Übungsaufgaben zu ausgewählten Abschnitten

2 REED-MULLER-Kodes

1. REED-MULLER-Kodes der Blocklänge $n = 8$ sind bzgl. Fehlererkennung und Fehlerkorrektur zu untersuchen.

   (a) RM-Kode 1. Ordnung: Gegeben sei $a^* = (u_3^* u_2^* u_1^* u_0^*) = (0101)$.

   - Bestimmen Sie das zugehörige Kanalkodewort.
   - Dekodieren Sie folgende Empfangswörter:
     $b_1 = (01110011)$
     $b_2 = (00111111)$
     $b_3 = (11110001)$
     $b_4 = (00001111)$
   - Schlussfolgerungen?

   (b) RM-Kode 2. Ordnung: Gegeben sei $a^* = (1010111)$.

   - Bestimmen Sie das zugehörige Kanalkodewort.
   - Testen Sie den Dekodierungsalgorithmus für störungsfreie Übertragung ($b = a$).
   - Wie verhält sich der Dekodierungsalgorithmus bei gestörter Übertragung?

2. Der $(32, 6, d_{min} =?)$RM-Kode der NASA, der zur Bildübertragung vom Mars verwendet wurde, hat die Parameter $m = 5, s = 1$ und folgende Generatormatrix:

$$G_{6\times 32} = \begin{pmatrix} 11111111\ 11111111\ 11111111\ 11111111 \\ 10101010\ 10101010\ 10101010\ 10101010 \\ 11001100\ 11001100\ 11001100\ 11001100 \\ 11110000\ 11110000\ 11110000\ 11110000 \\ 11111111\ 00000000\ 11111111\ 00000000 \\ 11111111\ 11111111\ 00000000\ 00000000 \end{pmatrix}.$$

   Folgendes Empfangswort soll dekodiert werden:

$b = (10101010\ 01010101\ 10111111\ 11111111).$ $\qquad$ ($b^* = (010011)$)

3. Lässt sich ein Paritätskode mit einem RM(s, m) beschreiben?

3 BCH-Kodes

1. Es soll ein fehlerkorrigierender BCH-Kode entworfen werden, der bzgl. seiner Parameter mit dem $(32, 6, 16)$RM-Kode vergleichbar ist.

   (a) Bestimmen Sie alle Zyklen der Nullstellen (Potenzen von α) im $GF(2^5)$ und jeweils den entsprechenden grad $m_i(x)$.

   (b) Für die Fälle $\mu = 1$ und $\mu = 0$ sind geeignete Generatorpolynome (in allg. Form) zu entwickeln. Die entsprechenden BCH-Kodes sind in der (n, l, d_{min}) Notation anzugeben.

   (c) Vergleichen Sie die geeigneten BCH-Kodes mit dem gegebenen RM-Kode.

   ($(31, 6, 15)$BCH, $g(x) = m_1(x)\, m_3(x)\, m_5(x)\, m_7(x)\, m_{11}(x)$
   $\rightarrow$ erweiterter $(32, 6, 16)$BCH)

2. Bestimmen Sie die charakteristischen Parameter k, l, d_{min} aller möglichen nichtprimitiven BCH-Kodes der Länge $n = 21$, die im $GF(2^6)$ erzeugt werden können.
   Hinweis: Zyklen mod 21 bilden!

3. Gilt die zyklische Eigenschaft auch für nichtprimitive BCH-Kodes?

4. Das Generatorpolynom eines BCH-Kodes der Länge $n = 31$ sei durch das folgende Produkt von Minimalpolynomen beschrieben:
   $g(x) = m_1(x)\, m_7(x)\, m_{11}(x)$.
   Wie groß ist der minimale Abstand dieses Kodes? ($d_{min} = 7$)

5. Konstruieren Sie ein Generatorpolynom für einen verkürzten, primitiven BCH-Kode mit der Blocklänge $n = 50$, dessen Entwurfsabstand $d_E = 6$ ist! (verkürzter $(50, 37, 6)$BCH)

6. Im Satellitensystem INMARSAT wird u. a. ein (63,39)BCH-Kode eingesetzt.
   Analysieren Sie diesen Kode bzgl. seiner Fehlerkorrektureigenschaft.
   ($f_k = 4$)

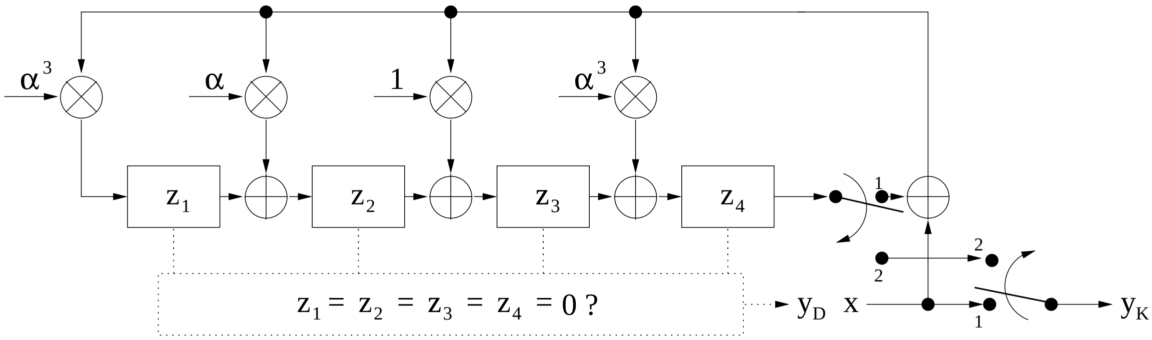
7. Für die binäre Übertragung über einen bündelfehlergestörten Kanal soll ein Kode festgelegt werden. Es ist bekannt, dass sich Bündelfehler über max. 20 Bit erstrecken. Weiter ist bekannt, dass nach Auftreten eines Bündelfehlers mindestens 500 Bit fehlerfrei übertragen werden. Zur Auswahl stehen ein BCH-Kode der Länge $n = 127$ und der Länge $n = 255$. Es sollen alle auftretenden Bündelfehler erkannt werden.
   Bestimmen Sie Kodeparameter und Koderaten. Vergleichen Sie die Ergebnisse.
   ($(127, 106, 7)$BCH, $(255, 231, 7)$BCH)

4 RS-Kodes

1. Aufgabe 7. (BCH-Kodes) ist auf die Korrektur von Bündelfehlern zu erweitern. Im Vergleich dazu ist ein RS-Kode der Länge $n = 31$ zu konstruieren.
   Zu welchen Ergebnissen kommen Sie?
   ($(127, 29, 43)$BCH, $(255, 115, 43)$BCH, $(31, 21, 11)$RS)

2. Gegeben sei ein RS-Kode über $GF(2^3)/x^3 + x + 1$ mit $d_{min} = 5$.
   (a) Bilden Sie das Generatorpolynom $g(x)$.
   (b) Erzeugen Sie aus dem Quellenkodewort $a^* = (\alpha^5\alpha^6\alpha^4)$ das zugehörige Kanalkodewort a mittels Divisionsverfahren. Prüfen Sie die zyklische Eigenschaft des Kodes durch zyklische Verschiebung von a um eine Position nach links.
   (c) Prüfen Sie, ob das empfangene Wort $b = (\alpha^3\alpha\alpha^5 0\alpha^4\alpha^6 1)$ ein Element des gegebenen RS-Kodes ist.
   (d) Kodierung und Dekodierung des RS-Kodes können mit einer rückgekoppelten Schieberegisterschaltung realisiert werden.

Auf dieser Grundlage sollen die Aufgaben (b) und (c) gelöst werden (Schaltung als determinierter Automat, Verhaltensweise in Formelnotation, Kodierung/Dekodierung mittels Automatenband).



$\Phi = (X, Y, Z, R, S, z = (0,0,0,0))$:

$x \in X = GF(2^{k_1})^n$; $y_K \in Y = GF(2^{k_1})^n$, $y_D \in \{0,1\}$

$z = (z_1, z_2, ..., z_{k=4})$, $z_i \in GF(2^{k_1})$

$$R : y_K(t) = y_K = \begin{cases} 1: & x \\ 2: & z_4 \end{cases}$$

$$S : z_1' = \begin{cases} 1: & \alpha^3 \, (z_4 + x) \\ 2: & 0 \end{cases} \qquad z_2' = \begin{cases} 1: & z_1 + \alpha \, (z_4 + x) \\ 2: & z_1 \end{cases}$$

$$z_3' = \begin{cases} 1: & z_2 + 1 \, (z_4 + x) \\ 2: & z_2 \end{cases} \qquad z_4' = \begin{cases} 1: & z_3 + \alpha^3 \, (z_4 + x) \\ 2: & z_3 \end{cases}$$

Automatenband:

t	0	1	...
Schalter	1	1	...
x			
z_1	0		
z_2	0		
z_3	0		
z_4	0		
$y_{K/D}$			

Kodieren und Dekodieren Sie die Folgen aus (b) und (c) zur Überprüfung auf Richtigkeit!

3. Bei der Satellitenkommunikation wird ein (255,223)RS-Kode eingesetzt (NASA-Standard).
   Analysieren Sie diesen Kode hinsichtlich seiner Fehlerkorrektureigenschaften. Welche Länge kann ein korrigierbarer Bündelfehler maximal haben? ($f_k = 16$)

6 Fehlerkorrektur von BCH- und RS-Kodes

1. Zur Fehlerkorrektur ist ein (15,5,?)BCH-Kode vorgesehen. $g(x) = x^{10} + x^8 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$ wurde mit $M(x) = x^4 + x + 1$ erzeugt. Die Empfangsfolgen $b_1 = (111001001001111)$ und $b_2 = (101001001001111)$ sind auf Fehler zu prüfen und ggf. zu korrigieren. ($\nu_{b_1} = 3$, $\nu_{b_2} = 2$)

2. Zur Fehlerkorrektur ist ein (15,7,5)BCH-Kode mit $g(x) = x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1$ vorgesehen. Die Empfangsfolge $b(x) = x^{11} + x^{10} + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^3 + 1$ ist auf Fehler zu prüfen und ggf. zu korrigieren.
   (1. $s = (\alpha^2, \alpha^4, \alpha^{13}, \alpha^8)$, 2. $\nu = 2$, 3. keine NSt $\rightarrow$ DV)

3. Zur Fehlerkorrektur ist ein (15,6,?)BCH-Kode mit $g(x) = x^9 + x^6 + x^5 + x^4 + x + 1$ vorgesehen. Korrigiere $b_1 = (100001011101111)$, $b_2 = (101001011101111)$ und $b_3 = (110001011101000)$!
   Beachte:
   $$\nu = \begin{cases} f_k & (f_k \bmod 2 = 0 \wedge s_0 = 0) \vee (f_k \bmod 2 = 1 \wedge s_0 = 1) \\ f_k - 1 & (f_k \bmod 2 = 0 \wedge s_0 = 1) \vee (f_k \bmod 2 = 1 \wedge s_0 = 0) \end{cases}$$
   $\nu = \nu - 2$
   (1. $s_{b_1} = (1, \alpha^{13}, \alpha^{11}, \alpha^9, \alpha^7)$, 2. $\nu_{b_1} = 1$, $\rightarrow$ Korrektur)
   (1. $s_{b_2} = (0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^5, \alpha^4)$, 2. $\nu_{b_2} = 2$, $\rightarrow$ Korrektur)
   (1. $s_{b_3} = (1, \alpha^{10}, \alpha^5, \alpha^8, \alpha^{10})$, 2. $\nu_{b_3} = 1$, $\rightarrow$ DV)

4. Es sind ein RS-Kode ($GF(2^3)/x^3 + x + 1$, $f_k = 1$) und eine Kanalkodefolge $a = (\alpha^4 000 \alpha^0 \alpha^2 \alpha^2)$ gegeben. Nach zweimaliger Übertragung werden $b_1 = (\alpha^4 000000)$ und $b_2 = (\alpha^4 0000 \alpha^2 0)$ empfangen. Korrigieren Sie! Welche Schlussfolgerungen lassen sich ableiten? ($b_1 = \mathbf{0}$, b_2 DV)

5. Ein RS-Kode $(GF(2^4)/x^4 + x + 1)$ hat eine Leistungsfähigkeit von $f_k = 3$. Die Empfangsfolge $b = (00000000000\alpha^0\alpha^0\alpha^0\alpha^0)$ ist fehlerbehaftet. Ist b korrigierbar?
   (1. $s = (\alpha^{12}, \alpha^9, \alpha^{12}, \alpha^3, \alpha^0, \alpha^9)$, 2. $\nu = 3$, 3. keine NSt $\rightarrow$ DV)

6. Ein RS-Kode $(GF(2^3)/x^3 + x + 1)$ wird durch das Generatorpolynom $g(x) = x^4 + \alpha^3 x^3 + x^2 + \alpha x + \alpha^3$ erzeugt.
   Das Empfangspolynom $b(x) = \alpha^5 x^6 + \alpha^5 x^3 + \alpha^2 x^2 + \alpha^2 x + \alpha^6$ ist auf Fehler zu prüfen und ggf. zu korrigieren.
   (1. $s = (\alpha^2, \alpha^3, \alpha^6, \alpha^1)$; $e(x) = \alpha^6 x^5 + \alpha^4 x^4$)

7. Der in der 6. Aufgabe beschriebene RS-Kode soll zur Auslöschungskorrektur verwendet werden. Das gültige Kodewort $a = (\alpha^5\alpha^6\alpha^4\alpha^5\alpha^2\alpha^2\alpha^6)$ soll in den Positionen $U = (\alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5)$ Auslöschungen aufweisen, die zu korrigieren sind.
   Das Empfangswort ist $b = (\alpha^5\mathbf{0000}\alpha^2\alpha^6)$.
   (1. $s = (0, 0, \alpha^4, \alpha^1)$; $e(x) = \alpha^6 x^5 + \alpha^4 x^4 + \alpha^5 x^3 + \alpha^2 x^2$)

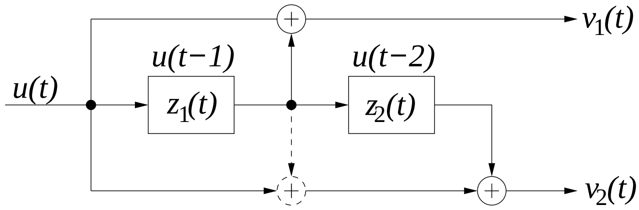
8. BM- und EUKLID-Algorithmus ermöglichen unter Berücksichtigung von Auslöschungsstellen die Suche nach weiteren zufällig aufgetretenen, unerkannten Fehlern. Für den in der 6. Aufgabe beschriebenen RS-Kode ist $b = (\alpha^2 0 \alpha^5 \mathbf{0} \alpha^4 \mathbf{0} \alpha^2)$ mit $U = (\alpha, \alpha^3)$ zu korrigieren.

9. Vergleichen Sie die Verfahren von PZG, BM und EUKLID für die Berechnung des Lokatorpolynoms. Grundlage bildet der in der 6. Aufgabe beschriebene RS-Kode. Korrigieren Sie $b = (\alpha^3\alpha^3\alpha^4\alpha^3 1 \alpha^4\alpha^3)$.

10. Gegeben ist ein primitiver $(15, 7, 5)$BCH-Kode mit dem Generatorpolynom $g(x) = x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1$; $GF(2^4)/x^4 + x + 1$.
    Es ist die Empfangsfolge $b = (111110111100101)$ mit BM und EUKLID (Vorlesungsbeispiel mit PZG-Anwendung) zu korrigieren.

7 Faltungskodes

1. Folgende Schaltung beschreibt (zwei) Faltungskodierer:



   (a) Schließen Sie aus, dass der Kodierer katastrophale Eigenschaften besitzt (Untersuchung von G_1 und G_2).

   (b) Beschreiben Sie den nichtkatastrophalen Faltungskodierer (Anwendung aller Beschreibungsformen).

   (c) Ermitteln Sie für die Quellenkodefolge $a^* = (0111011110)$ die Kanalkodefolge a, bei Anwendung von Terminierung.

2. Beschreiben Sie den rekursiv systematischen Faltungskodierer $G = (1\ ,\ \frac{5_8}{7_8})$ und vergleichen Sie Zustandsgraph und Kanalkodealphabet mit denen des nichtsystematischen Faltungskodierers $G = (7_8, 5_8)$.

3. Ein eindimensionaler Faltungskodierer ist mit $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ beschrieben.

   (a) Geben Sie das Schaltbild an.

   (b) Welche Eigenschaften besitzt der Kodierer?

   (c) Geben Sie für eine $l = 6$ begrenzte (terminierte) Informationsfolge die Kanalkodefolge an, z.B. für $a^* = (111001)$.

   (d) Notieren Sie eine Punktierungsmatrix mit $R_p = \frac{3}{5}$ und wenden Sie diese auf die Kanalkodefolge a an.

4. Fortsetzung Aufgabe 3.

(a) Die Kanalkodefolge a wird während der Übertragung gestört. Empfangen wird $b_h = (100\,011\,110\,000\,101\,001\,100\,101)$. Dekodieren Sie mit dem VITERBI-Algorithmus.

(b) $b_{h,p} = a_p$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
Dekodieren Sie mit dem VITERBI-Algorithmus bei vorgeschaltetem Depunktierer. Rechnen Sie an den depunktierten Stellen zum Vergleich auch mit hard-Werten.

5. **Soft-decision mit soft-input**
Eine mit dem Faltungskodierer $G = (5_8, 7_8)$ (siehe Vorlesung) erzeugte Kanalkodefolge liegt beim Dekodierer wie folgt vor:
$b_q = (1 - 4 \quad -3\,3 \quad -4 - 1 \quad -1 - 1 \;\; 0 - 3 \quad -4 - 3)$.
Das Quantisierungsalphabet lautet $Q = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.
Die Folge ist mit MD- und ML-Metrik zu dekodieren.
Welches Dekodierungsergebnis liefert im Vergleich dazu die Umsetzung einer harten Entscheidung am Dekodierungseingang?

9 LDPC-Kodes

Übungsaufgaben im Rahmen der Vorlesung!

Selbstständige Bearbeitung einer Aufgabe aus dem Aufgabenkomplex zum Erhalt des Leistungsnachweises (siehe web-Seite: Aufgaben für Leistungsnachweis).