Sonderfall der **Gleichverteilung:**

$p(x_i) = \frac{1}{N}$ für $i = 1, 2, ..., N$

$H_Q = H_0 = \operatorname{ld} N$

$\rightarrow$ **Maximalwert** der Entropie

$\rightarrow$ **Beweis**:

Extremwertbestimmung von H_m verknüpft mit der Nebenbedingung $\sum_{i=1}^{N} p(x_i) = 1$ (erfordert Lagrange-Multiplikator λ)

$$F = \sum_{i=1}^{N} p(x_i) \operatorname{ld} \frac{1}{p(x_i)} - \lambda \left(\sum_{i=1}^{N} p(x_i) - 1 \right) = \sum_{i=1}^{N} \left(p(x_i) \operatorname{ld} \frac{1}{p(x_i)} - \lambda p(x_i) \right) + \lambda$$

$$\forall i.\, F'(p(x_i)) = -\operatorname{ld} p(x_i) - \operatorname{ld} e - \lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \operatorname{ld} \frac{1}{p(x_i)} = \operatorname{ld} e + \lambda$$

Da die Unbestimmtheiten über alle $p(x_i)$ gleich sind müssen auch alle $p(x_i)$ gleich sein.

$$F'(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} p(x_i) - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^{N} p(x_i) = 1$$

D. h., mit $\sum_{i=1}^{N} p(x_i) = 1$ ist $p(x_i) = \frac{1}{N}$.

$$F''(p(x_i)) < 0? \quad (-\operatorname{ld} p(x_i))' = (-\operatorname{ld} e \ln p(x_i))' = -\frac{\operatorname{ld} e}{p(x_i)} < 0$$

D. h., die erste Ableitung liefert tatsächlich den Maximalwert.

Warum sollte von einer Quelle soviel wie möglich bekannt sein?

Buch mit 300 $Seiten$, 40 $Zeilen/Seite$ und 65 $Zeichen/Zeile$

$\longrightarrow$ 780 000 $Zeichen/Buch$

Alphabet: $X = \{a, b, c, ..., z, \_\}$, d.h. $N = 27\,QZ$

Das Buch soll abgespeichert werden.

8 Bit-ASCII-Kode: $l = 8\,Bit/QZ$

$6{,}24\,M\,Bit/Buch = 780\,k\,Byte/Buch$

$l = \lceil H_0 \rceil = \lceil \mathrm{ld} N \rceil$, $p(x_i) = \frac{1}{N}$:

$l = 5\,Bit/QZ$

$3{,}9\,M\,Bit/Buch = 487{,}5\,k\,Byte/Buch$

$l_m = H_m$, $p(x_i) \neq \frac{1}{N}$: $l_m = 4{,}04\,Bit/QZ$

$3{,}15\,M\,Bit/Buch = 393{,}9\,k\,Byte/Buch$

$l_M = H_M^{(1)}$: $l_M \approx 3{,}6\,Bit/QZ$

$2{,}81\,M\,Bit/Buch = 351\,k\,Byte/Buch$

$l_M = H_M^{(k)}$: $l_M \approx 1{,}3\,Bit/QZ$

K. Küpfmüller. *Die Entropie der deutschen Sprache.* FTZ 7(1954).
deutsche Sprache statistische Bindungen bis $k \approx 100$

$1\,M\,Bit/Buch = 126{,}8\,k\,Byte/Buch$

Umsetzung von MARKOW-Quellen am Beispiel der deutschen Sprache

(K. Küpfmüller. *Die Entropie der deutschen Sprache.* FTZ 7(1954) H.7, S. 265-272)

Zufällige Folge unabhängiger Zeichen gleicher Auftrittswahrscheinlichkeit

MOTCFBIWKQK NJRBUEJQPHLYNDUBAFW

Folge unabhängiger Zeichen mit Auftrittswahrscheinlichkeiten entsprechend der deutschen Sprache

EME GKNEET ERS TITBL BTZENFNDBGD EAI E LASZ BETEATR IASMIRCH EGEOM

MARKOW-Quelle 1. Ordnung

AUSZ KEINU WONDINGLIN DUFRN ISAR STEISBERER ITEHM ANORER

MARKOW-Quelle 2. Ordnung

PLANZEUDGES PHIN INE UNDEN VERBEICHT GES AUF ES SO UNG GAN DICH WANDERSO

MARKOW-Quelle 3. Ordnung

ICH FOLGEMASZIG BIS STEHEN DISPONIN SEELE NAMEN

Beispiel MARKOW-Quellen

Gegeben: $(p(x_j|x_i)) = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; N = 3$

Gesucht: $(\overline{p(x_i)})\,;\; H_M = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \overline{p(x_i)}\, p(x_j|x_i)\, \mathrm{ld}\, \frac{1}{p(x_j|x_i)}$

Frage letzter Vorlesung: Wieviel Takte sind für den Erhalt der stationären Auftrittswahrscheinlichkeiten $(\overline{p(x_i)})$ notwendig?

-

				0,5	0,2	0,3
				0,1	0,6	0,3
t	$p(x_1)_t$	$p(x_2)_t$	$p(x_3)_t$	0,2	0,1	0,7
0	1	0	0	0,5	0,2	0,3
1	0,5	0,2	0,3	0,33	0,25	0,42
2	0,33	0,25	0,42	0,274	0,258	0,468
3	0,274	0,258	0,468	0,2564	0,2564	0,4872
4	0,2564	0,2564	0,4872	0,25128	0,25384	0,49488
⋮						
15	0,249999	0,250004	0,499999	0,249999	0,250001	0,5
16	0,249999	0,250001	0,5	0,25	0,25	0,5

$\rightarrow\; (\overline{p(x_i)}) = (0,25 \;\; 0,25 \;\; 0,5)$

- $(p(x_j)_{t+1}) = (p(x_i)_0) \cdot (p(x_j|x_i))^{t+1}$

$$(p(x_j|x_i))^{17} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,25 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix} \rightarrow (\overline{p(x_i)}) \text{ unabh. von } (p(x_i)_0)$$

- Gleichungssystem