

Einseitig unendlich ausgedehnte ebene Wand

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}. \quad (2.1)$$

Einführung einer neuen Variablen

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{4 a \tau}} \quad (2.2)$$

mit der Substitution nach

$$\frac{d\eta}{d\tau} = -\frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{4 a \tau}} \tau^{-3/2} = -\frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{4 a \tau}} \frac{1}{\tau}$$

von

$$d\tau = -\frac{2 \tau}{\eta} d\eta \quad \text{und} \quad dx = \sqrt{4 a \tau} d\eta$$

liefert nach Einsetzen

$$\frac{d^2 t}{d\eta^2} + 2 \eta \frac{dt}{d\eta} = 0.$$

Die Lösung lautet

$$t(x, \tau) = A + B \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} \exp(-\eta^2) d\eta \quad (2.3)$$

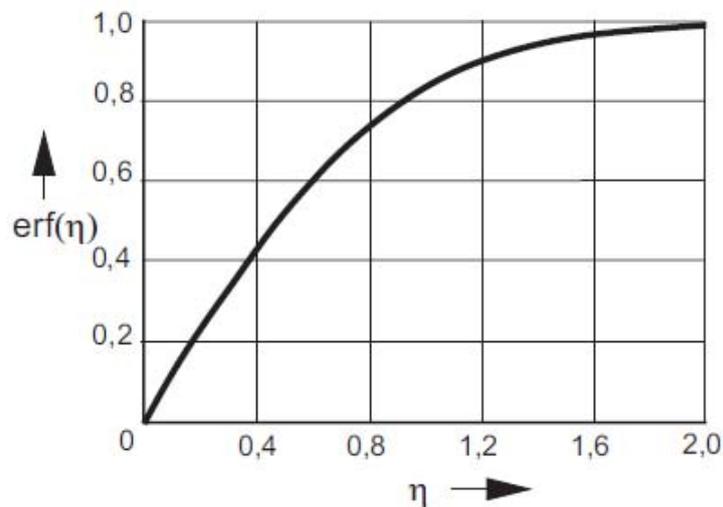
Instationäre Wärmeleitung: Halbunendliche Wand

wobei

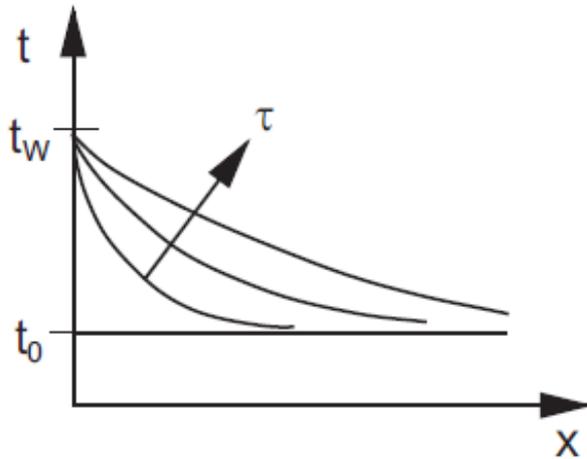
$$\operatorname{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} \exp(-\eta^2) d\eta$$

das **Gaußsche Fehlerintegral**

bzw. im Englischen die **e r r o r-function** darstellt



Randbedingung 1.Art



Anfangsbedingung $t(\tau = 0, x) = t_0$

Randbedingung $t(x = 0, \tau > 0) = t_W$
(Temperatursprung zur
Zeit $\tau = 0$ an der Wand)

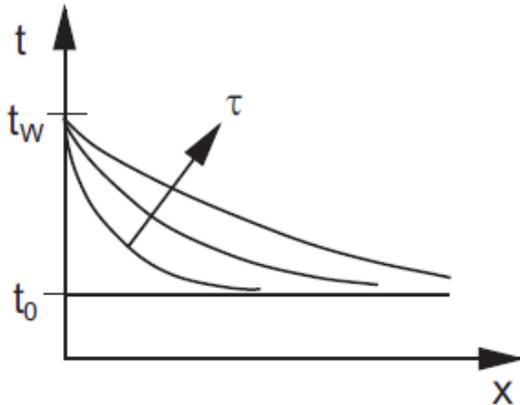
Einsetzen dieser Bedingungen in Gl.(2.3) liefert für

$$A = t_W \text{ und } B = t_0 - t_W$$

dimensionslose Temperatur

$$\vartheta = \frac{t - t_W}{t_0 - t_W} = \text{erf}(\eta) \quad (2.4)$$

Randbedingung 1.Art



Die Wärmestromdichte im Körper berechnet sich aus

$$\hat{q}(x) = -\lambda \left(\frac{dt}{dx} \right) = -\lambda \left(\frac{dt}{d\eta} \right) \frac{d\eta}{dx}$$

nach Einsetzen von

$$\frac{dt}{d\eta} = (t_0 - t_w) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-\eta^2)$$

und

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{\sqrt{4 a \tau}}$$

zu

$$\hat{q}(\eta) = - \frac{(t_0 - t_w) \lambda}{\sqrt{a \pi \tau}} \exp(-\eta^2) \quad (2.5)$$

Randbedingung 1.Art

Für die Wärmestromdichte an der Oberfläche ($x = 0$) zu einer beliebigen Zeit τ gilt

$$\hat{q}(x = 0, \tau) = -\frac{\lambda (t_0 - t_W)}{\sqrt{a \pi \tau}} = \frac{b (t_W - t_0)}{\sqrt{\pi \tau}} \quad (2.6)$$

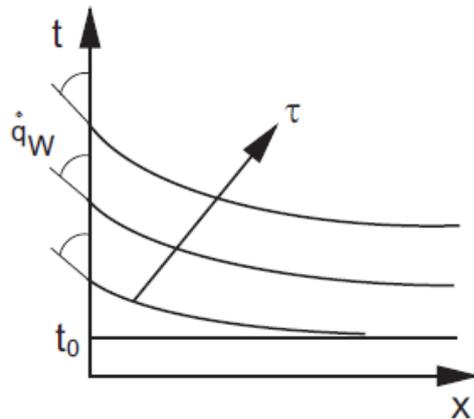
mit dem Wärmeeindringkoeffizienten

$$b = \frac{\lambda}{\sqrt{a}} = \sqrt{\lambda \rho c_p}$$

Die von einer Wand aufgenommene bzw. abgegebene mittlere Wärmestromdichte in der Zeit von $\tau = 0$ bis τ berechnet sich aus der zeitlichen Mittelwertbildung zu

$$\hat{q}_{(m)}(x = 0) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \hat{q}(x = 0, \tau) d\tau = \frac{2 b (t_W - t_0)}{\sqrt{\pi \tau}} \quad (2.7)$$

Randbedingung 2.Art



Differenziation von Gl.(2.1) nach x und die Vertauschung der Reihenfolge

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right) = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)$$

und mit

$$\hat{q} = -\lambda \partial t / \partial x$$

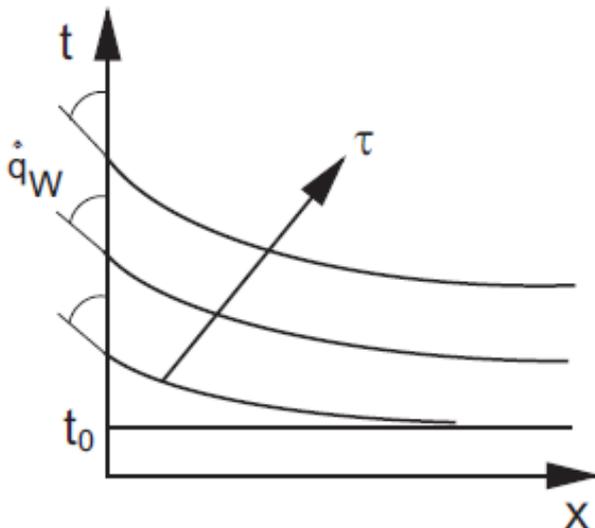
wird

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \hat{q}}{\partial x^2}$$

Diese Gleichung hat die gleiche Form wie Gl.(2.1)

deshalb sind alle Lösungen für $t(x, \tau)$ auf $\hat{q}(x, \tau)$ anwendbar

Randbedingung 2.Art



Anfangsbedingung

$$t(\tau = 0, x) = t_0$$

Randbedingung

$$\hat{q}_W(x = 0, \tau > 0) = \text{const}$$

Lösung

$$\hat{q}(x, \tau) = \hat{q}_W(1 - \text{erf}(\eta)) \quad (2.8)$$

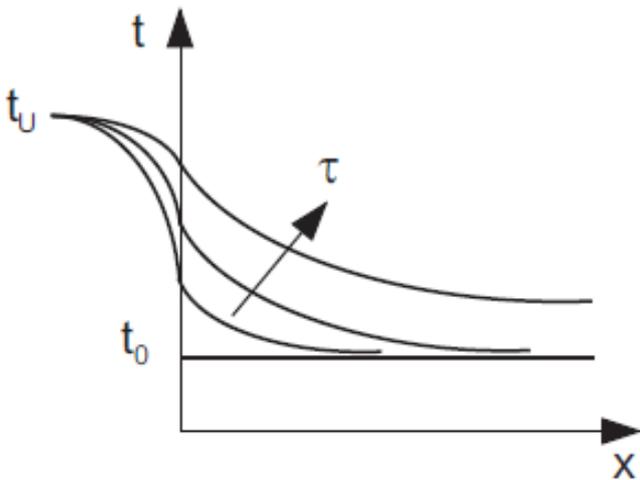
Aus Gl.(2.8) erhält man den Temperaturverlauf in der Wand

$$t(x, \tau) = t_0 + \frac{2 \hat{q}_W \sqrt{\tau}}{b} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\eta^2) - \eta (1 - \text{erf}(\eta)) \right] \quad (2.9)$$

bzw. den Temperaturverlauf an der Oberfläche ($x = 0$)

$$t(x = 0, \tau) = t_0 + \frac{2 \hat{q}_W \sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi} b} \quad (2.10)$$

Randbedingung 3.Art



Anfangsbedingung: $t(\tau = 0, x) = t_0$

Randbedingung :

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_W = \frac{\alpha}{\lambda} (t_W - t_U)$$

Temperaturverlauf

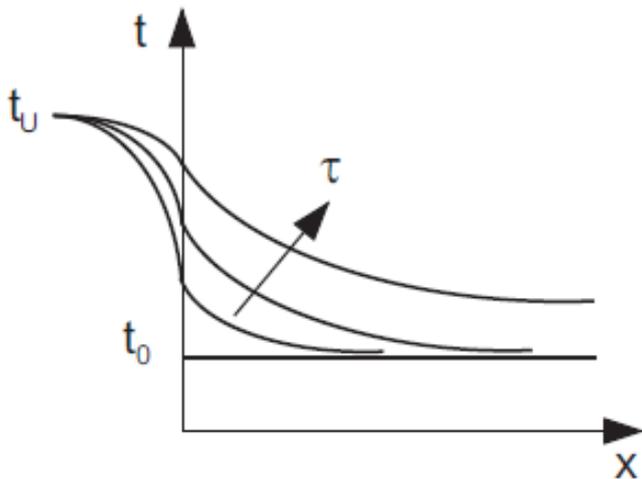
$$\vartheta = \frac{t - t_U}{t_0 - t_U} = \operatorname{erf}(\eta) + \exp(-\eta^2) \exp(\eta + Bi^*)^2 [1 - \operatorname{erf}(\eta + Bi^*)] \quad (2.11)$$

Modifizierte Biot-Zahl

$$Bi^* = \frac{\alpha \sqrt{a \tau}}{\lambda} \quad (\text{charakteristische Länge } \sqrt{a \tau})$$

$$Bi^* = Bi \sqrt{Fo} \quad \left(Bi = \frac{\alpha \ell}{\lambda}, Fo = \frac{a \tau}{\ell^2} \right)$$

Randbedingung 3.Art



Oberflächentemperatur ($\eta = 0$)

$$\vartheta_W = \frac{t_W - t_U}{t_0 - t_U} = \exp(Bi^{*2}) [1 - \operatorname{erf}(Bi^*)] \quad (2.12)$$

Wärmestromdichte an der Wandoberfläche zur Zeit τ

$$\hat{q}(\eta = 0, \tau) = \alpha (t_U - t_0) \exp(Bi^{*2})(1 - \operatorname{erf}(Bi^*)) \quad (2.13)$$

Berührungstemperatur zwischen zwei Körpern

Anfangsbedingung:

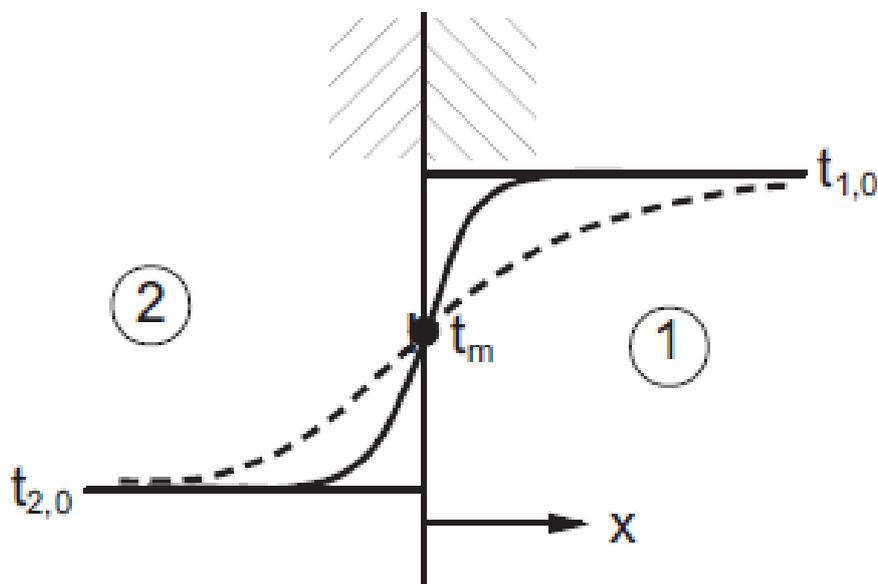
$t_{1,0}$ im Körper 1

$t_{2,0}$ im Körper 2

Randbedingung:

$t_1(x = 0) = t_2(x = 0)$

$\hat{q}_1(x = 0) = \hat{q}_2(x = 0)$

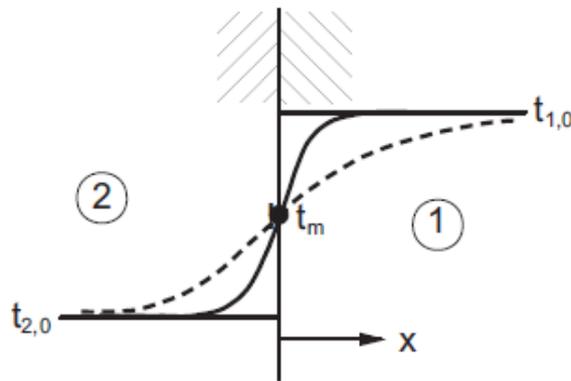


$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a_1 \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} = a_2 \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$$

Annahme: $t_1(x = 0) = t_2(x = 0) = t_m$

Bei der Annahme wird von einer zeitlich konstanten Berührungstemperatur ausgegangen

Instationäre Wärmeleitung: Halbunendliche Wand



Körper 1 $t_1 = t_m + (t_{1,0} - t_m) \operatorname{erf}(\eta_1)$

Körper 2 $t_2 = t_m + (t_{2,0} - t_m) \operatorname{erf}(-\eta_2) = t_m - (t_{2,0} - t_m) \operatorname{erf}(\eta_2)$

$$\eta_1 = \frac{x}{\sqrt{4 a_1 \tau}}, \quad \eta_2 = \frac{x}{\sqrt{4 a_2 \tau}}$$

Mit der Randbedingung $\hat{q}_1(x=0) = \hat{q}_2(x=0)$ gilt

$$\hat{q}_1(x=0) = -\lambda \left(\frac{dt_1}{dx} \right)_{x=0} = -\frac{(t_{1,0} - t_m) \lambda_1}{\sqrt{a_1 \pi \tau}}$$

$$\hat{q}_2(x=0) = -\lambda \left(\frac{dt_2}{dx} \right)_{x=0} = \frac{(t_{2,0} - t_m) \lambda_2}{\sqrt{a_2 \pi \tau}}$$

Instationäre Wärmeleitung: Halbunendliche Wand

Gleichsetzen und mit $b = \lambda/\sqrt{a}$ liefert

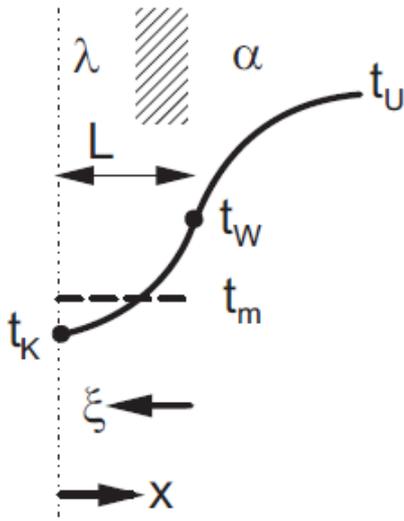
$$\frac{t_m - t_{2,0}}{t_{1,0} - t_m} = \frac{b_1}{b_2}$$

bzw.
$$t_m = \frac{b_1 t_{1,0} + b_2 t_{2,0}}{b_1 + b_2} \quad (2.14)$$

Die Berührungstemperatur t_m ist näher der Temperatur des Körpers mit dem größeren b

Da in der Gl.(2.14) die Zeit nicht als Variable auftritt, war die Annahme einer zeitunabhängigen Kontakttemperatur berechtigt.

Näherungsverfahren für mittlere Temperatur



Annahme: Es liegt ein Wärmeübergangswiderstand auf der Außenseite des Körpers und ein Wärmeleitwiderstand im Körper vor. (Bei quasistatischer Wärmeleitung wird im Vergleich dazu kein Wärmeleitwiderstand im Körper berücksichtigt, vgl. [4] S.38).

Wärmestrom von der Umgebung an die Wand

$$\dot{Q}_K = \alpha A (t_U - t_W)$$

Wärmestrom von der Wand in den Körper

$$\dot{Q}_W = \frac{\lambda_{eff}}{\ell} A (t_W - t_m) \quad (2.15)$$

Wärmestrom von der Umgebung in den Körper

$$\dot{Q} = k_{eff} A (t_U - t_m) \quad (2.16)$$

Instationäre Wärmeleitung:

effektiven Wärmedurchgangskoeffizienten

$$k_{eff} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} + \frac{\ell}{\lambda_{eff}}} \quad (2.17)$$

Die Energiebilanz für den Körper lautet

$$\dot{Q} = \rho c_p V \frac{dt_m}{d\tau} \quad (V \quad \text{Volumen des halben Körpers}) \quad (2.18)$$

Die Integration von (2.16) u. (2.18) bei der Annahme $k_{eff} = \text{const}$ und konstanter Stoffwerte

$$\int_{t_0}^{t_m} \frac{dt_m}{t_U - t_m} = \frac{k_{eff} A}{\rho c_p V} \int_0^{\tau} d\tau$$

liefert für die dimensionslose mittlere Temperatur

$$\vartheta_m = \frac{t_m - t_U}{t_0 - t_U} = \exp\left(-\frac{k_{eff} A}{\rho c V} \tau\right) \quad (2.19)$$

Instationäre Wärmeleitung:

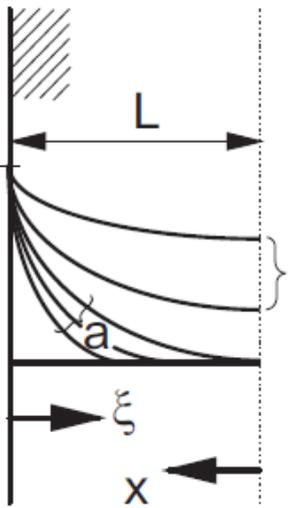
Mit den dimensionslosen Größen Bi und Fo lautet die Gl.(2.19)

$$\vartheta_m = \exp \left(-\frac{A \ell}{V} \frac{Fo}{\frac{1}{Bi} + \frac{\lambda}{\lambda_{eff}}} \right) \quad (2.20)$$

Für die 3 Sonderfälle gilt:

$$\begin{aligned} \frac{A \ell}{V} &= 1 && \text{unendlich ausgedehnte Platte} \\ &= 2 && \text{unendlich langer Zylinder} \\ &= 3 && \text{Kugel .} \end{aligned}$$

Instationäre Wärmeleitung:



Näherungsweise Ermittlung von λ_{eff}

Es werden 2 Zeitbereiche unterschieden:

- a) kleine Fo -Zahlen (z.B. bei Platte und Randbedingung 1.Art bei $Fo < 0,2$)

Im Zeitbereich a) hat die Temperaturfront noch nicht die Körpermitte erreicht.

- b) große Fo -Zahlen ($Fo > 0,4$)

Im Zeitbereich b) liegt eine charakteristische Temperaturverteilung in der Form

$$\frac{t - t_K}{t_W - t_K} = f(x)$$

vor. Es zeigt sich keine Abhängigkeit von τ

Instationäre Wärmeleitung:

- kleine Fo -Zahlen ($\tau \rightarrow 0$)

Der aufgenommene Wärmestrom berechnet sich mit Gl.(2.7) für die mittlere Wärmestromdichte an der Wand zu

$$\dot{Q} = A \hat{q}_m (\xi = 0) = \frac{2 A b (t_W - t_0)}{\sqrt{\pi \tau}}$$

für den effektiven Wärmeleitkoeffizienten zur Anfangszeit

$$\lambda_{eff, 0} = \frac{2 b \ell}{\sqrt{\pi \tau}} = \frac{2 \lambda}{\sqrt{\pi Fo}}$$

$\lambda_{eff,0}$ nimmt mit der Zeit ab

Instationäre Wärmeleitung:

- große *Fo*-Zahlen ($\tau \rightarrow \infty$)

Für die dimensionslose Temperatur gilt

$$\vartheta = \frac{t - t_W}{t_0 - t_W} = \frac{4}{\pi} \exp\left(-\frac{\pi^2}{4} Fo\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2\ell}\right)$$

und für den übertragenen Wärmestrom an der Platte (bei $x = \ell$) wird aus

$$\dot{Q} = -\lambda A \left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=\ell}$$

$$\dot{Q} = \frac{2 \lambda A (t_W - t_0)}{\ell} \exp\left(-\frac{\pi^2}{4} Fo\right)$$

Die mittlere Temperatur in der Wand wird

$$\vartheta_m = \frac{t_m - t_W}{t_0 - t_W} = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} \vartheta(x) dx = \frac{8}{\pi^2} \exp\left(-\frac{\pi^2}{4} Fo\right) \quad (2.23)$$

Aus Gl.(2.15) mit Gl.(2.23) wird

$$\dot{Q}_W = \frac{\lambda_{eff,\infty} A}{\ell} (t_W - t_0) \frac{8}{\pi^2} \exp\left(-\frac{\pi^2}{4} Fo\right) \quad (2.24)$$

Instationäre Wärmeleitung:

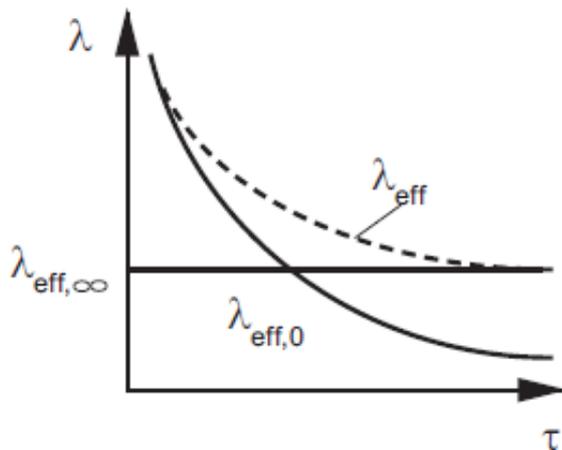
effektiven Wärmeleitkoeffizienten zur Endzeit

$$\begin{aligned}\lambda_{eff,\infty} &= \frac{\pi^2}{4} \lambda = 2,467 \lambda && \text{Platte} \\ \lambda_{eff,\infty} &= \frac{2,405^2}{2} \lambda = 2,892 \lambda && \text{Zylinder} \\ \lambda_{eff,\infty} &= \frac{\pi^2}{3} \lambda = 3,290 \lambda && \text{Kugel}\end{aligned}$$

(2.25)

$\lambda_{eff, \infty}$ ist unabhängig von der Zeit und der Abmessung und nur von der geometrischen Form abhängig

Instationäre Wärmeleitung:



Überlagerung von λ_{eff}

Als Mittelwertbildung über beide Bereiche wird der Näherungsansatz

$$\lambda_{eff} = (\lambda_{eff,0}^2 + \lambda_{eff,\infty}^2)^{1/2} \quad (2.26) \quad \text{gemacht}$$

Die Abweichungen für dieses Verfahren gegenüber der exakten Rechnung sind $< 8\%$. Damit ist es für praktische Anwendungen gut einsetzbar.

Instationäre Wärmeleitung:

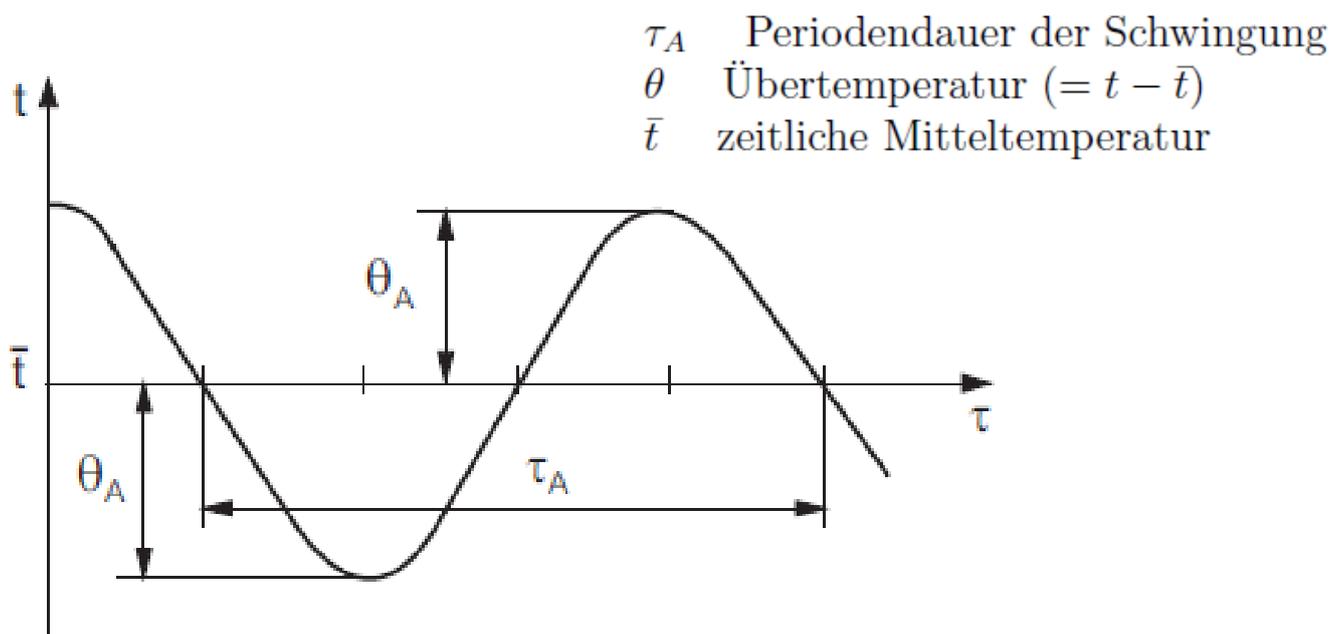
Periodische Änderung der Umgebungstemperatur

Einseitig unendlich ausgedehnte ebene Wand

Annahmen:

- es liegt ein eingeschwungener Zustand vor (d. h. die Anfangszeit bis zum Erreichen einer periodischen Temperaturschwingung ist abgeschlossen)
- periodische Änderung der Umgebungstemperatur nach einer Kosinusfunktion
- konstante Stoffwerte

Randbedingung 1.Art



Für die Temperatur an der Wandoberfläche soll gelten $\theta_W = \theta_A \cos(\omega \tau)$

Instationäre Wärmeleitung:

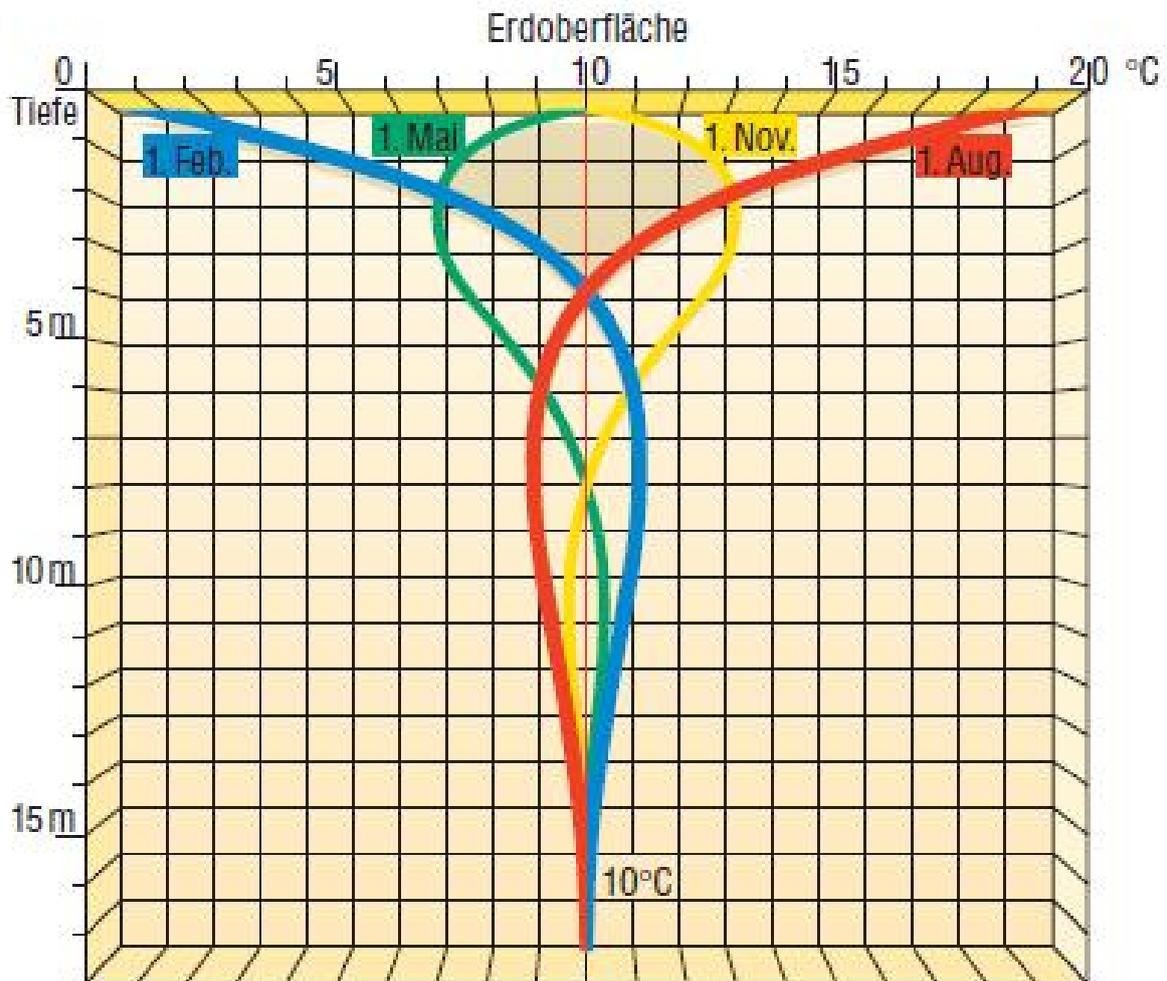
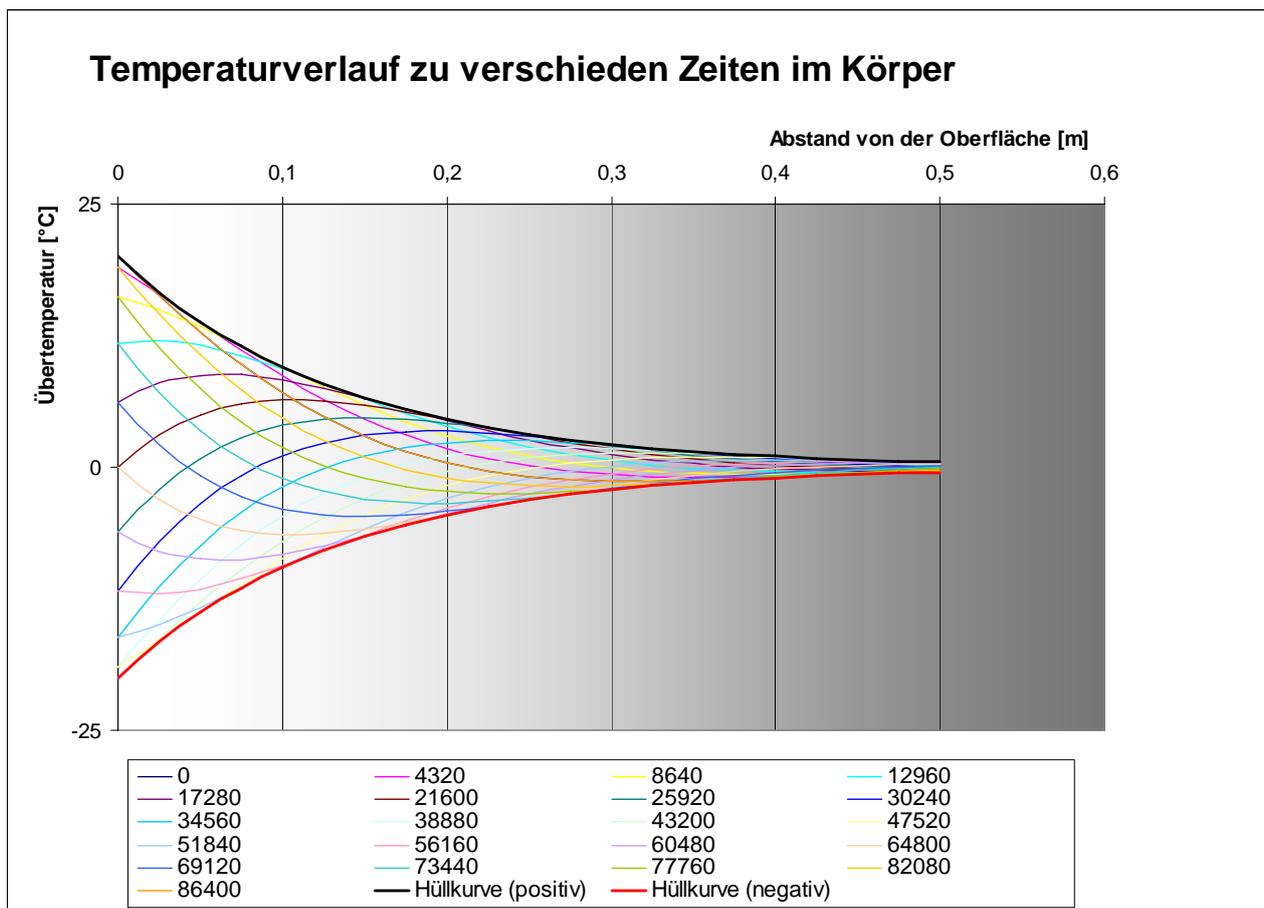
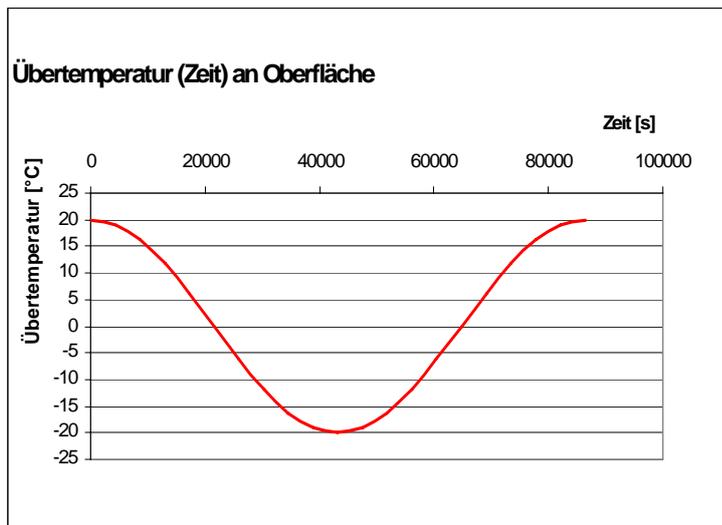


Abb. 2: Mittlerer Temperaturverlauf im ungestörten Erdreich in Abhängigkeit von der Jahreszeit (Quelle: Bundesverband Wärmepumpe (BWP))

Die Temperatur in den obersten Erdschichten bis zu einer Tiefe von ca. 10 m variiert jeweils zeitversetzt mit den Jahreszeiten entsprechend der Umgebungstemperaturen. Tieferliegende Schichten werden von dem Jahreswechsel der Umgebungstemperatur nicht erfasst.

Instationäre Wärmeleitung:

Beispiel : 0,5 m Betonwand , Periodische Temperaturschwingung über den Tag um eine Mittellage von 20° mit einer Amplitude von 20°C



Instationäre Wärmeleitung:

Die maximale Amplitude der Temperaturschwingung berechnet sich zu

$$\theta_A = t_{W,max} - \bar{t} = \bar{t} - t_{W,min}$$

Die Kreisfrequenz der Schwingung beträgt $[\omega] = \frac{1}{s}$

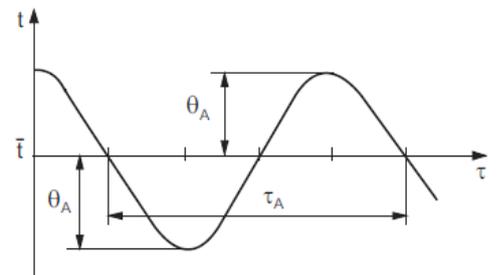
$$\omega = \frac{2 \pi}{\tau_A}$$

Die zu lösende Differenzialgleichung lautet

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (2.27)$$

mit der Randbedingung:

$$\theta_W = \theta(x = 0) = \theta_A \cos(\omega \tau)$$



Instationäre Wärmeleitung:

Folgender Lösungsansatz wird verwendet

$$\theta(x, \tau) = \theta_A \exp(\alpha x + \beta \tau) \quad (2.28)$$

Mit der Euler-Gleichung

$$e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha$$

wird die Randbedingung $\theta_W = \theta_A \exp(i \omega \tau)$
mit $\alpha = \omega \tau$

Lösungsansatz muss die Randbedingung erfüllen

$$\beta = i \omega$$

Das Einsetzen von Gl.(2.28) in Gl.(2.27) liefert

$$\alpha^2 = \frac{\beta}{a} = \frac{i \omega}{a} \text{ und damit } \alpha = \pm \sqrt{\frac{\omega}{a}} \sqrt{i}.$$

Mit $i^2 = -1$ wird aus

$$\sqrt{i} = \sqrt{\frac{i (i + 1)^2}{(i + 1)^2}} = \sqrt{\frac{i (i + 1)^2}{i^2 + 2i + 1}} = \frac{i + 1}{\sqrt{2}}$$

Instationäre Wärmeleitung:

Nach Einsetzen in Gl.(2.28) und mit der Euler-Gleichung

$$\theta(x, \tau) = \theta_A \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a}} x\right) \cos\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a}} x + \omega \tau\right) \quad (2.29)$$

maximale Amplitude der Schwingung

nimmt exponentiell mit dem Abstand von der Wand ab

$$\theta_{max} = \theta_A \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a}} x\right) \quad (2.30)$$

Die Abnahme ist um so stärker, je größer ω
und je kleiner der Temperaturleitkoeffizient a ist

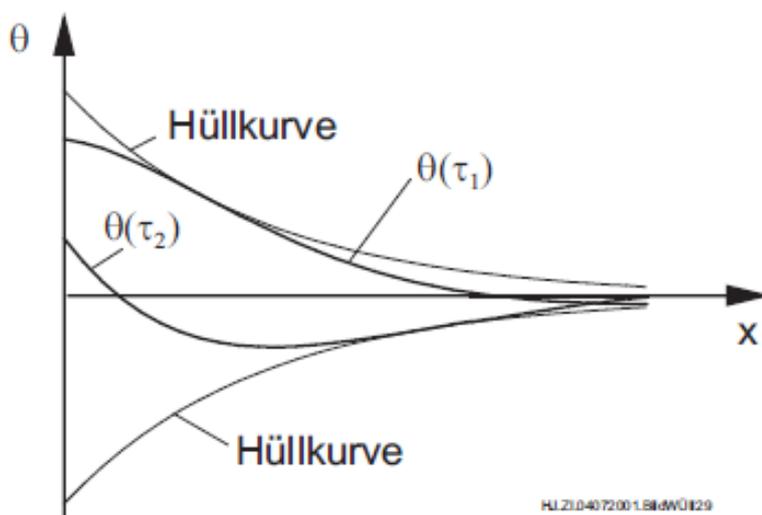


Abb. 2.9: Abklingende
Temperaturschwingung
in der Wand zu 2 Zeiten

Instationäre Wärmeleitung:

Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwingung

$$\begin{aligned}\text{Geschwindigkeit } w &= \frac{\text{Wellenlänge}}{\text{Schwingungsdauer}} \\ &= \frac{2\sqrt{\pi a \tau_A}}{\tau_A} = \sqrt{2 a \omega}\end{aligned}$$

Wellenlänge entspricht dem Abstand zwischen 2 Wellenbergen

$$-\sqrt{\frac{\omega}{2a}} x_1 = 0 \quad \text{und} \quad -\sqrt{\frac{\omega}{2a}} x_2 = 2\pi$$

Damit wird die Wellenlänge Λ

$$\Lambda = x_2 - x_1 = 2\pi \sqrt{\frac{2a}{\omega}} = 2\sqrt{\pi a \tau_A}.$$

Schnelle Schwingungen (großes ω) dringen schneller in den Körper ein als langsame
Je größer a ist, desto schneller dringen die Schwingungen ein

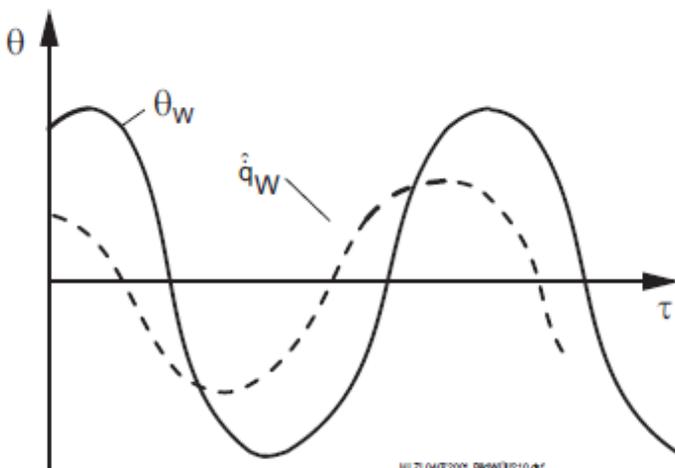
Instationäre Wärmeleitung:

Phasenverschiebung der Temperaturschwingung im Körper gegenüber der Temperaturschwingung an der Oberfläche beträgt

$$\begin{aligned}\Delta\tau_P &= \frac{\text{Weg } x}{\text{Geschwindigkeit } w} \\ &= \frac{x}{\sqrt{2 a \omega}} = \frac{x}{2} \sqrt{\frac{\tau_A}{a \pi}}\end{aligned}$$

Die Wärmestromdichte an der Oberfläche berechnet sich zu

$$\begin{aligned}\hat{q}(x=0) &= -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_{x=0} = -\lambda \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=0} \\ &= \theta_A b \sqrt{\omega} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \omega \tau \right)\end{aligned}\quad (2.31)$$



Schwingung der Temperatur und der Wärmestromdichte in der Wand

Instationäre Wärmeleitung:

Die während der Aufwärmphase aufgenommene Wärme

$$\begin{aligned}\hat{q}(x=0) &= \int_{5/8 \tau_A}^{9/8 \tau_A} \hat{q}(x=0) d\tau \\ &= \frac{2 b \theta_A}{\sqrt{\omega}} = b \theta_A \sqrt{\frac{2 \tau_A}{\pi}}\end{aligned}\quad (2.32)$$

Die aufgenommene Wärme ist proportional b und $\sqrt{\tau_A}$ bzw. $1/\sqrt{\omega}$.

Randbedingung 3. Art

Übertemperatur in der Wand

$$\theta = \theta_A \frac{\exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a}} x\right)}{\sqrt{1 + 2\beta + 2\beta^2}} \cos\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a}} x + \omega \tau - \varepsilon\right) \quad (2.33)$$

$$\varepsilon = \arctan\left(\frac{\beta}{1 + \beta}\right), \quad \beta = \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{\omega}{2a}} = \frac{b}{\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\tau_A}}$$

Dämpfung an der Oberfläche

$$\frac{\theta_W}{\theta_A} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\beta + \beta^2}}$$

Phasenverschiebung an Oberfläche ($x = 0$)

$$\Delta \tau_P = \tau_2 - \tau_1 = \frac{\varepsilon}{\omega} = \varepsilon \frac{\tau_A}{2\pi}$$

Instationäre Wärmeleitung:

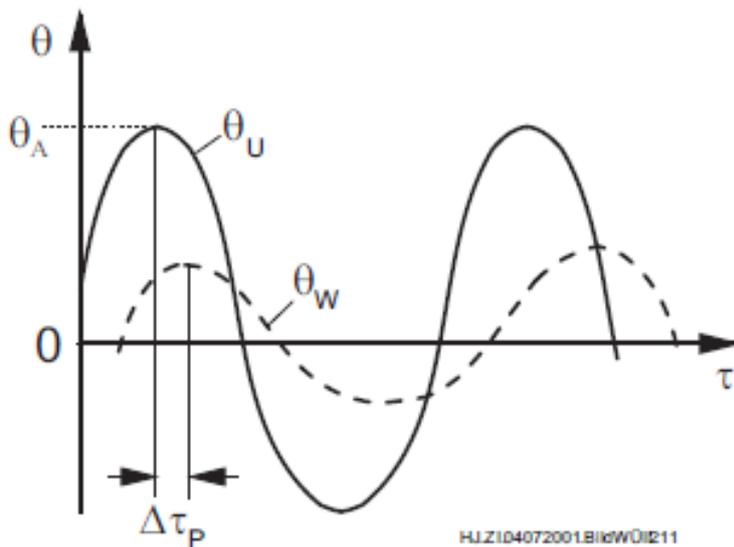


Abb. 2.11: Temperaturschwingung der Umgebung und an der Wandoberfläche

θ_U Temperaturschwingung
der Umgebung

θ_W Temperaturschwingung
der Wandoberfläche

Wärmestromdichte an der Oberfläche

$$\hat{q}(x=0) = \frac{b \sqrt{\omega} \theta_A}{\sqrt{1 + 2\beta + 2\beta^2}} \cdot \cos\left(\omega \tau - \varepsilon + \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.34)$$

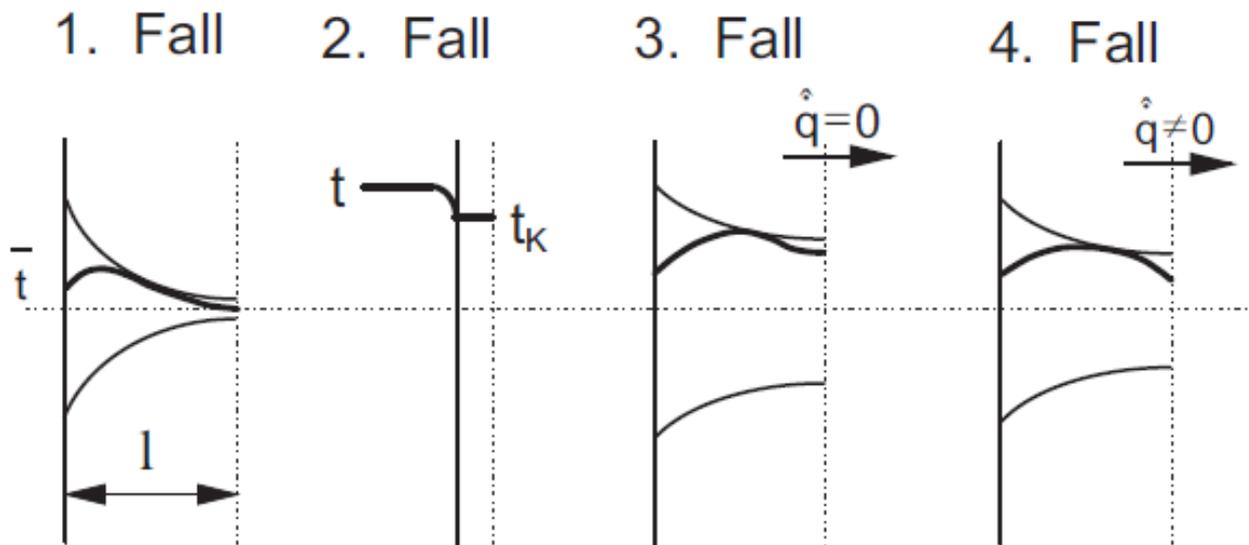
während Aufwärmphase aufgenommene Wärme

$$\hat{q}(x=0) = \frac{2 b \theta_A}{\sqrt{\omega} \sqrt{1 + 2\beta + 2\beta^2}} \quad (2.35)$$

Instationäre Wärmeleitung:

Platte

Zu unterscheidende Fälle bei der Temperaturschwingung in einer Platte



1. Fall

Temperaturschwingung dringt nicht bis zur Körpermitte vor

2. Fall

sehr gute Wärmeleitung im Körper oder eine sehr dünne Platte
Das entspricht dem **quasistatischen Fall**.

3. Fall

beidseitig beheizten Platte oder einer Platte mit einer
adiabaten Wand dar, wobei eine merkliche Temperaturschwingung
in Körpermitte bzw. an der adiabaten Wand auftritt

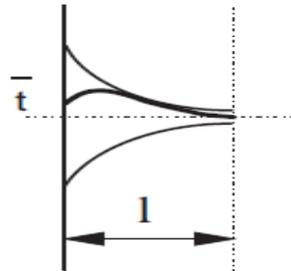
4. Fall

Schwingungsvorgang durch eine Platte

Instationäre Wärmeleitung:

1. Fall

1. Fall



Mit der Vorgabe eines **Dämpfungsfaktors** $a_D = \theta_{max}/\theta_A$ berechnet sich aus Gl.(2.33) die Anwendungsgrenze

$$x = \ell \geq \sqrt{\frac{2a}{\omega}} \ln \frac{1}{a_D \sqrt{1 + 2\beta + 2\beta^2}}$$

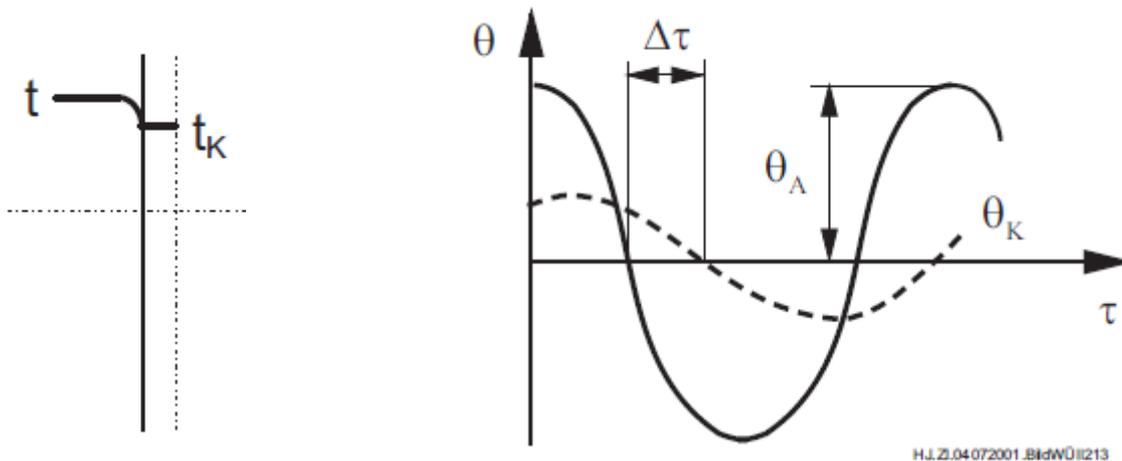
bzw. speziell für $\beta = 0$ (Randbedingung 1.Art) und $a_D = 0,02$ mit dem neu eingeführten **Parameter M**

$$M = \sqrt{\frac{\omega}{2a}} \ell = \sqrt{\frac{\pi}{a \tau_A}} \ell \geq 3,9$$

Für Wände mit dieser Mindestdicke trifft der 1. Fall zu

Instationäre Wärmeleitung:

2. Fall



Temperaturschwingung im Körper beim quasistatischen Fall

Herleitung der Temperaturfunktion t_K im Körper

Wärmeübergang an der Oberfläche

$$\dot{Q} = \alpha A (t - t_K)$$

Energieänderung des Körpers

$$\dot{Q} = m c \frac{dt_K}{d\tau} = \rho \ell A c \frac{dt_K}{d\tau}$$

Gleichsetzen und Einführen der Übertemperatur $\theta = t - \bar{t}$

$$\frac{d\theta_K}{d\tau} = \frac{\alpha}{\rho \ell c} (\theta - \theta_K)$$

$$\text{Randbedingung } \theta = \theta_A \cos(\omega \tau)$$

Instationäre Wärmeleitung:

Lösungsansatz

$$\theta_K = A \cos(\omega \tau) + B \sin(\omega \tau)$$

Einsetzen in die Differenzialgleichung

Bestimmung der Konstanten A und B

Einführung von dimensionslosen Größen

Übertemperatur des Körpers

$$\theta_K = \frac{\theta_A}{\frac{1}{(m Bi Fo)^2} + 1} \left(\cos(\omega \tau) + \frac{1}{m Bi Fo} \sin(\omega \tau) \right) \quad (2.36)$$

($m = 1$ Platte, $m = 2$ Zylinder, $m = 3$ Kugel)

$$Bi = \frac{\alpha \ell}{\lambda}, \quad Fo = \frac{a}{\ell^2 \omega} = \frac{a \tau_a}{2 \pi \ell^2}$$

$$Bi Fo = \frac{\alpha \tau_a}{2 \pi \rho c \ell}$$

Phasenverschiebung

Der Wert $\tau_{K,max}$ gibt die Phasenverschiebung an wobei die Schwingung im Körper der Umgebungsschwingung nachläuft

Ableitung der Gl.(2.36) und Nullsetzen

Zeitpunkt für die max Körpertemperatur

$$\tau_{K,max} = \frac{1}{\omega} \arctan \frac{1}{Bi Fo m}$$

Maximum der Körpertemperatur

Einsetzen von $\tau_{K,max}$ in Gl.(2.36) liefert

$$\theta_{K,max} = \theta_A \cos \left(\arctan \frac{1}{m Bi Fo} \right)$$

Wärmestromdichte

Aus $\hat{q} = \alpha (t - t_K) = \alpha (\theta - \theta_K)$ wird

$$\hat{q} = \frac{\alpha \theta_A}{1 + (m Bi Fo)^2} [\cos(\omega \tau) + m Bi Fo \sin(\omega \tau)] \quad (2.37)$$

Instationäre Wärmeleitung:

Speicherwärme (pro Oberfläche des Körpers)

$$\hat{q} = 2 \rho c \ell (t_{K,max} - t_m) = 2 \rho c \ell \theta_{K,max}$$

Anwendung des 2. Falles ist möglich,
wenn $M < 0,3$ ist.

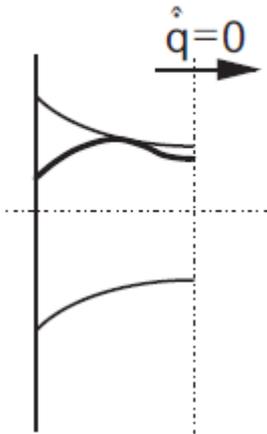
Aus der Umrechnung

$$M = \sqrt{\frac{\omega}{2a}} \ell = \sqrt{\frac{\omega \ell^2}{a}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2 Fo}}$$

ergibt sich auch für die Anwendungsgrenze $Fo > 5,5$

Instationäre Wärmeleitung:

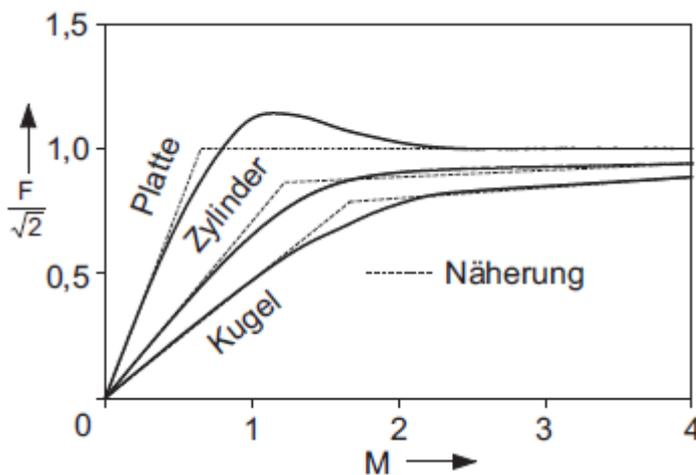
3. Fall



Die aufgenommene Wärme auf einer Wandseite bei einer Randbedingung 1. Art berechnet sich zu

$$\hat{q} = F \theta_A b \sqrt{\frac{\tau_A}{\pi}} \quad (2.38)$$

Korrekturfunktion F



Die Funktion F hat für die Platte ein Maximum bei $M = 1,2$ mit dem Wert $F \approx 1,61$.

$$M = \sqrt{\frac{\pi}{a \tau_A}} \ell = \frac{1}{\sqrt{2 Fo}}, \quad Fo = \frac{a}{\ell^2 \omega} = \frac{a \tau_A}{2 \pi \ell^2}$$

Instationäre Wärmeleitung:

Näherung für Praxis für aufgenommene Wärme auf einer Plattenseite:

a) $M \leq 0,707$ bzw. $Fo > 1$

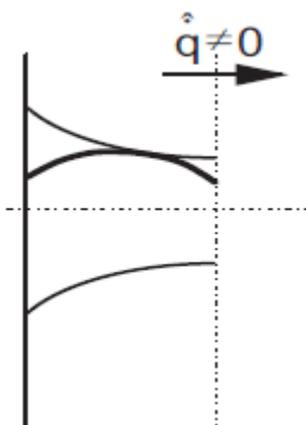
Für diesen Bereich gilt näherungsweise $F = 2 M$
thermisch dünne Wand nimmt die maximal
mögliche Wärme auf

$$\hat{q} = 2 M \theta_A b \sqrt{\frac{\tau_A}{\pi}} = 2 \theta_A \ell \frac{b}{\sqrt{a}} = 2 \theta_A \ell \rho c$$

b) $M > 0,707$ bzw. $Fo < 1$

Für diesen Bereich gilt näherungsweise $F = \sqrt{2}$.
thermisch dicke Wand

4. Fall



Schwingungsvorgang durch eine Platte
Lösungen werden mit Hilfe
der Laplace-Transformation gewonnen

Überlagerung von Temperaturverläufen

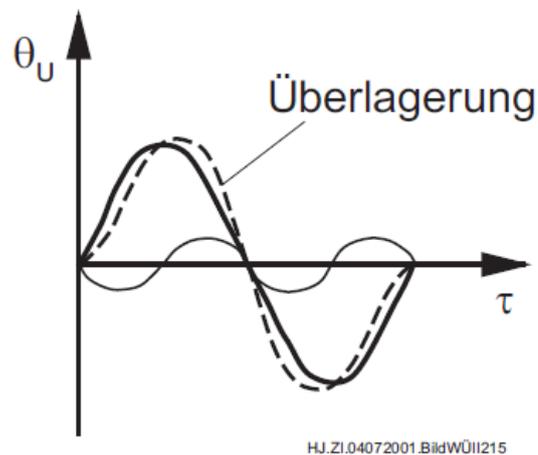


Abb. 2.15: Überlagerung von mehreren Funktionen

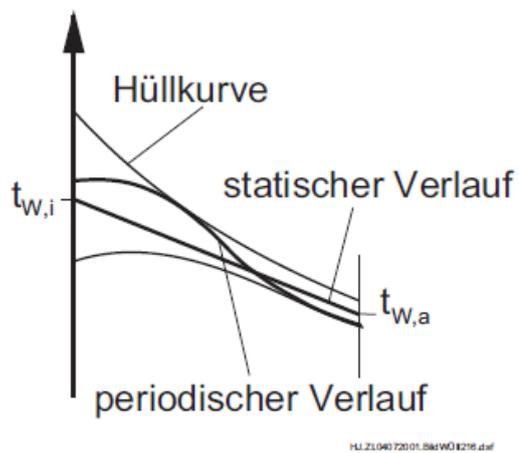


Abb. 2.16: Temperaturschwingung auf der Innenseite einer Außenwand

Wärmeleitung mit Phasenübergang fest-flüssig

Gefrier- u. Auftauvorgänge

z. B. im Erdreich, in Lebensmitteln, im Bauwesen

Erstarren und Schmelzen

z. B. in der Metallurgie

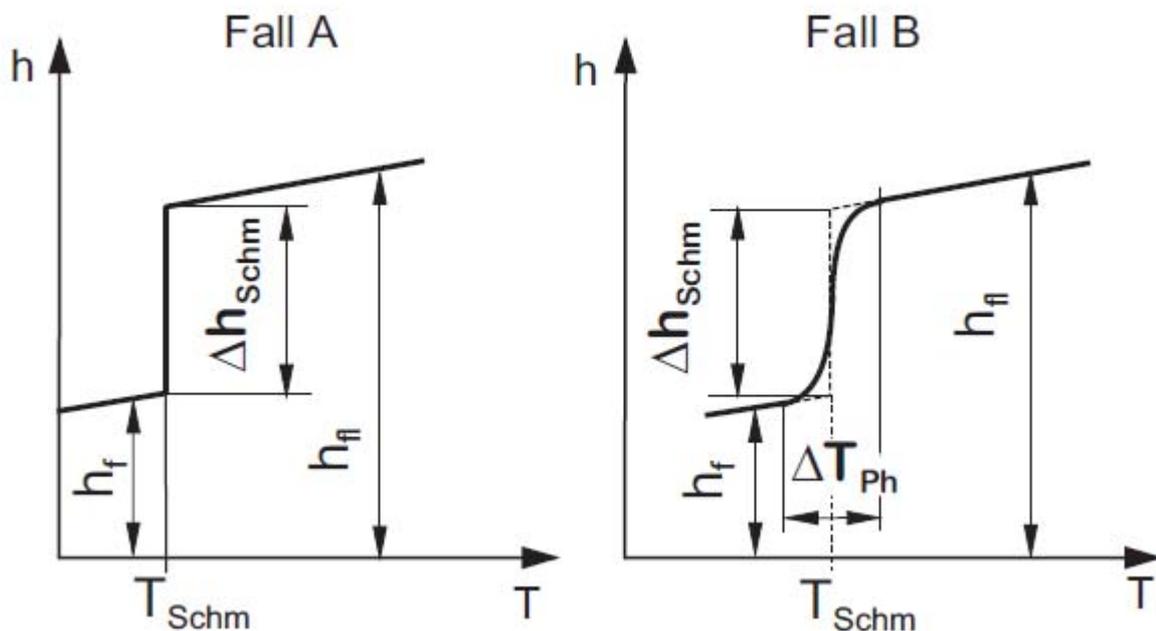
Beim Phasenübergang fest-flüssig handelt es sich um ein instationäres Wärmeleitproblem, da die Phasengrenze sich zeitlich verändert.

Die Lage der Phasengrenze, die Phasengrenzgeschwindigkeit und die Gefrier- bzw. Auftauzeit sind die Größen, die in erster Linie bei der Behandlung solcher Aufgaben interessieren.

Enthalpie-Temperatur-Diagramm

Die Besonderheiten beim Phasenübergang lassen sich in einem Enthalpie-Temperatur-Diagramm darstellen.

Für die Modellierung des Phasenüberganges sind zwei Fälle zu unterscheiden:



Fall A sprunghafter Phasenübergang

Bei Einkomponentensystemen (z. B. Wasser) tritt der Phasenübergang bei einer bestimmten Schmelztemperatur auf, bei der sich die Enthalpie um die Schmelzenthalpie Δh_{Schm} verändert.

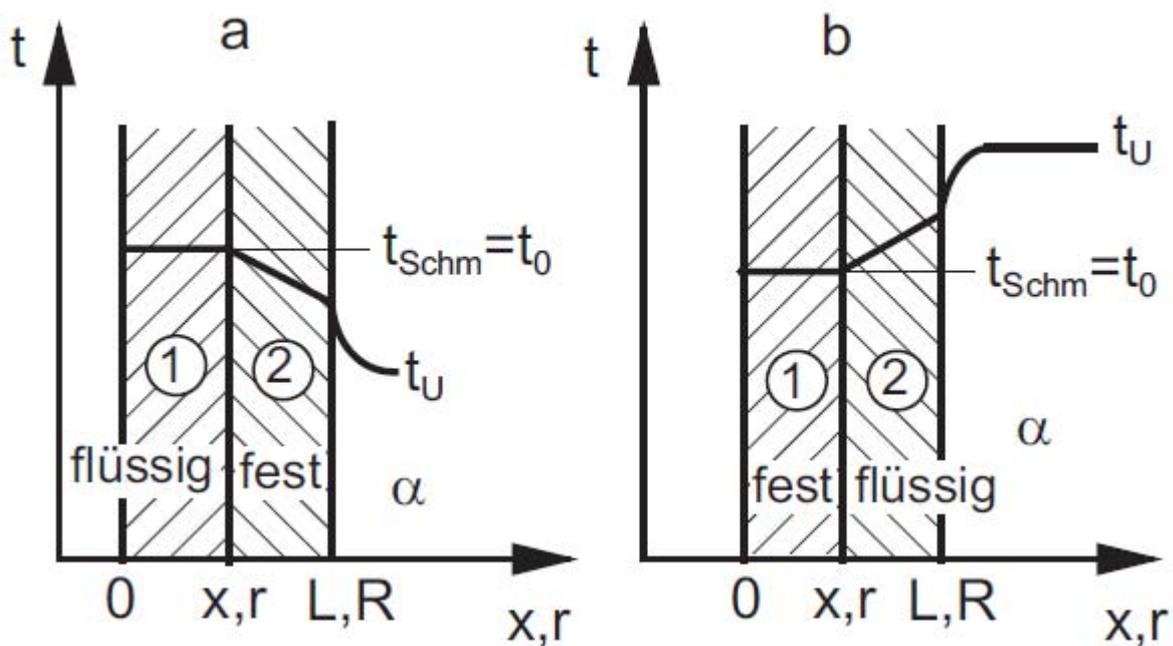
Fall B kontinuierlicher Phasenübergang

Bei Stoffgemischen (z. B. Legierungen, organische Stoffe (Lebensmittel, feuchte Erden)) tritt der Phasenübergang in einem Temperaturbereich ΔT_{Ph} auf. Am Phasenübergang nimmt nicht das gesamte Wasser teil (kapillar oder chemisch gebundenes nicht bzw. nur teilweise). Der kontinuierliche Phasenübergang kann näherungsweise auf einen sprunghaften zurückgeführt werden (gestrichelte Linie im Bild 2.19).

Temperaturverläufe

Der Gefriervorgang setzt ein, wenn die Wandtemperatur unter die Schmelztemperatur sinkt bzw. der Auftauvorgang beginnt, wenn die Wandtemperatur über die Schmelztemperatur ansteigt. Je nach den Widerständen in der gefrierenden bzw. auftauenden Schicht (stets mit 2 bezeichnet) und auf der Außenseite ergeben sich verschiedene Temperaturverläufe (Bild 2.20).

Temperaturverläufe beim Gefrieren (a) und Auftauen (b) in ebener Wand



Annahmen:

1. Die Flüssigkeit beim Gefrieren bzw. das Eis beim Schmelzen besitzen eine konstante Temperatur, die gleich der Schmelztemperatur ist.
2. konstante Umgebungsbedingungen (α, t_U)
3. konstante Stoffwerte
4. sprunghafte Phasenänderung (bei Fall B sind Mittelwerte zu verwenden).

Quasistationäres Modell für Phasenübergang

Weiterhin wird die Annahme getroffen,
dass die Enthalpieänderung für die Unterkühlung des
Eises beim Gefriervorgang bzw. für die Erwärmung
der Flüssigkeit beim Auftauvorgang ver-
nachlässigt werden kann

Der Wärmetransport zwischen Phasengrenze flüssig/fest und Um-
gebung wird mit den Gleichungen für den
stationären Fall berechnet. Diese Vorgehensweise
entspricht einem quasistationären Modell.

Die folgenden Herleitungen sollen für den Fall des
Gefrierens vorgenommen werden.

Beim **Auftauen** gelten dieselben Beziehungen,
jedoch haben die Indizes eine andere Bedeu-
tung:

Gefrieren	Index 2	feste Phase,	Index 1	flüssige Phase
Schmelzen	Index 1	flüssige Phase,	Index 2	feste Phase.

Instationäre Wärmeleitung:

Die Energiebilanz an der Phasengrenze lautet

$$\frac{dU}{d\tau} \approx \frac{dH}{d\tau} = -\dot{Q}$$

mit der Enthalpieänderung beim Phasenübergang

$$dH = \rho_1 \Delta h_{Schm} A dx$$

Die Phasengrenze bewegt sich beim Erstarren in die flüssige Phase hinein, beim Auftauen in die feste.

Für den Wärmedurchgang zwischen Phasengrenze und Umgebung gilt

$$\dot{Q} = k A (t_{Schm} - t_U)$$

mit dem Wärmedurchgangskoeffizienten

$$k = \left(\frac{L - x}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha} \right)^{-1}$$

Einsetzen der Ausdrücke und Umformen liefert
die **Phasengrenzgeschwindigkeit** $dx/d\tau$

$$\frac{dx}{d\tau} = - \frac{\lambda_2 \alpha (t_{Schm} - t_U)}{\rho_1 \Delta h_{Schm} (\alpha (L - x) + \lambda_2)} \quad (2.39)$$

Einführen von dimensionslosen Größen:

dimensionslose Länge

$$\xi = \frac{x}{\ell}$$

Biot-Zahl

$$Bi_2 = \frac{\alpha \ell}{\lambda_2}$$

Fourier-Zahl

$$Fo_2 = \frac{\lambda_2 \tau}{\rho_2 c_2 \ell^2} = \frac{a_2 \tau}{\ell^2}$$

Phasenumwandlungs-Zahl

$$Ph = \frac{\rho_1 \Delta h_{Schm}}{\rho_2 c_2 |(t_{Schm} - t_U)|}$$

stellt das Verhältnis der Schmelzenthalpie für die flüssige Phase zur Enthalpieänderung der festen Phase dar, wenn diese auf Umgebungstemperatur abgekühlt wird.

Instationäre Wärmeleitung:

Einsetzen der dimensionslosen Größen in Gl.(2.39) liefert

$$\frac{d\xi}{dFo_2} = - \frac{1}{Ph \left[1 - \xi + \frac{1}{Bi_2} \right]}$$

und nach der Integration von

$$Ph \int_1^\xi \left[1 - \xi + \frac{1}{Bi_2} \right] d\xi = - \int_0^{Fo_2} dFo_2$$

erhält man

$$\boxed{Fo_2 = Ph (1 - \xi) \left(\frac{1}{Bi_2} + \frac{1 - \xi}{2} \right)} \quad (2.40)$$

Die Zeit bis zum **Durchfrieren der Platte** ($\xi = 0$) beträgt

$$Fo_2 = Ph \left(\frac{1}{Bi_2} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.41)$$

Instationäre Wärmeleitung:

Die analoge Lösung für den Zylinder ($\xi = r/R$, R Radius bei dem Gefrieren bzw. Auftauen beginnt) lautet

$$Fo_2 = \frac{Ph}{2} \left[(1 - \xi^2) \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{Bi_2} \right) + \xi^2 \ln \xi \right] \quad (2.42)$$

oberes Vorzeichen: Phasengrenze wandert nach innen (z. B. Gefrieren von Wasser im Rohr)
unteres Vorzeichen: Phasengrenze wandert nach außen (z. B. Gefrieren von Wasser außen am Rohr)

$$\text{für } \xi = 0 : Fo_2 = \frac{Ph}{2} \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{Bi_2} \right) \quad (2.43)$$

und für die Kugel ($\xi = r/R$) (Vorzeichen wie oben)

$$Fo_2 = \frac{Ph}{3} \left[\frac{3}{2} (1 - \xi^2) - (1 - \xi^3) \left(1 \mp \frac{1}{Bi_2} \right) \right] \quad (2.44)$$

$$\text{für } \xi = 0 : Fo_2 = \frac{Ph}{3} \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{Bi_2} \right) \quad (2.45)$$

Instationäre Wärmeleitung:

Die Gefrierzeit ergibt sich aus der Fo -Zahl zu

$$\tau = \frac{Fo_2 \varrho_2 c_2 \ell^2}{\lambda_2} \quad (2.46)$$

ℓ = halbe Plattenstärke bei ebener Wand

ℓ = Radius bei Zylinder und Kugel.

Der Vergleich der 3 Grundkörper für das vollständige **Durchfrieren**

$$Fo_2 = \frac{Ph}{m} \left[\frac{1}{Bi_2} + \frac{1}{2} \right] \quad \begin{array}{l} m = 1 \text{ Platte} \\ m = 2 \text{ Zylinder} \\ m = 3 \text{ Kugel.} \end{array}$$

Die Kugel friert am schnellsten durch, da sich die Phasengrenzfläche zum Kern sehr verkleinert. Nach der Gl.(2.46) nimmt die Gefrierzeit quadratisch mit der Abmessung zu.

Instationäre Wärmeleitung:

Bei Verwendung der obigen Gln. für den Auftauvorgang gilt die Annahme, dass in der Flüssigkeit nur Wärmeleitung vorliegt (keine Konvektion).

Wenn die Konvektion berücksichtigt werden soll, dann muss ein äquivalenter Wärmeleitkoeffizient verwendet werden. Für das Auftauen einer ebenen Wand gilt

$$\lambda_{\text{äqu}} = \alpha \delta = \alpha (L - x)$$

wobei α für die freie Konvektion in Spalten ([3], S.32) ermittelt wird.

Die Anwendung des quasistationären Modells gilt, bei

$$Ph > 10$$

Unterkühlungsenthalpie beim Gefrieren ist vernachlässigbar

$$Ph < 10 \text{ wenn } Bi_2 < 0,1 \text{ ist.}$$

Der Hauptwiderstand für den Wärmetransport liegt beim äußeren Wärmeübergang, so dass beim Gefrieren nur eine geringe Unterkühlung der festen Phase auftritt.

Korrekturen

Eine einfache Korrektur kann durch folgende Überlegung ermittelt werden. Es wird eine ebene Wand mit der Randbedingung 1. Art betrachtet.

Zusätzlich zur Abführung der Schmelzenthalpie muss die Abkühlung der festen Phase auf die mittlere Temperatur $t_{m.S}$ erfolgen.

Diese Wärme muss im Mittel durch die

Wandstärke $\delta_s/2$
transportiert werden

Die für die Unterkühlung des Eises notwendige Unterkühlungsenthalpie wird mit einer

korrigierten Phasenumwandlungszahl Ph^* berücksichtigt

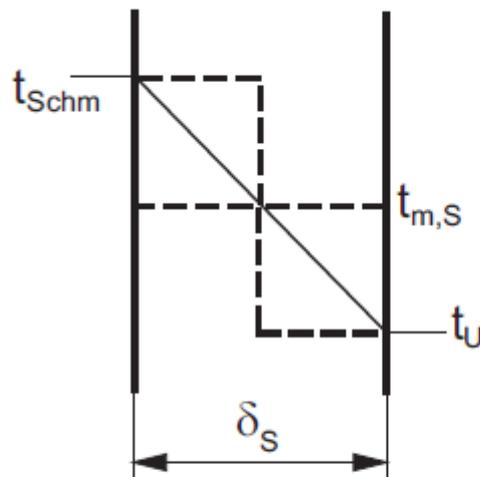
$$Ph^* = \frac{\Delta H_{Schm} + \Delta H_{Unt}/n}{\Delta H_{Unt}} = Ph + \frac{1}{n}$$

$n = 4$	Platte
$n = 2$	Zylinder
$n = 1,5$	Kugel.

Instationäre Wärmeleitung:

Der Fehler für diese Näherung ist bei $Ph > 0,5$ stets kleiner als 10%.

Bei Wasser ist $Ph \approx 5 - 15$ für $t_{Schm} - t_U \approx 10 - 30$ K.



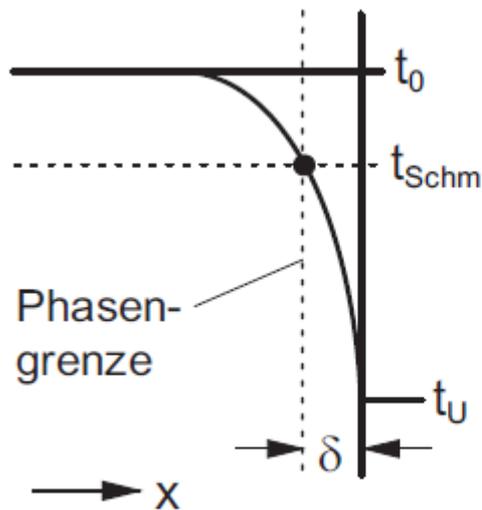
HJ.ZI.04072001.BildWÜII221

Abb. 2.21: Unterkühlung der Eisschicht beim Gefrieren

obige Näherung geht von der Vorstellung aus, dass Δh_{Schm} um einen Anteil der Unterkühlungsenergie vergrößert wird.

Instationäre Wärmeleitung:

Derselbe Ansatz ist möglich, wenn $t_0 > t_{Schm}$ ist und die Flüssigkeit ruht



H.J.ZI.04072001.BildWÜII222

Abb. 2.22: Gefriervorgang bei $t_0 > t_{Schm}$

Die Korrektur der Phasenumwandlungszahl lautet für diesen Fall

$$Ph^* = \frac{\rho_1 \Delta h_{Schm} + \rho_1 c_1 (t_0 - t_{Schm})}{\rho_2 c_2 |t_{Schm} - t_U|}$$

Instationäre Wärmeleitung:

Phasengrenzgeschwindigkeit $dx/d\tau$

Bei größerer Eisschichtdicke nimmt die Phasengrenzgeschwindigkeit immer stärker wieder zu. Das ist begründet in der immer kleiner werdenden Phasengrenzfläche im Vergleich zur mittleren Fläche des Wärmetransportes. Bei einem halbzugefrorenen Rohr besteht also die Gefahr, dass der verbleibende Rest auch noch sehr schnell zufriert.

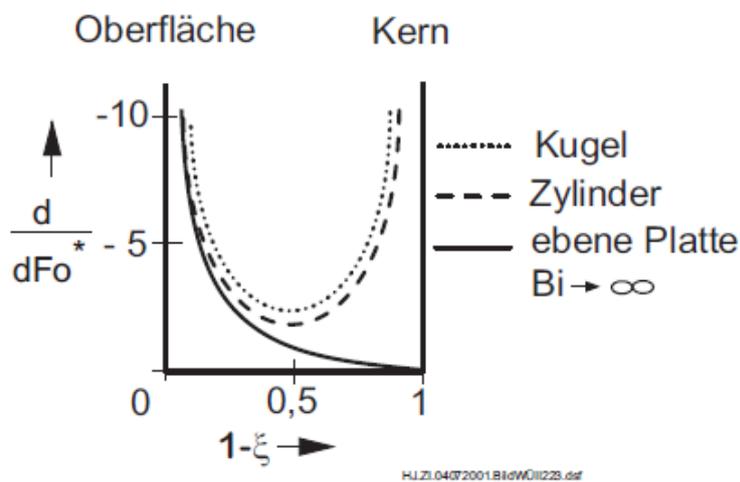
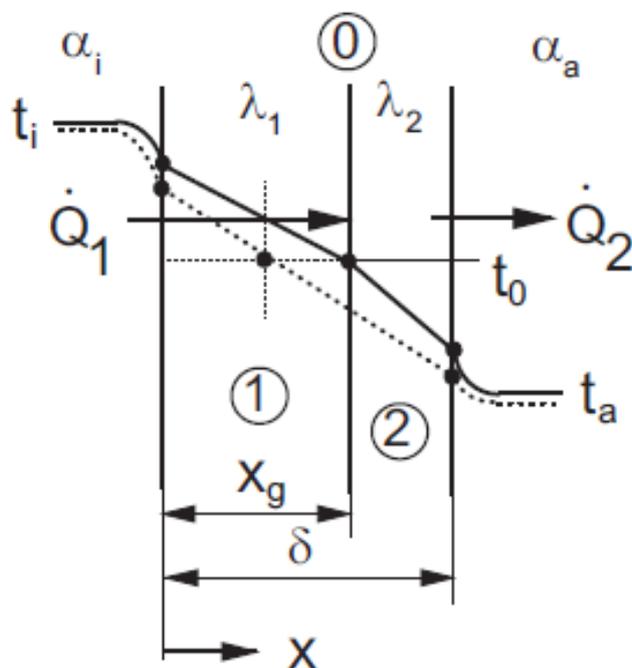


Abb. 2.23: Phasengeschwindigkeit in Platte, Zylinder und Kugel

Gefrieren einer Gebäudewand

Beim Gefrieren einer Gebäudewand wandert die Phasengrenze von außen in die Wand hinein. Für das Gefrieren der Feuchtigkeit in der Wand steht die Differenz zwischen den beiden Wärmeströmen \dot{Q}_1 (Wärmestrom von Innen bis zur Gefriergrenze) und \dot{Q}_2 (Wärmestrom von Gefriergrenze bis Außen) zur Verfügung



- ① nichtgefrorener Zustand
- ② gefrorener Zustand
- t_0 Gefriertemperatur
- ① Frostgrenze
- stationärer Zustand ($\lambda_2 = \lambda_1$)

Temperaturverläufe beim Gefrieren einer Gebäudewand

Instationäre Wärmeleitung:

Energiebilanz für Frostgrenze

$$\frac{dH}{d\tau} = \dot{Q}_1 - \dot{Q}_2$$

$$dH = \rho_1 \Delta h_{Schm} A dx$$

$$\dot{Q}_1 = \frac{t_i - t_0}{R_{\alpha,i} + \frac{x_g}{\lambda_1 A}} \quad \dot{Q}_2 = \frac{t_o - t_a}{R_{\alpha,a} + \frac{\delta - x_g}{\lambda_2 A}}$$

Nach Einsetzen und T.d.V. ist die Integration ohne Probleme möglich

Instationäre Wärmeleitung:

Mit Annäherung an den stationären Zustand nimmt \dot{Q}_1 zu und \dot{Q}_2 ab. Im stationären Zustand gilt $\dot{Q}_1 = \dot{Q}_2$.

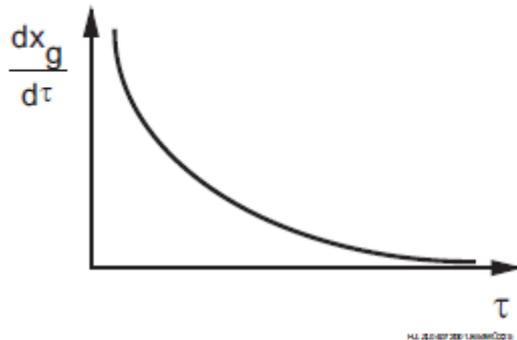


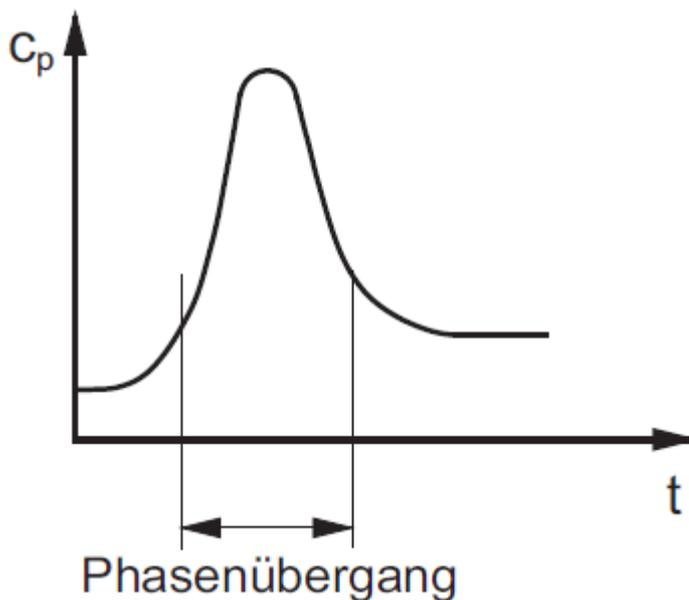
Abb. 2.25: Verringerung der Phasengrenzgeschwindigkeit beim Gefrieren einer Wand

Die Geschwindigkeit der Gefrierergrenze nimmt mit der Annäherung an den stationären Zustand ab. Beim Jahressgang kann stets mit dem stationären Zustand gerechnet werden.

Numerische Lösung bei der Wärmeleitung mit Phasenübergang

1. Modellierung der sprunghaften Phasenänderung
2. Modellierung mit veränderlichen Stoffwerten

besonders für den kontinuierlichen Phasenübergang geeignet.



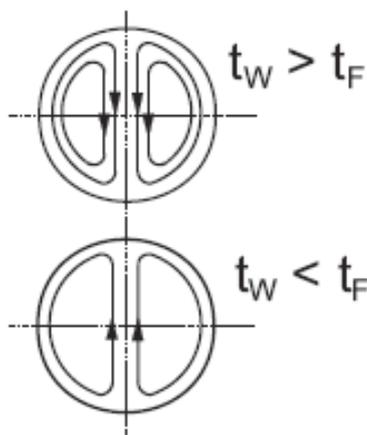
Es sind kleine Ortsschritte (wegen der Nachbildung des c_p -Verlaufes) notwendig. Es handelt sich wegen der großen Änderung von c_p um einen stark nichtlinearen Vorgang. Die Lösung der Gleichungssysteme kann schwierig bzw. unmöglich werden, wenn keine geeigneten Methoden eingesetzt werden. Die üblichen Programme für instationäre Wärmeleitprobleme sind im Allgemeinen nicht geeignet.

Wärmeübergang bei gemischter Konvektion

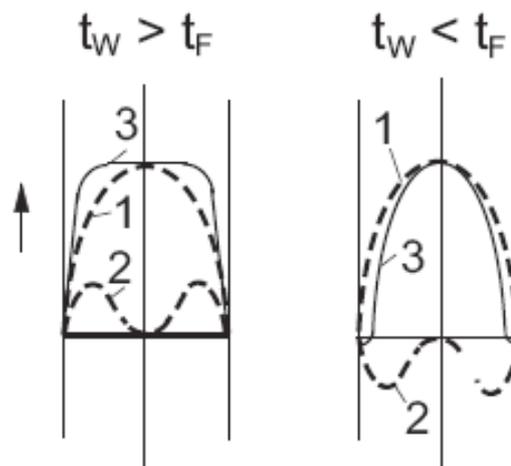
Unter gemischter Konvektion versteht man die Überlagerung von freier und erzwungener Konvektion. Eine freie Konvektion liegt immer vor, sobald ein Temperatur- bzw. Dichteunterschied auftritt.

- Wirkung der Überlagerung

Stromlinien im
waagerechten Rohr



Geschwindigkeitsprofile
im senkrechten Rohr bei
Aufwärtsströmung



- 1 - erzwungene Konvektion
- 2 - freie Konvektion
- 3 - Überlagerung

- Grenzen zwischen freier und erzwungener Konvektion

$$Ar > 16$$

freie Konvektion dominierend

$$0,25 < Ar < 16$$

freie und erzwungene Konvektion von Einfluss

$$Ar < 0,25$$

erzwungene Konvektion dominierend

$$Ar = \frac{Gr}{Re^2}$$

freie Konvektion
erzwungene Konvektion

Konvektion und Phasenübergang:

- Berechnung des Wärmeübergangskoeffizienten bei gemischter Konvektion

1. Bildung einer korrigierten Re-Zahl Re^*

$$Re^* = \sqrt{Re^2 + 0,41 Gr}$$

2. Überlagerung der Wärmeübergangskoeffizienten oder der Nu-Zahl

$$\alpha = |(\alpha_e^n \pm \alpha_f^n)|^{1/n}$$

- + gleichgerichtete Strömung
- entgegengerichtete Strömung

α_e Wärmeübergangskoeffizient bei erzwungener Konvektion

α_f Wärmeübergangskoeffizient bei freier Konvektion

$n = 3$ Strömung an senkrechten Wänden

senkrechte Umströmung von Einzelkörpern

$n = 4$ für querangeströmte Kugeln oder Zylinder

$n = 3$ Strömung im senkrechten oder waagerechten Rohr
bei $t_W = \text{const}$

$n = 6$ Strömung im senkrechten oder waagerechten Rohr
bei $\hat{q}_W = \text{const.}$

Wärmeübergang bei Kondensation

Anwendung:

- Kondensator im Dampfkraftprozess oder Kälteprozess
- Heizungsanlagen mit Dampf (Vorlauf Dampf, Rücklauf Kondensat)
- Kondensation in Dampfleitungen oder Apparaten
- Kühler mit Wasserausscheidung bei Taupunktunterschreitung

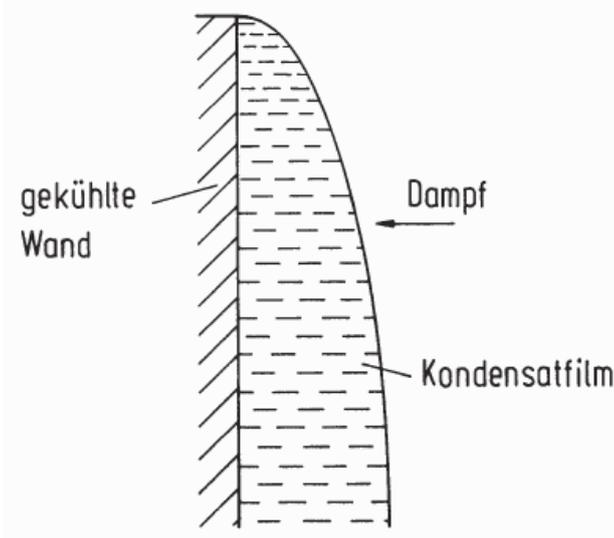
Arten der Kondensation:

- **Kondensation auf Oberflächen ($t_w < t_s$)**
 - **Filmkondensation**
 - Bildung eines zusammenhängenden Flüssigkeitsfilmes
 - **Tropfenkondensation**
 - Tropfenbildung auf teilweise benetzbarer Wand
- $$\alpha_{Tropfen} \approx 10 \cdot \alpha_{Film}$$
- Kondensation von Dämpfen mit Inertgasen (z.B. feuchte Luft)
 - Kondensation von Dampfgemischen (z.B. Rektifikation)
- **Spontane Kondensation**
 - Homogene Kondensation
 - Bildung von Flüssigkeitstropfen bei Unterkühlung des Dampfes
 - Heterogene Kondensation
 - Flüssigkeit bildet sich an Kondensationskeimen

Konvektion und Phasenübergang:

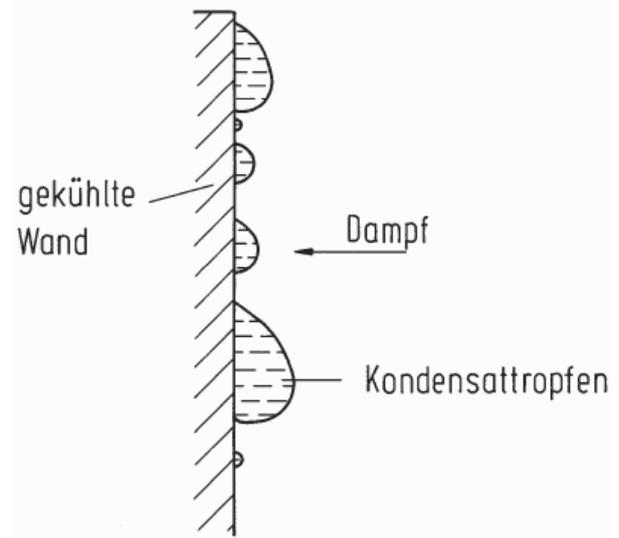
Filmkondensation:

(aus Baehr und Stephan)



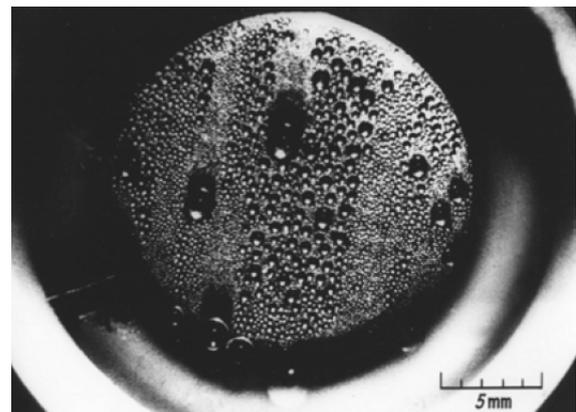
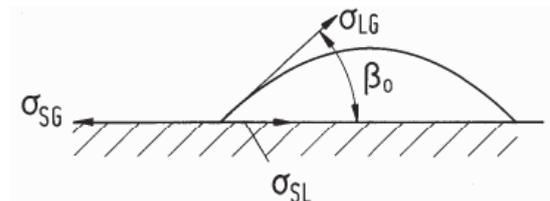
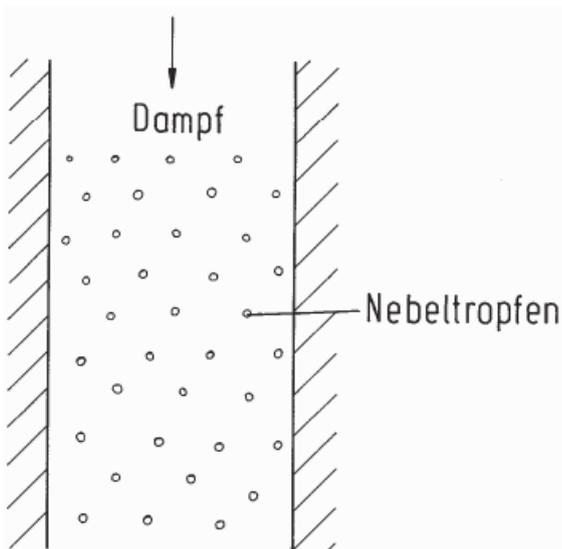
Tropfenkondensation:

(aus Baehr und Stephan)



Heterogene Kondensation:

(aus Baehr und Stephan)



Kondensation reiner Dämpfe

→ es wird nur die Filmkondensation behandelt !

I. ruhende oder schwach bewegte reine Dämpfe

Gültigkeit: Dampfgeschwindigkeit für Wasser < 5 m/s; Kältemittel < 0,5 m/s

a) Laminare Filmströmung

Ausgangspunkt: **Wasserhauttheorie nach Nusselt**

→ Wärmetransport durch den Film erfolgt nur durch Wärmeleitung

so dass gilt:

$$\hat{q} = \frac{\lambda}{\delta}(t_S - t_W) \quad \text{bzw.} \quad \alpha = \frac{\lambda}{\delta}$$

→ Ziel: Bestimmung der Filmdicke δ , da λ des Films bekannt ist

→ Ausgangspunkt: Navier-Stokes-Gleichung für x-Komponente
(Impulsbilanz des Films)

$$\frac{dw_x}{d\tau} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \operatorname{divgrad} w_x$$

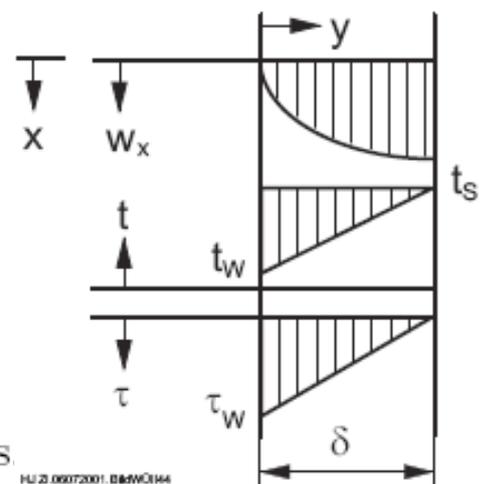
Annahmen:

$w_y \ll w_x$ Geschwindigkeitskomponente
senkrecht zur Wand vernachlässigt

$\frac{dw_x}{d\tau} = 0$ stationärer Fall

$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ konstanter Druck im Dampfraum

$\frac{\partial w_x}{\partial x} = 0$ eindimensionale Betrachtung des Films



Kondensation reiner Dämpfe

$$\cancel{\frac{dw_x}{d\tau}} = g_x - \frac{1}{\rho} \cancel{\frac{\partial p}{\partial x}} + \nu \operatorname{divgrad} w_x$$



$$\frac{d^2 w_x}{dy^2} = -\frac{g_x}{\nu}$$

1. Integration: $\frac{dw_x}{dy} = -\frac{g_x}{\nu} y + C_1$

→ 1. RB: keine Schubspannung an der Phasengrenze

$$\left(\frac{dw_x}{dy} \right)_{y=\delta} = 0$$

→ Bestimmung der 1. Integrationskonstante C_1

$$C_1 = \frac{g_x}{\nu} \delta$$

2. Integration: $w_x = -\frac{g_x}{\nu} \frac{y^2}{2} + \frac{g_x}{\nu} \delta y + C_2$

→ 2. RB: Haftbedingung an der Wand $w_x(y=0) = 0$

→ Bestimmung der 2. Integrationskonstante C_2 $C_2 = 0$

Mittlere Filmgeschwindigkeit:

$$w_m = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} w_x dy = \frac{g_x \delta^2}{3 \nu}$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\dot{m} = \rho w_m \delta b$$

Kondensation reiner Dämpfe

Nach Elimination von w_m ergibt sich die Filmdicke zu:

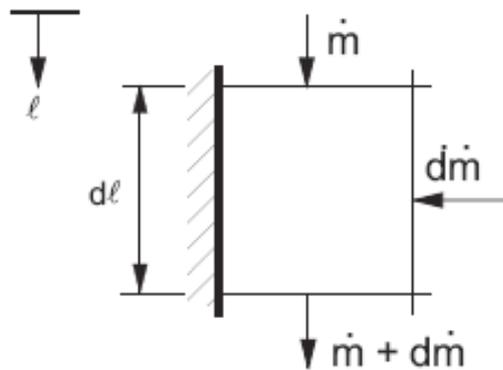
$$\delta = \left(\frac{3 \nu \dot{m}}{\rho g_x b} \right)^{1/3}$$

Und nach Einsetzen in Ausgangsgleichung ergibt sich α_x

$$\alpha_x = \left(\frac{\lambda^3 \rho g_x b}{3 \nu \dot{m}} \right)^{1/3} \quad \text{Auslegungsfall (} \dot{m} \text{ gegeben)}$$

Nachrechnungsfall (Länge bzw. Fläche gegeben):

Energiebilanz für Längenelement $d\ell$



$$d\dot{Q} = \Delta h_V d\dot{m} = \alpha_x (t_S - t_W) b d\ell$$

Einsetzen von α_x und T.d.V. liefert

$$\left(\frac{\rho g_x b}{3 \nu} \right)^{1/3} \int_0^\ell d\ell = \frac{\Delta h_V}{\lambda b (t_S - t_W)} \int_0^{\dot{m}} \dot{m}^{1/3} d\dot{m}$$

Kondensation reiner Dämpfe

Ergebnis der Integration

$$\dot{m} = \left(\frac{\lambda^3 \rho g_x b^4 (t_S - t_W)^3 \ell^3}{3 \nu \Delta h_V^3} \right)^{1/4} \left(\frac{4}{3} \right)^{3/4}$$

Und nach Einsetzen in α_x

$$\alpha_x = \left(\frac{\lambda^3 \rho g_x \Delta h_V}{4 \nu (t_S - t_W) \ell} \right)^{1/4}$$

Nachrechnungsfall

Der mittlere Wärmeübergangskoeffizient ergibt sich zu

$$\alpha_m = \frac{1}{L} \int_0^L \alpha_x d\ell = \frac{4}{3} \alpha_x(L)$$

a) *Auslegungsfall*

$$\alpha_m(\dot{m}) = \frac{4}{3} \left(\frac{\lambda^3 \rho g_x b}{3 \nu \dot{m}} \right)^{1/3}$$

b) *Nachrechnungsfall*

$$\alpha_m(L) = \frac{4}{3} \left(\frac{\lambda^3 \rho g_x \Delta h_V}{4 \nu (t_S - t_W) L} \right)^{1/4}$$

Abfließende Kondensatmenge nimmt stromabwärts zu und damit die Schichtdicke $\rightarrow \alpha$ verkleinert sich

Kondensation reiner Dämpfe

Berechnungsgleichungen für die Praxis:

→ Reynolds-Zahl:
$$Re = \frac{w_m \delta}{\nu} = \frac{\dot{m}}{\nu \rho b} = \frac{\dot{m}}{\eta b}$$

→ Nusselt-Zahl:
$$Nu^* = \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{\nu^2}{g_x} \right)^{1/3}$$

→ Kennzahl F:
$$F = \frac{\Delta h_V \rho \nu^{5/3}}{\lambda (t_S - t_W) \ell g_x^{1/3}}$$

Daraus ergibt sich folgende allgemeine Form:

a) *Auslegungsfall*
$$Nu^* = K_1 Re^{n_1}$$

b) *Nachrechnungsfall*
$$Nu^* = K_2 F^{n_2}$$

Tabelle mit Konstanten für die verschiedenen Bereiche

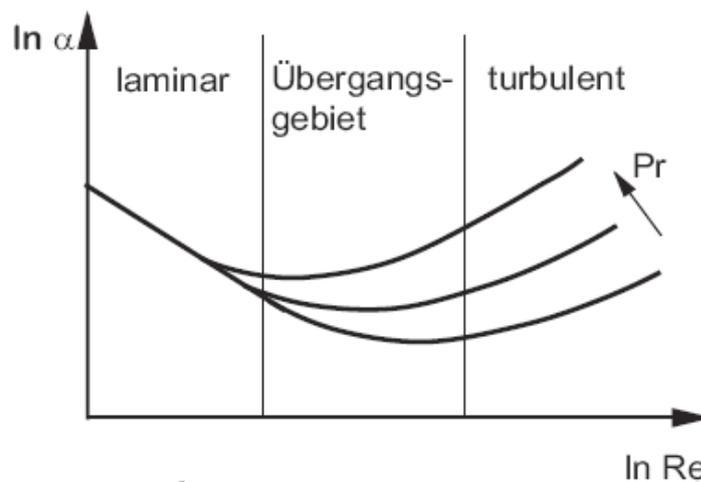
→ siehe Umdruck S. 20

	K_1	n_1	K_2	n_2	Anwendungen
örtlicher WÜ	0,6934	-1/3	0,7071	1/4	$Re < 5,67$
mittlerer WÜ	0,9245	-1/3	0,9428	1/4	$1 \leq Pr \leq 100$
örtlicher WÜ	0,64	-1/4	0,6692	1/5	$5,67 < Re < Re_{kr}$
mittlerer WÜ	0,80	-1/4	0,8365	1/5	$1 \leq Pr \leq 100$

Kondensation reiner Dämpfe

b) Turbulente Filmströmung

- Es treten größere, unregelmäßige Wellen auf der Oberfläche des Films auf
- bessere Durchmischung, α steigt wenn Re zunimmt



i) Auslegungsfall:

Gültigkeit: $Re > Re_{kr}$, $1 \leq Pr \leq 100$)

lokal: $Nu_x^* = 0,013 Re^{1/3} Pr^{1/2}$

mittel:
$$Nu_m^* = \frac{Re}{115,4 \frac{Re^{2/3}}{Pr^{1/2}} - \frac{4625}{Pr^{15/14}}}$$

ii) Nachrechnungsfall

→ iterative Lösung mit Auslegungsfall nötig

Ansatz für Übergangsbereich: $\alpha_x = (\alpha_{x,lam}^4 + \alpha_{x,turb}^4)^{1/4}$

Kondensation reiner Dämpfe

Korrekturen

a) Kondensation auf waagerechten Rohren



$$\frac{\alpha_{waag}}{\alpha_{senk}} = 0,77 \left(\frac{L}{d_a} \right)^{1/4}$$

b) Kondensation auf waagerechten Rohrbündeln



$$\alpha \approx \frac{\alpha_{waag}}{n^{1/6}}$$

c) Kondensation im waagerechtem Rohr



$$\alpha_{WR} = 0,84 \alpha_{waag}$$

d) Kondensation von überhitzten Dämpfen

$$\Delta h_{\ddot{u}} = \Delta h_V + c_{p,d} (t - t_S)$$

Achtung: Treibende Temperaturdifferenz ist weiter

$$t_S - t_W$$

Kondensation reiner Dämpfe

II. Filmkondensation bei strömendem Dampf

- Dampfstrom übt nicht vernachlässigbare Wandschubspannung auf den Film aus
- Wirken Wandschubspannung und Schwerkraft in die gleiche Richtung, dann Verbesserung von α
- Bei entgegengesetzter Richtung kann Flüssigkeitsstau entstehen
- Modifizierung der Nusselt-Zahl um Wandschubspannung τ_p

$$Nu^+ = \frac{\alpha \nu}{\lambda w_\tau} \quad \longrightarrow \quad w_\tau = \left(\frac{\tau_p}{\rho} \right)^{1/2}$$

$$\tau_p = \frac{d}{4} \left(\frac{dp}{d\ell} \right)_R = \lambda_R \frac{\rho_d w_d^2}{8}$$

- Berechnung Rohrreibungsbeiwert λ_R bei Zweiphasenströmung mit **Lockhart/Martinelli-Verfahren** (Skript S. 75 und Umdruck S. 24-26)

$$\lambda_R = \lambda_{R,ZP} = \lambda_{R,EP} \left(1 + X_{tt}^{0,5} \right)^4$$

$$\longrightarrow X_{tt} = \left(\frac{1-x}{x} \right)^{0,9} \left(\frac{\rho_d}{\rho_f} \right)^{0,5} \left(\frac{\eta_f}{\eta_d} \right)^{0,1}$$

Kondensation reiner Dämpfe

II. Filmkondensation bei strömendem Dampf

a) laminare Filmströmung ($Re < Re_{kr}$)

$$Nu_x^+ = (2 Re)^{-0,5}$$

mit $Re_{kr} = 185 Pr^{-0,8}$

b) turbulente Filmströmung ($Re > Re_{kr}$)

$$Nu_x^+ = 0,083 \frac{Pr^{0,3}}{Re^{\frac{0,152}{1+Pr}}}$$

c) Überlagerung bei gleichgerichteter Wirkung von Schwerkraft und Phasenreibung

$$\alpha_x = (\alpha_{x,1}^n + \alpha_{x,2}^n)^{1/n}$$

$\alpha_{x,1}$ für ruhenden Dampf berechnet

$\alpha_{x,2}$ bei strömenden Dampf

$n=2,5$ auf senkrechten Rohren

$n=4$ für waagerechtes Rohr.

Wärmeübergang bei Verdampfung

Anwendung:

- Dampferzeugung in Kraftwerken
- Kühlung von Bauteilen
(Film-, Tauch-, Sprühkühlung)
z. B. Sprühkühlung im Gießprozess
- Teilprozess in verschiedenen Apparaten
(z.B. Wärmerohr, Wärmepumpe, Rektifikation, Kühltisch)

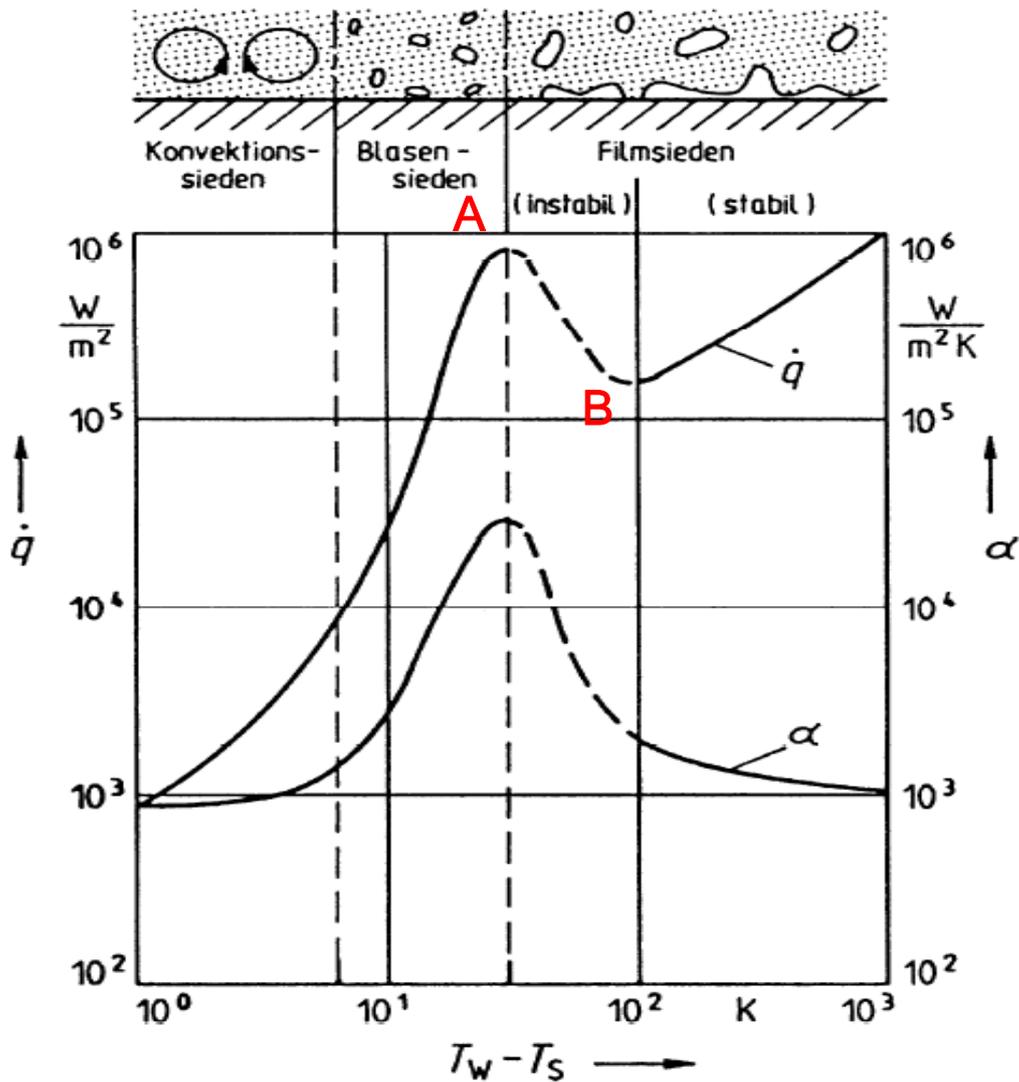
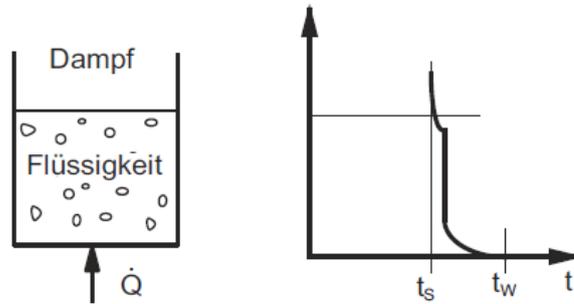
Arten der Verdampfung:

- Behältersieden
→ Verdampfung einer Flüssigkeit im Behälter
(z. B. Kochtopf)
- Strömungssieden
→ Verdampfung einer Flüssigkeit die im Kanal strömt (z.B. Dampferzeugerrohre im Kraftwerk)
- Entspannungsverdampfung
→ Druck sinkt unter Siededruck (z.B. Strömung durch Ventile)

Konvektion und Phasenübergang:

Wärmeübergang bei Verdampfung

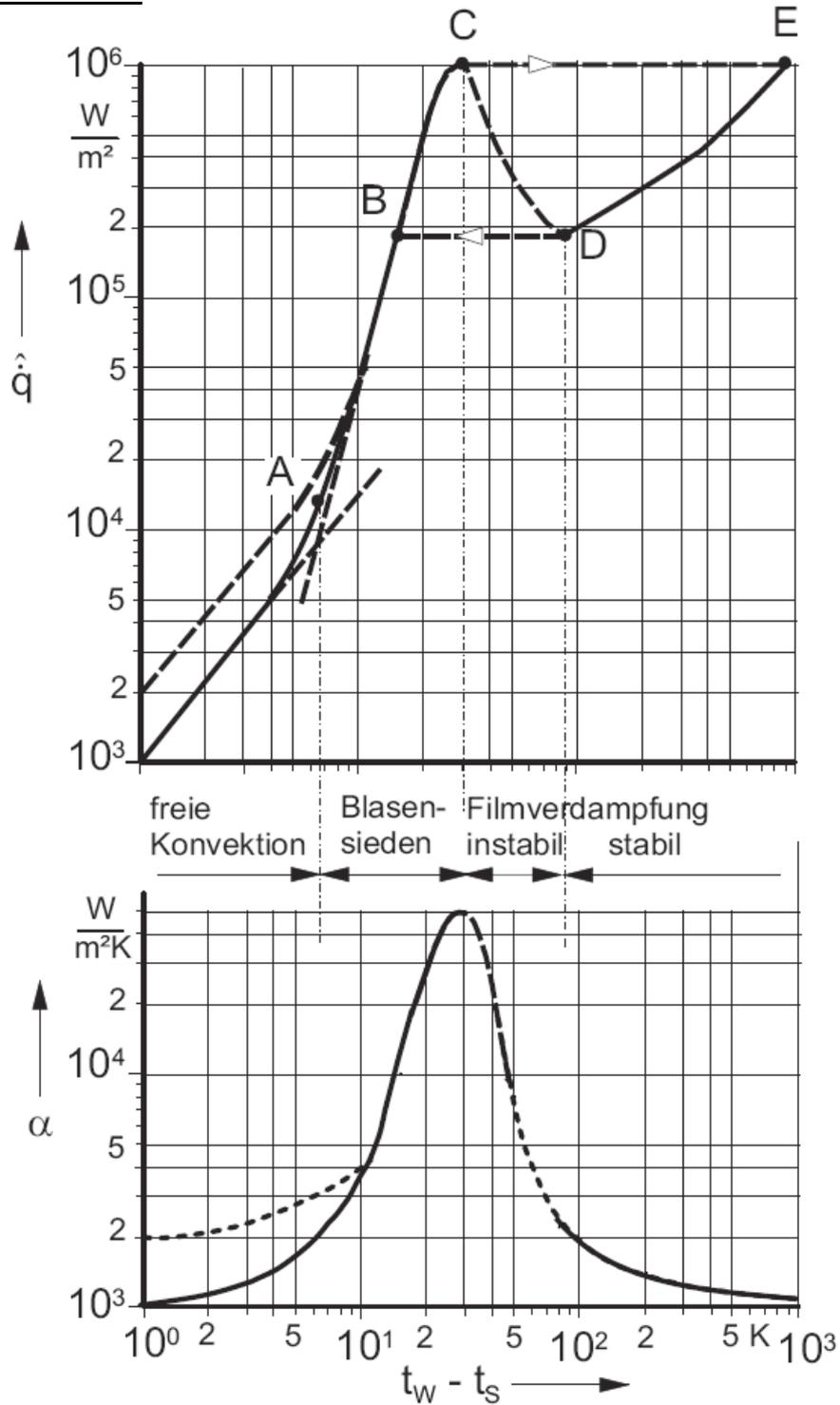
I. Behältersieden



aus Langeheinecke ; 2008

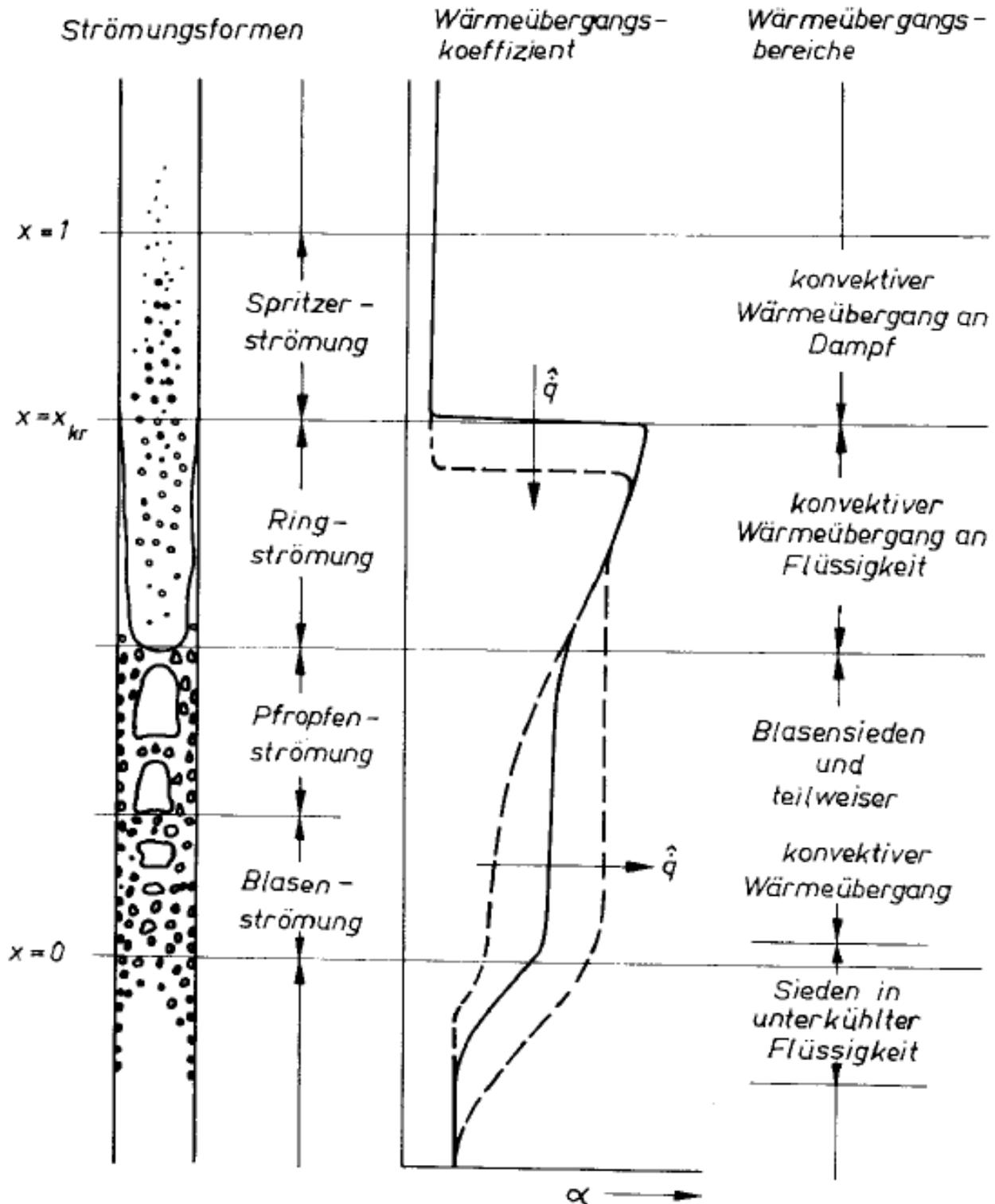
Wärmeübergang bei Verdampfung

I. Behältersieden



Wärmeübergang bei Verdampfung

II. Strömungssieden



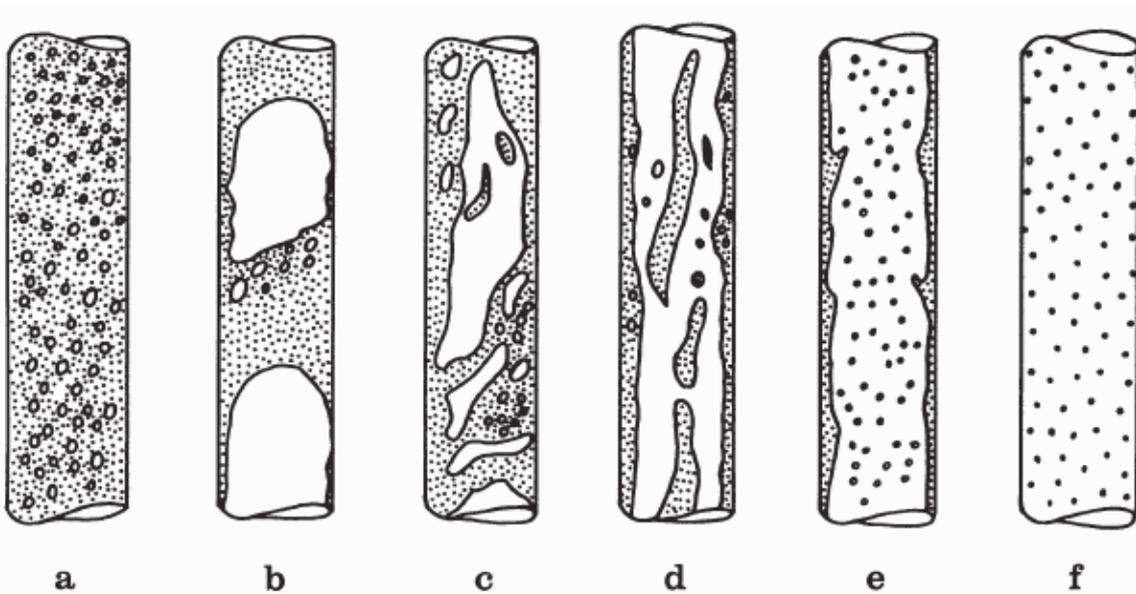
aus Elsner ; 1993

Konvektion und Phasenübergang:

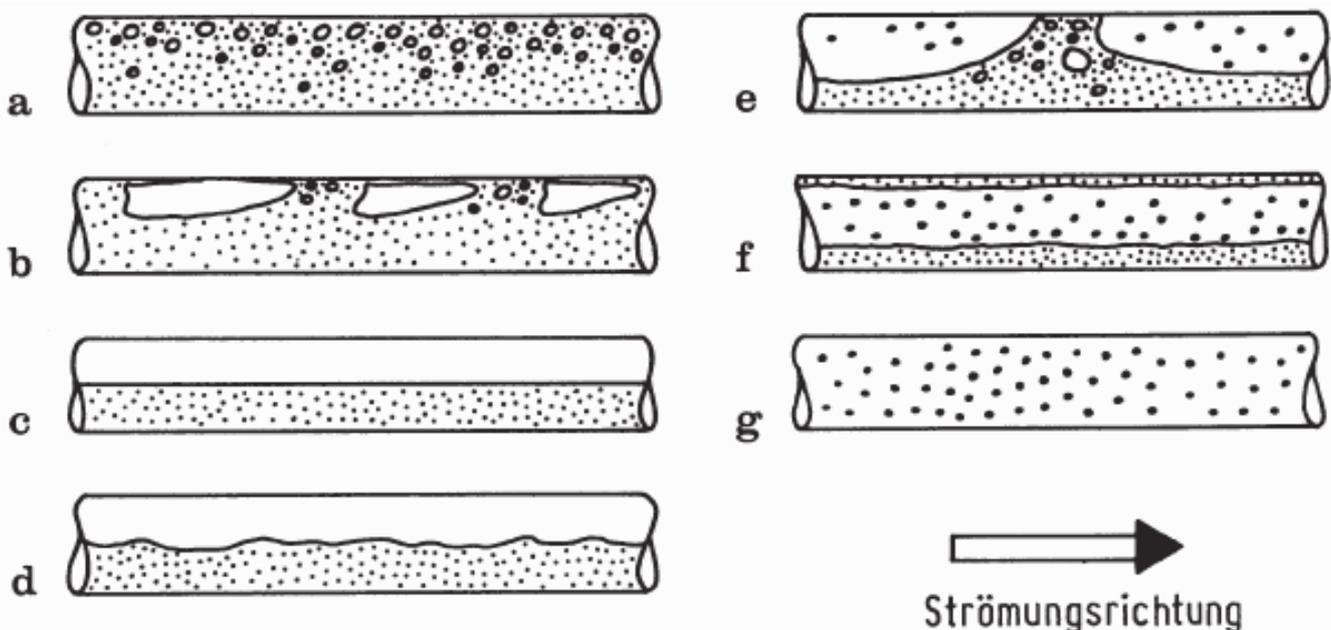
Wärmeübergang bei Verdampfung

Strömungsformen

aus Baehr und Stephan ; 2008



a...Blasenströmung; b...Pfropfenströmung; c...Schaumströmung;
d...Strähnen-Ringströmung; e...Ringströmung; f...Sprühströmung

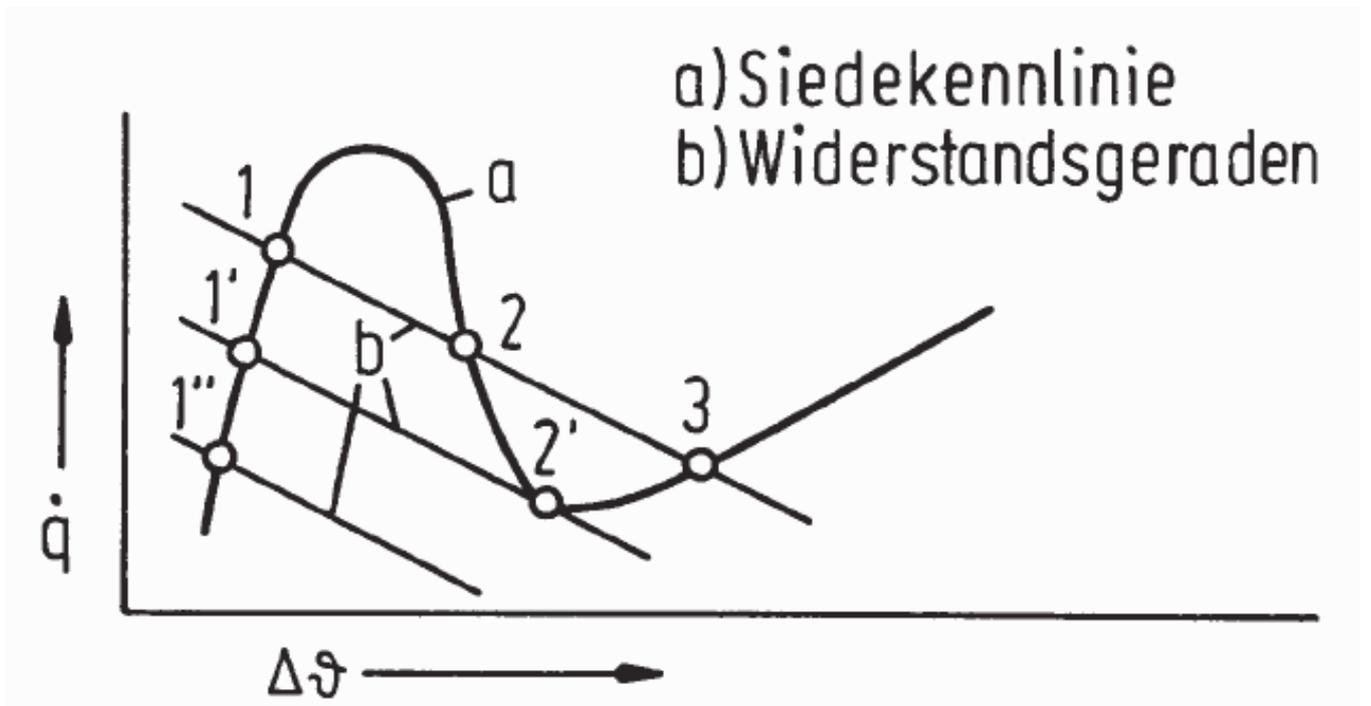


a...Blasenströmung; b...Pfropfenströmung; c...Schichtenströmung;
d...Wellenströmung; e...Schwallströmung; f...Ringströmung;
g...Sprühströmung

Konvektion und Phasenübergang:

Wärmeübergang bei Verdampfung

Stabilität beim Sieden



aus Baehr und Stephan ; 2008

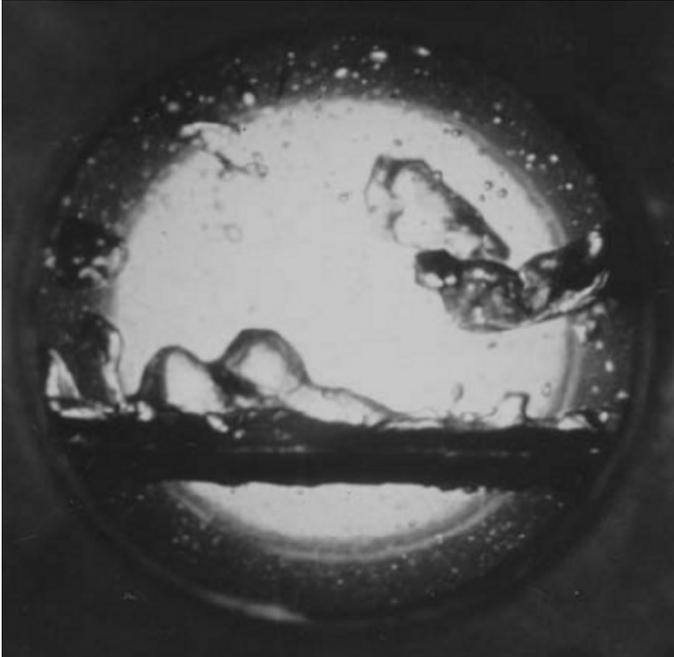
Die beiden äußeren Schnittpunkte sind stabil

Mittlerer Punkt ist labil

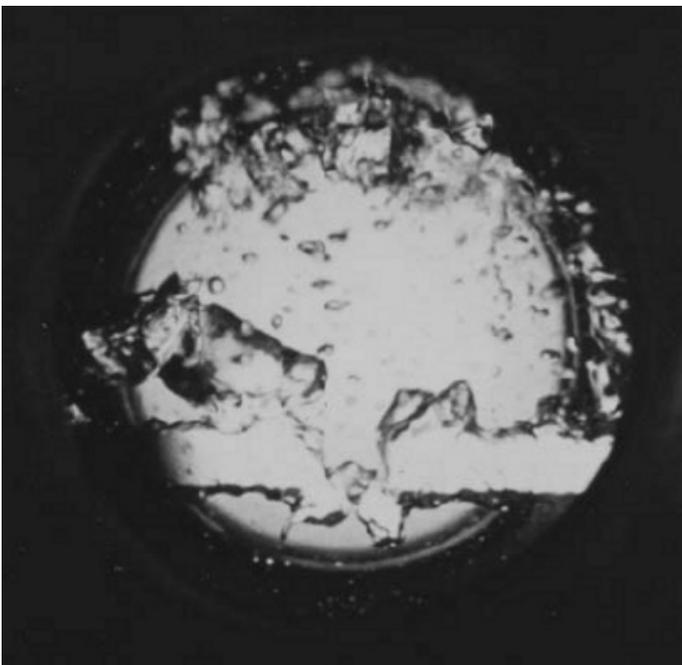
Konvektion und Phasenübergang:

Wärmeübergang bei Verdampfung

Stabilität beim Sieden



Elektrisch beheiztes Rohr
Unmittelbar vor Erreichen
von $q_{\max} = 2,2 \cdot 10^5 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$
Siedendes R11 ($p = 0,1 \text{ MPa}$)



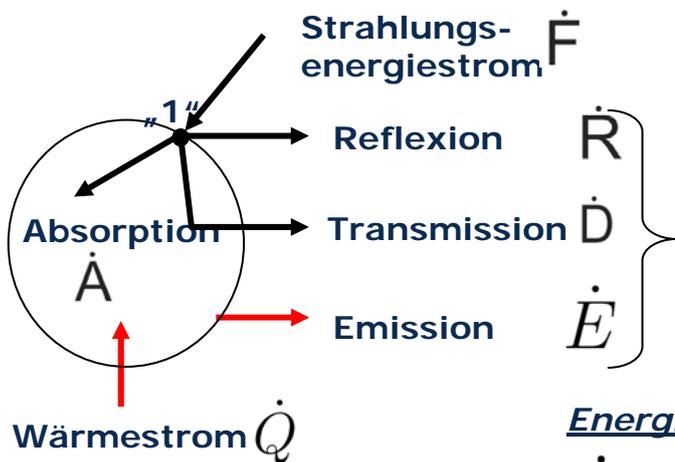
Elektrisch beheiztes Rohr
im Augenblick des Durch-
Brennens (burnout)

aus Baehr und Stephan ; 2008

Strahlung:

1. Wesentliche Grundlagen

a) Energiebilanz der Strahlung



Strahlungsenergiestrom (an „1“)

$$\dot{F} = \dot{R} + \dot{A} + \dot{D} \quad \text{Gl. (1)}$$

ausgesendeter Energiestrom
„Flächenhelligkeit“

$$\dot{S} = \dot{R} + \dot{E} + \dot{D}$$



Energiebilanz

$$\dot{S} = \dot{Q} + \dot{F} \quad \text{bzw.} \quad \dot{Q} = \dot{E} - \dot{A}$$

Strahlungsgleichgewicht

$$\dot{F} = \dot{S} \quad \dot{A} = \dot{E}$$

Strahlungsbilanz (Gl. (1) / \dot{F})

$$\rho + \alpha + \tau = 1$$

Reflexions-grad
Absorptions-grad
Transmissions-grad

b) Planck'sches Gesetz

$$\hat{e}_{\lambda,S} = \frac{d\dot{E}_S}{d\lambda dA} = \frac{C_1}{\lambda^5 \left[\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1 \right]}$$

c) Wien'sches Verschiebungsgesetz

$$\lambda_{opt} T = C_3$$

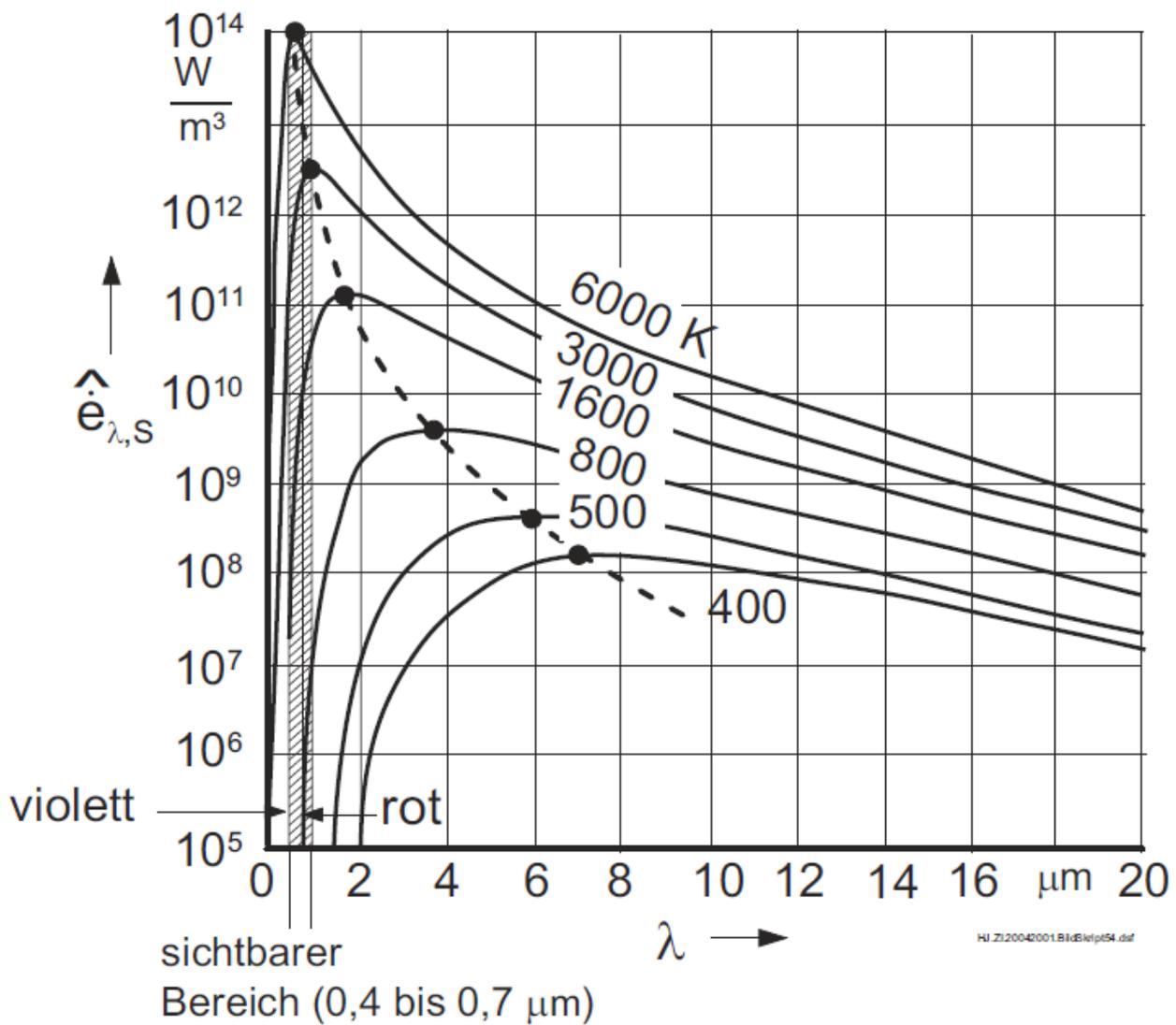
d) Stefan Boltzmann'sches Gesetz

$$\hat{e}_S = \sigma_S T^4 \quad \hat{e}_S = C_S \left(\frac{T}{100}\right)^4$$

Strahlung:

1. Wesentliche Grundlagen

Energiestromdichte des schwarzen Strahlers

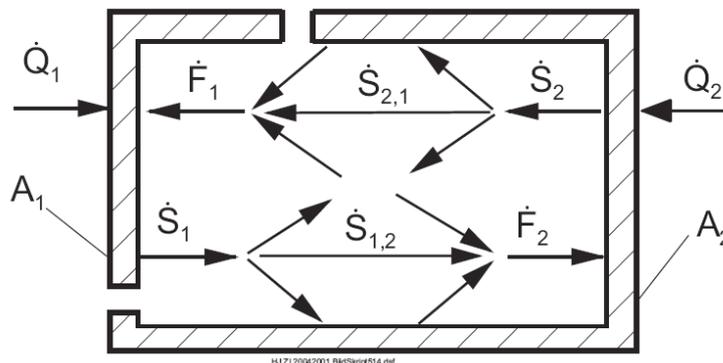


Strahlung:

2. Zweiflächenstrahlungsaustausch

→ Wiederholung Grundlagenvorlesung

- Ausgangspunkt: - 2 strahlungsundurchlässige graue Flächen → $\dot{D} = 0$
 → $\tau = 0$; $0 < \varepsilon < 1$
 - strahlungsdurchlässiges Zwischenmedium $\tau = 0$



$$\dot{Q}_{\tau,1,2} = \dot{Q}_{1,2} = C_{1,2} A_1 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]$$

Strahlungsaustauschkoeffizient

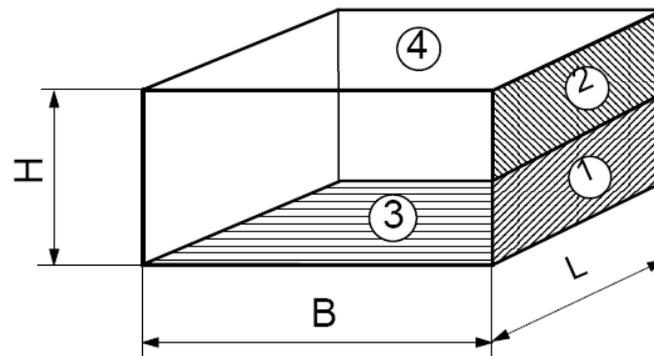
$$C_{1,2} = \frac{C_S}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \frac{1}{\varphi_{1,2}} + \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \frac{A_1}{A_2}}$$

Strahlung:

3. Mehrflächenstrahlungsaustausch

Ausgangspunkt: - 2 strahlungsundurchlässige graue Flächen $\rightarrow \dot{D} = 0$
 $\rightarrow \tau = 0; 0 < \varepsilon < 1$

- strahlungsdurchlässiges Zwischenmedium $\tau = 0$
- ähnliche Herleitung wie beim Zweiflächenstrahlungsaustausch



Ergebnis: - N Gleichungen zur Bestimmung der unbekanntenen Flächenhelligkeiten

a) Temperatur gegeben

$$\hat{s}_i - (1 - \varepsilon_i) \sum_{k=1}^N \hat{s}_k \varphi_{i,k} = \hat{e}_i$$

b) Nettowärmestrom gegeben

$$\hat{s}_i - \sum_{k=1}^N \hat{s}_k \varphi_{i,k} = \hat{q}_i$$

Lösungsmethoden:

- Iterative Lösung nach Gauß-Seidel-Verfahren
- Lösung nach Matrizenverfahren
- Lösung nach Netzwerkmethod
- Vereinfachte Näherungsmethoden

4. Gasstrahlung

Gase sind im Gegensatz zu Festkörpern im größten Teil des Spektrums für Wärmestrahlen durchlässig und senden in diesen Bereichen auch keine Strahlung aus. Sie strahlen nur in begrenzten Banden.

Ursache der Gasstrahlung:

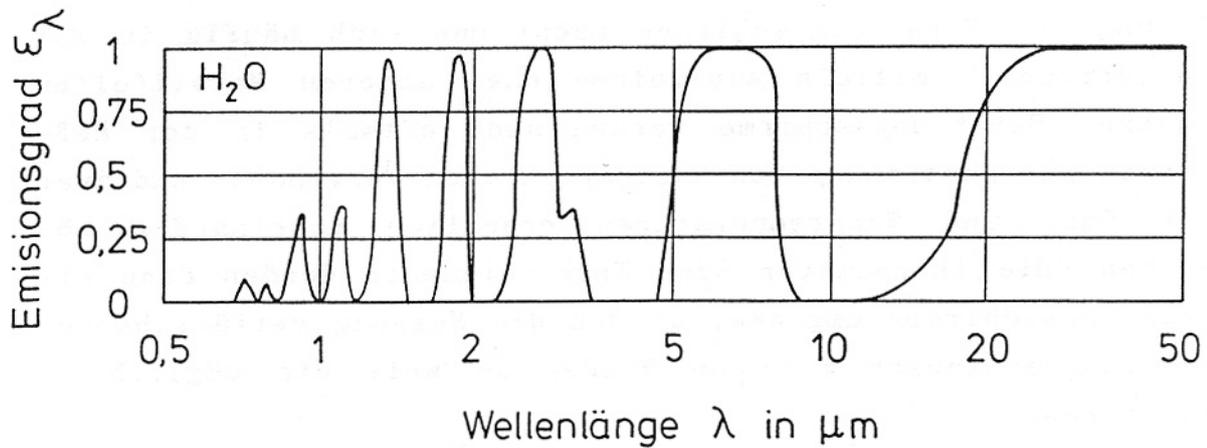
- Infolge von Molekülzusammenstößen führen Atome Schwingungen und Rotationen aus
- Wenn freie Ladungsträger vorhanden werden elektromagnetische Strahlen ausgesendet

relevante Gase

- wichtige **strahlungsaktive Gase** sind **CO₂ und H₂O**
- **N₂, O₂ und O₂** bestehen aus gleichartigen Atome, besitzen keine freie Ladungen und **senden daher keine Wärmestrahlung aus**
- andere Gase wie **CO, CH₄ und SO₂ vernachlässigbar** (da geringe Konzentration)

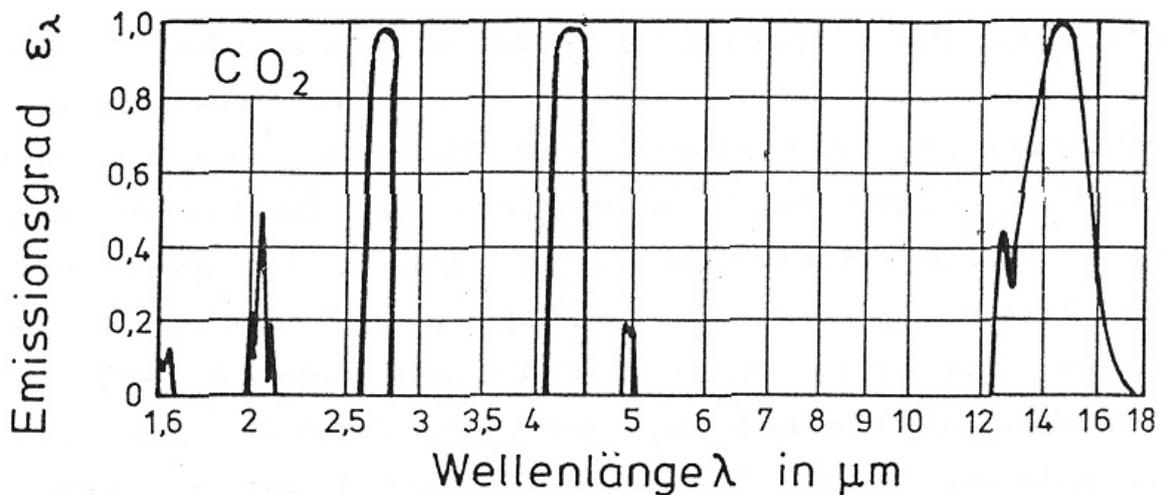
Strahlung:

4. Gasstrahlung



Emissionsspektrum von Wasserdampf bei großer Schichtdicke und Atmosphärendruck

Kondratyev, K. Y. A., Radiation in the atmosphere, Academic Press New York, 1969



Emissionsspektrum von Kohlendioxid bei 20°C und 100 cm Schichtdicke

Eckert, E. R. G., Einführung in den Wärme- und Stoffaustausch, Springer-Verlag, 1966

Strahlung:

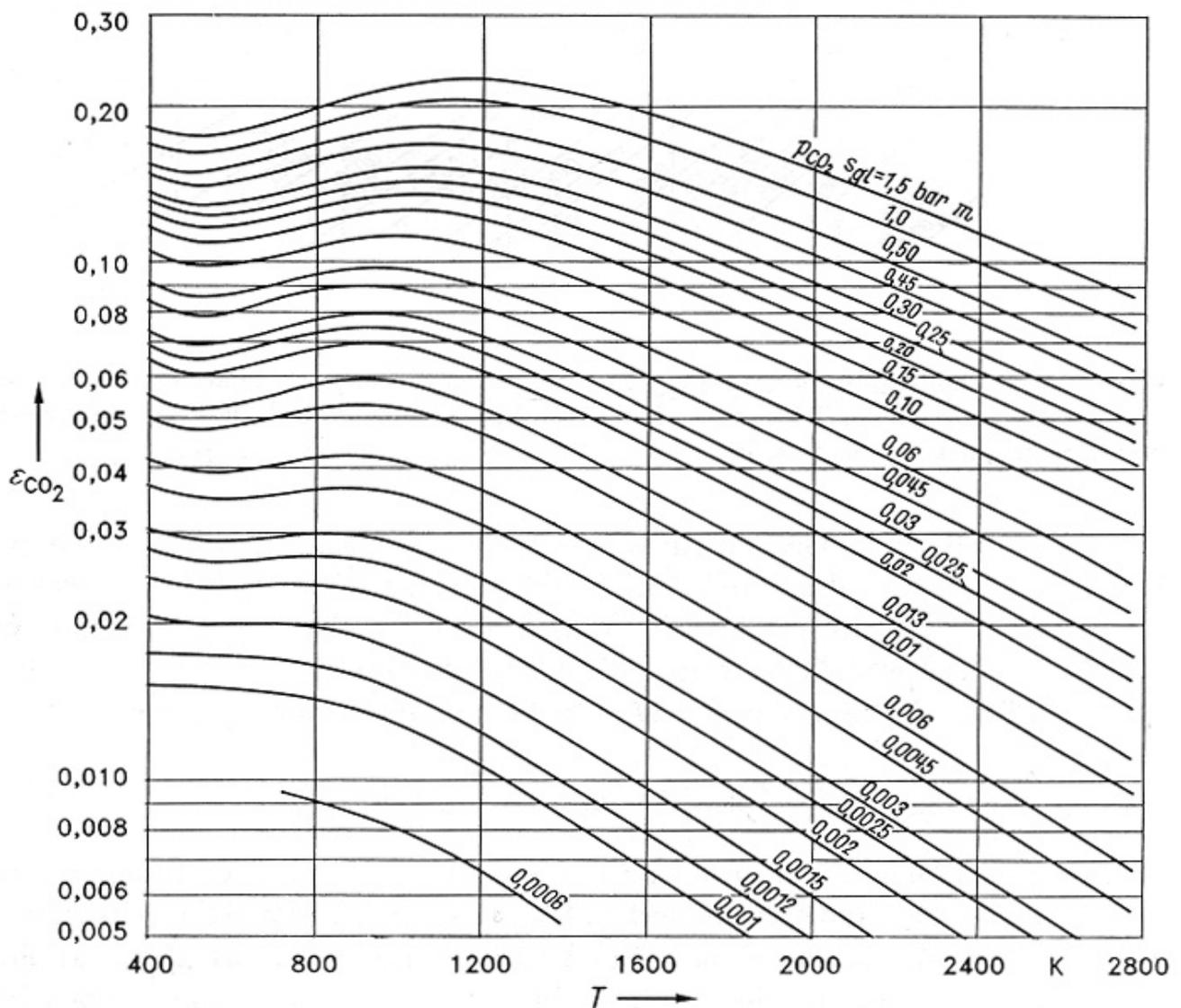
4. Gasstrahlung

Emissionsgrad von H₂O und CO₂

$$\varepsilon = f(p_G, s_{gl}, T_G)$$

p_G ... Partialdruck des Gases; T_G ... Temperatur des Gases

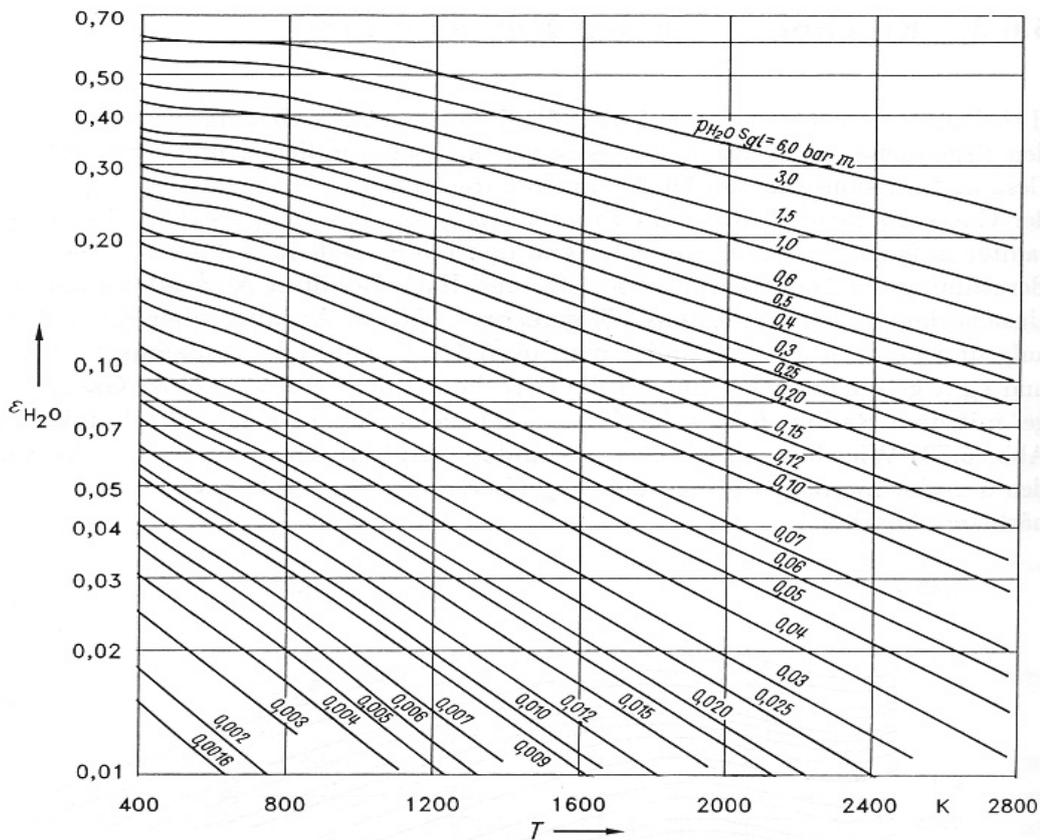
s_{gl} ... optische Dichte $s_{gl} = 0,9 \cdot \frac{4 \cdot V}{F}$ strahlungsaktives Volumen
Oberfläche des Gaskörpers



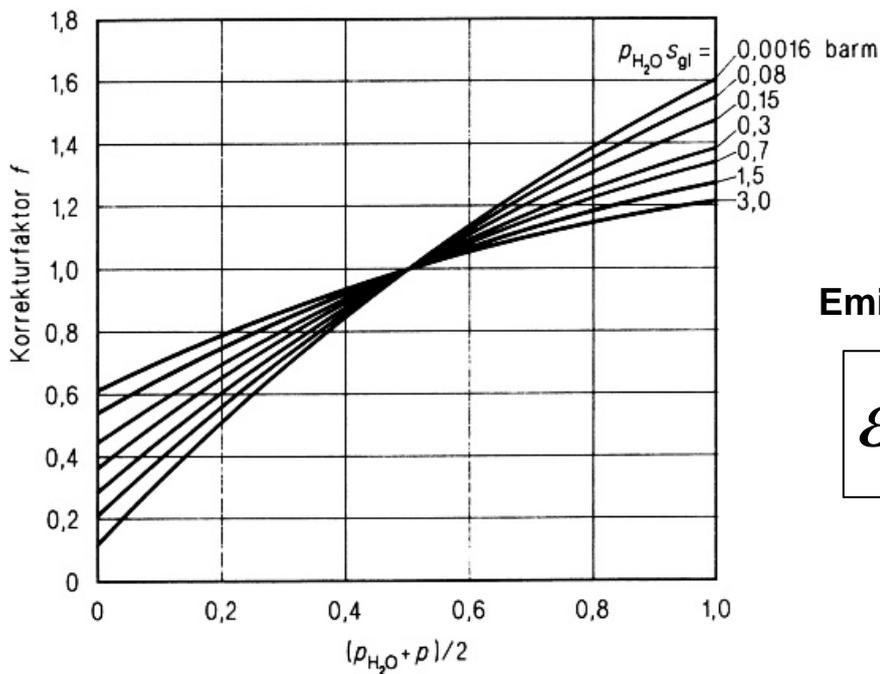
Emissionsspektrum von CO₂ bei Atmosphärendruck (aus VDI Wärmeatlas)

Strahlung:

4. Gasstrahlung



Emissionsgrad von H₂O bei Atmosphärendruck (aus VDI Wärmeatlas)



Emissionsgrad Wasserdampf

$$\epsilon_{H_2O} = f \cdot \epsilon'_{H_2O}$$

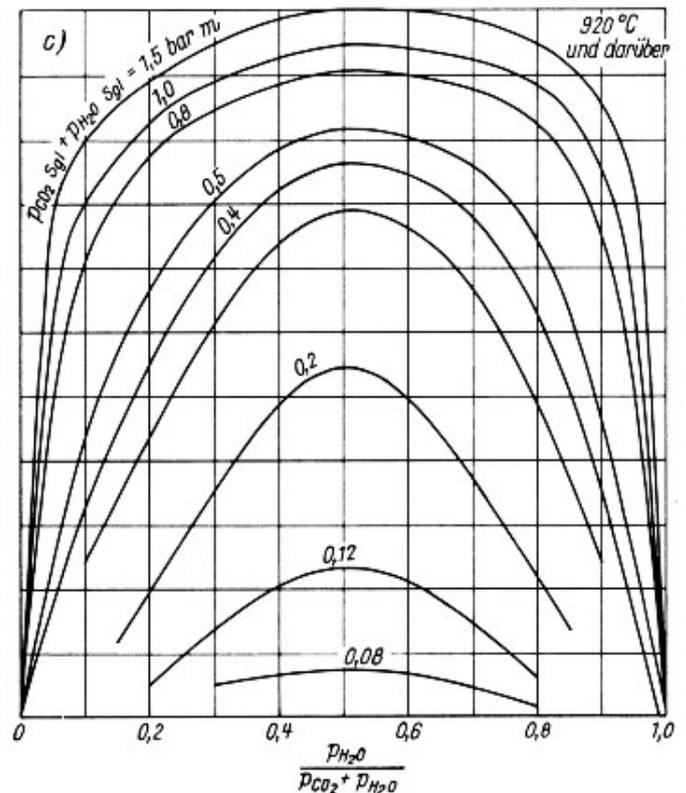
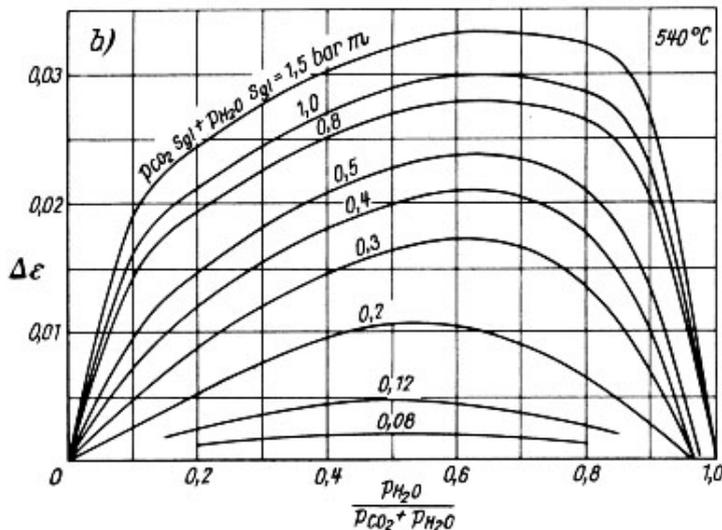
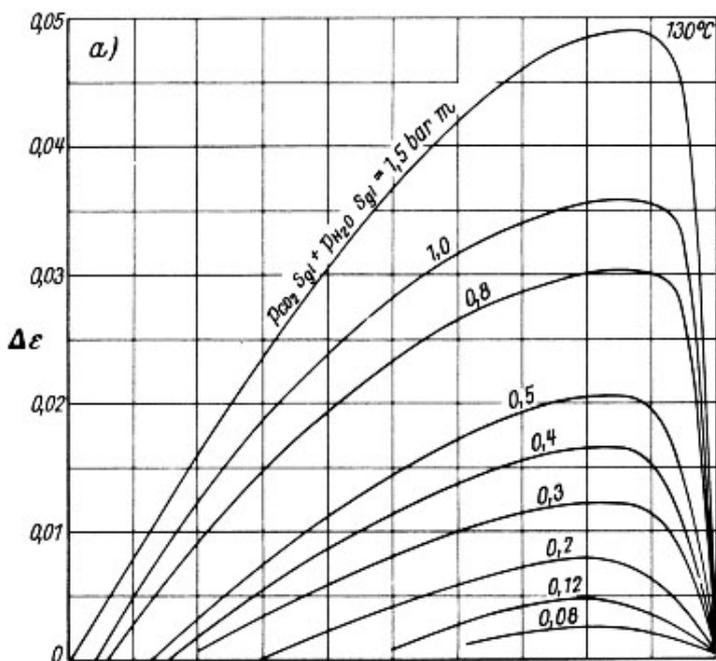
Druckkorrekturfaktor für Wasserdampf (aus VDI Wärmeatlas)

Strahlung:

4. Gasstrahlung

Emissionsgrad von Gasmischungen

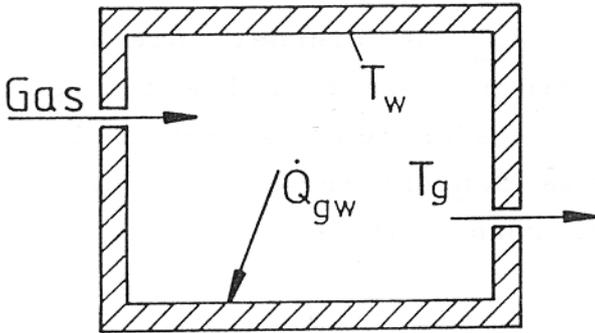
$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{CO}_2} + \varepsilon_{\text{H}_2\text{O}} - \Delta\varepsilon$$



Korrektur $\Delta\varepsilon$ für den Gesamtemissionsgrad infolge von Bandenüberlappungen bei Gasmischungen aus Kohlendioxid und Wasserdampf bei verschiedenen Gastemperaturen a) 130°C , b) 540°C und c) 920°C und darüber (aus VDI WA)

Strahlung:

5. Strahlungsaustausch Gas-Wand (Zweieraustausch)



z.B. Modell für Heizungskessel oder Feuerungsraum (Brennkammer)

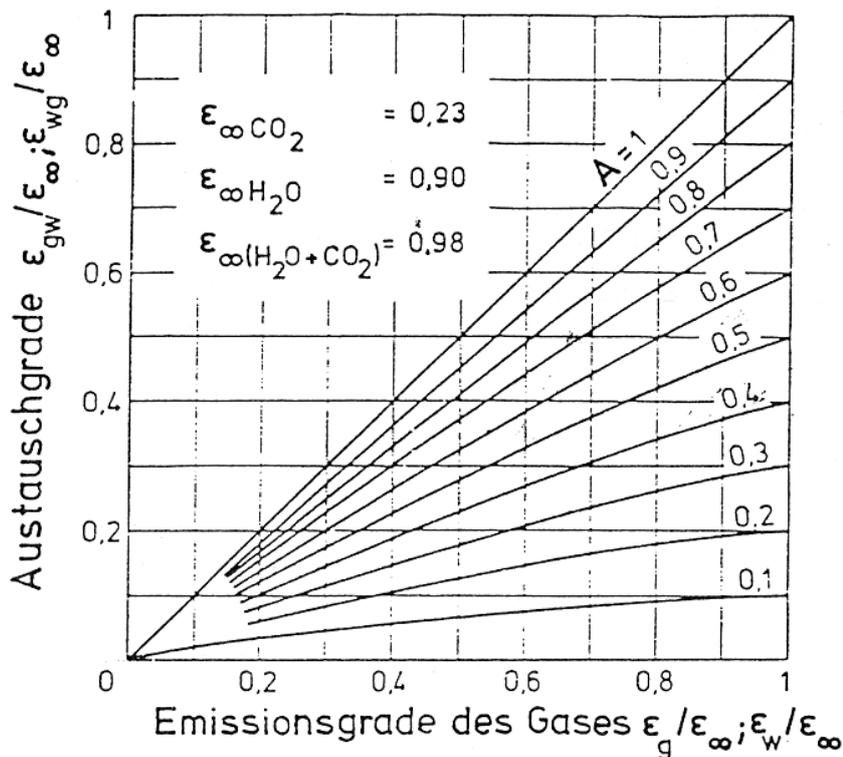
$$\dot{Q}_{gw} = \sigma \cdot F_w (\epsilon_{gw} \cdot T_g^4 - \epsilon_{wg} \cdot T_w^4)$$

$$\epsilon_{gw} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_g} + \frac{1}{\epsilon_\infty} \left(\frac{1}{A} - 1 \right)}$$

$$\epsilon_{wg} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_w} + \frac{1}{\epsilon_\infty} \left(\frac{1}{A} - 1 \right)}$$

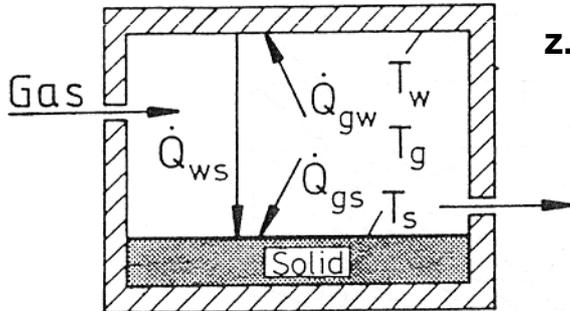
ϵ_g ...Emissionsgrad des Gases bei T_g , ϵ_w ...Absorptionsgrad bei T_w ,
 A ...Absorptionsgrad der Wand, ϵ_∞ ...Emissionsgrad des Gases bei unendlicher Schichtdicke

$$\epsilon_{\infty,CO_2} = 0,23 \quad \epsilon_{\infty,H_2O} = 0,90 \quad \epsilon_{\infty,H_2O+CO_2} = 0,98$$



Strahlung:

6. Strahlungsaustausch mit Sekundärstrahlung (Dreieraustausch)



**z.B. Gut in Ofenräumen (Trocknung) oder
Thermoelement in Feuerungsraum**

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{gs} &= \varepsilon_{gs} \cdot \sigma \cdot F_s \cdot (T_g^4 - T_s^4) \\ (\dot{Q}_{ws}) &= \varepsilon_{ws} \cdot \sigma \cdot F_s \cdot (T_w^4 - T_s^4) \\ (\dot{Q}_{gw}) &= \varepsilon_{gw} \cdot \sigma \cdot F_w \cdot (T_g^4 - T_w^4) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \dot{Q}_{gs} \\ (\dot{Q}_{ws}) \\ (\dot{Q}_{gw}) \end{aligned}} \right\} \dot{Q}_{gw} = \dot{Q}_{ws}$$

$$\dot{Q}_s = \dot{Q}_{gs} + \dot{Q}_{ws}$$

$$\dot{Q}_{ws} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_{ws}} + \frac{F_s}{F_w} \cdot \frac{1}{\varepsilon_{gw}}} \cdot \sigma \cdot F_s \cdot (T_g^4 - T_s^4)$$

$$\boxed{\dot{Q}_s = \varepsilon_{eff} \cdot \sigma \cdot F_s \cdot (T_g^4 - T_s^4)}$$

$$\varepsilon_{gs} = \frac{\varepsilon_g \cdot A_s \cdot [1 + \phi_s \cdot (1 - \varepsilon_g) \cdot (1 - A_w)]}{1 - U}$$

$$\varepsilon_{gw} = \frac{\varepsilon_g \cdot A_w \cdot [1 + \phi_s \cdot (1 - \varepsilon_g) \cdot (1 - A_s)]}{1 - U}$$

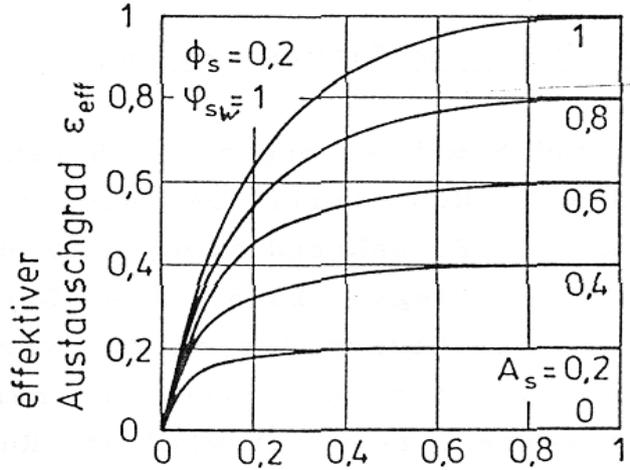
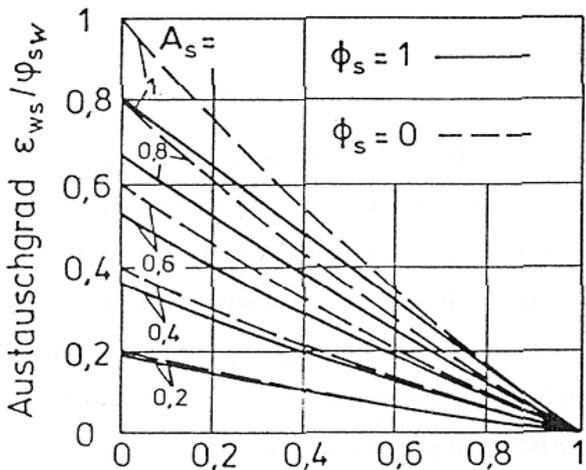
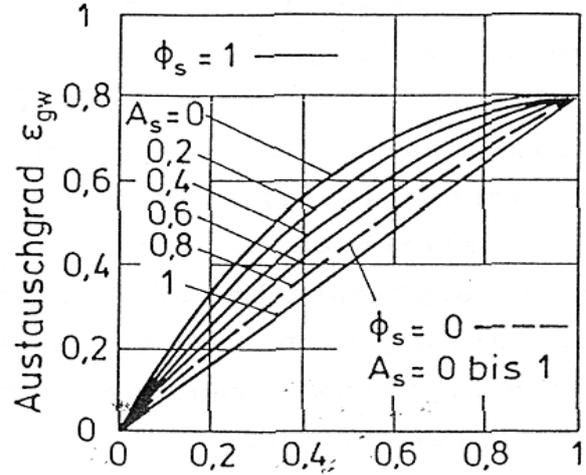
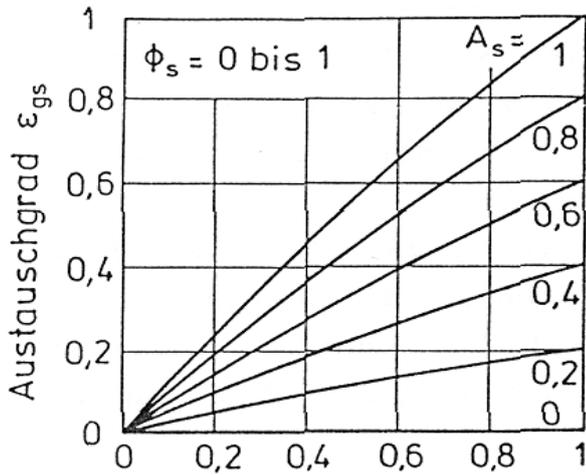
$$\phi_s = \varphi_{sw} \cdot \frac{F_s}{F_w} \quad 0 \leq \phi_s \leq 1$$

$$\varepsilon_{ws} = \frac{A_w \cdot A_s \cdot (1 - \varepsilon_g)}{1 - U} \cdot \varphi_{sw}$$

$$U = (1 - \varepsilon_g) \cdot (1 - A_w) \cdot [\phi_s (1 - \varepsilon_g) \cdot (1 - A_s) + (1 - \phi_s)]$$

Strahlung:

6. Strahlungsaustausch mit Sekundärstrahlung (Dreieraustausch)



Einzel austauschgrade ϵ_{gs} , ϵ_{gw} , ϵ_{ws} Emission in Abhängigkeit von dem Emissionsgrad des Gases ϵ_g und dem Absorptionsgrad des Solids A_s ($A_w=0,8$)

Effektiver Austauschgrad ϵ_{eff} in Abhängigkeit vom Emissionsgrad des Gases ϵ_g und dem Absorptionsgrad des Solids A_s ($A_w=0,8$)

Stofftransport

Definition:

Unter Stofftransport versteht man den Transport einer oder mehrerer Komponenten eines Gemisches fluider oder fester Stoffe innerhalb einer Phase oder über Phasengrenzflächen hinweg.

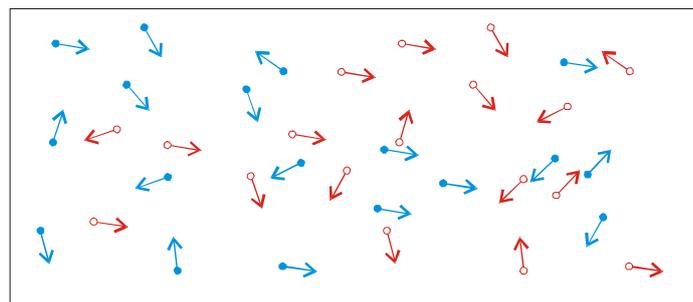
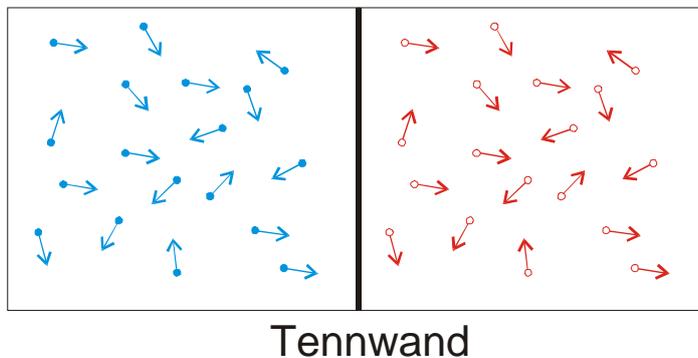
Arten der Stoffübertragung

- **Diffusion:** Stofftransport durch **makroskopisch wahrnehmbare Relativbewegung einzelner Stoffe** in einer Phase
- **Stoffübergang:** Stofftransport **innerhalb einer Phase** bis an die Phasengrenzfläche
- **Stoffdurchgang:** Stofftransport **über die Phasengrenzfläche hinweg**
- **Treibende Kraft für Stofftransport: Konzentrations-, Partialdruckgradienten**

Stoffübertragung:

1. Diffusion

- Von selbst verlaufende, gegenseitige Vermischung verschiedener Stoffe
- Geschwindigkeit, mit der Gase diffundieren, hängt u.a. von der Teilchengeschwindigkeit ab.



... wird entfernt --> Ausgleichsvorgang

Stoffübertragung:

1. Diffusion

Ausgangspunkt: binäre Mischung der Komponenten A und B

- a) **Molekularer Transport** wird durch das **1. FICK'sche Gesetz** beschrieben (**entspricht** dem **FOURIER'schen Erfahrungsgesetz** der Wärmeleitung) (ruhend System)

Diffusion

$$\vec{\hat{m}}_{D,A} = -D_{AB} \text{ grad } \zeta_A$$

$$\vec{\hat{m}}_{D,A} = -D_{AB} \rho_m \text{ grad } \xi_A$$

$$\vec{\hat{m}}_{D,A} = -\frac{D_{AB}}{R_A T} \text{ grad } p_A$$

D_{AB} ... Diffusionskoeffizient [m^2/s]

ζ_A ... Massenkonzentration [$\text{kg A}/\text{m}^3$]

($\zeta_A = m_A/V$)

ξ_A ... Masseanteil [$\text{kg A} / \text{kg}$] ($\xi_A = m_A/m$)

p_A ... Partialdruck [Pa] ($p_A = \zeta_A \cdot R_A \cdot T$)



! Kein konvektiver Transport berücksichtigt!

Wärmeleitung

$$\vec{\hat{q}} = -\lambda \text{ grad } t$$

λ ... Wärmeleitkoeffizient
[$\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$]

t ... Temperatur [$^{\circ}\text{C}$]

Stoffübertragung:

1. Diffusion

b) **Konvektiver Transport** berücksichtigt makroskopischen Stofftransport (bewegtes System)

→ Schwerpunktgeschwindigkeit w_s wird über Impulsbilanz berücksichtigt

Massenstromdichte = molekularer Transport + konvektiver Transport

$$\vec{\hat{m}}_A = \zeta_A \vec{w}_A = -D_{AB} \text{grad } \zeta_A + \zeta_A \vec{w}_S$$

2 Grenzfälle

- i. Schwerpunktgeschwindigkeit $w_s=0$ (1. Fick'sches Gesetz)
- ii. Einseitige Diffusion ($\hat{m}_B=0$) → STEFAN'sches Gesetz

$$\zeta_A w_S = \zeta_A (w_A \xi_A + \underbrace{w_B}_{=0} \xi_B) = \zeta_A w_A \xi_A = \hat{m}_A \xi_A$$

$$\vec{\hat{m}}_A = -\frac{D_{AB} \rho_m}{1 - \xi_A} \text{grad } \xi_A$$

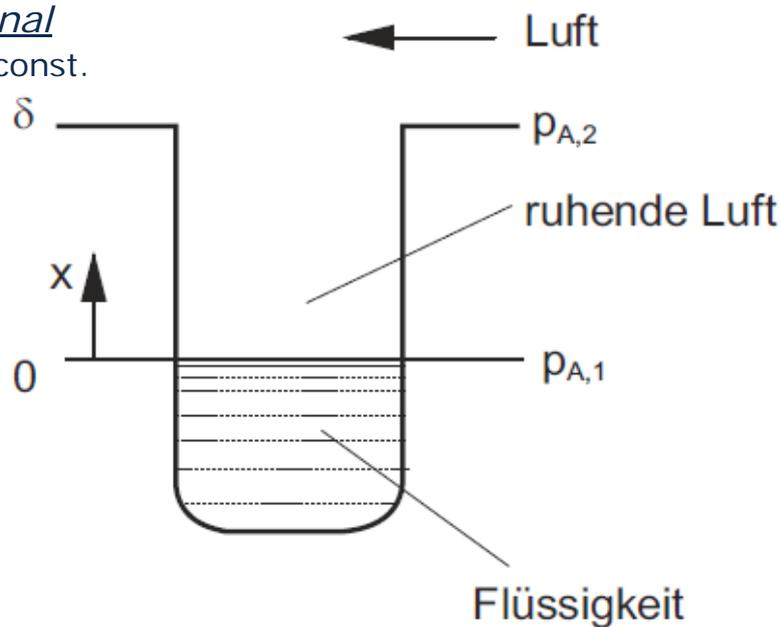
1. Diffusion

a) Einseitige Diffusion – STEFAN'sches Gesetz

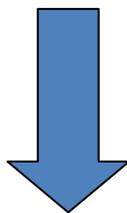
→ Beispiel: Verdunstung einer Flüssigkeit in einem Glasröhrchen
(z.B feuchte Luft)

1 Dimensional

$P = \text{const.}; t = \text{const.}$



$$\vec{\hat{m}}_A = -\frac{D_{AB}}{R_A T} \frac{p}{p - p_A} \text{grad } p_A$$



Lösung:

$$\hat{m}_A = \frac{D_{AB} p}{\delta R_A T} \ln \frac{p - p_{A,2}}{p - p_{A,1}}$$

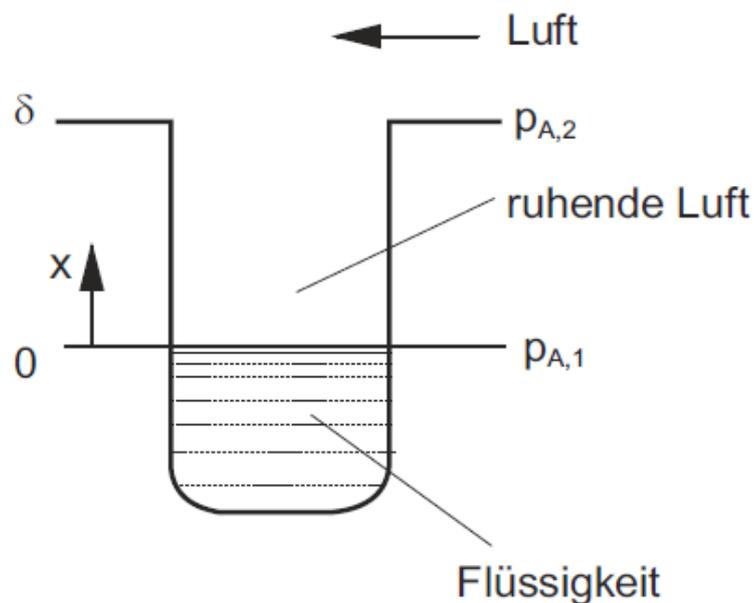
1. Diffusion

a) Einseitige Diffusion – STEFAN'sches Gesetz

→ bei kleinen Partialdruckdifferenzen ($p_{A,1} - p_{A,2} \ll p$)

1 Dimensional

$P = \text{const.}; t = \text{const.}$



$$\hat{m}_A = \frac{D_{AB}}{\delta R_A T} (p_{A,1} - p_{A,2})$$

Vergleich zur stationären Wärmeleitung (ebener Fall)

$$\hat{q} = \frac{\lambda}{\delta} (t_{W,2} - t_{W,1}) \quad \begin{aligned} \delta &\hat{=} \delta \\ \lambda &\hat{=} \frac{D_{AB}}{R_A T} \end{aligned}$$

→ Zylinder-, Kugelwand Wissensspeicher S. 40-41

1. Diffusion

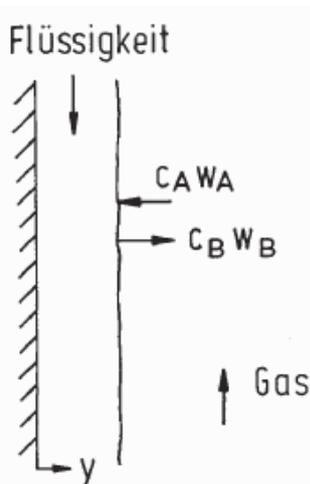
b) Äquimolare Diffusion

→ Es treten gleichviele Teilchen von A nach B wie auch von B nach A

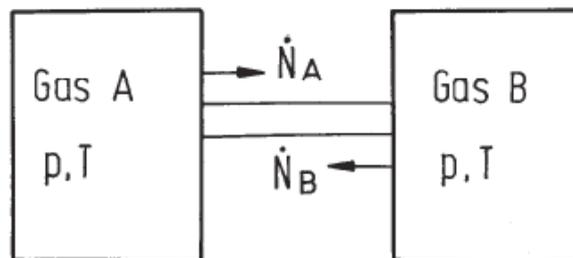
Beispiele

→ Destillation von Zweistoffgemischen

→ Diffusion zwischen zwei Gasbehältern



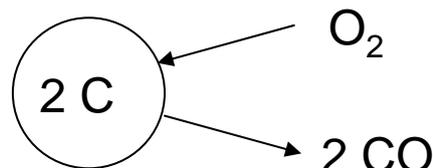
Destillation (aus Baehr)



Äquimolare Diffusion zwischen 2 Behältern (aus Baehr)
 $p_A = p_B$; $T_A = T_B$

c) Nichtäquimolare Diffusion

→ Diffusionsstromdichten von A und B sind nicht gleich
 (z.B. Kohlevergasung)



1. Diffusion

Diffusionskoeffizient D_{AB}

- a) Experimentelle Bestimmung
→ sehr schwierig und aufwendig (selten)
- a) Näherungsmethoden (z.B. nach der kinetischen Gastheorie)
→ siehe Literatur: VDI-Wärmeatlas (Da-10);
Poling et al.; The Properties of Gases
and Liquids(www.knovel.com)

$$D_{AB} = \frac{10^{-3} T^{1,75} \sqrt{\frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_B}}}{p \left(\tilde{v}_A^{1/3} + \tilde{v}_B^{1/3} \right)^2} \cdot 1,013$$

- b) Empirische Gleichungen (z.B. Wasserdampf in Luft)

$$D_{AB} = 2,305 \cdot 10^{-5} \frac{1,0133 \text{ bar}}{p} \left(\frac{T}{273 \text{ K}} \right)^{1,81} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

2. Konvektiver Stoffübergang

→ konvektiver Stofftransport zwischen einer Oberfläche (feste Wand, Flüssigkeit) und einem strömenden Fluid (Analog zum Wärmeübergang)

Stoffübergang

$$\begin{aligned}\hat{m}_{K,A} &= \beta (\zeta_{A,W} - \zeta_{A,F}) \\ &= \frac{\beta}{R_A T} (p_{A,W} - p_{A,F})\end{aligned}$$

β ...Stoffübergangskoeffizient [m/s]

$\zeta_{A,W}$...Massenkonzentration an der Wand [kg A/m³]

$\zeta_{A,F}$... Massenkonzentration in der Kernströmung [kg A/m³]

$p_{A,W}$...Partialdruck an der Wand [Pa]

$p_{A,F}$... Partialdruck in der Kernströmung [Pa]

R_A ...spez. Gaskonstante [J/(kg*K)]

Wärmeübergang

$$\hat{q} = \alpha | (t_W - t_F) |$$

α ...Wärmeübergangskoeffizient [W/(m²*K)]

t_W ...Temperatur an der Wand [°C]

t_F ... Temperatur in der Kernströmung [kg A/m³]

Stoffübertragung:

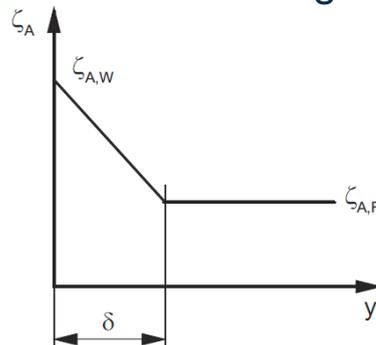
2. Konvektiver Stoffübergang

Stoffübergangstheorien

Ziel: Ermittlung des Stoffübergangskoeffizienten β

a) Filmtheorie nach Lewis/Whitman (1924)

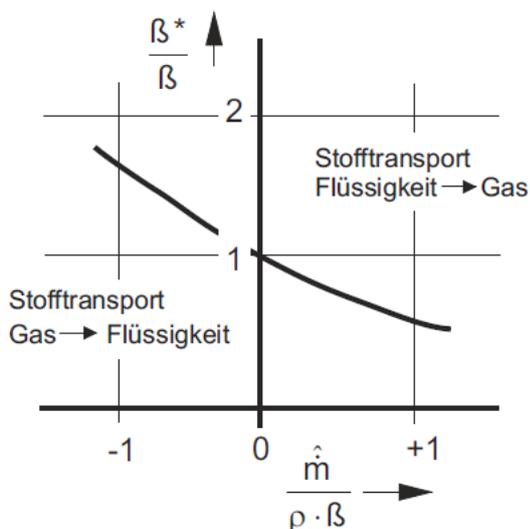
→ von fester oder flüssiger Oberfläche (ebene Platte) wird Stoff A an strömendes Fluid übertragen



- Konzentration und Geschwindigkeit ändert sich nur in y-Richtung
- Stoffübergang findet in wandnahen Fluidfilm der Dicke δ statt
- Filmdicke nur bei bekannten β bestimmbar

$$\delta = \frac{D_{AB}}{\beta}$$

→ Korrektur des Stoffübergangskoeffizienten bei großen Stoffstromdichten



$$\beta^* = \beta \frac{\frac{\hat{m}_A}{\rho \beta}}{\exp\left(\frac{\hat{m}_A}{\rho \beta}\right) - 1}$$

Stoffübertragung:

2. Konvektiver Stoffübergang

Stoffübergangstheorien

Ziel: Ermittlung des Stoffübergangskoeffizienten β

b) Grenzschichttheorie

- Stoffübergang erfolgt auch in wandnaher Schicht
- Konzentration und Geschwindigkeit ändern sich in alle Koordinatenachsen
- Änderung des Konzentrationsprofils in dünner, wandnaher Schicht groß im Vergleich zur Änderung in Richtung der übrigen Koordinatenachsen → nur Diffusion in y-Richtung

$$\beta_m = \frac{1}{L} \int_{x=0}^L \beta dx$$

- Analogie zwischen Wärme- und Stoffübertragung

Ähnlichkeitskennzahlen für erzwungene Konvektion

Stoffübergang

Sherwood-Zahl: $Sh = \frac{\beta l}{D_{AB}}$

Schmidt-Zahl: $Sc = \frac{\nu}{D_{AB}}$

Wärmeübergang

Nusselt-Zahl: $Nu = \frac{\alpha l}{\lambda}$

Prandtl-Zahl: $Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\eta c_p}{\lambda}$

$$\text{Lewis-Zahl: } Le = \frac{Sc}{Pr} = \frac{\text{Stofftransport}}{\text{Wärmetransport}}$$

Stoffübertragung:

2. Konvektiver Stoffübergang

Stoffübergangstheorien

Ziel: Ermittlung des Stoffübergangskoeffizienten β

b) Grenzschichttheorie

Zusammenhang zwischen α und β

$$Sh = k_1 \cdot Re^{k_2} \cdot Sc^{k_3}$$

$$Nu = k_1 \cdot Re^{k_2} \cdot Pr^{k_3}$$

$$\frac{Sh}{Nu} = \left(\frac{Sc}{Pr} \right)^{k_3} = Le^{k_3}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \rho \cdot c_p \left(\frac{a}{D} \right)^{1-k_3}$$

Sonderfall:
Lewis'sches Gesetz

$$\beta = \frac{\alpha}{\rho c_p}$$

- a) Intensität von Wärme- und Stoffaustausch sind gleich $Sc=Pr$
(Le=1)
b) $k_3=1$: bei turbulent ausgebildeten Strömungen

Für große Stoffstromdichten Korrektur von β
(z.B. Kondensation mit Inertgasen)

$$\beta_{Korr} = \beta \frac{K}{1 - \exp(-K)} \quad K = \frac{\hat{m}_{d,0}}{\rho \beta}$$

2. Konvektiver Stoffübergang

Stoffübergangstheorien

Ziel: Ermittlung des Stoffübergangskoeffizienten β

c) Penetrationstheorie (Oberflächenerneuerungstheorie) von Higbie (1935) und Dankwerts (1951)

- Anders als bei Film- und Grenzschichttheorie handelt es sich um instationären Diffusionsvorgang
- beide Phasen haben nur kurzzeitig Kontakt (z.B. Luftblase in Wasser)
- Stoffübergangskoeffizient ist umgekehrt proportional der Wurzel aus Kontaktzeit

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{D_{AB}}{\tau}}$$

3. Differenzialgleichung für Konzentrationsfeld

→ Analog zur Energietransportgleichung (Fluid)

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} + (\rho \vec{w}) c \text{ grad } t = \lambda \text{ div grad } t + \tilde{q}_i$$

Ziel: Berechnung des Konzentrationsfeldes

$$\underbrace{\frac{\partial \zeta_A}{\partial \tau}} + \underbrace{\vec{w}_S \text{ grad } \zeta_A} = \underbrace{\text{div} (D_{AB} \text{ grad } \zeta_A)} + \underbrace{\tilde{m}_A}$$

Zeitliche
Änderung

Transport durch
Mitführen

Molekularer
Transport

Quelle/
Senke

Vereinfachungen:

- konstante Stoffwerte:
- sehr kleine Diffusionsstromdichte:
- keine Quellen/Senken:

$$D_{AB} = \text{const.}$$

$$\vec{w}_S = 0$$

$$\tilde{m}_A = 0$$

2. Fick'sches Gesetz

$$\frac{\partial \zeta_A}{\partial \tau} = D_{AB} \text{ div grad } \zeta_A$$

Fourier'sche DGL

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \text{ div grad } t$$

1D Ebene Platte (instationär)

$$\frac{\partial \zeta_A}{\partial \tau} = D_{AB} \frac{\partial^2 \zeta_A}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$$

1D Ebene Platte (stationär)

$$\frac{d^2 \zeta_A}{dx^2} = 0$$

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = 0$$

3. Differenzialgleichung für Konzentrationsfeld

→ Lösung der DGL für das Konzentrationsfeld analog zu Temperaturfeld

Randbedingungen:

1. Art: Konzentration an der Wand ist gegeben (z.B. bei Verdunstung an der Wasseroberfläche)
(*analog Temperaturfeld: Temperatur an der Wand gegeben*)

$$\zeta_A(\vec{r}_W, \tau)$$

2. Art: Diffusionsstromdichte normal zur Oberfläche ist bekannt
(*analog Temperaturfeld: Wärmestromdichte gegeben*)

$$\hat{m}_{D,W}$$

3. Art: Diffusionsstromdichte an der Oberfläche ergibt sich aus dem Konzentrationsgradienten an der Oberfläche
(*analog Temperaturfeld: Wärmestromdichte an der Oberfläche ergibt sich aus dem Temperaturgradienten*)

$$\hat{m}_{D,A,W} = -D_{AB} \left(\frac{d\zeta_A}{dy} \right)_W = \beta (\zeta_{A,W} - \zeta_{A,F})$$

Stoffübertragung:

3. Differenzialgleichung für Konzentrationsfeld

→ Lösung der DGL für das Konzentrationsfeld analog zu Temperaturfeld

Instationäre Lösung mit Hilfe bekannter Ähnlichkeitskennzahlen

	<u>Diffusion</u>	<u>Wärmeleitung</u>
<u>Biot-Zahl</u>	$Bi_D = \frac{\beta l}{D_{AB}}$	$Bi = \frac{\alpha l}{\lambda}$
<u>Fourier-Zahl</u>	$Fo_D = \frac{D_{AB} \tau}{l^2}$	$Fo = \frac{a \tau}{l^2}$
<u>Dimensionsloses Potential</u>	$\zeta_A^+ = \frac{\zeta_A - \zeta_{A,W}}{\zeta_{A,0} - \zeta_{A,W}}$	$\vartheta = \frac{t - t_W}{t_0 - t_W}$
<u>Dimensionsloser Parameter</u>	$\eta_D = \frac{x}{\sqrt{4 D_{AB} \tau}}$	$\eta = \frac{x}{\sqrt{4 a \tau}}$
<u>Eindringkoeffizient</u>	$b_D = \sqrt{D_{AB}}$	$b = \frac{\lambda}{\sqrt{a}} = \sqrt{\lambda \rho c}$

Nutzung bekannter Methoden

- Gröber-Lösung (Diagramme)
- Modell der einseitig unendlich ausgedehnten Wand (halbunendliche Wand)
- Periodische Randbedingungen