

Versuch 1

Fehlerschutz durch Hamming-Codierung

1.1. Grundlagen und Begriffe

Wesentliche Eigenschaften der Hamming-Codes für die Anwendung sind: der gleichmäßige Fehlerschutz für alle Stellen des Codewortes und die einfache Bildung des Codewortes durch Erweiterung des Datenwortes mit Prüfbits, deren Auswertung eine eindeutige Fehlerkorrektur mit Hilfe des Syndroms erlaubt.

Die Distanzen charakterisieren die vektoriellen Abstände zwischen den zum Code gehörenden, also erlaubten Codeworten. Für die Leistungsfähigkeit eines Codes, d. h. seine Eigenschaften für die Fehlererkennung bzw. -korrektur, sind alle Distanzen zwischen allen möglichen Kombinationen von Codeworten bestimmend. Besonders interessant ist die kleinste im Code zu findende Distanz, die als Minimaldistanz oder Hamming-Distanz d_{\min} bezeichnet wird.

Zur Erkennung aller einfachen bis w_E -fachen Fehler gilt die Bedingung:

$$d_{\min} \geq w_E + 1.$$

Ein Codewort \underline{b}_i wird dann in ein anderes Codewort \underline{b}_j verfälscht, wenn wenigstens d_{\min} einzelne Bitfehler vorliegen und das Fehlerwort \underline{e} die Struktur eines gültigen Codewortes besitzt. Dann kann das Empfangswort $\underline{y} = \underline{b}_i \oplus \underline{e}$ nicht als falsch erkannt werden.

Zur Korrektur aller einfachen bis w_K -fachen Fehler gilt die Bedingung:

$$d_{\min} \geq 2 \cdot w_K + 1.$$

Die Distanz d_{\min} muss so groß sein, dass sich die "Eigenbereiche" der Codeworte nicht überlappen. Die Korrektur ist immer dann möglich, wenn ein verfälschtes Codewort \underline{y} eindeutig dem gesendeten Codewort zugeordnet werden kann. Ist die Fehleranzahl im Codewort zu groß, so fällt das verfälschte Codewort $\underline{y} = \underline{b}_i \oplus \underline{e}$ in den Eigenbereich eines anderen Codewortes \underline{b}_j , wird diesem Codewort zugeordnet und es erfolgt eine Falschkorrektur.

Die mathematische Beschreibung der störungsgeschützten Codierungen ist für die theoretische Untersuchung und die praktische Anwendung gleichermaßen von Bedeutung. Die Anzahl der möglichen Codeworte steigt mit der Anzahl k der Informationsbits im Codewort stark an. Statt der Auflistung aller zur Menge 2^k gehörenden Codeworte genügt unter der Voraussetzung eines linearen Blockcodes die Angabe einer Anzahl von k Basisvektoren. Deren modulo-2-Addition entspricht dabei einer linearen Verknüpfung von Binärvektoren. Die Anordnung einer vollständigen Menge von Basis-Codeworten in den Zeilen einer Matrix bildet die Generatormatrix \underline{G} des Codes. Alle weiteren Codeworte können aus der Generatormatrix \underline{G} stets durch modulo-2-Additionen aller möglichen Kombinationen von Zeilenvektoren gebildet werden. In der Praxis bevorzugt man die Darstellungsform:

$$\underline{G}^* = (\underline{I}_k \mid \underline{A}).$$

Der linke Teil der Matrix \underline{G}^* ist eine Einheitsmatrix vom Grad k ist. Damit lautet ihre ausführliche Schreibweise:

$$\underline{G}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{1,2} & \dots & a_{1,(n-k)} \\ 0 & 1 & & \vdots & a_{2,1} & a_{2,2} & & a_{2,(n-k)} \\ & & \ddots & 0 & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{k,1} & a_{k,2} & \dots & a_{k,(n-k)} \end{pmatrix}$$

Codes mit einer Generatormatrix \underline{G}^* werden systematische Linearcodes genannt, weil jedes Codewort eine systematische Form hat: (k Informationsbits, $(n-k)$ Prüfbits).

Die $(n-k)$ Prüfstellen ergeben sich aus den k Informationsstellen nach einer Vorschrift, die in Form einer Matrix definiert werden kann. Das ist die sogenannte Prüf- oder Kontrollmatrix $\underline{H}^* = (\underline{A}^T \mid \underline{I}_{n-k})$

$$\underline{H}^* = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{21} & \dots & a_{k,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1,2} & a_{22} & & a_{k,2} & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{1,(n-k)} & a_{2,(n-k)} & \dots & a_{k,(n-k)} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Name Prüfmatrix (Kontrollmatrix) rührt daher, dass jede Zeile von \underline{H}^* eine Prüfgleichung definiert in folgender Weise:

- Das jeweilige Prüfbit wird durch Modulo-2-Addition genau der Informationsbits gebildet, die in der betreffenden Zeile von \underline{H}^* durch **1** markiert sind.
- Die mod-2-Summen aller Elemente einer Matrixzeile, die den Wert **1** haben, müssen **0** ergeben.

Kontroll- und die Prüfmatrix sind über die Beziehung

$$\underline{G}^* \cdot \underline{H}^{*T} = \mathbf{0}$$

miteinander verknüpft.

Im Codewort¹ $\underline{b} = (d_1, d_2, \dots, d_k, b_{k+1}, \dots, b_n)$ kann der Teil für die Datenbits $\underline{d} = (d_1, d_2, \dots, d_k)$ frei gewählt werden. Das Codewort einschließlich der Prüfstellen wird nach der Gleichung

$$\underline{b} = \underline{d} \cdot \underline{G}^*$$

berechnet.

Ein Fehlerwort $\underline{e} = (e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ verdeutlicht die Wirkung des Kanals auf ein zu übertragendes Codewort. Die Belegung eines Fehlerbits e_v mit einem Symbol **1** entspricht der Verursachung eines Fehlers an der Position v im Empfangswort.

Das Syndromwort $\underline{s} = (s_1, s_2, \dots, s_{n-k})$ für ein Empfangswort \underline{y} berechnet sich zu

$$\underline{s} = \underline{y} \cdot \underline{H}^{*T} = \underline{e} \cdot \underline{H}^{*T}.$$

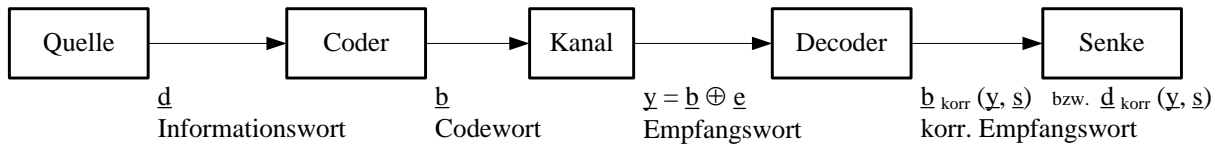
Lineare Blockcodes müssen nicht notwendig systematisch sein. Für die technische Realisierung von Codierung und Decodierung ist es aber von Vorteil, wenn man systematische Linearcodes verwendet. Bei ihnen besteht das Codewort aus dem unveränderten Datenbits und den durch den Codierer angefügten Prüfstellen

$$(\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_k, \underline{b}_{k+1}, \dots, \underline{b}_n) = (\underline{d}_1, \underline{d}_2, \dots, \underline{d}_k, \underline{b}_{k+1}, \dots, \underline{b}_n).$$

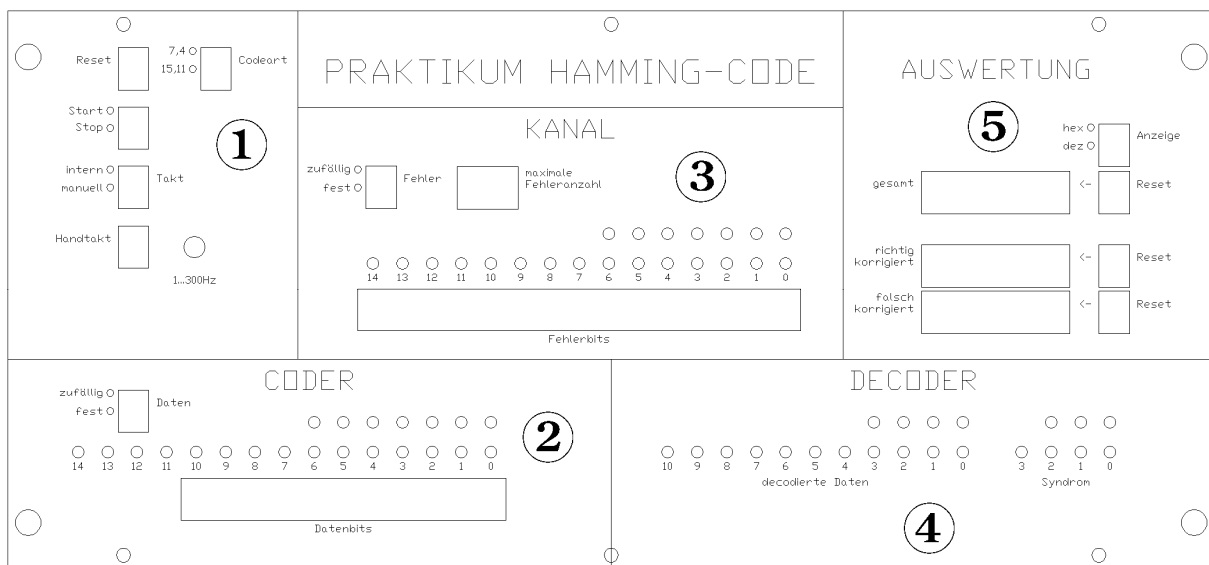
¹ Die Daten- und Codeworte werden hier nicht als Spaltenvektoren sondern immer als Zeilenvektor notiert!

1.2. Versuchsplatz

Das nachfolgende Bild zeigt der Übertragungskette des Versuchsplatzes.



Die Daten- und Codeworte werden in dieser Übertragungskette seriell übertragen und werden am Versuchsplatz bitweise angezeigt.



Der Versuchsplatz erlaubt, die Experimente wahlweise mit dem systematischen (7,4)- oder (15,11)-Hamming-Code auszuführen.

Betätigung der **Reset-Taste in Block (1):**

- Codeauswahl: **(7,4)**
- Übertragungszustand: **Stop** (Code-Wechsel nur im Stop-Modus möglich)
- Taktung: **manuell Takt** (Worttakt)
- alle Zähler: **auf ‚Null‘**
- Eingabe Datenbits d_v : **manuell** (fest)
- Eingabe Fehlerbits e_v : **manuell** (fest)

Allgemeine Einstellungen (1):

- Codeauswahl: **(7,4)** oder **(15,11)**
- Übertragungszustand: **Start** oder **Stop**
- Taktung: **manuell** oder **intern**
- Handtakt: **Auslösung von Einzel-Worttakt**

Codierer und Datenquelle (2):

Daten zufällig: pseudozufälliges Datenwort einer internen Datenquelle
 Daten fest: Bereitstellung des über Schalter eingegebenen Bitmusters

Die Folge der Datenbits (d_1, d_2, \dots, d_k) mit den vom Coder angefügte Prüfbits (b_{k+1}, \dots, b_n) ergibt das Codewort \underline{b} .

Bei jedem Wechsel zwischen festem und zufälligem Datenwort werden die Speicher des Zufallsgenerators mit Symbolen **1** aufgefüllt. Die Taster-LEDs zeigen das aktuelle Datenwort an und die jeweils aktive LED-Zeile das daraus resultierende Codewort.

Kanal (3):

Fehler zufällig: Überlagerung mit einem zufällig erzeugten Fehlermuster mit einstellbarer maximaler Bitfehleranzahl je Codewort
 Fehler fest: frei wählbares Fehlermuster \underline{e}
 fehlerfreie Übertragung $\underline{e} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$

Die Anzeige in den Tastern stellt den aktuellen Fehlervektor \underline{e} dar, die LED-Zeilen darüber das Empfangswort $\underline{y} = \underline{b}_i \oplus \underline{e}$.

Decodierer (4):

Der Decoder liest das Empfangswort \underline{y} ein und rekonstruiert daraus, soweit dies möglich ist, das gesendete Codewort $\underline{b}_{\text{kor}}$ bzw. die korrigierten Daten $\underline{d}_{\text{kor}}$. Dazu wird das Syndrom \underline{s} berechnet und mit Hilfe der jeweiligen Syndromtafel das dazu gehörige Fehlermuster ermittelt und korrigiert. Die Anzeige stellt das ausgegebene Datenwort und das Syndrom zum Empfangswort dar.

Auswertung (5):

Der Auswertungsblock besteht aus drei Zählern, die eine Vorstellung zur Korrekturleistung des eingesetzten Codes vermitteln sollen. Wahlweise dezimal oder hexadezimal wird die Anzahl der übertragenen, richtig und falsch korrigierten Codeworte dargestellt. Um einen Zählerüberlauf und damit verbundene Fehlmessungen bzw. Falschinterpretationen zu verhindern, wird das System gestoppt, sobald einer der Zähler 99999 erreicht hat.

Wird zusätzlich zur Auswahl Taste für die Art der Anzeige der Fehleranzahl-Taster am Kanal gedrückt, lässt sich die Helligkeit der Sieben-Segment-Anzeigen in vier Stufen ändern.

Generatorpolynom der Maximalfolge zur pseudozufälligen Datenerzeugung:

$$g_{PN}(x) = x^{12} \oplus x^9 \oplus x^8 \oplus x^5 \oplus 1$$

Generatorpolynom der Maximalfolge, die als Grundlage für die Fehlererzeugung dient:

$$g_F(x) = x^{11} \oplus x^8 \oplus x^6 \oplus x^2 \oplus 1$$

Verwendete Hamming-Codierungen

Die Versuchsanordnung verwendet einen systematischen (7,4)- bzw. einen (15,11)-Hamming-Code mit

$n = 7$ bzw. 15 als Blocklänge (Anzahl der Code-Bits eines Codewortes)
 $k = 4$ bzw. 11 als Anzahl der Informations-Bits im Codewort,
 $n-k = 3$ bzw. 4 als Anzahl der Kontroll- oder Prüf-Bits im Codewort und
 $d_{\text{min}} = 3$ bzw. 3 Minimaldistanz der Codes (Hamming-Distanz).

(7,4)-Hamming-Code:**Prüfmatrix:**

$$\underline{H}^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Syndromtafel:

s ₂	s ₁	s ₀	Fehlerstelle im Empfangswort <u>y</u>
0	0	0	-
0	0	1	4
0	1	0	5
0	1	1	2
1	0	0	6
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	3

(15,11)-Hamming-Code:**Prüfmatrix:**

$$\underline{H}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Syndromtafel:

s ₃	s ₂	s ₁	s ₀	Fehlerstelle im Empfangswort <u>y</u>
0	0	0	0	-
0	0	0	1	11
0	0	1	0	12
0	0	1	1	0
0	1	0	0	13
0	1	0	1	2
0	1	1	0	5
0	1	1	1	6
1	0	0	0	14
1	0	0	1	4
1	0	1	0	3
1	0	1	1	7
1	1	0	0	1
1	1	0	1	8
1	1	1	0	9
1	1	1	1	10

1.2 Vorbereitungsaufgaben

1.2.1 Gegeben ist die Prüfmatrix \underline{H}

$$\underline{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eines (7,4)-Hamming-Codes.

- a) Geben Sie die systematische Prüfmatrix \underline{H}^* an und vergleichen Sie mit der Prüfmatrix auf Seite 5!
 - b) Geben Sie die systematische Generatormatrix \underline{G}^* an!
 - c) Geben Sie die Coderate des Codes an!
- 1.2.2 Berechnen Sie für die Datenworte $\underline{d}_1 = [1011]$, $\underline{d}_2 = [1001]$ und $\underline{d}_3 = [0001]$ mit Hilfe der Generatormatrix \underline{G}^* die zugehörigen Codeworte \underline{b}_1 , \underline{b}_2 , und \underline{b}_3 !
- 1.2.3 Führen Sie für die Empfangsworte $\underline{y}_1 = [1011010]$, $\underline{y}_2 = [1011010]$ und $\underline{y}_3 = [1011010]$ eine Decodierung durch! Berechnen Sie hierfür den Syndromvektor \underline{s} , korrigieren Sie die entsprechende Fehlerstelle und vergleichen Sie mit dem gesendeten Codeworten!
- 1.2.4 Berechnen Sie die systematische Generatormatrix für den (15,11)-Code von Seite 5! Wie groß ist die Coderate? Wie groß ist die Hammingdistanz?
- 1.2.5 Was ist unter einem perfekten Code zu verstehen? Ist der Hamming-Code ein perfekter Code?
- 1.2.6 Betrachten Sie für den (7,4)-Code den symmetrischen Binärkanal in der Bitübertragungsschicht mit der Bitfehlerwahrscheinlichkeit p_B und die Wortfehlerwahrscheinlichkeit p_W nach der Dekodierung!
- d) Skizzieren Sie die Empfängerblöcke mit den Wahrscheinlichkeiten p_B und p_W !
 - e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten beliebiger Einfach- bis n-fach-Fehler in einem empfangenen Wort!
 - f) Berechnen Sie die Wortfehlerwahrscheinlichkeit p_W dafür, dass ein Empfangswort \underline{y} durch einen beliebigen Fehler verfälscht wird!
 - g) Berechnen Sie die Rest-Wortfehlerwahrscheinlichkeit $p_{W_{\text{Rest}}}$ nach der Decodierung in Abhängigkeit von der Bitfehlerwahrscheinlichkeit p_B vor der Decodierung!

1.3. Versuchsaufgaben

- 1.3.1.** Ein Datenwort soll an der Signalquelle gewählt und über den Kanal übertragen werden. Die fehlerfreie Übertragung soll beobachtet werden.
Die vom Codierer zu bildenden Prüf-Bits sind mit Hilfe der Prüfmatrix oder mit Hilfe der normierten Generatormatrix \underline{G}^* zu bestimmen.
Die nach fehlerfreier Übertragung am Decoder zu erwartenden Syndrom-Bits sind mit Hilfe der Prüfmatrix zu bestimmen.
Diese Untersuchung ist für einen Kanal zu wiederholen, in dem ein Bit des Codewortes gestört wird.
- 1.3.2.** Diskutieren Sie die Prüfbarkeit und die Korrigierbarkeit eines gestörten Codewortes. Bestimmen Sie die Bedingungen dafür bei dem vorliegenden Code!
- 1.3.3.** Für eine Folge aus zufälligen Datenworten, die durch den Kanal in einem bestimmten Bit gestört sind, ist das Verhalten der Syndromwerte am Decodierer zu beobachten.
- 1.3.4.** Für zufällige, mit dem (15,11)-Hamming-Code codierte Datenworte sind Messreihen auszuführen, welche die Zahl der richtig korrigierten und der falsch korrigierten Worte abhängig von der maximalen Fehlerzahl (0, 1, 2, ...,7) erfassen.
Jede der 8 Messreihen soll 10 000 Übertragungen erfassen, die Ergebnisse sind in einer Tabelle bzw. in einer Abbildung darzustellen.

Alle Beobachtungen und Ergebnisse sollen im Protokoll vermerkt und kurz interpretiert werden.

Formelzeichen:

d_{ij}	Distanz zwischen Codewort i und j
d_{\min}	Hammingdistanz (min. Distanz zwischen zwei Codeworten eines Codes)
w_E	Gewicht der sicher erkennbaren Fehler
w_K	Gewicht der sicher korrigierbaren Fehler
\underline{d}	Datenwort, Datenvektor (Datenbits, Mitteilungsschritte)
\underline{G}^*	Generatormatrix
\underline{b}_i	Codewort, Codevektor
\underline{e}	Fehlerwort, Fehlervektor (Fehlerbits)
\underline{y}	Empfangswort, Empfangsvektor (Empfangsbits)
\underline{H}^*	Prüfmatrix
\underline{s}	Syndromwort, Syndromvektor (Syndrombits)
$\underline{b}_{\text{korr}}$	Empfangscodewort nach Dekodierung bzw. Korrektur
$\underline{d}_{\text{korr}}$	Empfangsdatenwort nach Dekodierung bzw. Korrektur
$g(x)$	Maximalfolgen-Generatorpolynom
n	Codewortlänge
k	Anzahl der Informationsbits
$n-k$	Anzahl der Prüfbits
p_B	Bitfehlerwahrscheinlichkeit
P_W	Wortfehlerwahrscheinlichkeit
$P_{W\text{Rest}}$	Wortfehlerwahrscheinlichkeit nach Decodierung