

# Beitrag zur Generierung der Hüllvolumina für die NC-Fertigung mittels Gaußabbildung

*Dipl.-Ing. Lee, Seok Won*

## 1 Einleitung

Fräsen ist ein weitverbreiteter spanender Fertigungsprozess. Während des Fräsens wird das Rohteil ständig durch geometrisch bestimmte Werkzeuge, die sich entlang der vorgegebenen Bahnen bewegen, gefertigt und die geforderte Form wird dadurch letztendlich erreicht. Um die Produktqualität gewährleisten sowie um Hinterschneidungen oder Kollisionen zwischen Werkzeugen, Maschinenkomponenten und Werkstück Ausschuss in der Fertigung vermeiden zu können, ist es notwendig, den Fertigungsprozess vor dem realen Einsatz zu simulieren und gegebenenfalls die Fehler zu korrigieren. Die Verifizierung des Fräsenprozesses wird immer mehr zu einem ausschlaggebendem Faktor im gesamten Produktionsprozess [JAC05] [CGI96].

## 2 Ausgangssituation

Die Ermittlung des Hüllvolumens wird bereits seit mehreren Jahren untersucht, enthält aber immer noch Mängel. Das zeigt sich bei der folgenden kritischen Betrachtung der Arbeiten zur Hüllvolumenberechnung.

**Methodik:** Die mathematische Formulierung des Hüllvolumens wurde mittels der Singularitäts-Theorie [ABD97], der Sweep Envelope Differentiale Gleichung (SEDE) [BLW97], Envelope-Theorie [WL90] und der impliziten Modellierung [SLL94] untersucht.

**Polygonale Annäherung:** Es gibt wenige Arbeiten, die eine polyhedrale Annäherung der Hüllvolumina versucht haben. Im zweidimensionalen Raum realisierte Untersuchungen [AKL93, LHK02] betreffen generalisierte Sweep-Vorgänge für Kurven und wenden diese Algorithmen beim Schrift-Design an. Im dreidimensionalen Raum beschreibt [WL90] die geometrische Repräsentation der Hüllvolumina für kompakte  $n$ -Mannigfaltigkeiten. [SLL94] unter Nutzung diskreter Repräsentationen und der Rekonstruktion von Gleichwertflächen (iso-surface) zur Annäherung der Hüllvolumina. [BSC00] untersucht einen einfachen Fall für rotatorische Sweep-Vorgänge zur Erzeugung der genauen Hüllvolumina. Die 3D-Algorithmen für Hüllvolumina sind entweder auf einfache geometrische Primitive [RAA99] oder einfache Sweep-Trajektorie [BSC00] beschränkt. In anderen Fällen sind die Genauigkeit [SLL94] oder die Stabilität [AA95] nicht ausreichend. [JER89, GLA98] versuchen, mit Hilfe von Polyedern die Hüllvolumina für eine NC-Bearbeitung darzustellen.

**Visualisierung:** Viele Algorithmen haben Rasterelektronik-Hardware verwendet, um Oberflächen der Hüllvolumina zu visualisieren. Diese Algorithmen benutzen Z-Buffer-Hardware, die nicht die echte Oberfläche der 3D-Hüllvolumina, sondern eine 2D-Projektion in Blickrichtung berechnet [HUA94, HUI94, HOO86, CPS98, SAI91]. Andere Algorithmen haben CSG oder NURBS verwendet, um Hüllvolumina zu visualisieren [WDD04, KAW91, CHI02].

Tabelle 2.1 enthält die Übersicht früherer Arbeiten über die Berechnung der Hüllvolumina.

Tab. 2.1: Übersicht früherer Arbeiten zur Simulation der Fräsbearbeitung

Ansätze	Präsentation des		Fehler Analyse	Bahn	WZ-Form	Ansichtsabh.	Hüllvolumen-generierung	Anz. d. Achsen
	Werkstück	Werkzeug						
[WW86] Dexel	Dexel		Ja		Kugel oder Zylinder		Differentiale Gleichung	5
[HOO86] Dexel	Dexel		Nein		C <sup>0</sup> -stetig	Abhängig	Stempel in Image-Space	3, 5(langamer)
[HUA94] Erw. Dexel	Dexel		Ja	Korrektur	C <sup>0</sup> -stetig		Stempel in Image-Space	3-5
[JER89] Rasenmäher	Mesh	Polygonale	Ja		Kugel oder Zylinder		Polygonale	3-5
[KAW91] Graftree	Octree/CSG		Ja		Beliebig		CSG	5
[SAI91] G-Buffer	Erweiterte Z-Buffer		Ja	Erzeugung/Verifikation	C <sup>1</sup> -stetig	Abhängig	Scanning der G-Buffer	3
[CPS98] Z-Buffer	Z-Buffer		Nein		Teilweise C <sup>1</sup> -stetig		Analytische 4 Grad Glch.	3
[BLW97] SEDE	Polygonale				C <sup>1</sup> -stetig		Differentiale Gleichung	5
[CHI02]	NURBS		Ja		C <sup>1</sup> -stetig		Analytisch	5
[Wei04] Moving Frame	keins	NURBS	Nein		C <sup>1</sup> -stetig		Analytisch	5
[GLA98] Γ-Buffer	Γ-Buffer	polygonale	Ja	Erzeugung/Verifikation	C <sup>0</sup> -stetig		Scannen der Γ-Buffer Polygonale	3-5
Gauß-Abbildung	Polygonal		Ja	Erzeugung/Verifikation	C <sup>0</sup> -stetig		analytisch Polygonale	3-5

Im Gegensatz zu den oben genannten Ansätzen wird im Folgenden eine neue Methode zur Ermittlung der Hüllvolumina mit Hilfe der Gauß-Abbildung vorgestellt.

### 3 Mathematischer Hintergrund

#### Definition 1: Gauß-Abbildung und Gaußsche Sphäre

Sei  $S \subset \mathbb{R}^3$  eine Fläche mit Orientierung  $N$ . Die Abbildung  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  hat ihre Werte in der Einheitskugel  $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 = 1\}$ , eigentlich also  $N : S \rightarrow S^2$ . Diese Abbildung heißt *Gauß-Abbildung* von  $S$  [DOC83].

Der Bildbereich, welcher von dem Definitionsbereich in Euklidischen Raum mittels Gauß-Abbildung abgebildet wird, heißt Gaußsche Sphäre.

#### Definition 2: Konvexe Hülle

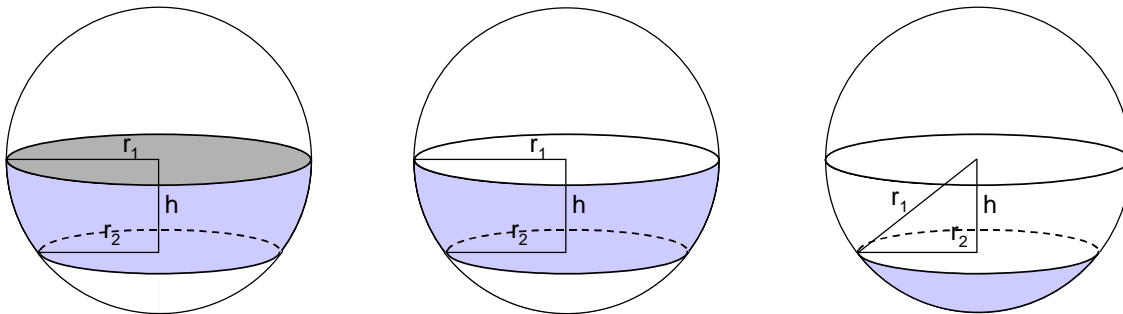
Die *konvexe Hülle* von einem Objekt oder einer Menge von Objekten wird als die minimale konvexe Menge, die gegebene Objekte umhüllt, verstanden. In 2D (3D) ist die konvexe Hülle begrifflich zu finden durch die Ausdehnung des Gummibands (-ballons), der die Objekte hüllt [DVOS00].

Gegeben sei eine Menge  $M$  von Punkten im Raum. Die konvexe Hülle von  $M$  ist die kleinste konvexe Menge, in der  $M$  enthalten ist. Für  $N$  Punkte  $p_1, \dots, p_N$  in Raum ist die konvexe Hülle  $C$  gegeben durch den Ausdruck

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^N u_i p_i \mid u_i \geq 0, \sum_{i=1}^N u_i = 1, i = 1, 2, \dots, N \right\}.$$

**Definition 3: Kugelabschnitt, -kappe und -zone**

Eine die Kugel schneidende Ebene zerlegt den Kugelkörper in zwei *Kugelabschnitte*, die Kugelfläche in zwei *Kugelkappen*. Der zwischen zwei parallelen Schnittebenen liegende Teil des Kugelkörpers heißt *Kugelschicht*; der von diesen Ebenen begrenzte Teil der Kugelfläche heißt *Kugelzone* (s. Abb. 1.) [HS98].



1) Kugelabschnitt (Kugelkörper)    2) Kugelzone (Kugelfläche)    3) Kugelkappe (Kugelfläche)

Abb. 1. Sphärische Geometrie

**4 Ansatz**

**4.1 Begriffe**

**Definition 4: Kontakt-Abbildung (C-Map)**

$\tau$  sei ein beliebiger Vektor im Raum und bilde  $\tau$  auf der Einheitskugel mittels Gauß-Abbildung ab. Dann ist ein Großkreis ermittelt, indem eine Ebene senkrecht zu  $\tau$  durch den Ursprung des Kreises die Einheitskugel schneidet. Dieser Großkreis wird als Kontakt-Abbildung (C-Map) vom Vektor  $\tau$  bezeichnet. Die Kontakt-Abbildung  $CM$  von  $\tau$  ist wie folgt gegeben:

$$CM = \{n \mid n \cdot \tau = 0, |n| = 1, |\tau| \neq 0\}.$$

Proposition 1.

Die C-Map besitzt derartige Eigenschaften, dass jeder Punkt auf der Kugel gemäß dem Skalarprodukt  $n \bullet \tau$  zu einem von 3 unterschiedlichen Bereichen gehört:

- positiver Bereich ( $n \bullet \tau > 0$ )
- Nullbereich ( $n \bullet \tau = 0$ )
- negativer Bereich ( $n \bullet \tau < 0$ ).

Proposition 2.

Nach Proposition 1 unterscheidet man 3 Eingriffsbereiche im Rahmen des Spanens (s. Abb. 2.):

- (1) Eingriffsflächenbereich ( $n \bullet \tau > 0$ )

Bereich, der auf der positiven Halbkugel in der Gaußschen Sphäre liegt, in dem das Werkzeug das Material berührt und fräst

(2) Eingriffsfreier Flächenbereich ( $n \cdot \tau < 0$ )

Bereich, der auf der negativen Halbkugel liegt, wo das Werkzeug vom Material getrennt ist.

(3) Eingriffskurve ( $n \cdot \tau = 0$ )

Bereich, der zwischen (1) und (2) liegt, wo das Werkzeug streift das Material.

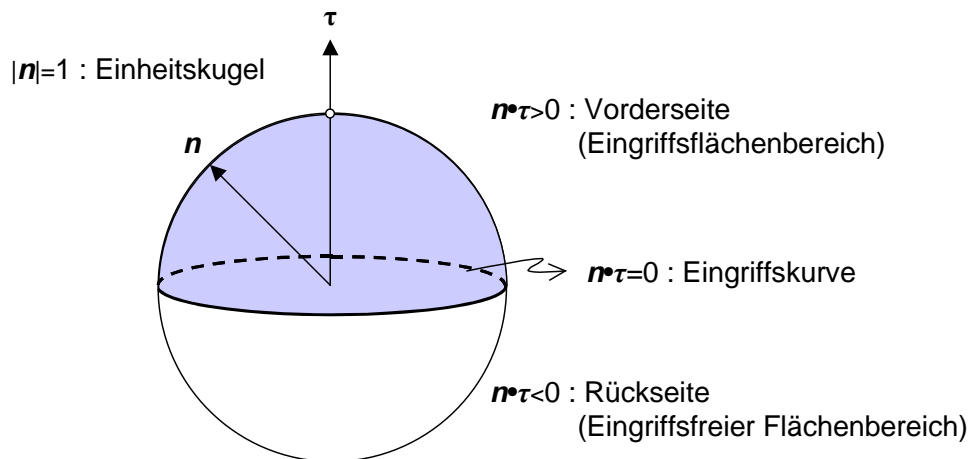


Abb. 2. Kontakt-Abbildung (C-Map)

#### Definition 4: Werkzeug-Abbildung (T-Map)

Bei Definition 1 wird ein Werkzeug abgebildet auf Punkte, Kreise, Kugelkappe oder -zone d.h. auf der Gaußschen Sphäre. Z.B. ist ein Zylinder des Werkzeugkörpers auf einen Großkreis abgebildet, ein Kegel auf einen kleinen Kreis, eine Ebene sowie Decke oder Boden z.B. eines Schafffräser auf einen Punkt, der im Pol liegt, ein Torus auf eine Kugelzone und eine Kugel eines Kugelfräser auf die Kugelkappe. Der Bereich, der derartig abgebildet wird, heißt Werkzeug-Abbildung (T-Map) (s. Abb. 3.).

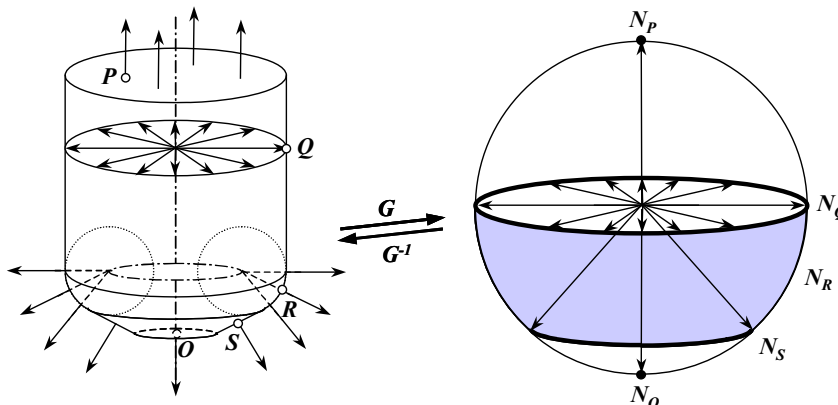


Abb. 3. Werkzeug-Abbildung (T-Map) : Gauß-Abbildung einer generalisierten Werkzeugform

Laut Hüllkurven-Theorie kann das Problem, Hüllvolumina zu ermitteln, auf ein Problem vereinfacht werden, einen Bereich, wo das Skalarprodukt von Oberflächennormal  $n$  und Geschwindigkeitsvektor  $\tau$  auf einem Punkt auf den

Oberflächen von sich bewegendem Objekt als Null ( $n \cdot \tau = 0$ ) gesetzt wird, zu finden [BOL64, WW86, RAD02].

#### 4.2 Prinzip der Ermittlung der Hüllvolumina

Bei der 3-Achs-Fräsbearbeitung bewegt sich das Werkzeug ohne Schwenken der Werkzeugachse. In der Gleichung 2 kann daher der Term für die rotatorische Bewegung entfallen. Der übrigbleibende translatorische Geschwindigkeitsvektor des Werkzeuges soll mit  $\tau$  bezeichnet werden. Hiermit kann eine Kontakt-Abbildung von  $\tau$  auf eine Kugel  $K$  mit dem Radius  $r=1$  entstehen. Auf der anderen Seite kann eine Werkzeug-Abbildung für ein gegebenes Werkzeug ermittelt werden. Aus der Überlappung der Werkzeug- und Kontakt-Abbildung resultiert eine Eingriffskurve, die am betrachteten Bearbeitungsort zum Hüllkörper gehört (s. Abb. 4.). Wenn alle Eingriffskurven auf diese Art und Weise ermittelt, interpoliert und dann mit dem eingriffsfreien Flächenbereich am Startort und dem Eingriffsflächenbereich am Zielort verbunden werden, entsteht ein Hüllkörper von einem sich bewegendem Werkzeug (s. Gl.1 und 2).

$$\{H = \Phi_-(0) \cup HF(t) \cup \Phi_+(1) \mid t \in [0,1]\} \quad (1)$$

wobei  $H$  der Hüllkörper des Werkzeugbewegungsbereichs mit  $\Phi$  der Werkzeugoberfläche,  $\Phi_-(0)$  der eingriffsfreie Flächenbereich von  $\Phi$  am Startort,  $\Phi_+(1)$  der Eingriffsflächenbereich von  $\Phi$  am Zielort und  $HF$  der Hüllmantel aller Eingriffskurven auf dem Bearbeitungsweg von  $\Phi$  sind.

Der Hüllmantel  $HF$  kann wiederum kinematisch mit der folgenden Gleichung beschrieben werden [HKS97].

$$\{HF(u, v, t) \mid N(u, v, t) \cdot V(u, v, t) = 0, V(u, v, t) = V_t(t) + \omega(t) \times \Phi(u, v, t), \\ u \in [0,1], v \in [0,1], t \in [0,1]\}, \quad (2)$$

wobei  $V_t$  die translatorische Geschwindigkeit,  $\omega$  die momentane Winkelgeschwindigkeit,  $N(u, v, t)$  der Normalenvektor von  $\Phi$ ,  $V(u, v, t)$  der momentane Geschwindigkeitsvektor zum Zeitpunkt  $t$  an einem Punkt der Werkzeugoberfläche, die parametrisch mit  $u$  und  $v$  beschrieben ist, sind.

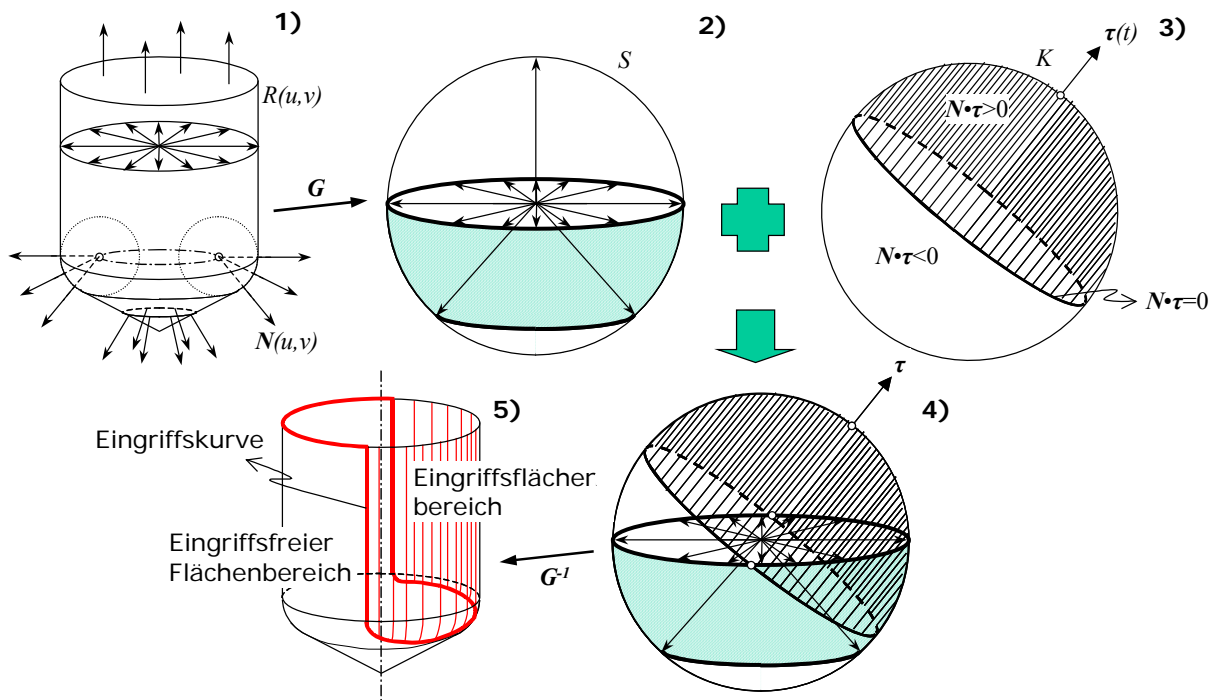


Abb. 4. Prinzip der Ermittlung der Eingriffskurve zur Bildung des Hüllkörpers vom Werkzeugbewegungsbereich;

- 1) Generalisierte Werkzeugform und deren Normalenvektoren  $N$ ,
- 2) Gauß-Abbildung  $G$  der Normalenvektoren auf die Kugel  $S$  mit Radius  $r=1$ ,
- 3) momentaner Geschwindigkeitsvektor  $\tau$  am Werkzeug und dessen Kontakt-Abbildung auf einer Kugel  $K$  mit dem Radius  $r=1$ . Die Fläche auf der Kugel wird nach dem Skalarprodukt  $N \cdot \tau$  in 3 Subflächen unterteilt: Halbkugel für den Eingriffsflächenbereich ( $N \cdot \tau > 0$ ), Großkreis des Eingriffs ( $N \cdot \tau = 0$ ), Halbkugel für den eingriffsfreien Flächenbereich ( $N \cdot \tau < 0$ ),
- 4) Überlappen der Werkzeug-Abbildung und Kontakt-Abbildung,
- 5) Durch Überlappung werden Eingriffskurve, Eingriffs- und eingriffsfreier Flächenbereich auf der Werkzeugoberfläche getrennt. Damit kann das Eingriffsverhalten veranschaulicht werden.

## 5 Zusammenfassung

Der neue Ansatz zur Modellierung des Hüllvolumen des Fräswerkzeuges, welches sich ohne Rotation und Schwenkbewegung translatorisch im Raum bewegt, erfolgt auf der Basis der Gauß-Abbildung. Die Grundidee besteht darin,

a) die im Euklidischen Raum beschriebene Geometrie und Bewegungsrichtung des Werkzeuges mittels Gauß-Abbildung in die sphärische Fläche der Einheitskugel umzuwandeln;

b) die Beziehung zwischen Werkzeug-Abbildung und Kontakt-Abbildung gemäß der Lage von Kontakt-Abbildung festzustellen und die Schnittlinien zwischen Werkzeug-Abbildung und Kontakt-Abbildung zu finden;

c) umgekehrt die Schnittlinien aus dem sphärischem Raum in den Euklidischen Raum zurückzuführen und dadurch die Eingriffskurve zu einer vorgeschriebenen Zeit zu ermitteln sowie die Eingriffskurven zur jeweiligen Zeit miteinander zu verbinden.

Der vorgeschlagene Ansatz hilft intuitiv das Eingriffsverhältnis von generalisierten Werkzeugen zu verstehen, einfach die Hüllvolumen zu implementieren und ist erweiterbar bis hin zur Berechnung der Hüllvolumen der teilweise  $C^0$ -stetige konvexe Menge des Werkzeuges.

**Literatur**

- [AA95] Abrams, S. and Allen, P.: Swept volumes and their use in viewpoint computation in robot work-cells. In Proc. IEEE International Symposium on Assembly and Task Planning, pages 188–193, 1995.
- [ABD97] Abdel-Malek, K. and Yeh, H. J.: Geometric representation of the swept volume using the jacobian rank deficiency conditions. *Computer-Aided Design*, 29(6):457–468, 1997.
- [AKL93] Ahn, J.-W.; Kim, M.-S. and Lim, S.-B.: Approximate general sweep boundary of a 2D curved objects. *Graphical Models and Image Processing*, 55(2):98–128, 1993.
- [BLW97] Blackmore, D.; Leu, M. and Wang, L.: Sweep-envelope differential equation algorithm and its application to NC machining verification. *Computer-Aided Design*, 29:629–637, 1997.
- [BOL64] Boltyanskii, V.G.: Envelopes. Volume 12 of Popular Lectures In Mathematics. Pergamon Press Ltd, Oxford, England, 1964.
- [BSC00] Baek, N.; Shin, S. and Chwa, K.: Three-dimensional topological sweep for computing rotational swept volumes of polyhedral objects. *Int'l J. of Computational Geometry and Applications*, 10(2), 2000.
- [CGI96] Computational Geometry Impact Task Force; Application challenges to Computational Geometry; Technical Report TR-521-96, CS Department, Princeton University, April 1996
- [CHI02] Chiou, C.-J.; Lee, Y.-S.: Swept surface determination for five-axis numerical control machining, *International Journal of Machine Tools & Manufacture* 42:1497-1507, 2002.
- [CPS98] Chung, Y.C.; Park, J.W.; Shin, H.Y.; Choi, B.K.: Modeling the surface swept by a generalized cutter for NC-verification, *Computer Aided Design* 30 (8) 587-593, 1998.
- [DOC83] Do Carmo, M.: *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg 1983.
- [DVOS00] de Berg, M.; van Kreveld, M.; Overmans, M.; and Schwarzkopf, O.: *Computational Geometry: Algorithms and Applications*, 2nd rev. ed. Berlin: Springer-Verlag, 2000.
- [GLA98] Georg Glaeser, Meister Eduard Gröller; Efficient Volume-Generation During the Simulation of NC-Milling; In: *Mathematical Visualisation*, H.-Ch. Hege, K. Polthier (eds.), Springer-Verlag, Heidelberg, pp. 315-328, 1998
- [HKS97] Husty, M.; Karger, A.; Sachs, H.; Steinhilber, W.: *Kinematik und Robotik*, Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1997.
- [HOO86] Van Hook, T.: Real time shaded NC Milling Display. Dallas, August 18-22, SIGGRAPH '86, Volume 20, Number 4, 1986.

- [HS98] Harris, J. W. and Stocker, H.: Handbook of Mathematics and Computational Science. New York: Springer-Verlag, 1998.
- [HUA94] Huang, Y.; Oliver, J.H.: NC Milling Error Assessment and Tool Path Correction; Proceedings of SIGGRAPH '94 (Orlando, Florida, July 24-29, 1994), Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, S. 287-294. ACM SIGGRAPH, ACM Press, July 1986, ISBN 0-98791-667-0
- [HUI94] Hui, K.: Solid sweeping in image space – application to NC simulation. The Visual Computer(1994) Volume 10: S.306-316, 1994.
- [JAC05] Bryan Jacobs; The expanding role of simulation: going beyond NC programming.(Numerical control). *Tooling & Production*, Volume: 71 Issue: 7, Nelson Publishing, July 1, 2005 Page: 28(3).
- [JER89] Jerard, R.B.; Hussaini, S.Z.; Drysdale, R.L. and Schaudt, B.: Approximate methods for simulation and verification of numerically controlled machining programs; The Visual Computer(1989), Volume 5: 329-348, 1989.
- [KAW91] Kawasaki, Y.; Itoh, K.; Ishida, T.; Nonaka, S. and Ejiri, K.: A flexible quantitative method for NC machining verification using a space-division based solid model, The Visual Computer(1991), Volume 7: 149-157, 1991.
- [LHK02] Lee, J.; Hong, S. and Kim, M.: Polygonal boundary approximation for a 2D general sweep based on envelope and boolean operations. The Visual Computer, 16, 2002.
- [RAA99] Raab, S.: Controlled perturbation for arrangements of polyhedral surfaces with application to swept volumes. In Proc. 15th ACM Symposium on Computational Geometry, pages 163–172, 1999.
- [RAD02] Radzevich, S.P.: Conditions of proper sculptured surface machining. Computer aided Design, Volume 34, 727-740, 2002.
- [SAI91] Saito, T; Takahashi T.: NC machining with G-buffer method, ACM SIGGRAPH Computer Graphics archive, Volume 25 , Issue 4 (July 1991), Pages: 207 – 216, 1991.
- [SLL94] Schroeder, W.; Lorensen, W. and Linthicum, S.: Implicit modeling of swept surfaces and volumes, In IEEE Visualization Conference, 1994.
- [WDD04] Weinert, K.; Du, S.; Damm, P.; Stautner, M.: Swept volume generation for the simulation of machining processes, International Journal of Machine Tools & Manufacture 44:617-628, 2004.
- [WL90] Weld, J. and Leu, M.: Geometric representation of swept volume with application to polyhedral objects. International Journal of Robotics Research, 9(5), 1990.
- [WW86] Wang, W.P. and Wang, K.K.: Geometric modeling for swept volume of moving solids. IEEE Computer Graphics and Applications 6(12), S.8-17, 1986.