Prof. Thomas Wallmersperger

Elastische Strukturen – 1. Übung

Rechenregeln für Matrizen

Man mache sich folgende Rechenregeln für reelle Matrizen klar!

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	...	Matrizen
$\mathbf{I}$	...	Einheitsmatrix
α, β	...	Zahlen

Kommutativität	$$\begin{aligned} \alpha\mathbf{A} &= \mathbf{A}\alpha \\ \mathbf{IA} &= \mathbf{AI} = \mathbf{A} \qquad (1) \\ \mathbf{A}+\mathbf{B} &= \mathbf{B}+\mathbf{A} \\ \mathbf{AB} &\neq \mathbf{BA} \text{ i.a.} \qquad (2) \end{aligned}$$
Assoziativität	$$\begin{aligned} (\alpha\beta)\,\mathbf{A} &= \alpha\,(\beta\mathbf{A}) \\ (\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} &= \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) \\ (\mathbf{AB})\,\mathbf{C} &= \mathbf{A}\,(\mathbf{BC}) \qquad (3) \end{aligned}$$
Distributivität	$$\begin{aligned} (\alpha+\beta)\,\mathbf{A} &= \alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{A} \\ \alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B} \qquad (4) \\ (\mathbf{A}+\mathbf{B})\,\mathbf{C} &= \mathbf{AC}+\mathbf{BC} \\ \mathbf{C}\,(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \mathbf{CA}+\mathbf{CB} \qquad (5) \end{aligned}$$
Transponierung	$$\begin{aligned} (\mathbf{A}+\mathbf{B})^T &= \mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T \\ (\mathbf{AB})^T &= \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \qquad (6) \\ \left(\mathbf{A}^T\right)^T &= \mathbf{A} \qquad (7) \end{aligned}$$

Für quadratische Matrizen gilt:

Inversion ($\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ regulär)	$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ $\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T$
Potenzen	$\mathbf{A}^n = \mathbf{AA}\ldots\mathbf{A};\ n > 0$, ganzzahlig $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I};\ \mathbf{A}$ regulär $\mathbf{A}^{-n} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^n;\ n > 0$, ganzzahlig, $\mathbf{A}$ regulär $\mathbf{A}^{n+m} = \mathbf{A}^n\mathbf{A}^m;\ n, m$ ganzzahlig
Determinanten	$\lvert\mathbf{AB}\rvert = \lvert A\rvert\,\lvert B\rvert$
Orthogonalmatrix	$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$ $\lvert\mathbf{A}\rvert = \pm 1$ $\lvert\mathbf{A}\rvert = +1$, eigentlich orthogonal

Symbolische und Indexschreibweise

	Symbolische Schreibweise	Indexschreibweise
Vektor	$\mathbf{a}$	a_i
Skalarprodukt zweier Vektoren	$\mathbf{a}^T\mathbf{b} = \mathbf{b}^T\mathbf{a}$	$\sum_i a_i b_i = a_i b_i = b_i a_i$
Matrix	$\mathbf{A}$	A_{ij}
Einheitsmatrix	$\mathbf{I}$	$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \ldots \quad i = j \\ 0 & \ldots \quad i \neq j \end{cases}$
Matrizenmultiplikation	$\mathbf{AB} = \mathbf{C}$	$\sum_k A_{ik}B_{kl} = A_{ik}B_{kl} = A_{im}B_{ml} = C_{il}$
Transponieren einer Matrix	$\mathbf{A}^T$	$(A_{ij})^T = A_{ji}$

Aufgabe 1

Man stelle die Ausdrücke (1) bis (7) mit Hilfe der Indexschreibweise dar!

Aufgabe 2

Man bestimme die Eigenwerte und -vektoren der symmetrischen Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & \sqrt{3} \\ -3 & \sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Die Eigenwerte $\lambda_{(i)}$, $(i = 1{,}2{,}3)$ folgen aus der Gleichung

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$$

und die zum Eigenwert $\lambda_{(i)}$ gehörenden Eigenvektoren $\mathbf{b}_{(i)}$ aus

$$\left(\mathbf{A} - \lambda_{(i)}\mathbf{I}\right)\mathbf{b}_{(i)} = \mathbf{0}.$$

Man zeige weiterhin, dass für $\left|\mathbf{b}_{(i)}\right| = 1$ die Matrix $\mathbf{Q} = \left(\mathbf{b}_{(1)}\,\mathbf{b}_{(2)}\,\mathbf{b}_{(3)}\right)$ eine eigentlich orthogonale Matrix ist und aus $\mathbf{A}$ durch

$$\mathbf{D} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}$$

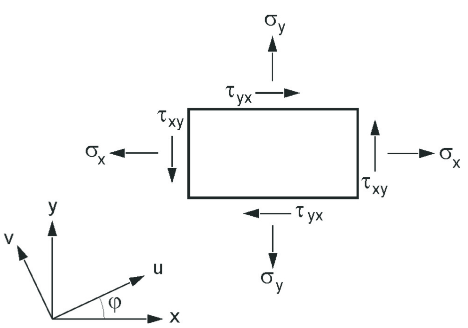
die Diagonalmatrix

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(3)} \end{pmatrix}$$

gewonnen werden kann.

Aufgabe 3

Blech mit ebenem Spannungszustand

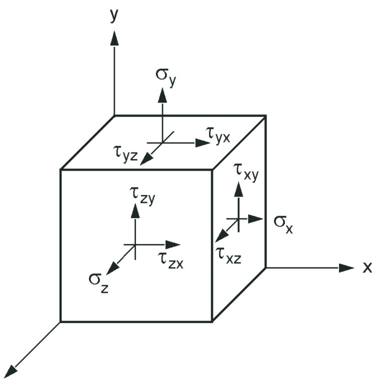


Geg.: $\sigma_x = -20\,\text{MPa}$
$\sigma_y = 60\,\text{MPa}$
$\tau_{xy} = -30\,\text{MPa}$

Ges.: Hauptspannungen und Richtungen der Hauptspannungen
Zur Kontrolle benutze man die Transformationsgleichungen für $\boldsymbol{\sigma}$ beim Übergang vom x, y-Bezugssystem auf das u, v-Bezugssystem

Aufgabe 4

Räumlicher Spannungszustand

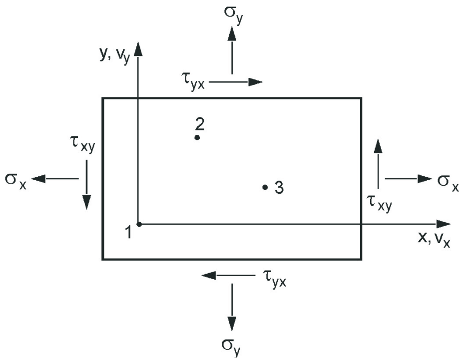


Geg.: $\sigma_x = 100\,$MPa
$\sigma_y = 80\,$MPa
$\sigma_z = 90\,$MPa
$\tau_{xy} = 0\,$MPa
$\tau_{xz} = 20\,$MPa
$\tau_{yz} = 20\,$MPa

Ges.:
1. Hauptspannungen
2. Richtungen der Hauptspannungen
3. Maximale Hauptschubspannung

Aufgabe 5

Blech mit homogenem ebenem Spannungszustand

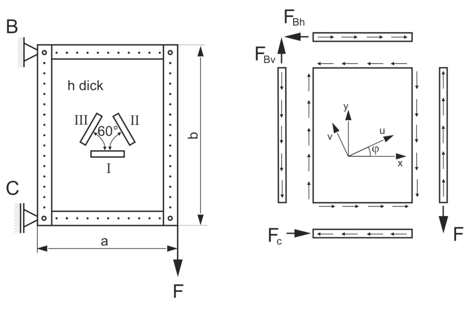


Geg.: Koordinaten der Punkte 1,2,3
$x_1 = y_1 = 0$
$x_2 = 120\text{mm}, y_2 = 240\text{mm}$
$x_3 = 200\text{mm}, y_3 = 100\text{mm}$
Gemessene Verschiebungen
$v_{x1} = 0{,}15\text{mm}, v_{y1} = 0{,}24\text{mm}$
$v_{x2} = 0{,}30\text{mm}, v_{y2} = 0{,}60\text{mm}$
$v_{x3} = 0{,}48\text{mm}, v_{y3} = 0{,}36\text{mm}$
Materialparameter
$E = 2 \cdot 10^5\,$MPa$, \nu = 0{,}3$

Ges.:
1. Verzerrungen im x, y-Koordinatensystem
2. Spannungen im x, y-Koordinatensystem

Aufgabe 6

Schubfeldträger aus Randstäben und Blechfeld aus isotropem Material zusammengenietet. Näherungsweise gilt, dass die Randstäbe durch konstante Linienkraftdichten in Längsrichtung und das Blechfeld am Rand durch konstante tangentiale Linienkraftdichten belastet sind.



Geg.: a, b, h, E, ν, F

Ges.:
1. Auflagerreaktionen
2. Spannungszustand σ_x, σ_y, τ_{xy} im Blechfeld einschließlich Hauptspannungen und deren Richtungen
3. Dehnungen in den Dehnmessstreifen und Richtungen der Hauptdehnungen (man nutze die Isotropie des Blechmaterials und die Transformationsgleichungen für ε beim Übergang vom x, y-Bezugssystem auf das u, v-Bezugssystem)