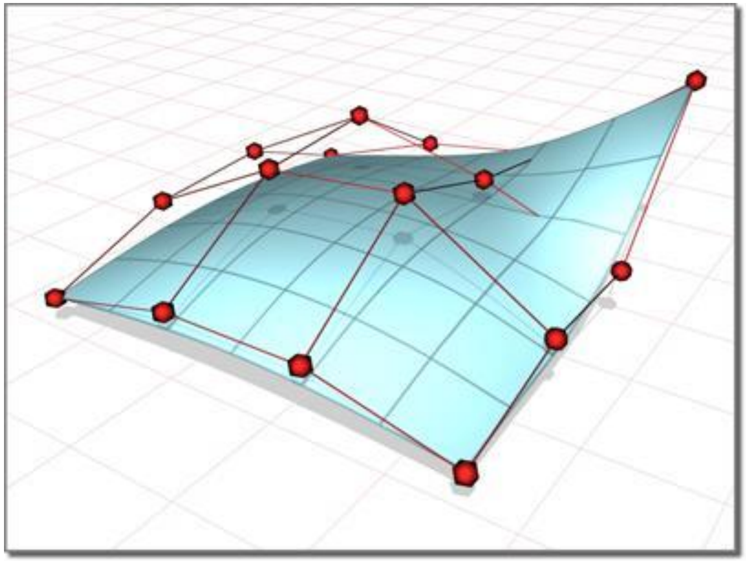
Modellierung mit Kurven



Inhalt

Polynombasen
Monombasis

Computergraphik und Visualisierung

- Wir betrachten hier nur Polynome in einer Variablen t. Für Flächen werden Polynome in zwei Variablen benötigt.
- Die einfachste Darstellung von Polynomen ist in der Monombasis $\{ 1, t, t^2, \ldots, t^g \}$
- Das Monom mit der höchsten Potenz dessen Koeffizient ungleich null ist definiert den Grad g des Polynoms
- Die Koeffizienten an die Basisfunktionen können als Vektor interpretiert werden und bilden den $(g+1)$-dimensionalen Vektorraum der Polynome

Beispiel: $t(2+t^2)-1 = 2t + t^3 - 1$

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_g t^g$$
$$= \sum_{i=0}^{g} a_i t^i = \left\langle \vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{M}}^g(t) \right\rangle$$
$$= \vec{\boldsymbol{a}}^T \vec{\boldsymbol{M}}^g(t) = \vec{\boldsymbol{M}}^g(t)^T \vec{\boldsymbol{a}}$$

Monombasis:

$$M_i^g(t) = t^i \quad \text{oder} \quad \vec{\boldsymbol{M}}^g(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^g \end{pmatrix}$$

Koeffizientenvektor $\vec{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_g \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^{g+1}$

Polynombasen
Bernsteinbasis

- Die Fakultät einer positiven ganzen Zahl n ergibt sich aus dem Produkt aller ganzen Zahlen kleiner gleich n
- Binomialkoeffizienten sind mit Hilfe der Fakultät definiert
- Optional können die Binomialkoeffizienten auch über das Pascal´sche Dreieck berechnet werden
- Bernsteinbasis:

$$B_i^g(t) = \binom{g}{i}(1-t)^{g-i}t^i$$

$$\vec{\mathbf{B}}^2(t) = \left((1-t)^2 \quad 2(1-t)t \quad t^2\right)^T$$

$$\vec{\mathbf{B}}^3(t) = \left((1-t)^3 \quad 3(1-t)^2 t \quad 3(1-t)t^2 \quad t^3\right)^T$$

Fakultät: $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

Binomialkoeffizient: $\binom{n}{i} = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$

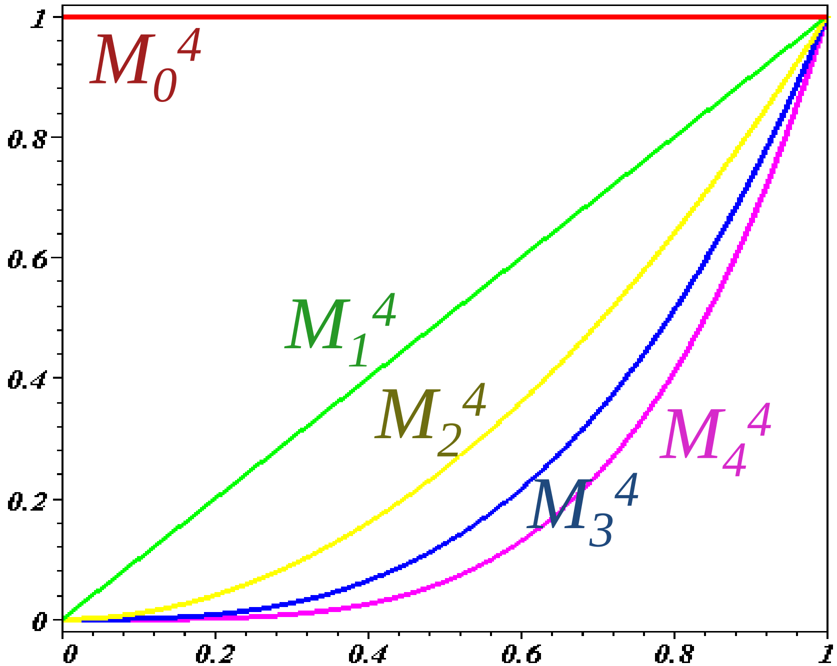
Pascal‘sches Dreieck:

1	$n=0$
$1 \; 1$	$n=1$
$1 \; 2 \; 1$	$n=2$
$1 \; 3 \; 3 \; 1$	$n=3$
$1 \; 4 \; 6 \; 4 \; 1$	$n=4$

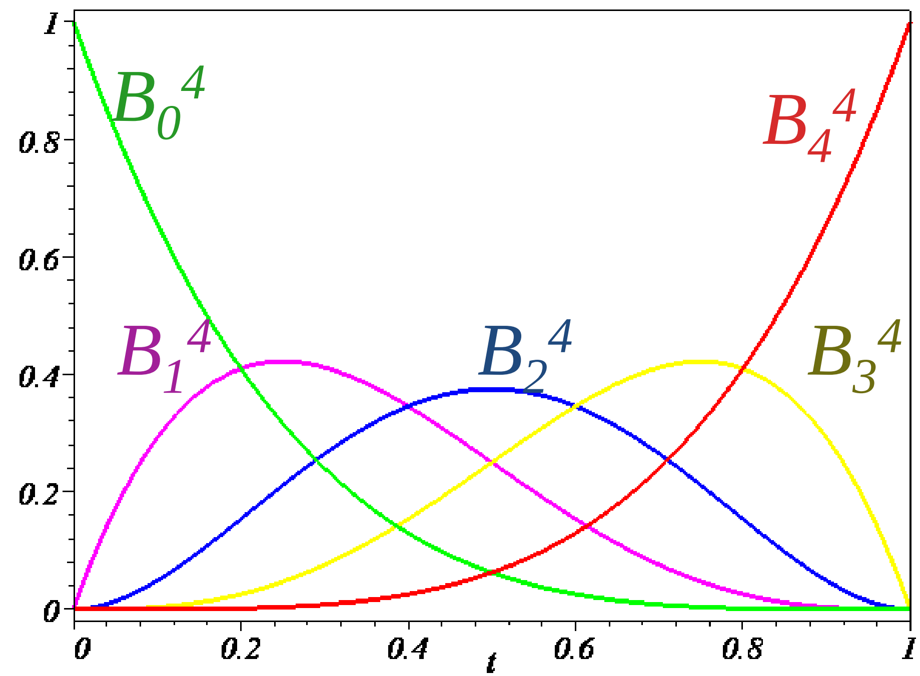
$i=0$ $i=1$ $i=2$ $i=3$

Polynombasen Vergleich

Monombasis



Bernsteinbasis



Wichtig ist, dass nur der Definitionsbereich $t \in [0,1]$ betrachtet wird

Basistransformation – Motivation

Computergraphik und Visualisierung

$$f(t) = 2B_0^3(t) - 2B_1^3(t) + 5B_2^3(t) + 1B_3^3(t) \Leftrightarrow (2 \quad -2 \quad 5 \quad 1)$$

$$= 2(1-t)^3 - 2\cdot 3t(1-t)^2 + 5\cdot 3t^2(1-t) + 1\cdot t^3$$

$$\begin{aligned} = 2 - 6t + 6t^2 - 2t^3 \\ -6t + 12t^2 - 6t^3 \\ +15t^2 - 15t^3 \\ +t^3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (2 \quad -2 \quad 5 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$f(t) = 2 - 12t + 33t^2 - 23t^3$$

$$f(t) = 2M_0^3(t) - 12M_1^3(t) + 33M_2^3(t) - 23M_3^3(t) \Leftrightarrow (2 \quad -12 \quad 33 \quad -23)$$

$$\vec{\boldsymbol{b}}^T \boldsymbol{T}_{M\leftarrow B}^T = \vec{\boldsymbol{a}}^T$$

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{T}_{M\leftarrow B} \vec{\boldsymbol{b}}$$

Polynombasen Basistransformation

Computergraphik und Visualisierung

- Dasselbe Polynome kann in verschiedenen Basen dargestellt werden. Dadurch ändert sich der Koeffizientenvektor
- Die Umrechnung des Koeffizientenvektors in eine andere Basis heißt Basistransformation, diese kann mit einer $(g+1)\times(g+1)$-dimensionalen Matrix dargestellt werden
- Die Basistransformation erfolgt durch Matrix-Vektor-Multiplikation
- Die inverse Matrix transformiert den Koeffizientenvektor in umgekehrter Richtung

$$f(t) = \vec{a}^T \vec{M}^g(t) \overset{1}{=} \vec{b}^T \vec{B}^g(t)$$

Basistransformation:

$$\vec{b} = T_{B\leftarrow M}\vec{a}, \quad T_{B\leftarrow M} \in R^{(g+1)\times(g+1)}$$

Inverse Basistransformation:

$$\vec{a} = T_{M\leftarrow B}\vec{b} = \left(T_{B\leftarrow M}\right)^{-1}\vec{b} \qquad 2$$

Zusammenhang zw. Basistransformation und Transformation der Basen:

$$f(t) = \vec{a}^T \vec{M}^g(t) \overset{2}{=} \vec{b}^T \left(\left(T_{B\leftarrow M}\right)^{-1}\right)^T \vec{M}^g(t)$$

$$\overset{1}{\Rightarrow} \vec{B}^g(t) = A_{B\leftarrow M}\vec{M}^g(t)$$

$$A_{B\leftarrow M} = \left(\left(T_{B\leftarrow M}\right)^{-1}\right)^T$$

Polynombasen Beispieltransformation

Computergraphik und Visualisierung

- Auch die Basen stehen in einem linearen Zusammenhang zueinander, der durch eine Matrix $\boldsymbol{A}_{B\leftarrow M}$ darstellbar ist
- Diese Matrix kann bei Transformation von der Monombasis durch ausmultiplizieren der anderen Basis abgelesen werden
- Rechts ist dies für die Bernsteinbasis durchgeführt
- Die Transformationsmatrix für den Koeffizientenvektor ergibt sich durch Transponieren und Invertieren.

$$\vec{\boldsymbol{B}}^3(t) = \begin{pmatrix} (1-t)^3 \\ 3(1-t)^2 t \\ 3(1-t)t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3t+3t^2-t^3 \\ 3t-6t^2+3t^3 \\ 3t^2-3t^3 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}_{B\leftarrow M}} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{T}_{B\leftarrow M} = \left(\left(\boldsymbol{A}_{B\leftarrow M}\right)^T\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{T}_{M\leftarrow B} = \boldsymbol{A}_{B\leftarrow M}^T$$

Polynombasen
Effiziente Auswertung

- Für die Auswertung von Polynomen gibt es je nach Basis mehrere Möglichkeiten deren Laufzeit sich in Bezug auf den Grad unterscheidet.
- Für die Monombasis benötigt eine direkte Umsetzung der Formel im Grad quadratisch viele Rechenoperationen
- Mit dem Hornerschema kann, die Anzahl der Rechenoperationen reduziert werden, so dass nur noch proportional zum Grad viele Operationen notwendig sind ist.

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_g t^g$$

Pseudo-Code Standardauswertung:

```
f=a_0
for i=1..g do
    M_i = t
    for j=2..i do
        M_i *= t
    f += a_i*M_i
```

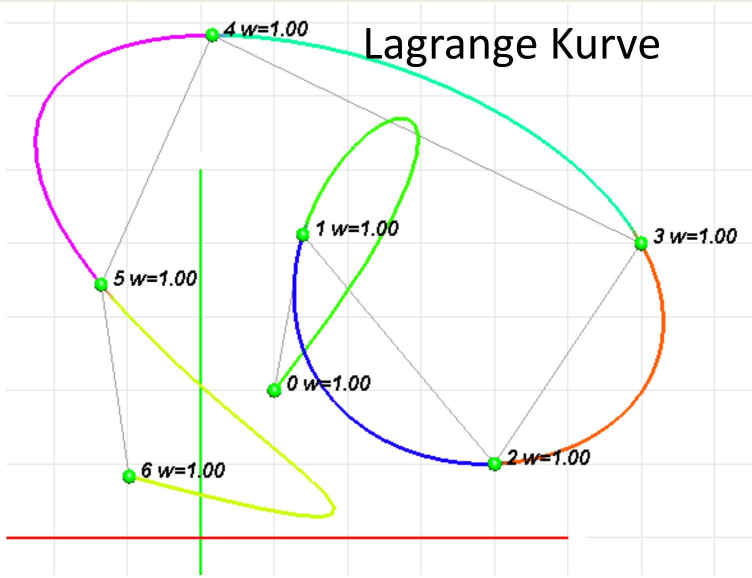
Hornerschema

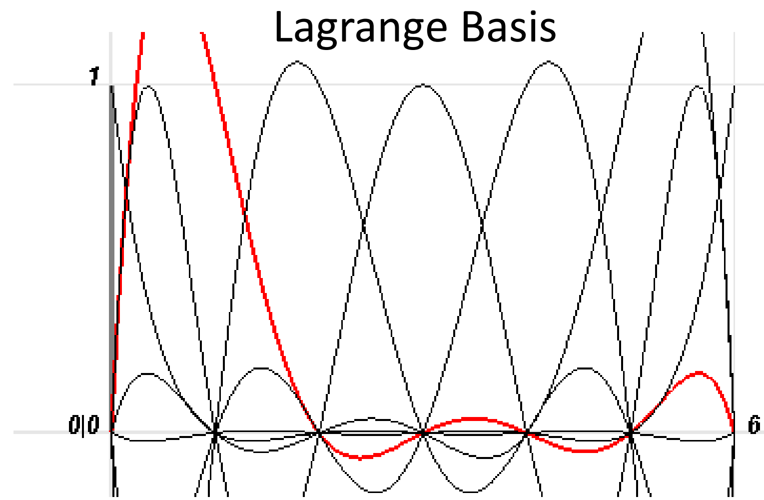
$$f(t) = a_0 + t(a_1 + t(\ldots + t(a_{g-1} + t a_g)\ldots))$$

Pseudo-Code Hornerschema

```
f=a_g
for i=g-1..0 do
    f  = a_i+t*f
```

Parametrische Kurven
Modellierung von Kurven





Kontrollpunktparadigma

- Kontrollpolygon aus Kontroll-punkten definiert den Kurvenverlauf
- Gewichte geben bei rationalen Basen zusätzliche Freiheits-grade zum modellieren

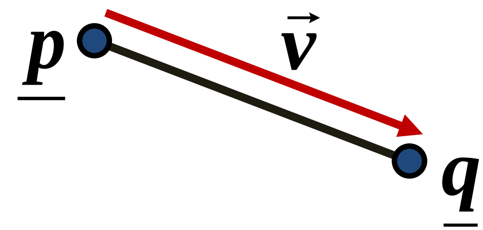
Basisfunktionen

- Der Einfluss der verschiedenen Kontrollpunkte wird durch polynomiale Basisfunktionen gesteuert
- Je nach Wahl der Basis hat die resultierende Kurve andere Eigenschaften

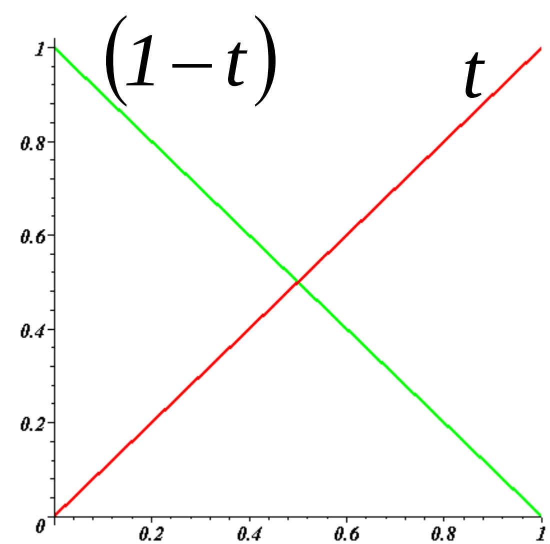
Parametrische Kurven
Motivation der Basisdarstellung

Computergraphik und Visualisierung

- Die einfachste parametrische Kurve ist durch ein geradliniges Segment zwischen zwei Punkten definiert
- Dazu werden nur lineare Basisfunktionen benötigt
  - Monombasis: $\{\ 1, t\ \}$ wird an Anfangspunkt und Differenzvektor multipliziert
  - Bernsteinbasis: $\{\ 1-t, t\ \}$ wird direkt an die Kontroll-punkte multipliziert
    - Bei t=0 und t=1 ist eine Basis 1 und die andere 0 ➔ End-punkte werden interpoliert
    - Die Basis summiert sich überall zu $1-t+t=1$

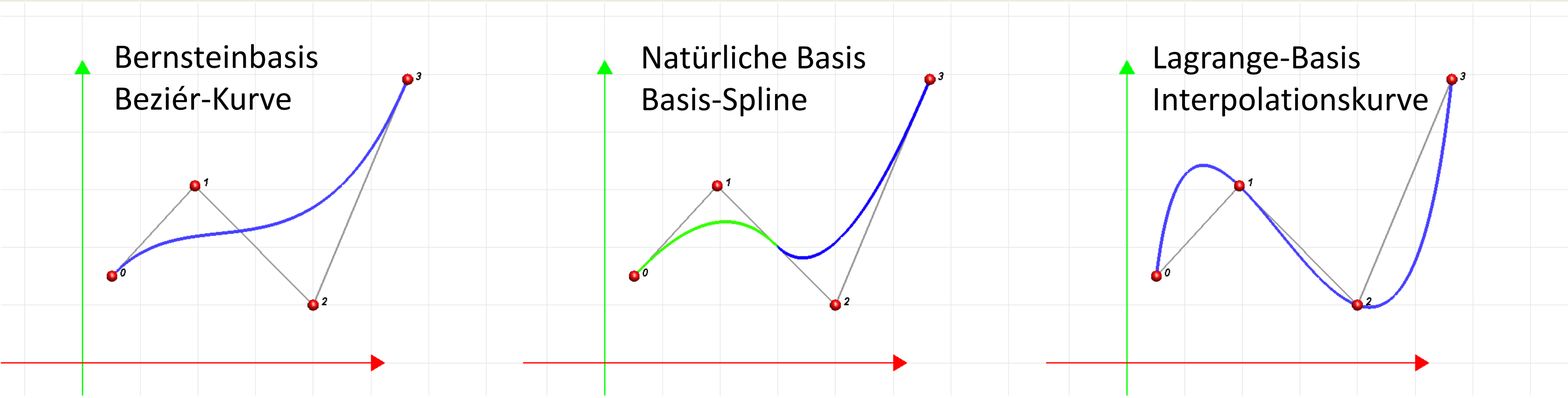


$$\underline{c}(t) = \underline{p} + \vec{v}t$$
$$= (1-t)\underline{p} + t\underline{q}$$



Parametrische Kurven
Eigenschaften die aus Basis folgen

Computergraphik und Visualisierung



- Je nach den gewählten Basisfunktionen ergibt sich mit denselben Kontrollpunkten unterschiedliche Kurven mit anderen Eigenschaften
- Splines sind aus mehreren Kurvensegmenten so zusammengesetzt, dass ein glatter Übergang entsteht

- gewünschte Eigenschaften
  - Glattheit
  - Kontrollpunktinterpolation
  - Endtangenteninterpolation … Tangenten der Kurvenendpunkte entsprechen Endsegmenten des Kontrollpolygons
  - Konvexe Hüllen Eigenschaft: Kurvenverlauf nur innerhalb der konvexen Hülle der Kontrollpunkte

Parametrische Kurven Matrixdarstellung

Computergraphik und Visualisierung

- Im Vergleich zu Polynomen werden die skalaren Koeffizienten zu Kontroll-punkten und die Koeffizienten-vektoren zu Kontrollpunkt-matrizen
- Bei der Basistransformation bleibt alles gleich, außer dass die Kontrollpunktmatrizen durch Matrix-Matrix-Multiplika-tion transformiert werden
- Im 3D hat die Kontrollpunkt-matrix einfach eine weitere Zeile

Beispiel Beziér-Kurve, die mit Bernsteinbasis definiert wird und deren Kontrollpunkte auch Beziér-Punkte genannt werden

$$\underline{c}(t) = \sum_{i=0}^{g} \underline{b}_i B_i^g(t)$$

$$= \boldsymbol{K}_{\underline{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}^g(t)$$

Kontrollpunktmatrix

Bsp.: $g=3$

$$\underline{c}(t) = \begin{pmatrix} b_{0,x} & b_{1,x} & b_{2,x} & b_{3,x} \\ b_{0,y} & b_{1,y} & b_{2,y} & b_{3,y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-t)^3 \\ 3(1-t)^2 t \\ 3(1-t)t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

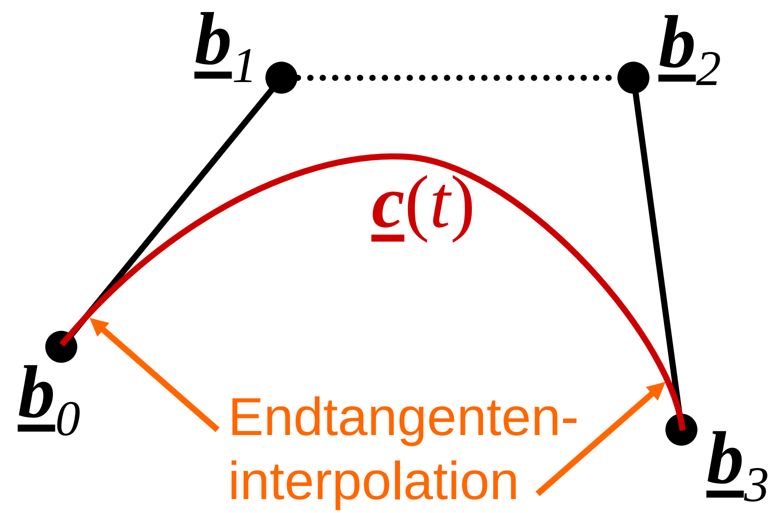
Beziér Kurven einleitendes Beispiel

- In den meisten Tools werden Bezier-Kurven dritten Grades für die Definition von Kurven verwendet
- Die Kurve ist durch vier Bezier-Punkte $\underline{\boldsymbol{b}}_0, \underline{\boldsymbol{b}}_1, \underline{\boldsymbol{b}}_2, \underline{\boldsymbol{b}}_3$ definiert
- $\underline{\boldsymbol{b}}_0, \underline{\boldsymbol{b}}_3$ definieren Start- und Endpunkt
- $\underline{\boldsymbol{b}}_1, \underline{\boldsymbol{b}}_2$ definieren die Tangenten in Start- und Endpunkt

Bezier-Kurve 3.Grades:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (1-t)^3 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + 3t(1-t)^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + 3t^2(1-t) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

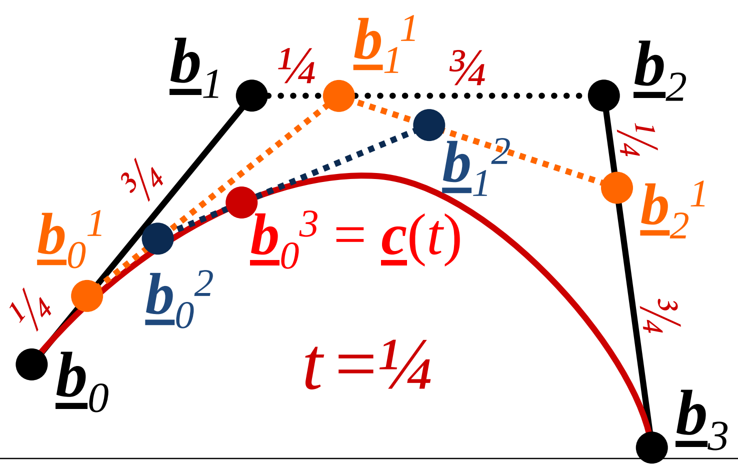
mit $t \in [0,1]$



Kurvenauswertung nach DeCasteljau

- Für hohe Grade erfordert die Auswertung der Bernstein-basis hohe numerische Genauigkeit.
- Deshalb verwendet man das Schema nach de Casteljau:

$$\underline{c}(t) = \underline{b}_0^g \qquad \underline{b}_i^0 = \underline{b}_i$$
$$\underline{b}_i^r = (1-t)\underline{b}_i^{r-1} + t\underline{b}_{i+1}^{r-1}$$



Beweis für de Casteljau:

$$\underline{c}(t) = (1-t)^3\underline{b}_0 + 3t(1-t)^2\underline{b}_1 + 3t^2(1-t)\underline{b}_2 + t^3\underline{b}_3$$

$$= (1-t)^2\left((1-t)\underline{b}_0 + t\underline{b}_1\right) + 2t(1-t)\left((1-t)\underline{b}_1 + t\underline{b}_2\right) + t^2\left((1-t)\underline{b}_2 + t\underline{b}_3\right)$$

$$= (1-t)^2\underline{b}_0^1 + 2t(1-t)\underline{b}_1^1 + t^2\underline{b}_2^1$$

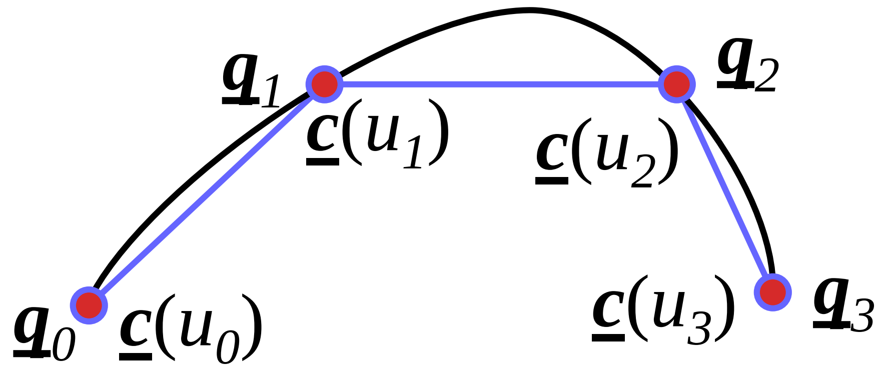
$$= (1-t)\left((1-t)\underline{b}_0^1 + t\underline{b}_1^1\right) + t\left((1-t)\underline{b}_1^1 + t\underline{b}_2^1\right)$$

$$= (1-t)\underline{b}_0^2 + t\underline{b}_1^2$$

$$= \underline{b}_0^3 = \underline{c}(t)$$

Interpolierende Kurven
Lagrange Interpolation

- Wenn die Kurve durch alle Kontrollpunkte gehen soll, (Interpolation) so muss man angeben für welche Parameterwerte $t=u_i$ dies geschehen soll.
- Die u_i nennt man Stützstellen und den Vektor U der aus einer Stützstelle pro Kontrollpunkt definiert ist Stützstellenvektor
- Aus dem Stützstellenvektor definiert man die Lagrange Basis $L_i^g(t)$ so, dass $L_i^g(u_i)=1$ ist und $L_i^g(u_{j\neq i})=0$. Daraus folgt die Interpolationseigenschaft.



Interpolationsproblem:

- geg: Kontrollpunkt $\underline{\boldsymbol{q}}_{i=0..g}$ und Stützstellen $u_{i=0..g}$
- ges.: Kurve $\underline{\boldsymbol{c}}(t)$ mit $\underline{\boldsymbol{c}}(u_i)=\underline{\boldsymbol{q}}_i$
- Lösung: Kurve in Lagrange-Basis: $$\underline{\boldsymbol{c}}(t)=\sum_{i=0}^{g}\underline{\boldsymbol{q}}_i L_i^g(t)$$

$$L_i^g(t)=\prod_{0=k\neq i}^{g}\frac{t-u_k}{u_i-u_k}=\frac{(t-u_0)\cdots\cancel{(t-u_i)}\cdots(t-u_g)}{(u_i-u_0)\cdots\cancel{(u_i-u_i)}\cdots(u_i-u_g)}$$

Interpolierende Kurven
Aufstellen der Lagrange Basis

Computergraphik und Visualisierung

$$L_i^g(t) = \prod_{0=k\neq i}^{g} \frac{t-u_k}{u_i-u_k}$$

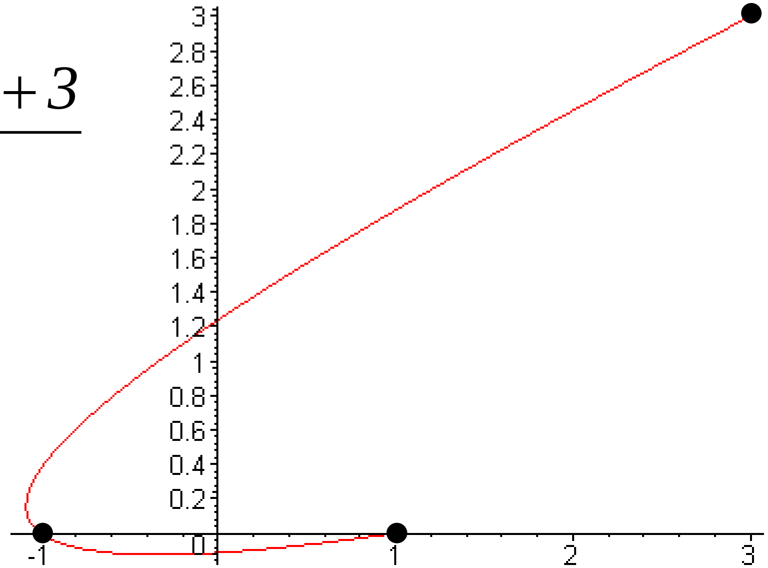
Beispiel:

- Gegeben: $\{u_i\}_i = \{0,1,3\}$
  $\{\underline{\boldsymbol{q}}_i\}_i = \{(1,0),(-1,0),(3,3)\}$

$$L_0^2(t) = \frac{(t-1)(t-3)}{(0-1)(0-3)} = \frac{t^2-4t+3}{3}$$

$$L_1^2(t) = \frac{t(t-3)}{-2}$$

$$L_2^2(t) = \frac{t(t-1)}{6}$$

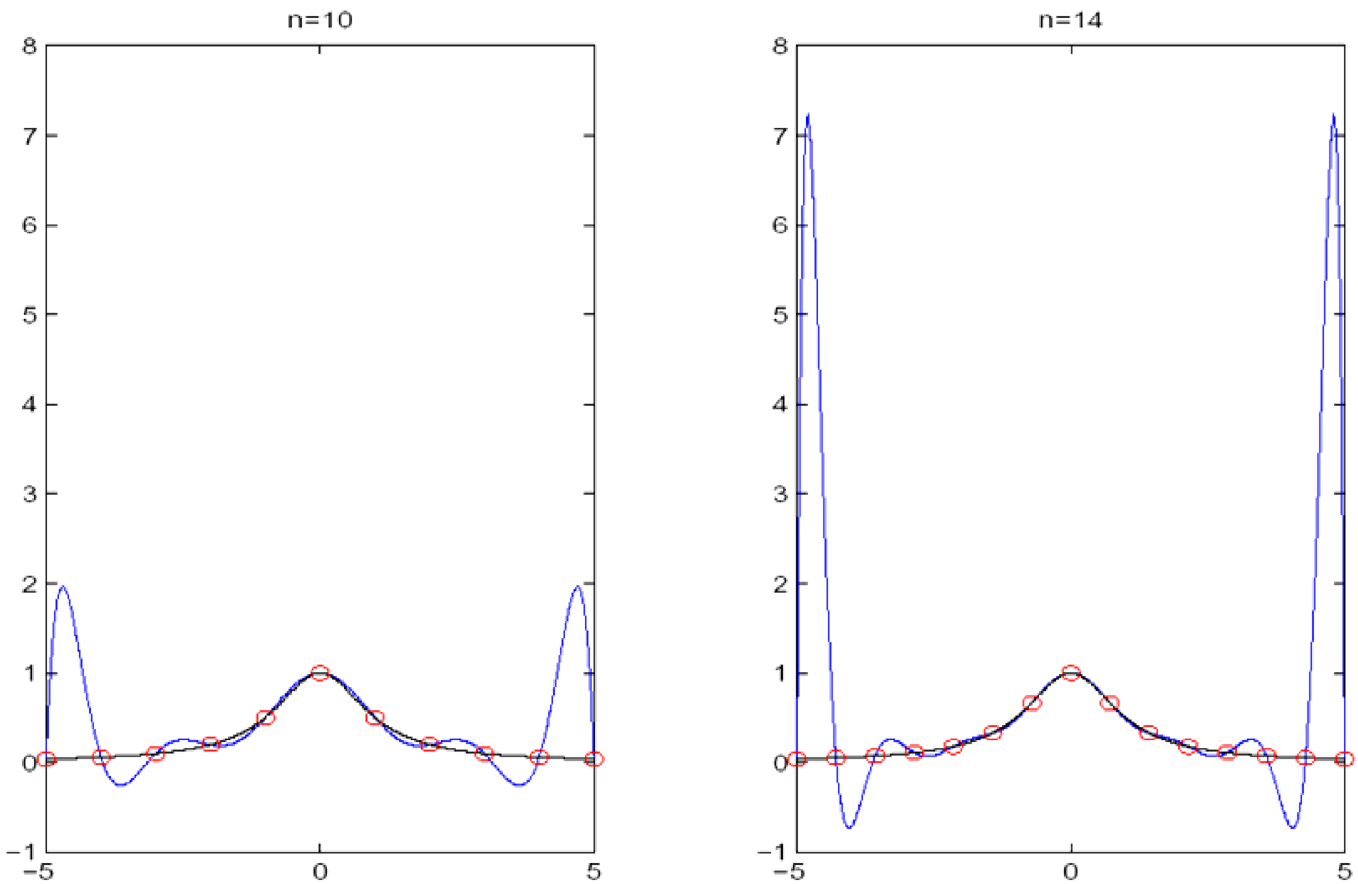


$$\boldsymbol{c}(t) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\frac{t^2-4t+3}{3} + \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\frac{t(t-3)}{-2} + \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\frac{t(t-1)}{6}$$

Interpolierende Kurven
Überschwingungsproblematik

Computergraphik und Visualisierung

- **Vorsicht**: bei vielen Knoten kommt es bei der Lagrange-Interpolation zu Überschwingen



Interpolierende Kurven
Weitere Eigenschaften

- Affine Invarianz … wenn sich die Basisfunktionen für jedes t zu eins summieren nennt man eine Basis affin invariant, gilt für Bernstein- und Lagrange-Basis:

$$\forall t, g, U: 1 = \sum_i^g B_i^g(t) = \sum_i^g L_i^g(t)$$

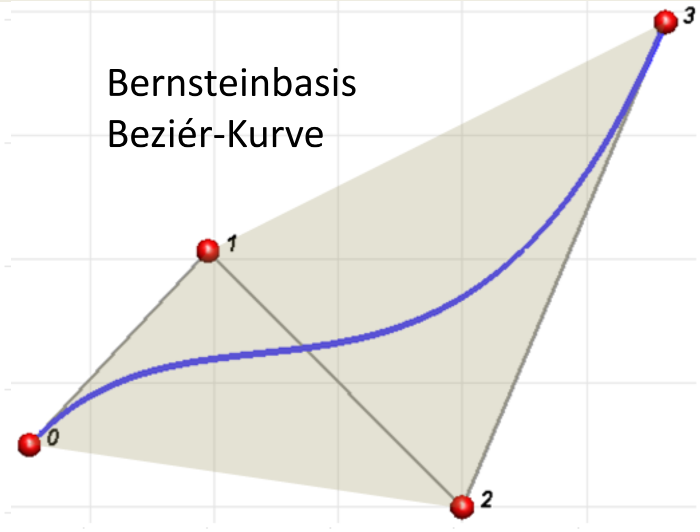
- Bei Abbildung von affin invarianten Kurven mit einer affinen Transformation $\underline{f}(\underline{x})$ ergibt sich der transformierte Kurvenpunkt bei Auswertung der Kurve mit transformierten Kontrollpunkten:

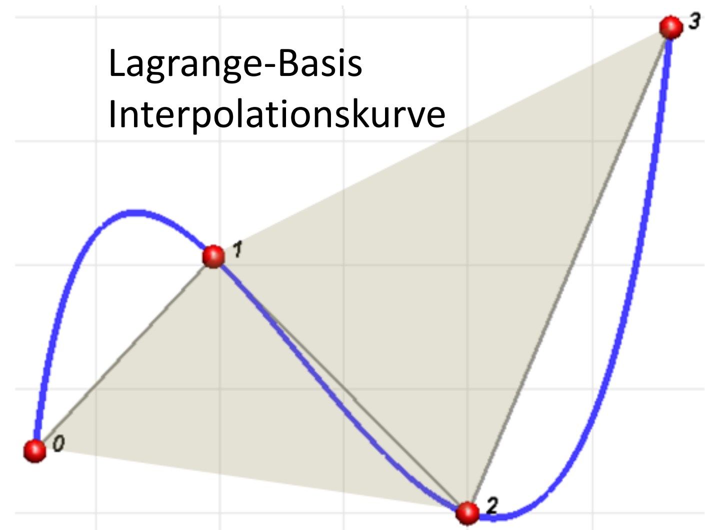
$$\underline{f}\left(\underline{c}(t, \underline{b}_i)\right) = \underline{c}\left(t, \underline{f}(\underline{b}_i)\right)$$

- Konvexe Hülleneigenschaft … die Kurve liegt in der konvexen Hülle der Kontrollpunkte. Diese Eigenschaft ergibt sich bei nicht negativen Basisfunktionen aus affiner Invarianz. Gegeben bei Bernsteinbasis

$$\forall t, i, g: B_i^g(t) \geq 0$$

aber nicht bei Lagrange Basis.

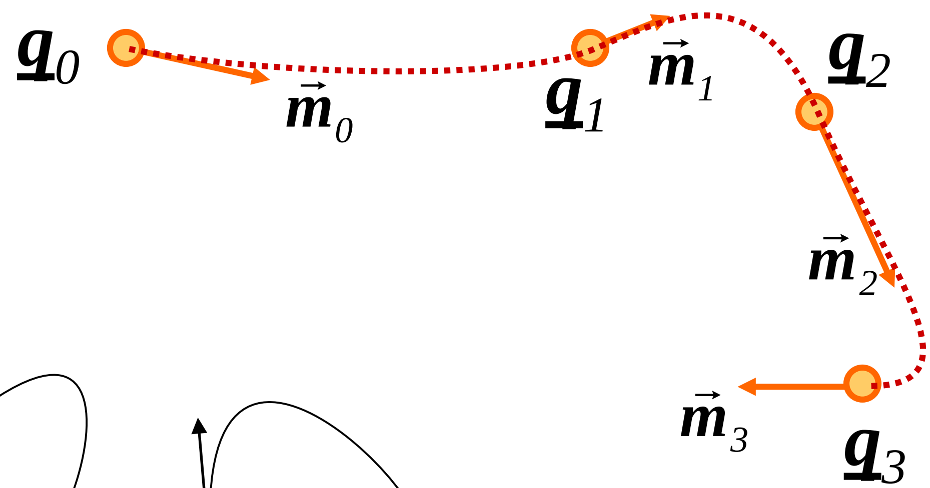




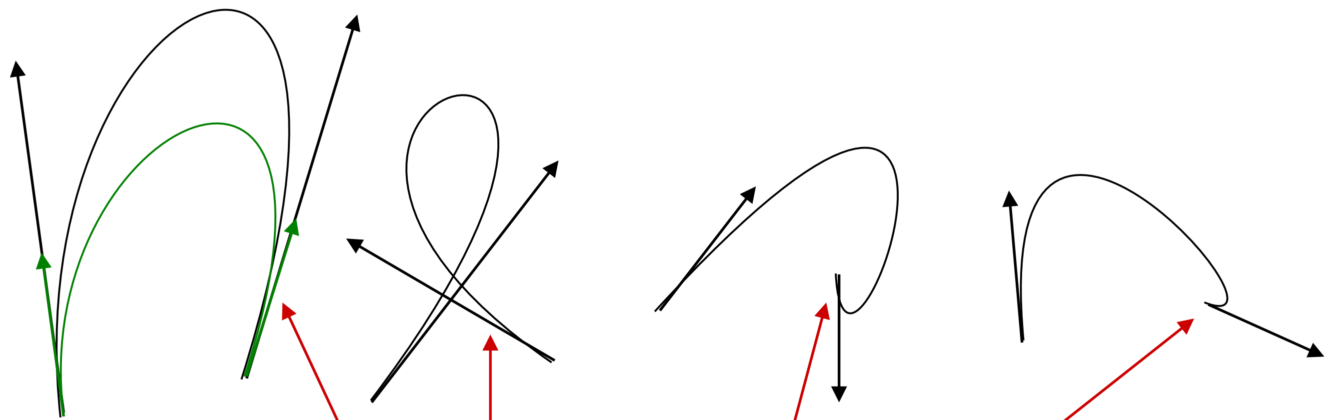
Hermite Interpolation
Motivation

Idee:

- Interpolation von Positions- und Tangenteninformation



Beispiele:



Vorsicht: In Darstellung zeigen die Pfeile am Ende entgegen der Vektoren ***m***, die für die Definition der Hermite-Kurve verwendet wird!!!

Gegeben:

- Parameter $u_o, u_1, \ldots, u_n \in \boldsymbol{R}$,
- Punkte $\underline{\boldsymbol{q}}_0, \underline{\boldsymbol{q}}_1, \ldots, \underline{\boldsymbol{q}}_n \in \boldsymbol{R}^d$
- Tangenten $\vec{\boldsymbol{m}}_0, \vec{\boldsymbol{m}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{m}}_n \in \boldsymbol{R}^d$

Gesucht:

- n Kurvensegmente $\underline{\boldsymbol{c}}_i(t):[u_i, u_{i+1}) \rightarrow \boldsymbol{R}^d$
- mit $\underline{\boldsymbol{c}}_i(u_i) = \underline{\boldsymbol{q}}_i, \quad \dot{\underline{\boldsymbol{c}}}_i(u_i) = \vec{\boldsymbol{m}}_i$

$$\underline{\boldsymbol{c}}_i(u_{i+1}) = \underline{\boldsymbol{q}}_{i+1}, \quad \dot{\underline{\boldsymbol{c}}}_i(u_{i+1}) = \vec{\boldsymbol{m}}_{i+1}$$

Lösung der Interpolationsaufgabe

(Kontrolltangenten-interpolation)

$$\underline{\boldsymbol{c}}_i(t) = H_0^3(s_i)\underline{\boldsymbol{q}}_i + \Delta_i \cdot H_1^3(s_i)\vec{\boldsymbol{m}}_i + \Delta_i \cdot H_2^3(s_i)\vec{\boldsymbol{m}}_{i+1} + H_3^3(s_i)\underline{\boldsymbol{q}}_{i+1}, t \in [u_i, u_{i+1}]$$

wobei $s_i = (t - u_i)/\Delta_i$ und $\Delta_i = u_{i+1} - u_i$

in Klausur gegeben

Beispiel

- Hermite-Polynome vom Grad 3:

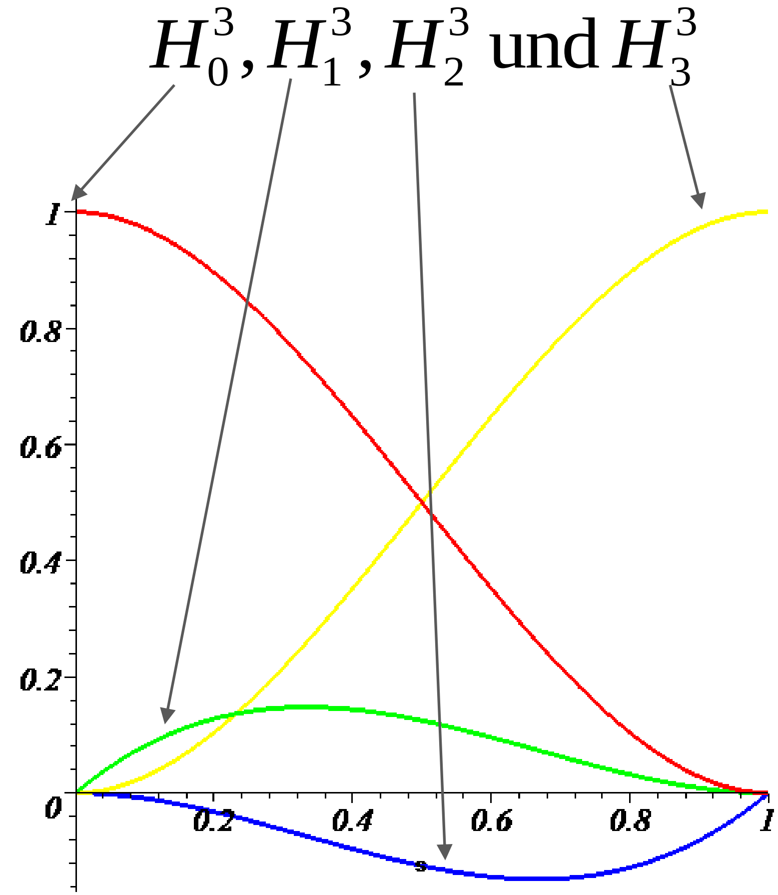
in Klausur gegeben

$$H_0^3(t) = (1-t)^2(1+2t)$$

$$H_1^3(t) = t(1-t)^2$$

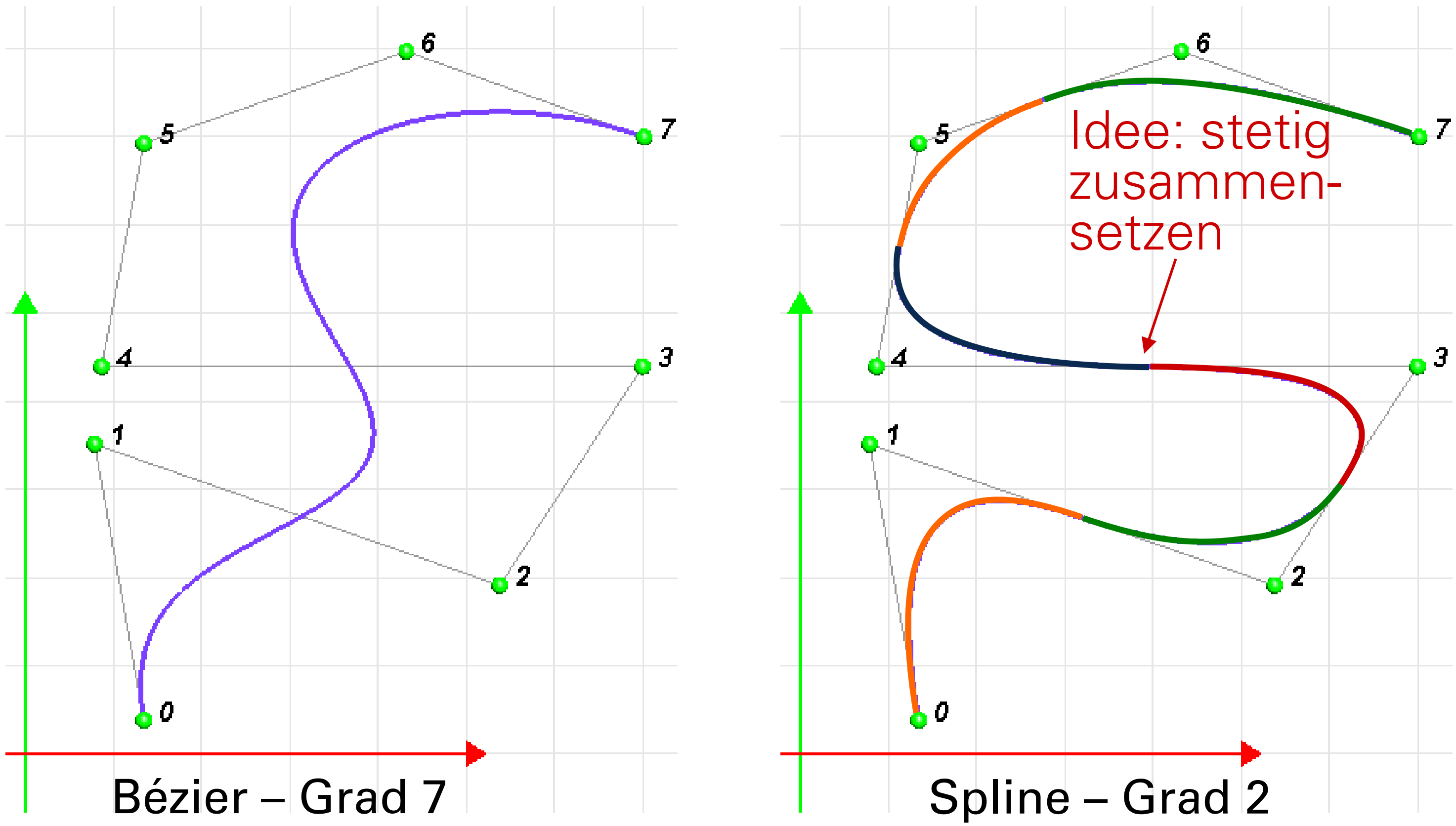
$$H_2^3(t) = -t^2(1-t)$$

$$H_3^3(t) = (3-2t)t^2$$



Stetiges Aneinanderfügen
Motivation

- Mit wachsendem Grad folgen Bézier-Kurven immer weniger dem Kontrollpolygon:

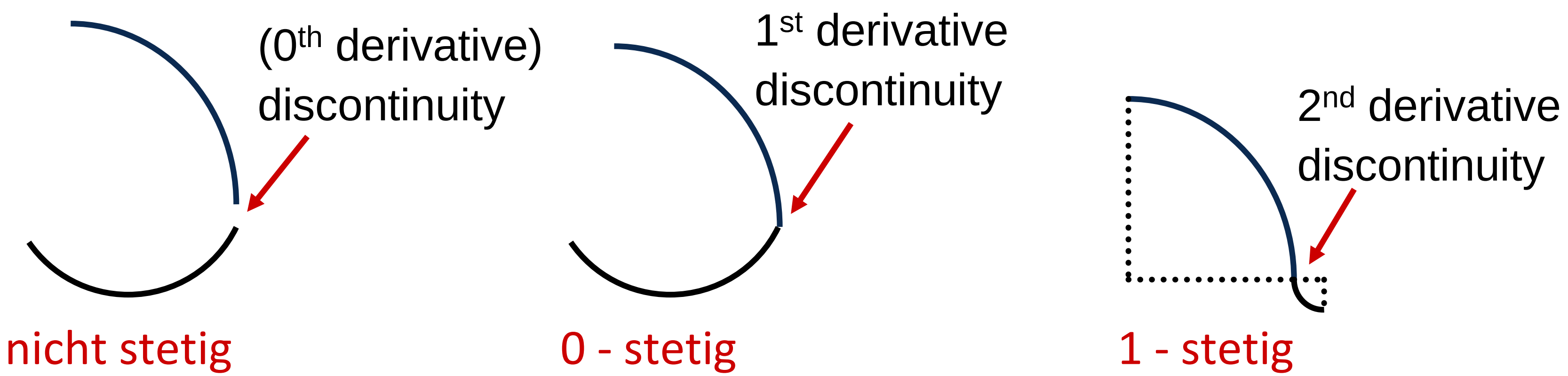


Bézier – Grad 7

Spline – Grad 2

Stetiges Aneinanderfügen
Verschiedene Stetigkeiten

- Der Anschluss zwischen zwei Kurvensegmenten wird nach der Anzahl der übereinstimmenden Ableitungen klassifiziert:

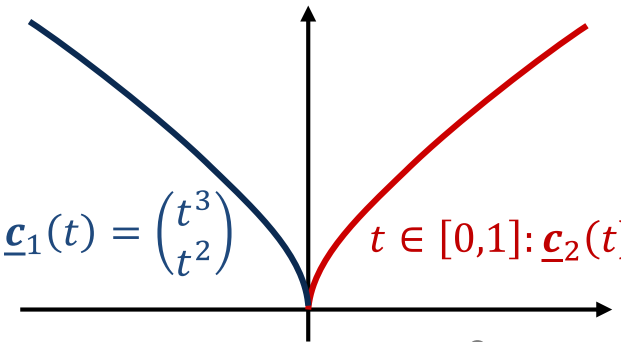


- Man unterscheidet zwischen parametrischer (C) und geometrischer (G) Stetigkeit

Stetiges Aneinanderfügen
Parametrisch versus Geometrisch

$\boldsymbol{C}^k$-stetig

- Die ersten k Ableitungen nach dem Parameter stimmen überein



$t \in [-1,0]: \underline{\boldsymbol{c}}_1(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$

$t \in [0,1]: \underline{\boldsymbol{c}}_2(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$

$$\dot{\vec{\boldsymbol{c}}}_1(0) = \dot{\vec{\boldsymbol{c}}}_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

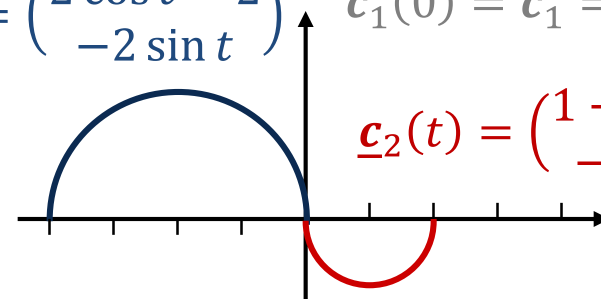
- Kurve ist C^∞– aber nicht einmal G^1– stetig

$\boldsymbol{G}^k$-stetig

- Die ersten k Ableitungen nach der Kurvenlänge stimmen überein

Ableitung nach Bogenlänge

$\underline{\boldsymbol{c}}_1(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t - 2 \\ -2\sin t \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{\boldsymbol{c}}_1'(0) = \vec{\boldsymbol{c}}_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$



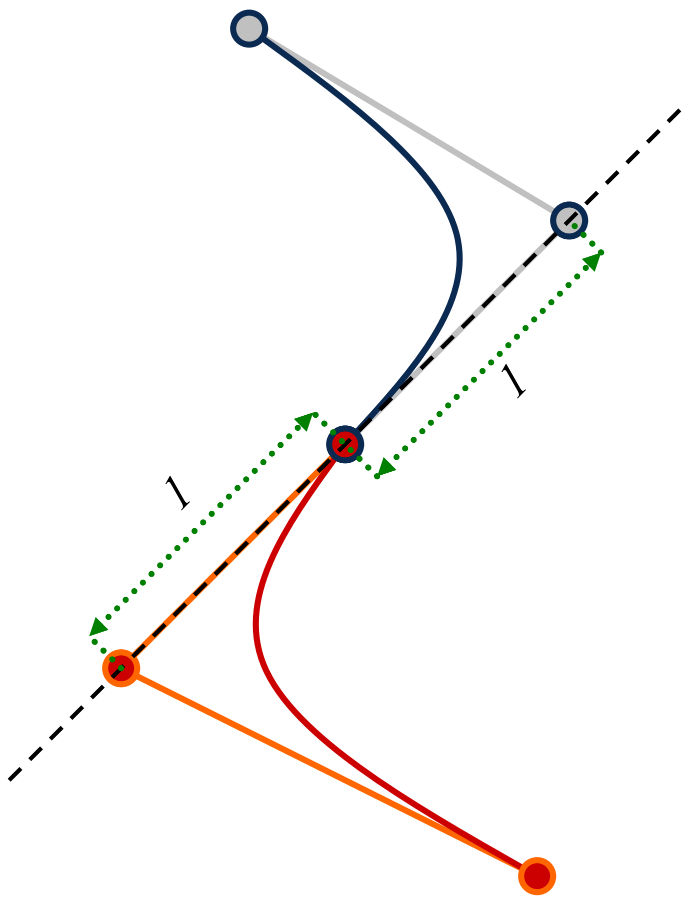
$\underline{\boldsymbol{c}}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$

$$\dot{\vec{\boldsymbol{c}}}_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \dot{\vec{\boldsymbol{c}}}_2(0)$$

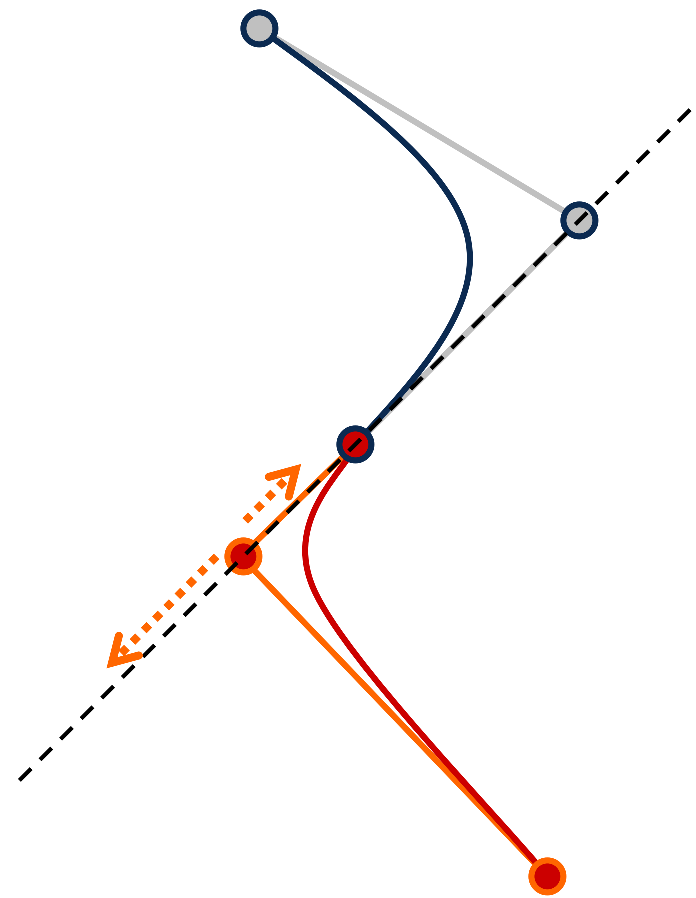
- Kurve ist G^1– aber nur C^0– stetig

Stetiges Aneinanderfügen
Tangentenstetigkeit

C^1-stetiger Bézier Spline



G^1-stetiger Bézier Spline

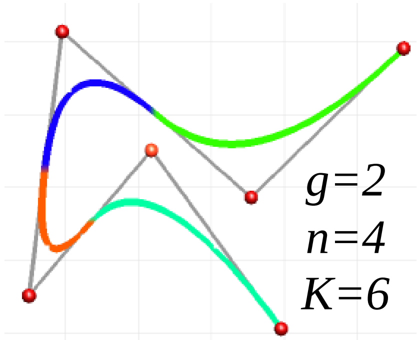


Basis-Splines
Grundbegriffe

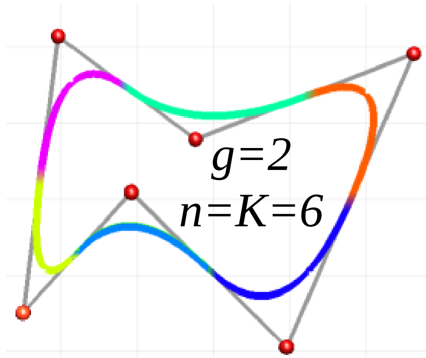
Computergraphik und Visualisierung

- Basis-Splines vom Grad g sind aus n Kurvensegmenten zusammengesetzt, die $k=g-1$ stetig (C^k) aneinanderstoßen
- Um B-Splines wie andere polynomiale Kurven verwenden zu können, werden die natürlichen Basisfunktionen $N_i^g(t)$ mit der rekursiven Konstruktionsformel nach Cox und De Boor definiert
- Die Kontrollpunkte $\underline{\mathbf{d}}_i$ heißen De Boor Punkte
- Man unterscheidet offene und geschlossene B-Splines

$$\underline{\mathbf{c}}(t) = \sum_{i=0}^{K-1} \underline{\mathbf{d}}_i N_i^g(t)$$



offener Spline

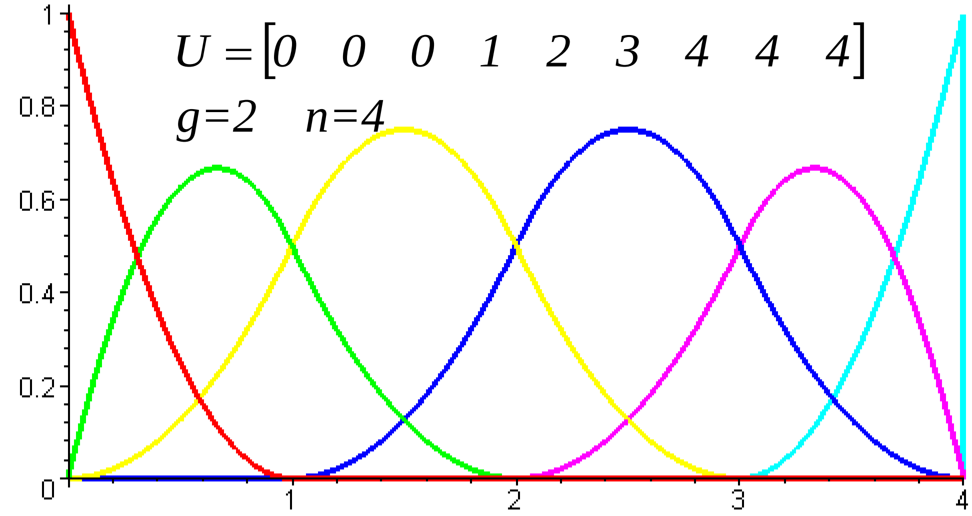


geschlossener Spline

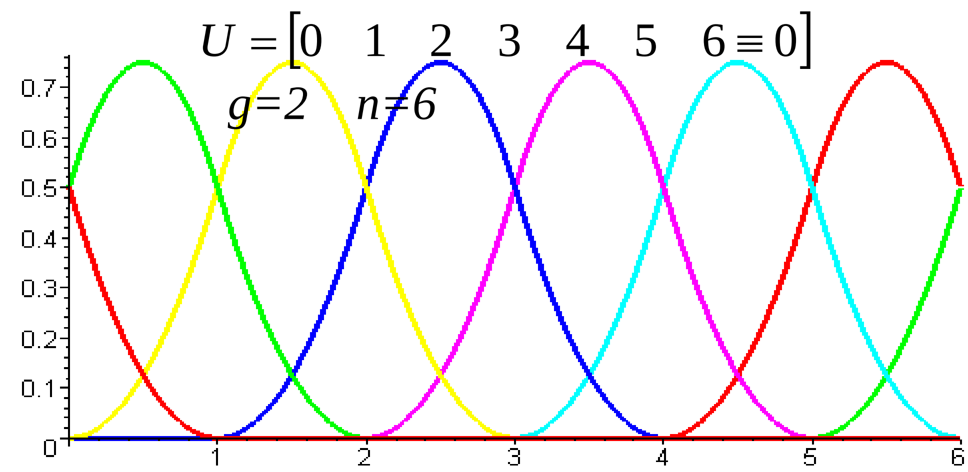
- Bei konstantem Grad g kann beliebige Zahl $K>g$ von Kontrollpunkten genutzt werden
- es gilt
  - $K=n+g$… offene B-Splines
  - $K=n$… geschlossene B-Splines

Basis-Splines
Natürliche Basis

- Ähnlich zur Lagrange-Interpolation wird ein Stützstellenvektor U mit m Einträgen u_i verwendet, der den Parameterbereich in Intervalle einteilt, es gilt
  - $m=K+g+1$… offene B-Splines
  - $m=K$… geschl B-Splines
- anstelle von Stützstelle bzw. Stützstellenvektor werden oft die Begriffe Knoten und Knotenvektor verwendet
- Sind die Knoten $u_i=a\cdot i$ äquidistant, so spricht man von einem uniformen ansonsten von einem nicht uniformen Spline



nicht uniforme natürliche Basis (offen)

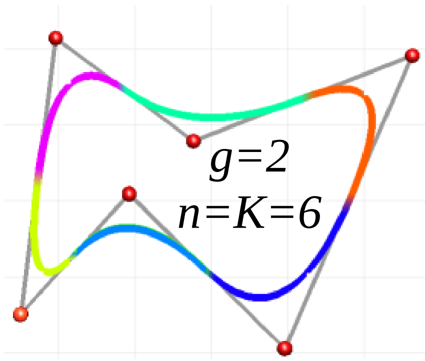


uniforme natürliche Basis (geschlossen)

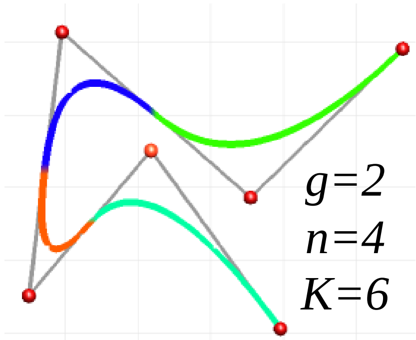
Basis-Splines Symbolübersicht

Computergraphik und Visualisierung

- g … Grad der Kurvensegmente ($g+1$ Freiheitsgrade pro Kurvensegment)
- $k=g-1$ … Stetigkeit zwischen Kurvensegmenten ($k+1=g$ Nebenbedingungen zwischen Kurvensegmenten)
- $K>g$ … Anzahl Kontrollpunkte
- $n = K$ oder $K-g$ … Anzahl der Segmente
- $m= n$ oder $K+g+1$ … Anzahl Einträge im Knotenvektor U
- i … variabel eingesetzter Laufindex



$U=012345$



$U=000123444$

Basis-Splines
Cox De Boor-Rekursion

- Rekursion nach Cox De Boor am Bsp. offener Splinebasen

$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad u_i \le t < u_{i+1} \text{ und } u_i < u_{i+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

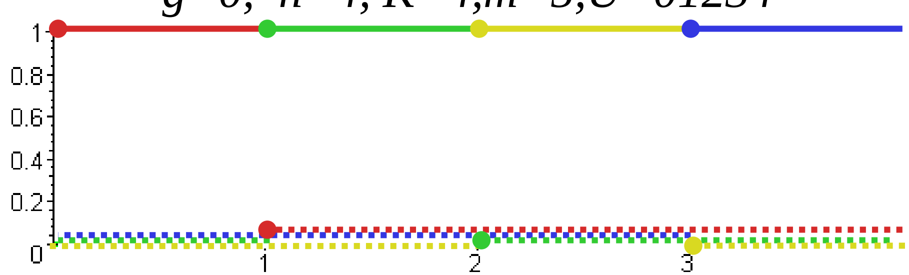
pro t nur ein $N_i^0 \neq 0$

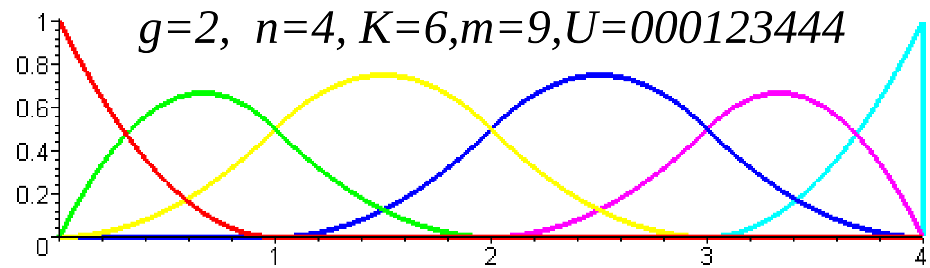
Einfluss nur von nicht degenerierten Intervallen

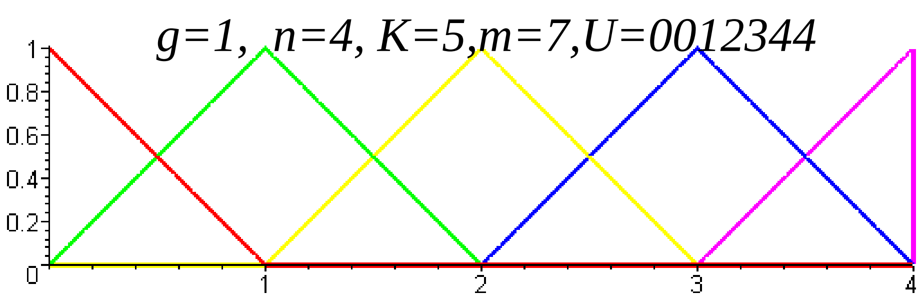
$$N_i^g(t) = \frac{t - u_i}{u_{i+g} - u_i} N_i^{g-1}(t) + \frac{u_{i+1+g} - t}{u_{i+1+g} - u_{i+1}} N_{i+1}^{g-1}(t) \qquad u_i \le t < u_{i+g+1}$$

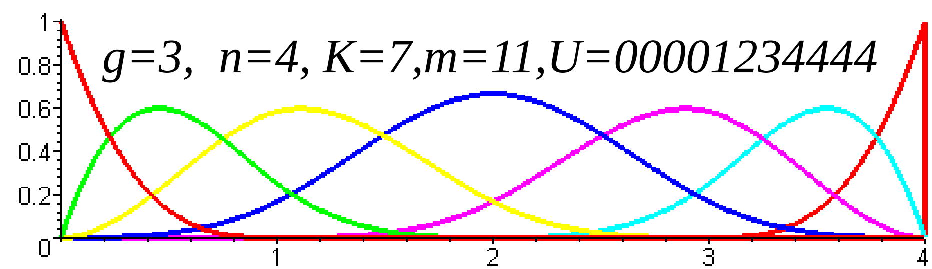
in Klausur gegeben

$g=0, \;\; n=4, K=4, m=5, U=01234$





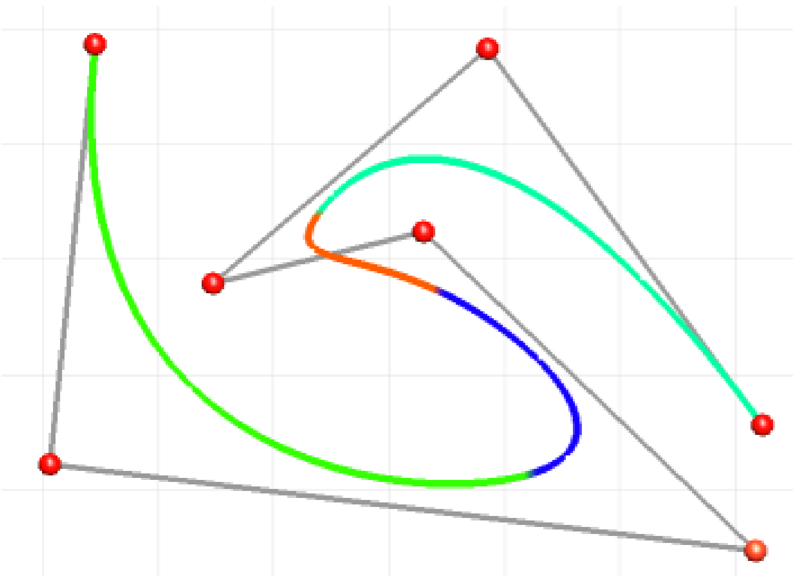




Basis-Splines Multiplizität

Computergraphik und Visualisierung

- Wählt man μ aufeinander folgende $u_{i\ldots i+\mu-1}$ gleich, so nennt man u_i einen Knoten der Multiplizität μ.
- in u_i vermindert sich die Stetigkeit auf $C^{k-(\mu-1)=g-\mu}$
- bei einer $\mu=g$ Multiplizität von u_i wird $\underline{\mathbf{d}}_i$ interpoliert.
- Bei $\mu=g+1$ bekommt der B-Spline einen Sprung
- Dies wird vor allem an den Endpunkten von offenen B-Splines genutzt

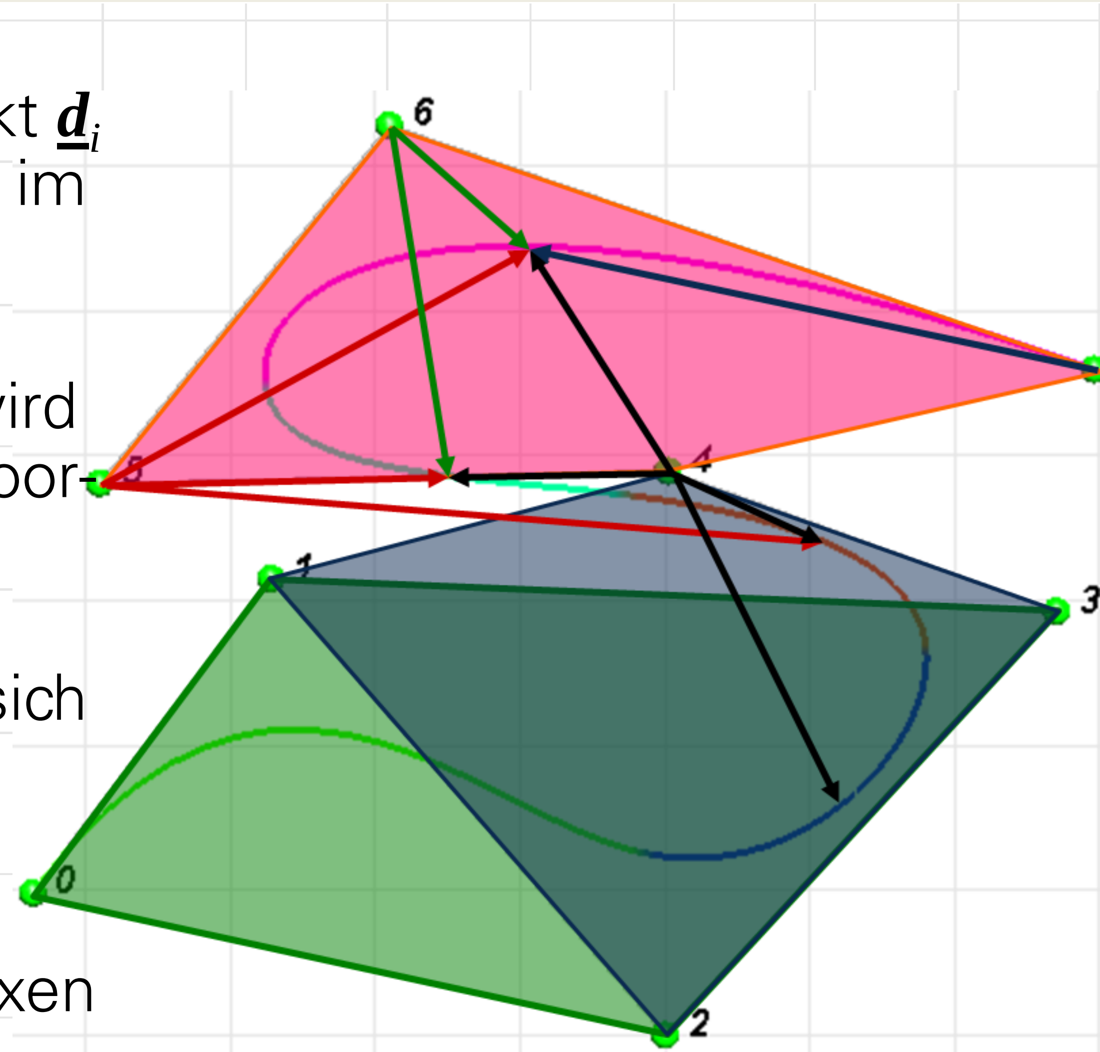


Bsp.: $n=4$, $g=3$, $K=7$, $m=11$, $U=[0,0,0,0,1,2,3,4,4,4,4]$

Online Demo mit Kontrolle des Knotenvektors: https://nurbscalculator.in

Basis-Splines Eigenschaften

- Die Basisfunktion N_i^g bzw. der De Boor Punkt $\underline{\mathbf{d}}_i$ beeinflusst den Spline im Parameterbereich $[u_i,u_{i+g+1})$
- Das Intervall $[u_i,u_{i+1})$ wird nur von den $g+1$ De Boor-Punkten $\underline{\mathbf{d}}_{i-g},\ldots,\underline{\mathbf{d}}_i$ beeinflusst
- Die $N_i^g(t)$ summieren sich zu 1 und sind größer gleich null
- Der Spline liegt in der Vereinigung der konvexen Hüllen von $\underline{\mathbf{d}}_i$, $\underline{\mathbf{d}}_{i+1}$, …, $\underline{\mathbf{d}}_{i+g}$



$g=3,\ n=5,\ m=12,\ K=8, U=000012345555$

Übersicht über Basen und Kurven

Computergraphik und Visualisierung

- Bernstein-Basis
  - affin invariant
  - positiv

$$\sum_{i=0}^{g} \underline{\boldsymbol{b}}_i B_i^g(t)$$

- Beziér-Kurve (Beziér-Punkte)
  - approximierend
  - Konvexehülleneigenschaft
  - Endtangenteninterpolation

- Lagrange-Basis
  - affin invariant
  - unabhängig

$$\sum_{i=0}^{g} \underline{\boldsymbol{q}}_i L_i^g(t)$$

- Lagrange-Kurve
  - Kontrollpunktinterpolation

- Hermite-Basis
  - lokale Definition
- Hermite-Spline
  - Kontrolltangenteninterpolation
  - lokaler Kontrolltangenteneinfluss
  - C^1-stetig

- natürliche Basis
  - affin invariant
  - positiv
  - lokale Definition

$$\sum_{i=0}^{K-1} \underline{\boldsymbol{d}}_i N_i^g(t)$$

- Basis-Splines (De Boor Punkte)
  - Endtangenteninterpolation
  - lokaler Kontrollpunkteinfluss
  - Konvexehülleneigenschaft
  - C^{g-1}-stetig