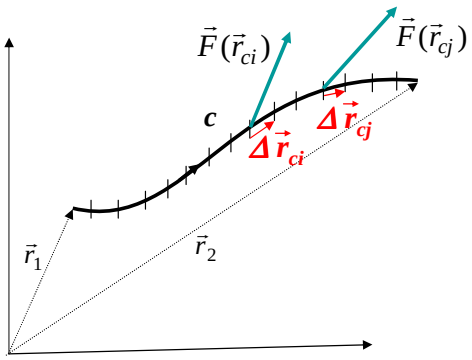
$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

es gilt: 1. $\vec{F} = \text{konstant}$

2. $(\vec{F}, \vec{s}) = \alpha = \text{konstant}$

Bild A-9

Fall C:



Arbeit:

$$W = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta\vec{r}_{ci}\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\vec{r}_{ci})\cdot\Delta\vec{r}_{ci}$$

$$= \int_{(c)}^{\vec{r}_2} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}$$

$$W = \int_{(c)}^{\vec{r}_2} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}$$

Linienintegral von $\vec{F}$ entlang c
($\vec{F}$ entlang c integrieren)

es gilt: 1. Weg: Kurve *c* vom Raumpunkt $\vec{r}_1$ zu $\vec{r}_2$ mit der Darstellung

$$\vec{r}(\lambda) = x(\lambda)\,\vec{e}_x + y(\lambda)\,\vec{e}_y + z(\lambda)\,\vec{e}_z, \quad \lambda : a \ldots b$$

2. Kraft: $\vec{F}(\vec{r}) = F_x(\vec{r})\,\vec{e}_x + F_y(\vec{r})\,\vec{e}_y + F_z(\vec{r})\,\vec{e}_z$

ist an den Raumpunkten $\vec{r}$ nicht konstant

Prof. Merker
Bild A-10

c) Berechnung des Linienintegrals

$$W = \int_{(c)}^{\vec{r}_2} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b (F_x\frac{\partial x}{\partial\lambda} + F_y\frac{\partial y}{\partial\lambda} + F_z\frac{\partial z}{\partial\lambda})\,\mathrm{d}\lambda$$ mit:

- Weg (Kurve *c*): $\vec{r}(\lambda) = x(\lambda)\,\vec{e}_x + y(\lambda)\,\vec{e}_y + z(\lambda)\,\vec{e}_z, \quad \lambda : a \ldots b$

- Wegdifferential ($\mathrm{d}\vec{r}$ entlang Kurve *c*):

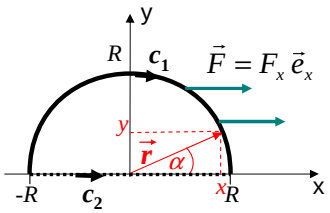
$$\mathrm{d}\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\lambda}\cdot\mathrm{d}\lambda = (\frac{\partial x}{\partial\lambda}\,\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial\lambda}\,\vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial\lambda}\,\vec{e}_z)\,\mathrm{d}\lambda$$

- Vektorfeld: $\vec{F}(\vec{r}) = F_x(\vec{r})\,\vec{e}_x + F_y(\vec{r})\,\vec{e}_y + F_z(\vec{r})\,\vec{e}_z$

Bild A-11

d) Berechnung des Linienintegrals für ein Beispiel

gesucht:
die von einem Kraftfeld $\vec{F} = F_x \vec{e}_x$ ($F_x = konst.$) geleistete Arbeit W
bei Verschiebung eines Massepunktes entlang
- des Halbkreises c_1
- der Strecke c_2



Kraft:

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x$$

Weg c_1:

$$\vec{r}(\lambda) = R\cos\lambda\,\vec{e}_x + R\sin\lambda\,\vec{e}_y$$
$$\lambda : \pi \ldots 0$$

Weg c_2:

$$\vec{r}(\lambda) = \lambda\,\vec{e}_x$$
$$\lambda : -R \ldots +R$$

Bild A-12

Lösung:

Weg c_1: $\vec{r}(\lambda) = R\cos\lambda\,\vec{e}_x + R\sin\lambda\,\vec{e}_y, \quad \lambda : \pi \ldots 0$

$$\mathrm{d}\vec{r} = \left(-R\sin\lambda\,\vec{e}_x + R\cos\lambda\,\vec{e}_y\right)\mathrm{d}\lambda$$

$$W = \int_{c_1} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{\pi}^{0} F_x\,\vec{e}_x\left(-R\sin\lambda\,\vec{e}_x + R\cos\lambda\,\vec{e}_y\right)\mathrm{d}\lambda$$

$$= \int_{\pi}^{0} F_x\left(-R\sin\lambda\right)\mathrm{d}\lambda = F_x R\left[\cos\lambda\right]_{\pi}^{0} = 2F_x R$$

Weg c_2: $\vec{r}(\lambda) = \lambda\,\vec{e}_x, \quad \lambda : -R \ldots R$

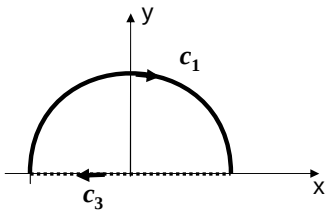
$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{e}_x \mathrm{d}\lambda$$

$$W = \int_{c_1} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{-R}^{R} F_x\,\vec{e}_x\,\vec{e}_x \mathrm{d}\lambda$$

$$= \int_{-R}^{R} F_x \mathrm{d}\lambda = F_x\left[\lambda\right]_{-R}^{R} = 2F_x R$$

Bild A-13

e) Umlaufintegral



Integral entlang eines geschlossenen Weges $c = c_1 + c_3$ heißt Umlaufintegral $\oint_c \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}$

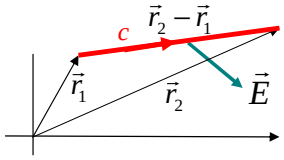
$$\oint_c \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \oint_{c_1+c_3} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{c_1} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} + \int_{c_3} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}$$

Bild A-14

f) Spezialfälle des Linienintegrals $\int_c \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{\vec{r}_1,c}^{\vec{r}_2} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r}$

1.Fall:

- Weg c Gerade vom Raumpunkt $\vec{r}_1$ nach Raumpunkt $\vec{r}_2$:
- Vektor $\vec{E}$ konstant für alle Raumpunkte



$$\int_c \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{\vec{r}_1,c}^{\vec{r}_2} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} = \vec{E}\int_{\vec{r}_1,c}^{\vec{r}_2} \mathrm{d}\vec{r} = \vec{E}\,(\vec{r}_2-\vec{r}_1)$$

bzw. ausführlich mit: $\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda(\vec{r}_2-\vec{r}_1),\quad \lambda: 0\ldots 1,\quad \mathrm{d}\vec{r} = (\vec{r}_2-\vec{r}_1)\mathrm{d}\lambda$

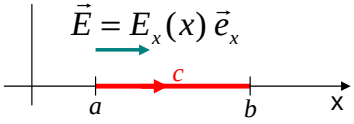
$$\int_c \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 \vec{E}\,(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\,\mathrm{d}\lambda = \vec{E}\,(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\int_0^1 \mathrm{d}\lambda = \vec{E}\,(\vec{r}_2-\vec{r}_1)$$

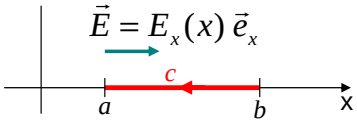
Bild A-15

2.Fall:

- in kartesischen Koordinaten:
- Weg c liegt auf Koordinatenachse (x- y- oder z-Achse)
- Vektor $\vec{E}$ verläuft parallel zu Weg c und ist nicht konstant,

Beispiel: Weg c liegt auf x-Achse:





Weg c : $\vec{r} = x\,\vec{e}_x,\ x: a\ldots b$ Weg c : $\vec{r} = x\,\vec{e}_x,\ x: b\ldots a$

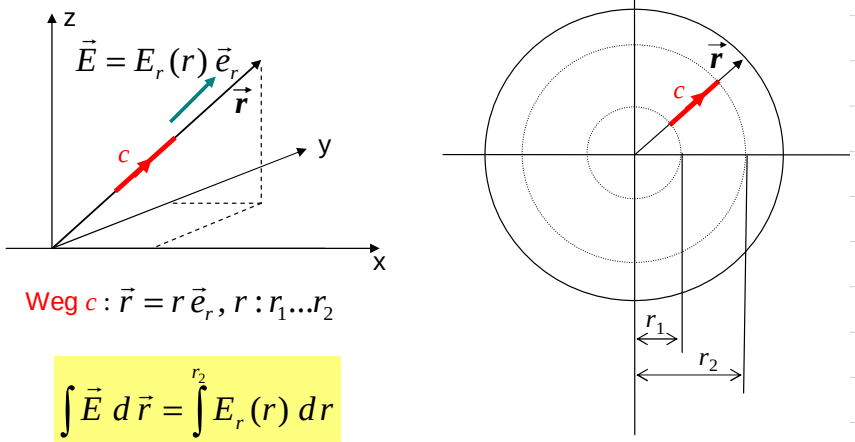
Linienintegral:

$$\int_c \vec{E}\;d\vec{r} = \int_a^b E_x(x)\;dx \qquad \int_c \vec{E}\;d\vec{r} = \int_b^a E_x(x)\;dx$$

Bild A-16

3.Fall: in Kugelkoordinaten:

- Weg c liegt auf Ortsvektor $\vec{r}$
- Vektor $\vec{E}$ verläuft parallel zu Weg c und ist nicht konstant

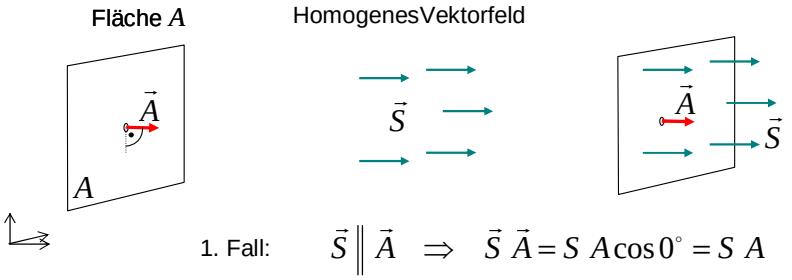


Weg c : $\vec{r} = r\,\vec{e}_r$, $r : r_1 ... r_2$

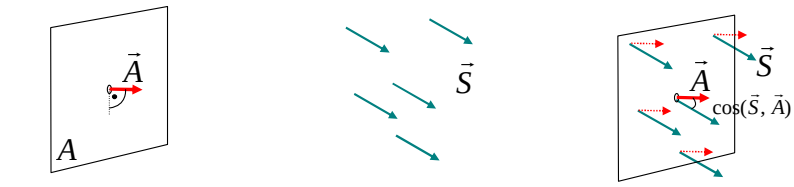
$$\int_c \vec{E}\, d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} E_r(r)\, dr$$

Bild A-17

4. Flächenintegrale

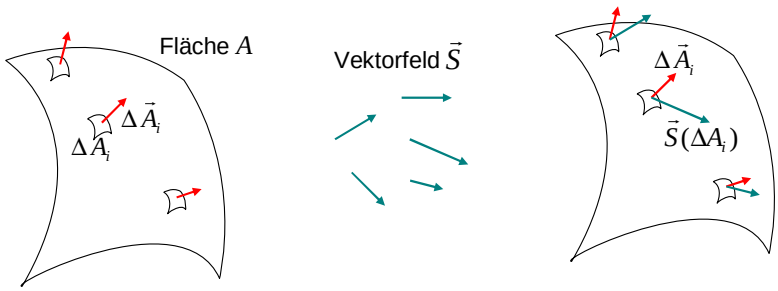


1. Fall: $\vec{S} \parallel \vec{A} \Rightarrow \vec{S}\,\vec{A} = S\,A\cos 0^\circ = S\,A$



2. Fall: $\cos(\vec{S}, \vec{A}) = \text{konstant} \Rightarrow \vec{S}\,\vec{A} = S\,A\cos(\vec{S}, \vec{A})$

Bild A-18



Flächenintegral: $$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta\vec{A}_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \vec{S}(\Delta A_i)\,\Delta\vec{A}_i = \iint_A \vec{S}\, d\vec{A}$$

Flächenintegral, wenn Fläche A eine geschlossene Hülle H:

$$\oiint_H \vec{S}\,\mathrm{d}\vec{A}$$

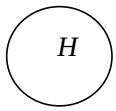
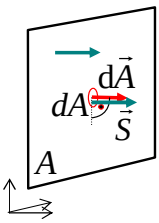


Bild A-19

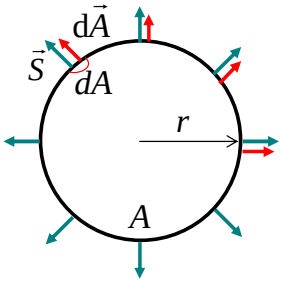
Spezialfall:

• Vektorfeld $\vec{S}$ durchsetzt Fläche A senkrecht $\quad \iint_A \vec{S}\,\mathrm{d}\vec{A} = \iint_A S\,\mathrm{d}A$

• auf Fläche A ist Betrag von $\vec{S}$ konstant $\quad = S\iint_A \mathrm{d}A = S\,A$



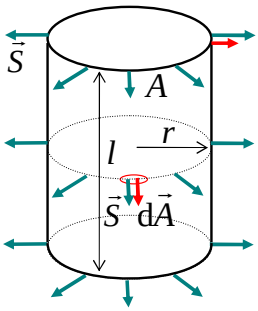
$$\iint_A \vec{S}\,\mathrm{d}\vec{A} = S\,A$$



Fläche A ist Kugeloberfläche

$$A = 4\pi r^2$$

$$\iint_A \vec{S}\,\mathrm{d}\vec{A} = S\,A$$



Fläche A ist Zylindermantel

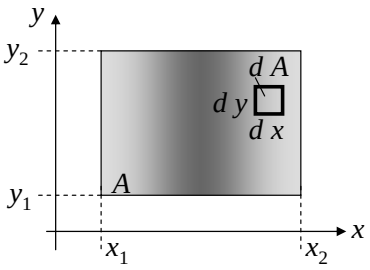
$$A = 2\pi r l$$

$$\iint_A \vec{S}\,\mathrm{d}\vec{A} = S\,A$$

Bild A-20

Beispiel zur Berechnung eines Flächenintegrals:

Aufgabe: Berechnung der Ladung Q auf einer rechteckigen Fläche A



geg.: Flächenladungsdichte $\sigma = c\,x\,y$

$c = 3\ \mathrm{mC/cm^4}$,

$x_1 = 1\mathrm{cm}$, $x_2 = 7\mathrm{cm}$,

$y_1 = 1\mathrm{cm}$, $x_2 = 5\mathrm{cm}$

Lösung: differenzielle Ladung dQ im differenziellen Flächenelement dA: $\quad dQ = \sigma\,dA$

$\rightarrow$ $\boxed{Q = \iint_A \sigma\,dA}$ Flächenintegral

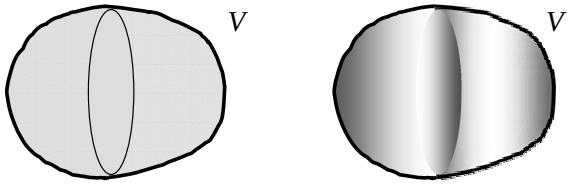
$$Q = \iint_A \sigma\,dA = \int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} \sigma\,dx\,dy = \int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} c\,x\,y\,dx\,dy = \int_{y_1}^{y_2} c\,y\,\frac{x^2}{2}\Big|_{x_1}^{x_2}\,dy$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} c\,y\,\frac{x_2^{\,2} - x_1^{\,2}}{2}\,dy = c\,\frac{x_2^{\,2} - x_1^{\,2}}{2}\,\frac{y^2}{2}\Big|_{y_1}^{y_2} = c\,\frac{x_2^{\,2} - x_1^{\,2}}{2}\,\frac{y_2^{\,2} - y_1^{\,2}}{2} = 884\,\mathrm{mC}$$

Bild A-21

5. Volumenintegral

stetige Verteilung einer Ladung Q über Volumen V



homogen inhomogen

Dichte der Ladung im Raum → Raumladungsdichte ρ:

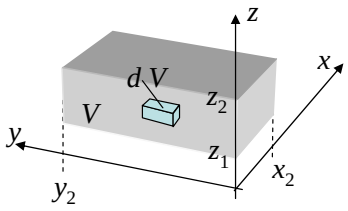
$$\rho = \frac{Q}{V} \qquad \rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V}$$

$$Q = \rho V \qquad Q = \iiint_V \rho \, \mathrm{d}V$$

Volumenintegral

Bild A-22

Beispiel zur Berechnung eines Volumenintegrals:
Aufgabe: Berechnung der Ladung Q in einem Volumen V



geg.: Raumladungsdichte $\rho = \frac{c}{z}(x^2 + y^2)$

c = 2 mC/cm^4, x_2= 2cm, y_2= 3cm,
z_1= 1cm, z_2= 2cm,

Lösung: differenzielle Ladung dQ im differenziellen Flächenelement dV: $dQ = \rho \, dV$

→ $\boxed{Q = \iiint_V \rho \, dV}$ Volumenintegral $\qquad dV = dx\, dy\, dz$

$$Q = \iiint_V \rho \, dV = \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{y_2} \int_0^{x_2} \rho \, dx\, dy dz = \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{y_2} \int_0^{x_2} \frac{c}{z}(x^2 + y^2) dx\, dy dz$$

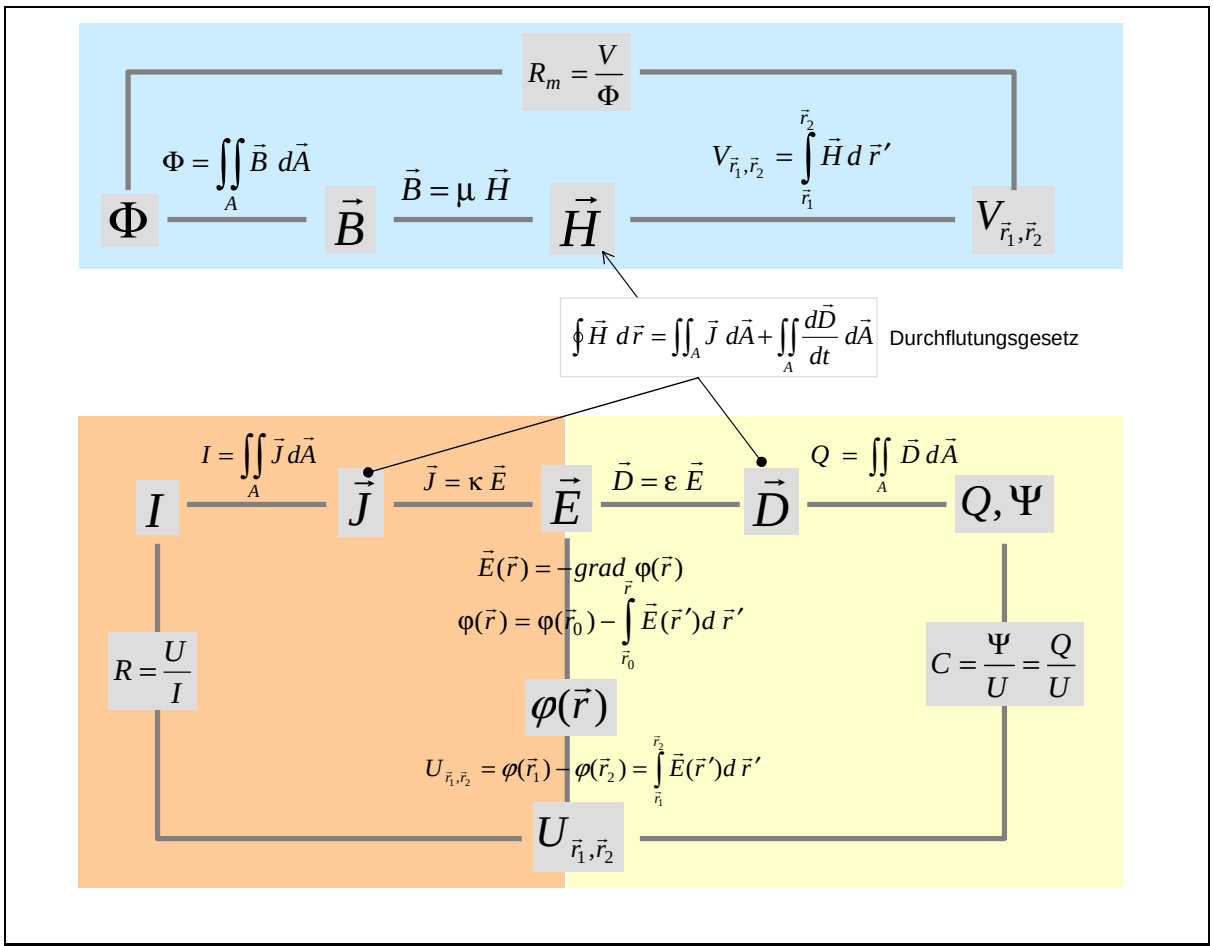
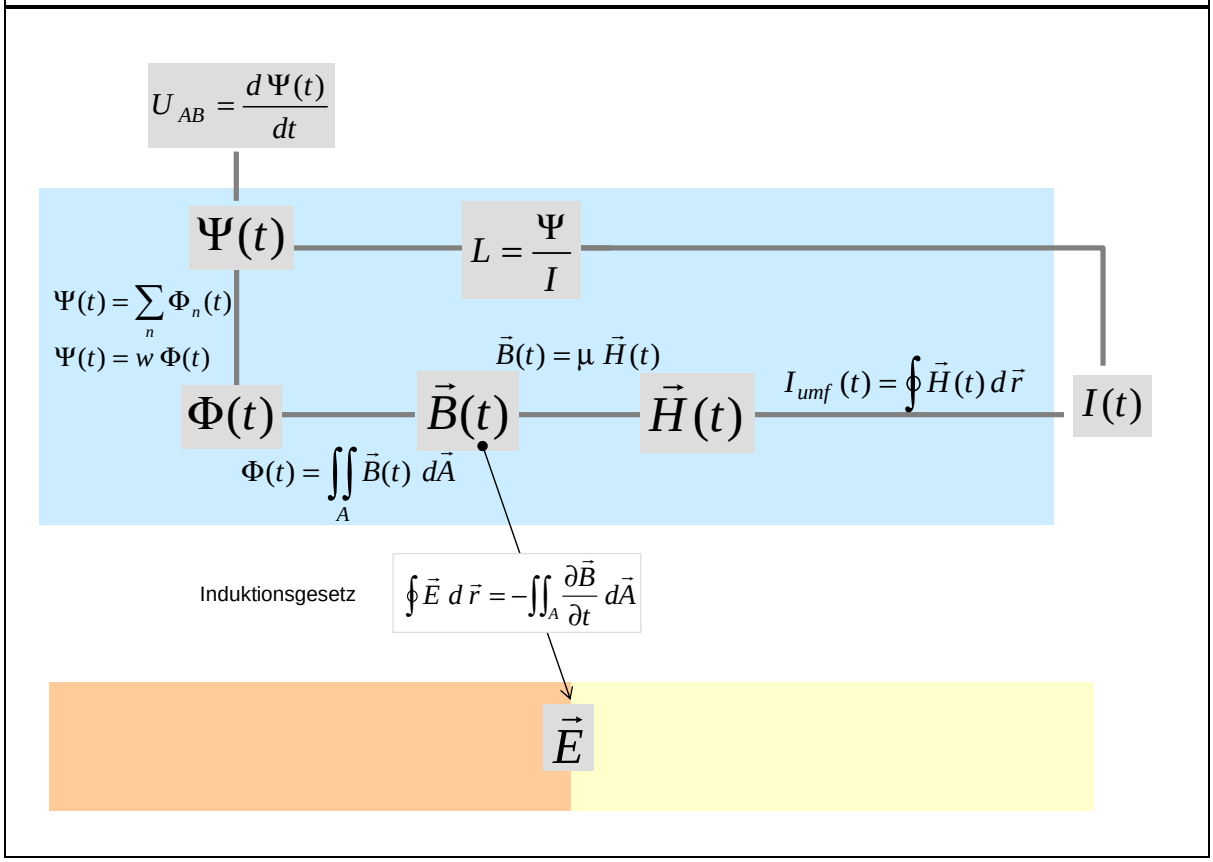
$$= \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{y_2} \frac{c}{z} \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_0^{x_2} dy\, dz = \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{y_2} \frac{c}{z} \left(\frac{{x_2}^3}{3} + y^2 x_2 \right) dy\, dz$$

Bild A-23

$$= \int_{z_1}^{z_2} \frac{c}{z} \left[\frac{{x_2}^3}{3} y + \frac{y^3}{3} x_2 \right]_0^{y_2} dz = \int_{z_1}^{z_2} \frac{c}{3z} \left({x_2}^3 y_2 + {y_2}^3 x_2 \right) dz$$

$$= \frac{c}{3} \left({x_2}^3 y_2 + {y_2}^3 x_2 \right) \ln z \Big|_{z_1}^{z_2} = \frac{c}{3} \left({x_2}^3 y_2 + {y_2}^3 x_2 \right) \ln \frac{z_2}{z_1}$$

$$Q = 36\,\mathrm{mC}$$

Bild A-24

Übersicht: elektromagnetisches Feld