

STAB- UND FLÄCHENTRAGWERKE

Teil 2

Dr.-Ing. habil. Volker Hellmann

25.03.06

Inhaltsverzeichnis

3	FLÄCHENTRAGWERKE.....	3
3.1	RECHTECKSCHEIBEN (KARTESISCHE KOORDINATEN).....	4
3.1.1	<i>Kinematische Annahmen, Verzerrungen</i>	4
3.1.2	<i>Kinetische Annahmen</i>	5
3.1.3	<i>Schnittgrößen</i>	5
3.1.4	<i>Gleichgewichtsbedingungen am Element der Scheibenmittelfläche</i>	5
3.1.5	<i>Materialgesetz für die Schnittkräfte (linearelastisch)</i>	6
3.1.6	<i>Differentialgleichungen des Problems</i>	6
3.1.7	<i>Aufbereitung der Differentialgleichungen zur Lösung</i>	7
3.1.8	<i>Beispiel: Rechteckscheibe mit Flächenlast p_y</i>	8
3.2	RECHTECKPLATTEN (KARTESISCHE KOORDINATEN).....	11
3.2.1	<i>Kinematische Annahmen, Verzerrungen</i>	11
3.2.2	<i>Kinetische Annahmen</i>	11
3.2.3	<i>Schnittgrößen</i>	12
3.2.4	<i>Gleichgewichtsbedingungen am Element der Plattenmittelfläche</i>	13
3.2.5	<i>Materialgesetz für die Schnittmomente (linearelastisch)</i>	14
3.2.6	<i>Differentialgleichungen des Problems</i>	14
3.2.7	<i>Differentialgleichung für die Durchbiegung w, Randbedingungen</i>	15
3.2.8	<i>Beispiel: Rechteckplatte mit Flächenlast p</i>	17
3.3	GRUNDLAGEN DER BIEGETHEORIE DER ROTATIONSSCHALEN.....	19
3.3.1	<i>Verzerrungs-Verformungsbeziehungen für die Rotationsschale (kleine Verzerrungen)</i>	21
3.3.2	<i>Kinematische Annahmen</i>	23
3.3.2.1	<i>Körperfeste Verformungen</i>	23
3.3.2.2	<i>Raumfeste Verformungen</i>	24
3.3.2.3	<i>Linearisierung in Wanddickenrichtung</i>	25
3.3.2.4	<i>Linearisierte Verzerrungs-Verformungsbeziehungen</i>	25
3.3.3	<i>Kinetische Annahmen</i>	27
3.3.4	<i>Materialgesetz (Hookesches Gesetz)</i>	28
3.3.5	<i>Trapezeffekt</i>	29
3.3.6	<i>Schnittgrößen</i>	30
3.4	BIEGETHEORIE DER ROTATIONSSCHALE MIT ROTATIONSSYMMETRISCHER BELASTUNG.....	32
3.4.1	<i>Dgl. und RBN für Kreis-(Ring-) Scheibe</i>	32
3.4.2	<i>Kanonisches Differentialgleichungssystem</i>	38
3.4.3	<i>Numerische Lösung</i>	40
3.4.3.1	<i>Überführung der RWA in eine zugehörige AWA</i>	40
3.4.3.2	<i>RK4-Integration einer Dgl</i>	43
3.4.3.3	<i>RK4-Integration für Matrizen</i>	45
3.4.3.4	<i>Integrationsschrittweite Δs_{zul}, Fehlerabschätzung</i>	46
3.4.3.5	<i>Numerische Stabilität</i>	48
3.4.3.6	<i>Radius $r=0$</i>	49
3.4.4	<i>Beliebige Rotationsschale mit kleinen Verformungen</i>	50
3.4.4.1	<i>Spezialfälle: Kreisscheibe und Kreisplatte</i>	54
3.4.4.2	<i>Spezialfall: Kreiszylinderschale</i>	56
3.4.4.3	<i>Beispiel: Rohr mit Platte</i>	58
3.4.5	<i>Beliebige Rotationsschale mit endlichen Verformungen</i>	60
3.4.5.1	<i>Variationsprinzip in Zuwuchsformulierung, ohne Arbeit der Randspannungen</i>	62
3.4.5.2	<i>Aufbereitung der Gleichungen</i>	64
3.4.5.3	<i>Kanonisches Dgl.-System, Lösungs-Schema</i>	67
3.4.5.4	<i>Beispiel: Kreisplatte mit großer Durchbiegung</i>	70
3.5	BELIEBIGE ROTATIONSSCHALE MIT BELIEBIGER BELASTUNG.....	71
3.5.1	<i>Membrantheorie</i>	71
3.5.1.1	<i>Kinematische und kinetische Annahmen</i>	71
3.5.1.2	<i>Materialgesetz</i>	71
3.5.1.3	<i>Verzerrungs-Verformungsbeziehungen</i>	71
3.5.1.4	<i>Variationsaufgabe</i>	72
3.5.1.5	<i>Differentialgleichungen</i>	73
3.5.1.6	<i>Beispiel: Zylinderschale mit Randlast allgemein</i>	78
3.5.1.7	<i>Beispiel: Zylinderschale mit Randquerkraft</i>	79
3.5.2	<i>Biegetheorie</i>	82
3.5.2.1	<i>Variationsprinzip</i>	82
3.5.2.2	<i>Kanonisches Differentialgleichungssystem</i>	87

3.5.2.3	Lösung der AWA	92
3.5.2.4	Ersatzkräfte.....	94
3.5.2.5	Beispiel: Zylinderschale mit Randquerkraft	95
3.6	ZUSAMMENFASSUNG.....	97

3 Flächentragwerke

Die Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik in kartesischen Koordinaten $K,L=x,y,z$ sind (über einen in einem Summanden doppelt auftretenden Index wird summiert):

- Die Gleichgewichtsbedingungen
- Die Verzerrungs-Verformungsbeziehungen (hier für große Verzerrungen)
- Das Materialgesetz (hier für linearelastisches Material)

$$\tau_{KL,K} + f_L = 0, \quad \tau_{KL} = \tau_{LK}$$

$$\varepsilon_{KL} = \frac{1}{2} (v_{K,L} + v_{L,K} + \delta_{MN} v_{M,K} v_{N,L}) \quad (3.1)$$

$$\tau_{KL} = C_{KLMN} \cdot \varepsilon_{MN}$$

In 1.1 des Manuskriptes zum Teil Stabtragwerke wurde die Einteilung von Konstruktionselementen nach ihrer räumlichen Ausdehnung vorgenommen. Bei Flächentragwerken ist eine Abmessung (Wanddicke) klein gegenüber den beiden anderen Abmessungen der Bezugsfläche (Mittelfläche). In Richtung der Wanddickenkoordinate werden physikalisch sinnvolle kinematische Annahmen (für die Verformungen) und kinetische Annahmen (für den Spannungsverlauf) getroffen. Infolge dieser Annahmen können die Grundgleichungen (3.1) über

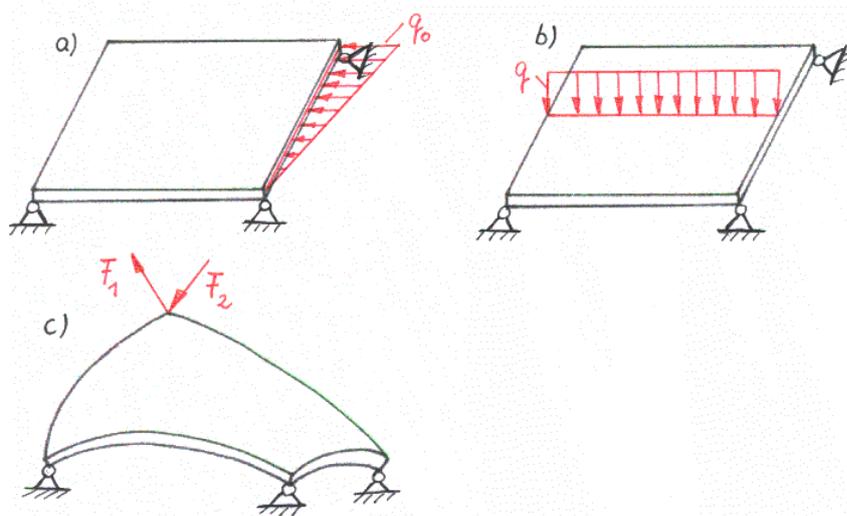


Abbildung 3.1.1: Scheibe, Platte, Schale (2D-Kontinua)

diese Koordinate integriert werden und aus dem 3D-Problem wird ein 2D-Problem.

Beim ebenen Flächentragwerk Abbildung 3.1.1 a) Scheibe (Beanspruchung in der Mittelebene), b) Platte (Beanspruchung senkrecht zur Mittelebene) entkoppeln analog zum geraden Stab

- Zug/Druck-Stab (Längskraft $F_L = \int \sigma_z dA$, $\sigma_z = F_L/A$) = Scheibe

- Biegebalken (Biegemoment $M_{bx} = \int \sigma_z y dA$, $\sigma_z = M_{bx} y / I_{xx}$) = Platte

der Längskraftzustand vom Biegemomentenzustand. Beide Beanspruchungen können (bei linearen Theorien) getrennt berechnet und durch Superposition überlagert werden.

Beim gekrümmten Flächentragwerk (Abbildung 3.1.1 c)) gibt es analog zum gekrümmten Stab diese Entkopplung nicht

- gekrümmter Stab = Schale

Die Verformungen werden, entsprechend der Theorie 1.Ordnung als klein vorausgesetzt (Die GGBn dürfen am unverformten Bauteil aufgestellt werden), wenn nicht ausdrücklich endliche Verformungen zugelassen werden. Kleine Verformungen bedingen auch kleine Verformungsgradienten. Deshalb dürfen die quadratischen Glieder in den Verzerrungs-Verformungsbeziehungen aus (3.1) vernachlässigt werden.

3.1 Rechteckscheiben (kartesische Koordinaten)

Scheiben sind ebene Flächentragwerke, die ausschließlich in ihrer Ebene (hier der x,y -Ebene) beansprucht werden. Die Wanddickenkoordinate ist z , mit der Wanddicke h und $-h/2 \leq z \leq h/2$. Die Scheibenmittelfläche $z=0$ ist die Bezugsfläche.

3.1.1 Kinematische Annahmen, Verzerrungen

Die Scheibe bleibt auch im verformten Zustand eben, d.h. die Verformungen in z -Richtung sind Null:

$$v_x = v_x(x, y), \quad v_y = v_y(x, y), \quad v_z = 0 \quad (3.1.1.1)$$

Damit sind die Verzerrungen:

$$\epsilon_x = \epsilon_{xx} = v_{x,x}, \quad \epsilon_y = \epsilon_{yy} = v_{y,y} \quad (3.1.1.2)$$

$$\gamma = \gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy} = v_{x,y} + v_{y,x}$$

und

$$\epsilon_{zz} = v_{z,z} = 0$$

$$\gamma_{xz} = 2\epsilon_{xz} = v_{x,z} + v_{z,x} = 0 \quad (3.1.1.3)$$

$$\gamma_{yz} = 2\epsilon_{yz} = v_{y,z} + v_{z,y} = 0$$

Mit (3.1.1.2) ergibt sich die Verträglichkeitsbedingung:

$$\epsilon_{x,yy} = v_{x,xyy}, \quad \epsilon_{y,xx} = v_{y,yxx}, \quad \gamma_{xy,xy} = v_{x,yxy} + v_{y,xyy} \quad (3.1.1.4)$$

$$\Rightarrow \epsilon_{x,yy} + \epsilon_{y,xx} - \gamma_{xy,xy} = 0$$

3.1.2 Kinetische Annahmen

Es wird ein ebener Spannungszustand mit über der Wanddicke konstanten Spannungen vorausgesetzt:

$$\sigma_x = \sigma_{xx}(x, y), \quad \sigma_y = \sigma_{yy}(x, y), \quad \sigma_z = \sigma_{zz} = 0 \quad (3.1.2.1)$$

$$\tau = \tau_{xy}(x, y), \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Die kinetische Annahme $\sigma_z=0$ steht für die Querdehnungszahl $\nu \neq 0$ im Widerspruch zu der kinematischen Annahme $\varepsilon_z=0$, da die Kopplung über das Hookesche-Gesetz ergibt

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \right], \quad \text{mit } \sigma_x + \sigma_y \neq 0 \quad (3.1.2.2)$$

3.1.3 Schnittgrößen

Mit den kinetischen Annahmen (3.1.2.1) können die Schnittgrößen (Kräfte/Längeneinheit) eingeführt werden:

$$n_x = \int \sigma_x dz = \sigma_x h, \quad n_y = \int \sigma_y dz = \sigma_y h, \quad n_{xy} = \int \tau dz = \tau h \quad (3.1.3.1)$$

3.1.4 Gleichgewichtsbedingungen am Element der Scheibenmittelfläche

Aus einer Rechteckscheibe mit den Abmessungen a , b und der Dicke h werden an den Koordinaten x und y ein Flächenelement $dA=dx dy$ der Mittelfläche herausgeschnitten, die Schnittkräfte n_x , n_y , n_{xy} (an den Schnittlinien $x+dx$ und $y+dy$ mit ih-

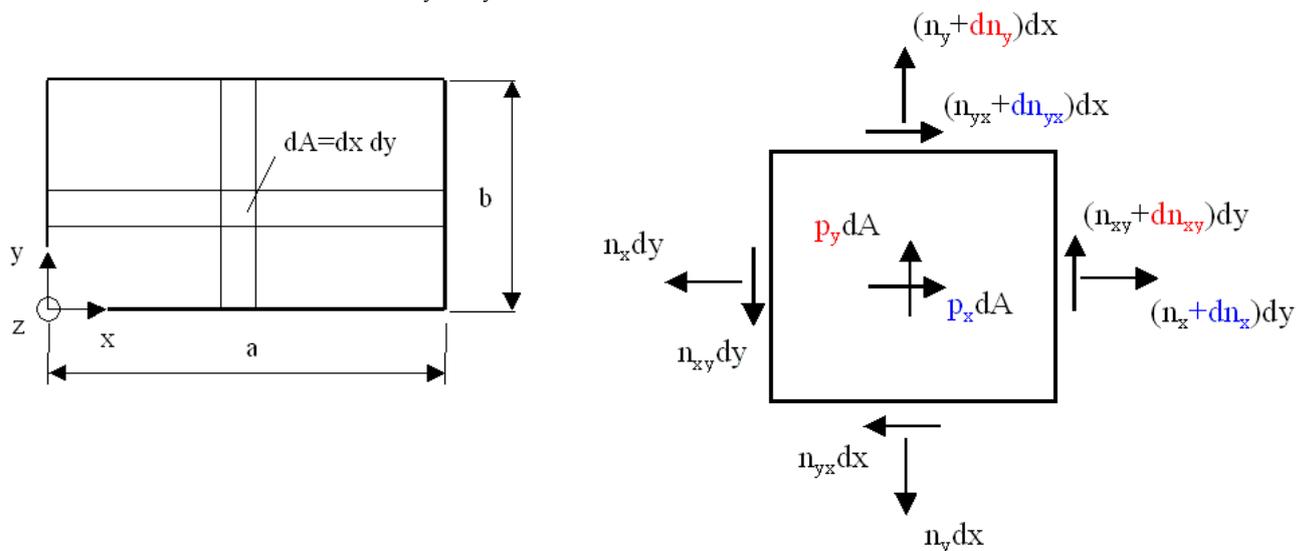


Abbildung 3.1.1: Element dA der Scheibenmittelfläche

ren differentiellen Änderungen) und die Flächenlasten p_x, p_y eingetragen:

Die Kräftegleichgewichtsbedingungen in x- und y-Richtung ergeben:

$$\begin{aligned} (n_x + dn_x - n_x)dy + (n_{yx} + dn_{yx} - n_{yx})dx + p_x dA &= 0 \quad | \cdot 1/dA \\ \Rightarrow n_{x,x} + n_{yx,y} + p_x &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.4.1)$$

$$\begin{aligned} (n_{xy} + dn_{xy} - n_{xy})dy + (n_y + dn_y - n_y)dx + p_y dA &= 0 \quad | \cdot 1/dA \\ \Rightarrow n_{xy,x} + n_{y,y} + p_y &= 0 \end{aligned}$$

Das Momentengleichgewicht um die z-Achse (z.B. in Elementmitte) ergibt

$$\begin{aligned} (n_{xy} + dn_{xy})dy \frac{dx}{2} + n_{xy}dy \frac{dx}{2} - (n_{yx} + dn_{yx})dx \frac{dy}{2} - n_{yx}dx \frac{dy}{2} &= 0 \quad | \cdot 1/dA \\ (n_{xy} + dn_{xy})\frac{1}{2} + n_{xy}\frac{1}{2} - (n_{yx} + dn_{yx})\frac{1}{2} - n_{yx}\frac{1}{2} &= 0 \\ \Rightarrow n_{xy} - n_{yx} = 0, \quad dn_{xy} - dn_{yx} &= 0 \end{aligned}$$

die Gleichheit der zugeordneten Schubkräfte $n_{xy}=n_{yx}$. Das folgt auch aus der Gleichheit der zugeordneten Schubspannungen $\tau_{xy}=\tau_{yx}$ mit $n_{xy}=\tau_{xy}h$ und $n_{yx}=\tau_{yx}h$.

3.1.5 Materialgesetz für die Schnittkräfte (linearelastisch)

Mit den Schnittkräften von (3.1.3.1) kann das linearelastische Materialgesetz:

$$\begin{aligned} \underline{n} &= \underline{E} \cdot \underline{\varepsilon}, \quad \underline{n}^T = (n_x, n_y, n_{xy}), \quad \underline{\varepsilon}^T = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}) \\ \underline{\varepsilon} &= \underline{E}^{-1} \cdot \underline{n} \\ \underline{E} &= \begin{pmatrix} D & \nu D & 0 \\ \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & Gh \end{pmatrix}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad D = \frac{Eh}{1-\nu^2} \end{aligned} \quad (3.1.5.1)$$

mit dem Elastizitätsmodul E , der Querdehnungszahl ν , dem Schubmodul G der Dehnsteifigkeit D und der Schubsteifigkeit Gh geschrieben werden.

3.1.6 Differentialgleichungen des Problems

Es gibt 8 Grundgleichungen:

- 2 GGBn. (3.1.4.1)
- 3 Verzerrungs-Verformungs-Beziehungen (3.1.1.2)
- 3 Gleichungen des Materialgesetzes (3.1.5.1)

für 8 unbekannte Größen:

- 3 Schnittkräfte n_x, n_y, n_{xy} (3.1.3.1)
- 2 Verformungen v_x, v_y (3.1.1.1)
- 3 Verzerrungen $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ (3.1.1.2).

Damit sind die Dgln. des Problems vollständig formuliert.

3.1.7 Aufbereitung der Differentialgleichungen zur Lösung

Die Aufbereitung der Dgln. zur Lösung hängt von der Art der RBn und der Flächenlasten p_x und p_y ab.

Bei Vorgabe von

- Verformungs-RBn,
- gemischten RBn für Verformungen und Schnittkräfte
- und/oder $p_x \neq \text{konst.}, p_y \neq \text{konst.}$:

Eliminieren der Verzerrungen durch Einsetzen der Verzerrungs-Verformungs-Beziehungen (3.1.1.2) in das Materialgesetz (3.1.5.1) und damit in die GGBn (3.1.4.1) ergibt 2 gekoppelte, partielle, lineare DGLn für die Verschiebungen v_x und v_y .

$$\begin{aligned} v_{x,xx} + \frac{1+\nu}{2} v_{y,xy} + \frac{1-\nu}{2} v_{x,yy} + \frac{p_x}{D} &= 0 \\ v_{y,yy} + \frac{1+\nu}{2} v_{x,yx} + \frac{1-\nu}{2} v_{y,xx} + \frac{p_y}{D} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.7.1)$$

Bei Vorgabe von

- Schnittkraft-RBn
- und $p_x = \text{konst.}, p_y = \text{konst.}$:

Einführung einer übergeordneten Funktion F (Airysche Spannungsfunktion) mit

$$\begin{aligned} \sigma_x &= F_{,yy}, \quad \sigma_y = F_{,xx}, \quad \tau_{xy} = -F_{,xy} - f_x y - f_y x \\ B &= h \cdot F, \quad h = \text{konst.}, \quad p_x = h \cdot f_x, \quad p_y = h \cdot f_y \\ n_x &= B_{,yy}, \quad n_y = B_{,xx}, \quad n_{xy} = -B_{,xy} - p_x y - p_y x \end{aligned} \quad (3.1.7.2)$$

Diese Spannungsfunktion F erfüllt die GGBn (3.1.4.1) identisch.

Eliminieren der Spannungen durch Einsetzen von (3.1.7.2) in das Materialgesetz (3.1.5.1) und damit in die Verträglichkeitsbedingung (3.1.1.4) ergibt eine partielle, lineare Dgl. (Bipotentialgleichung) für die Spannungsfunktion F .

$$\Delta\Delta F = 0, \quad \Delta(\quad) = (\quad)_{,xx} + (\quad)_{,yy}$$

$$\Delta\Delta(\quad) = \Delta(\Delta(\quad)) = (\quad)_{,xxxx} + 2(\quad)_{,xxyy} + (\quad)_{,yyyy} \quad (3.1.7.3)$$

Für Kreis- und Kreisringscheiben wird das Problem besser in Polarkoordinaten r, ϑ formuliert¹ (r - Radius, ϑ - Umfangswinkel). Dabei bleibt natürlich die Dgl. von (3.1.7.3) erhalten, aber der Differentialoperator ändert sich infolge der von der Koordinate r abhängigen Skalierung auf einem Rand $r=\text{konst.}$

$$\Delta(\quad) = (\quad)_{,rr} + \frac{1}{r}(\quad)_{,r} + \frac{1}{r^2}(\quad)_{,\vartheta\vartheta} \quad (3.1.7.4)$$

3.1.8 Beispiel: Rechteckscheibe mit Flächenlast p_y

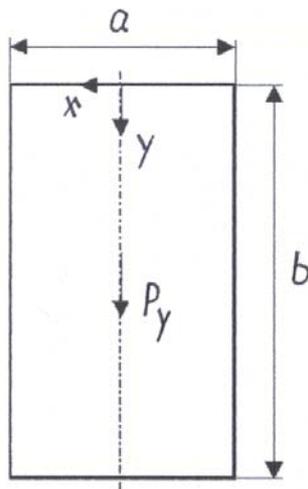


Abbildung 3.1.2: Rechteckscheibe

Eine Rechteckscheibe nach Abbildung 3.1.2 wird durch eine konstante Flächenlast $p_y=\text{konst.}$ in Richtung der Koordinate y beansprucht.

Geg.: Breite $a=10\text{mm}$, Höhe $b=20\text{mm}$, Dicke h , Elastizitätsmodul $E=2 \cdot 10^5\text{MPa}$, Querdehnungszahl $\nu=0.3$, Volumenkraft $p_y/h=10\text{N/mm}^3$

Ges.:

- Spannungszustand nach (3.1.7.2)

Mit den RBn.:

$$n_x(\pm a/2, y) = 0$$

$$n_y(x, b) = 0$$

$$n_y(x, 0) = p_y b$$

$$n_{xy} = 0 \text{ auf dem gesamten Rand}$$

- Zugehöriger Verformungszustand.

Nach (3.1.7.2) muß wegen den RBn für $n_{xy} = -B_{,xy} - p_y x$ und $p_x = 0$ die Funktion B mindestens quadratisch in x und linear in y sein. Deshalb wird ein vollständiger Polynomansatz bis 3. Ordnung gewählt. Das konstante Glied und die in x bzw. y linearen Glieder können weggelassen werden, da in den Schnittkräften nur Anteile ab zweiter Ableitung von B auftreten.

$$B = C_{11}xy + C_{20}x^2 + C_{02}y^2 + C_{21}x^2y + C_{12}xy^2 + C_{30}x^3 + C_{03}y^3$$

$$n_x = B_{,yy} = 2C_{02} + 2C_{12}x + 6C_{03}y \quad (3.1.8.1)$$

$$n_y = B_{,xx} = 2C_{20} + 2C_{21}y + 6C_{30}x$$

$$n_{xy} = -B_{,xy} - p_y x = -C_{11} - 2C_{21}x - 2C_{12}y - p_y x$$

Die Funktion B nach (3.1.8.1) erfüllt schon die Dgln. (3.1.7.2). Das Einsetzen der Randbedingungen ergibt über Koeffizientenvergleich für B nur für die Konstanten $C_{20} \neq 0$ und $C_{21} \neq 0$. Für B und die Schnittkräfte n_x , n_y und n_{xy} wird:

$$B = \frac{p_y}{2} x^2 (b - y)$$

$$n_x = 0 = D(v_{x,x} + \nu v_{y,y}) \quad (3.1.8.2)$$

$$n_y = p_y (b - y) = D(v_{y,y} + \nu v_{x,x}), \quad \sigma_y = \frac{n_y}{h} = \frac{p_y}{h} (b - y)$$

$$n_{xy} = 0 = G \cdot h (v_{x,y} + v_{y,x}), \quad \sigma_{y \max} = \frac{p_y}{h} b = 200 \text{MPa}$$

Die Verformungen ergeben sich aus der Integration von (3.1.8.2).

$$v_x = -\frac{\nu p_y}{Eh} x (b - y) + v_{x0} - \varphi y$$

$$v_y = \frac{p_y}{Eh} \left[y \left(b - \frac{y}{2} \right) - \nu \frac{x^2}{2} \right] + v_{y0} + \varphi x \quad (3.1.8.3)$$

Diese Verformungen erfüllen natürlich auch die Dgln. (3.1.7.1).

Die Integrationskonstanten v_{x0} , v_{y0} und φ entsprechen den möglichen Starrkörperbewegungen und können Null gesetzt werden.

Wenn die Querdehnungszahl $\nu \neq 0$ ist, wird die Verschiebung $v_x \neq 0$ und auch die Verschiebung v_y auf dem Rand $y=0$ nicht Null.

Die Vergleichspannungen nach der Gestaltänderungsenergiehypothese von zwei zugehörigen FEM-Lösungen mit Verformungsvorgaben auf dem Rand $y=0$ sind in Abbildung 3.1.3 und Abbildung 3.1.4 dargestellt. Der homogene Spannungszustand von (3.1.8.2) wird bei Vorgabe $v_y(x,0)=0$ nur unerheblich gestört. Wenn zusätzlich aber auch $v_x(x,0)=0$ gefordert wird, kommt es auf diesem Rand an den Ecken bei $x=\pm a/2$ zu einer Spannungssingularität. Mit feiner werdender Vernetzung konvergiert die Lösung dort also nicht.

Demzufolge braucht für die RBn von Abbildung 3.1.3 keine Lösung nach (3.1.7.1) gesucht zu werden und für die RBn von Abbildung 3.1.4 ist für $x=\pm a/2$ und $y=0$ nach der Elastizitätstheorie keine endliche Lösung möglich.

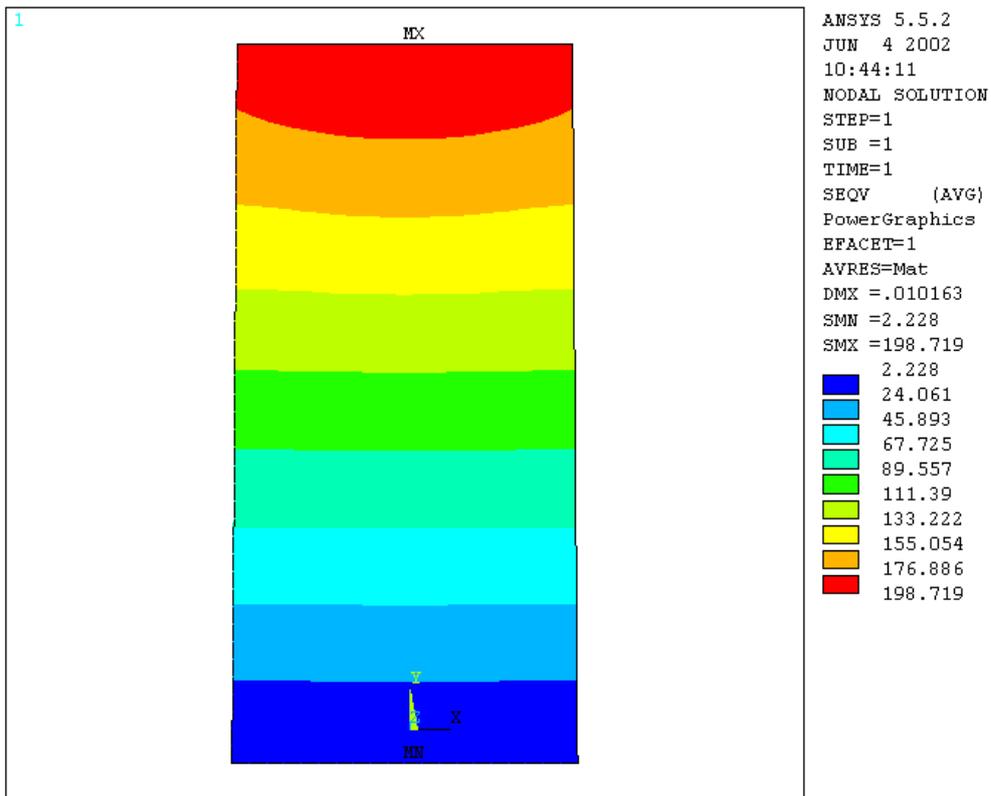


Abbildung 3.1.3: Vergleichsspannung, RBn. oberer Rand: $v_x(x,0) \neq 0$, $v_y(x,0) = 0$

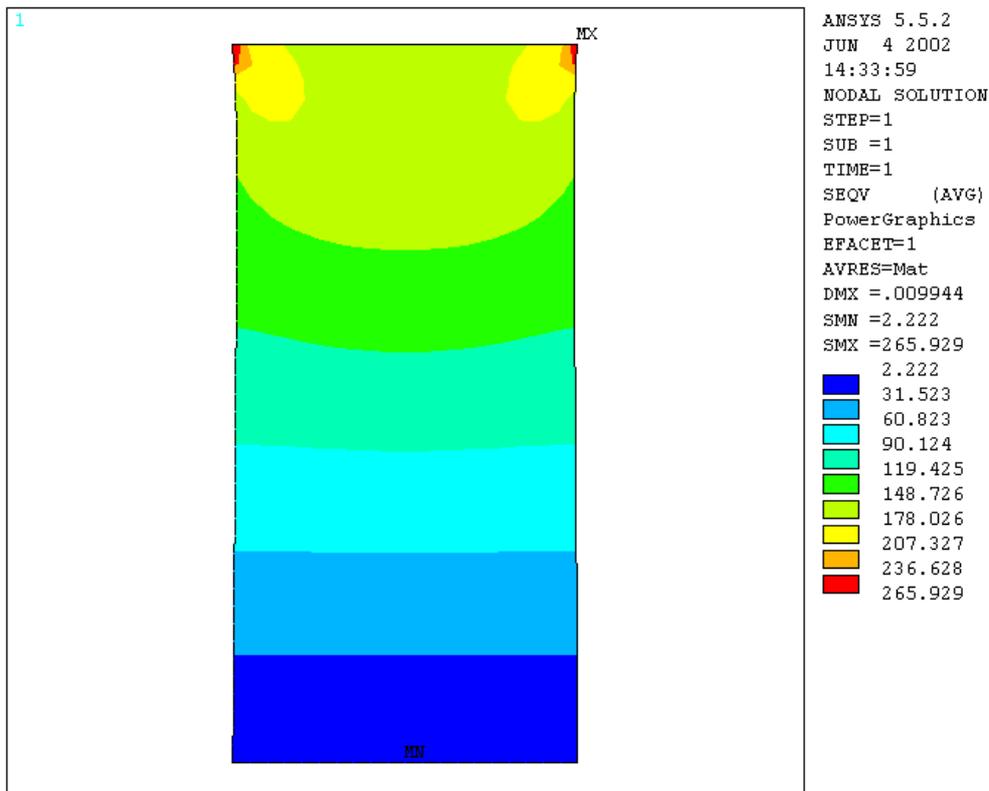


Abbildung 3.1.4 Vergleichsspannung, RBn. oberer Rand: $v_x(x,0) = 0$, $v_y(x,0) = 0$

3.2 Rechteckplatten (kartesische Koordinaten)

Platten sind ebene Flächentragwerke, die ausschließlich senkrecht zu ihrer Ebene (hier der x,y -Ebene) beansprucht werden. Die Wanddickenkoordinate ist z , mit der Wanddicke h und $-h/2 \leq z \leq h/2$. Die Plattenmittelfläche $z=0$ ist die Bezugsfläche.

3.2.1 Kinematische Annahmen, Verzerrungen

Die kinematischen Annahmen sind analog zu denen in der (eindimensionalen) Stabtheorie beim Biegebalken.

- Die Verformungen der Plattenmittelfläche in x - und y -Richtung sind Null. Es gilt die Geradenhypothese bezüglich der Abhängigkeit der Verformungen von der Wanddickenkoordinate z :

$$u = v_x(x, y, z) = \alpha(x, y) \cdot z, \quad v = v_y(x, y, z) = \beta(x, y) \cdot z \quad (3.2.1.1)$$

$$w = v_z(x, y)$$

- Die Schubverzerrungen γ_{xz} und γ_{yz} werden entsprechend der Normalenhypothese (Bernoulli-Hypothese) Null gesetzt. Für die Verdrehung der Tangenten sind die Bezeichnungen (Winkel) $\chi = w_{,x}$ und $\psi = w_{,y}$ eingeführt worden.

$$\gamma_{xz} = 0 = u_{,z} + w_{,x} = \alpha + \chi \Rightarrow \alpha = -\chi$$

$$\gamma_{yz} = 0 = v_{,z} + w_{,y} = \beta + \psi \Rightarrow \beta = -\psi$$

$$u = -\chi z = -w_{,x} z \quad (3.2.1.2)$$

$$v = -\psi z = -w_{,y} z$$

Damit sind die Verzerrungen:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{xx} = u_{,x} = -w_{,xx} z, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_{yy} = v_{,y} = -w_{,yy} z \quad (3.2.1.3)$$

$$\gamma = \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = u_{,y} + v_{,x} = -2w_{,xy} z$$

und

$$\varepsilon_{zz} = w_{,z} = 0$$

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = u_{,z} + w_{,x} = 0 \quad (3.2.1.4)$$

$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = v_{,z} + w_{,y} = 0$$

3.2.2 Kinetische Annahmen

Für die Spannungen wird folgende Verteilung über der Plattendicke h vorausgesetzt:

$$\begin{aligned}
\sigma_x(x, y, z) &= \sigma_{x0}(x, y) \frac{2z}{h}, & \sigma_y(x, y, z) &= \sigma_{y0}(x, y) \frac{2z}{h} \\
\tau_{xy}(x, y, z) &= \tau_0(x, y) \frac{2z}{h} \\
\sigma_z(x, y) &= -p(x, y), & p &= \text{Flächenlast in Richtung der Koordinate } z \\
\tau_{xz}(x, y, z) &= \tau_{xz0}(x, y) \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] \\
\tau_{yz}(x, y, z) &= \tau_{yz0}(x, y) \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{3.2.2.1}$$

Die kinetischen Annahmen für σ_x , σ_y , τ_{xz} und τ_{yz} entsprechen dabei vollständig denen bei der Beanspruchung eines Stabes durch Querkraftbiegung.

Die Spannungen σ_z , τ_{xz} , τ_{yz} sind klein gegenüber σ_x , σ_y , τ_{xy} und dürfen deshalb (wie auch schon analog beim Balken mit Querkraftbiegung) in den Grundgleichungen gegenüber den anderen vernachlässigt werden.

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \tag{3.2.2.2}$$

Die noch verbleibenden Spannungen σ_x , σ_y , τ_{xy} sind linear über der Wanddicke verteilt. Der über h konstante Anteil ist Bestandteil des Scheibenproblems. Mit (3.2.2.2) wird in (3.2.2.1) ein ebener Spannungszustand angenommen. Die kinematischen Annahmen verschwindender Querkraftschubverzerrungen (3.2.1.2) erfordert bei Widerspruchsfreiheit über das Materialgesetz auch, wie in (3.2.2.2) angenommen verschwindende Querkraftschubspannungen. Zur Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen (3.2.4.1) sind aber Querkräfte und damit Querkraftschubspannungen erforderlich. Kinematische und kinetische Annahmen sind also nicht widerspruchsfrei. Die Gleichgewichtsbedingungen können zur Berechnung der Querkräfte und mit diesen die kinetischen Annahmen (3.2.2.1) zur Berechnung der Querkraftschubspannungen verwendet werden.

3.2.3 Schnittgrößen

Mit den kinetischen Annahmen (3.2.2.1) können die Schnittgrößen (Kräfte/Längeneinheit, Momente/Längeneinheit) durch Integration der Spannungen über die Wanddicke eingeführt werden:

$$\begin{aligned}
m_x &= - \int \sigma_x z dz = -\sigma_{x0} \frac{h^2}{6}, & m_y &= - \int \sigma_y z dz = -\sigma_{y0} \frac{h^2}{6} \\
m_{xy} &= - \int \tau_{xy} z dz = -\tau_0 \frac{h^2}{6} \\
q_x &= \int \tau_{xz} dz = \frac{2}{3} \tau_{xz0} h, & q_y &= \int \tau_{yz} dz = \frac{2}{3} \tau_{yz0} h
\end{aligned} \tag{3.2.3.1}$$

Die negativen Vorzeichen bei den Schnittmomenten ergeben sich aus der Bedingung, daß die mit den zugehörigen Verdrehungen χ und ψ aus (3.2.1.2) geleistete Arbeit positiv sein muß. Wegen (3.2.2.2) können die Querkräfte q_x , q_y nicht aus den Schubspannungen τ_{xz} , τ_{yz} berechnet werden. Sie werden nach der Lösung des Problems aus den GGBn. (3.2.4.1) ermittelt. Die entsprechenden Gleichungen in (3.2.3.1) können bei dann bekannten Querkräften zur Bestimmung der maximalen Schubspannungen im Querschnitt $\tau_{xz0}(x,y)$, $\tau_{yz0}(x,y)$ verwendet werden.

3.2.4 Gleichgewichtsbedingungen am Element der Plattenmittelfläche

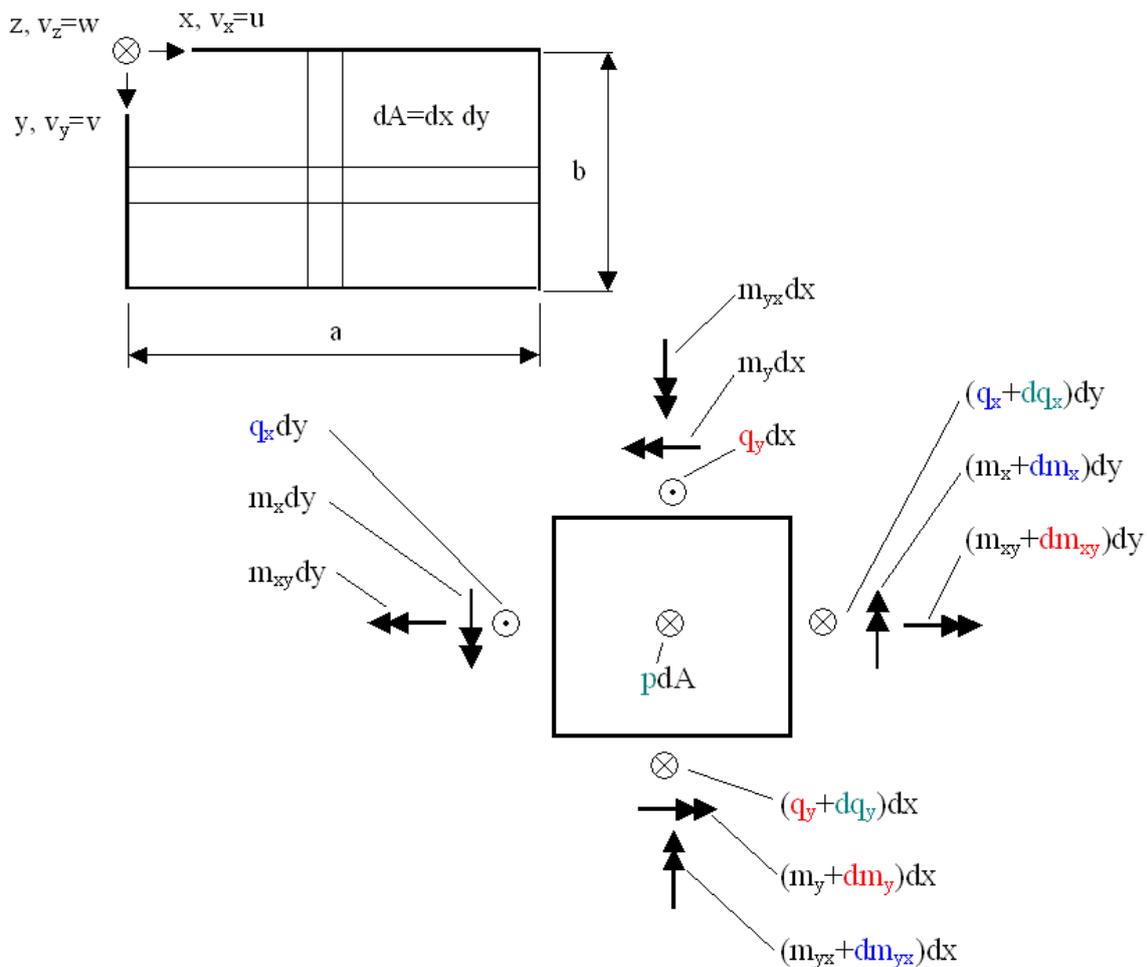


Abbildung 3.2.1: Element dA der Plattenmittelfläche

Die Kräftegleichgewichtsbedingungen in z -Richtung und die Momentengleichgewichtsbedingungen in Richtung der x - und der negativen y -Achse ergeben:

$$f_z \, dx dy = (q_{x,x} + q_{y,y} + p) \, dx dy = 0$$

$$g_x \, dx dy = (m_{y,y} + m_{xy,x} + q_y) \, dx dy = 0 \quad (3.2.4.1)$$

$$g_y \, dx dy = (m_{x,x} + m_{yx,y} + q_x) \, dx dy = 0$$

Eliminieren der Querkräfte q_x und q_y ($g_{x,y}$ und $g_{y,x}$ in f_z eingesetzt) ergibt eine Dgl. für die Schnittmomente:

$$f_z = -(\underline{m}_{x,x} + \underline{m}_{yx,y})_{,x} - (\underline{m}_{y,y} + \underline{m}_{xy,x})_{,y} + p = 0$$

$$\underline{m}_{y,yy} + 2\underline{m}_{xy,xy} + \underline{m}_{x,xx} = p \quad (3.2.4.2)$$

3.2.5 Materialgesetz für die Schnittmomente (linearelastisch)

Mit den Schnittmomenten von (3.2.3.1) und den Verzerrungs-Verformungs-Beziehungen (3.2.1.3) kann das linearelastische Materialgesetz:

$$\underline{m} = \underline{E} \cdot \underline{\kappa}, \quad \underline{m}^T = (m_x, m_y, m_{xy}), \quad \underline{\kappa}^T = (w_{,xx}, w_{,yy}, 2w_{,xy})$$

$$\underline{\kappa} = \underline{E}^{-1} \cdot \underline{m}$$

$$\underline{E} = \begin{pmatrix} K & \nu K & 0 \\ \nu K & K & 0 \\ 0 & 0 & S_D \end{pmatrix}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad S_D = \frac{Gh^3}{12} \quad (3.2.5.1)$$

mit dem Elastizitätsmodul E , der Querdehnungszahl ν , dem Schubmodul G , der Biegesteifigkeit K und der Drillsteifigkeit S_D geschrieben werden. Der Vektor $\underline{\kappa}$ ist der Vektor der Krümmungen.

3.2.6 Differentialgleichungen des Problems

Es gibt 11 Grundgleichungen:

- 3 GGBn. (3.2.4.1)
- 2 kinematische Beziehungen (3.2.1.2)
- 3 Verzerrungs-Verformungs-Beziehungen (3.2.1.3)
- 3 Gleichungen des Materialgesetzes (3.2.5.1)

für 11 unbekannte Größen:

- 5 Schnittgrößen $m_x, m_y, m_{xy}, q_x, q_y$ (3.2.3.1)
- 3 Verformungen u, v, w (3.1.1.1)
- 3 Verzerrungen $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ (3.1.1.2).

Damit sind die Dgln. des Problems vollständig formuliert.

3.2.7 Differentialgleichung für die Durchbiegung w , Randbedingungen

Das Ziel ist, eine Dgl. für die Durchbiegung w aufzustellen. Dazu müssen die anderen Unbekannten aus den Grundgleichungen eliminiert werden. Die Verzerungs-Verformungs-Beziehungen (3.2.1.3) eingesetzt in das Materialgesetz (3.2.5.1) zur Eliminierung der Verzerrungen

$$m_x = K(w_{,xx} + \nu w_{,yy}), \quad m_y = K(w_{,yy} + \nu w_{,xx}) \tag{3.2.7.1}$$

$$m_{xy} = S_D 2w_{,xy}$$

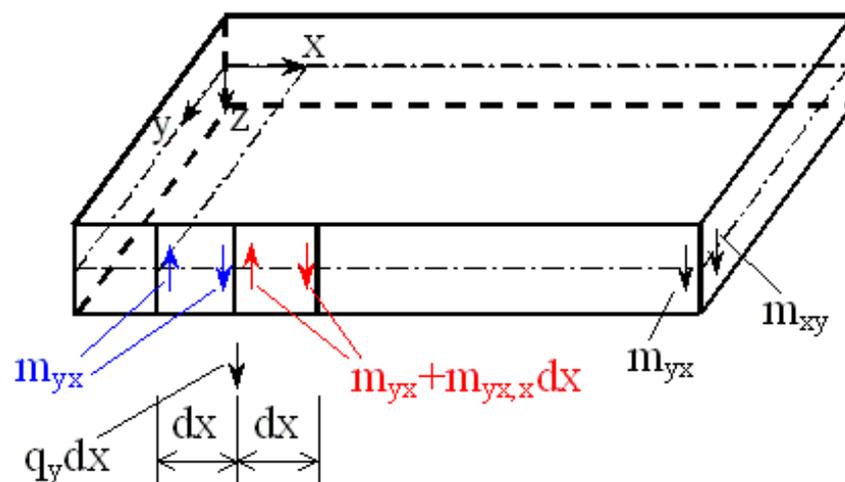
und danach weiteres Einsetzen in die GGB (3.2.4.2) zur Eliminierung der Schnittmomente und in die zwei letzten Gleichungen (3.2.4.1) führt zu der gesuchten Dgl.:

$$K\Delta\Delta w = p \tag{3.2.7.2}$$

und den Dgln. für die Berechnung der Querkräfte:

$$q_x = -K(\Delta w)_{,x}, \quad q_y = -K(\Delta w)_{,y} \tag{3.2.7.3}$$

An einem Rand $y=\text{konst.}$ können entsprechend Abbildung 3.2.1 die 3 Schnittgrößen q_y, m_{yx}, m_y vorhanden sein. Es sind aber infolge der Vernachlässigung der Querkraftschubverzerrungen (Normalenhypothese) (3.2.1.2) nur zwei kinematische Größen vorhanden, die Durchbiegung w und die Verdrehung $\psi=w_{,y}$. Analog gilt das am Rand $x=\text{konst.}$ mit den 3 Schnittgrößen q_x, m_{xy}, m_x und der Durchbiegung w und der Verdrehung $\chi=w_{,x}$. Deshalb müssen die Drillmomente



statisch äquivalent den Querkräften zugeschlagen werden. Das differentielle Drillmoment $m_{yx}dx$ wird in ein statisch äquivalentes Kräftepaar umgewandelt. Der Betrag dieser differentiellen Kräfte ist $df_y = (m_{yx}dx)/dx = m_{yx}$. Die statische Äquivalenz an der gemeinsamen Grenze der Elemente dx auf dem Rand $y=\text{konst.}$ ergibt nach Abbildung 3.2.2:

Abbildung 3.2.2: Ersatzquerkraft

Das differentielle Drillmoment $m_{yx}dx$ wird in ein statisch äquivalentes Kräftepaar umgewandelt. Der Betrag dieser differentiellen Kräfte ist $df_y = (m_{yx}dx)/dx = m_{yx}$. Die statische Äquivalenz an der gemeinsamen Grenze der Elemente dx auf dem Rand $y=\text{konst.}$ ergibt nach Abbildung 3.2.2:

$$\bar{q}_y dx = q_y dx + \frac{m_{yx} dx}{dx} - \frac{(m_{yx} + m_{yx,x} dx) dx}{dx}$$

$$\Rightarrow \bar{q}_y = q_y - m_{yx,x} = -K [w_{,yy} + (2 - \nu) w_{,xx}]_{,y} \quad (3.2.7.4)$$

analog

$$\Rightarrow \bar{q}_x = q_x - m_{xy,y} = -K [w_{,xx} + (2 - \nu) w_{,yy}]_{,x}$$

An den Ecken bleiben Eckkräfte $F_E = m_{yx} + m_{xy}$ übrig, die nicht statisch äquivalent durch die RBn. erfüllt werden.

Die Randbedingungen am Rand $y = \text{konst}$ sind:

$$\left. \begin{array}{l} \text{entweder } w \text{ oder } \bar{q}_y \\ \text{entweder } \psi \text{ oder } m_y \end{array} \right\} \text{ sind vorgegeben} \quad (3.2.7.5)$$

und am Rand $x = \text{konst.}$:

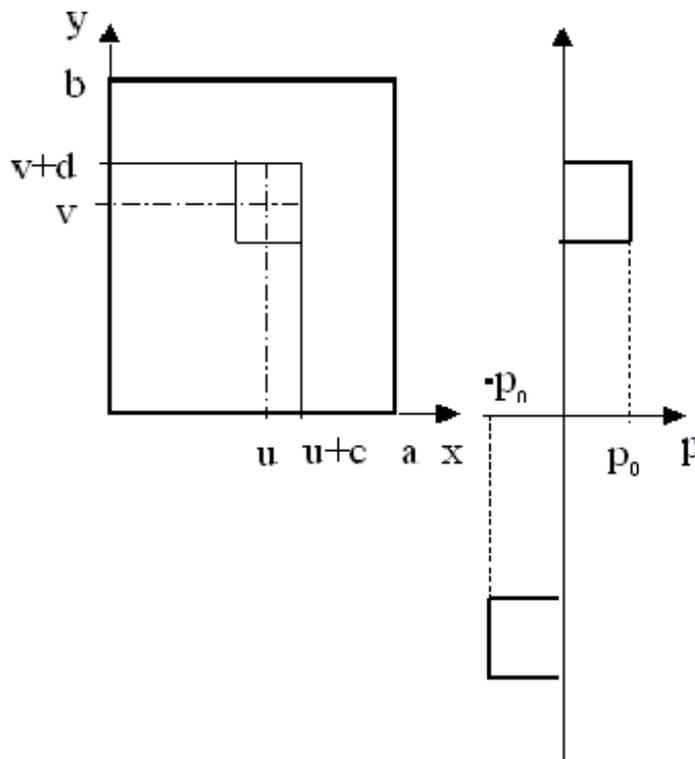
$$\left. \begin{array}{l} \text{entweder } w \text{ oder } \bar{q}_x \\ \text{entweder } \chi \text{ oder } m_x \end{array} \right\} \text{ sind vorgegeben} \quad (3.2.7.6)$$

Das sind an jedem Rand 2 RBn., entweder für eine der beiden Verformung auf dem Rand oder für die entsprechende, zugeordnete Kraftgröße auf dem Rand.

Für einen gelenkig gelagerten Rand R bei $y = y_R$ gilt: $w_R = 0$ und $m_{yR} = 0$. Wegen $w_R = 0$ auf R bleibt R gerade und damit sind auch alle partiellen Ableitungen nach der Koordinate x auf R gleich Null, also ist auch die Krümmung $(w_{,xx})_R = 0$. Damit folgt aus (3.2.7.1) wegen $m_{yR} = 0$ auch $(w_{,yy})_R = 0$ und deshalb auch $(\Delta w)_R = (w_{,xx} + w_{,yy})_R = 0$. Analog gilt auch für einen Rand R bei $x = x_R$ $w_R = 0$ und $(\Delta w)_R = 0$. Die Lösung für eine Rechteckplatte mit diesen RBn. wurde erstmals 1823 von *Navier* angegeben.

Zur Formulierung und Lösung des Plattenproblems für Kreis- und Kreisringplatten (in Polarkoordinaten) wird auf entsprechende Literatur verwiesen z.B. ^{1, 2, 3}. Außerdem wird sie in 3.4.4.1 als Spezialfall der Rotationsschale behandelt.

3.2.8 Beispiel: Rechteckplatte mit Flächenlast p



Geg.:

Längen a , b , Dicke h , Biegesteifigkeit K , Ort des Lastzentrums u , v , Größe des belasteten Gebietes $2c$, $2d$, Flächenlast p_0 , gelenkige Lagerung auf allen 4 Rändern R mit $w_R=0$ und $(\Delta w)_R=0$.

Ges.:

Plattendurchbiegung $w(x,y)$ (diese Lösung ist z.B. in ¹⁾)

Lösung:

Für die Partikulärlösung der Dgl. wird die Last in x - und y -Richtung jeweils in eine Fourierreihe so entwickelt, daß jedes Reihenglied auf den zugehörigen Rändern den Wert Null für den Funktionswert und die zweite Ableitung hat. Das ist wichtig zur Erfüllung

Abbildung 3.2.3: Rechteckplatte mit Flächenlast aller R.Bn. schon durch die Partikulärlösung.

$$f_x(x) = \sum_m \frac{4}{\pi m} \sin \alpha_m u \cdot \sin \alpha_m c \cdot \sin \alpha_m x, \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{a}$$

$$f_y(y) = \sum_n \frac{4}{\pi n} \sin \beta_n v \cdot \sin \beta_n d \cdot \sin \beta_n y, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b}$$

$$\begin{aligned} p(x,y) &= p_0 \cdot f_x(x) \cdot f_y(y) \\ &= \sum_m \sum_n p_{mn} \cdot \sin \alpha_m x \cdot \sin \beta_n y \end{aligned} \quad (3.2.8.1)$$

$$p_{mn} = \frac{16p_0}{\pi^2 m \cdot n} \sin \alpha_m u \cdot \sin \alpha_m c \cdot \sin \beta_n v \cdot \sin \beta_n d$$

Wenn man die Fourierreihe $p(x,y)$ in die Dgl. $K\Delta\Delta w(x,y)=p(x,y)$ einsetzt ergibt sich aus dem Koeffizientenvergleich für jedes Reihenglied die Fourierreihe der Lösung $w(x,y)$:

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n w_{mn} \cdot \sin \alpha_m x \cdot \sin \beta_n y \quad (3.2.8.2)$$

$$w_{mn} = \frac{p_{mn}}{K \left[(\alpha_m)^2 + (\beta_n)^2 \right]^2}$$

Diese Lösung ist die exakte Lösung, da sie die Dgl. und alle RBn erfüllt. In Abbildung 3.2.4 sind die Flächenlast $p(x,y)$ und die Durchbiegung $w(x,y)$ für eine quadratische Platte mit den Werten:

$E=2.1 \cdot 10^5 \text{MPa}$, $\nu=0.3$, $p_0=1 \text{MPa}$, $a=b=100 \text{mm}$, $u=v=50 \text{mm}$, $c=d=25 \text{mm}$, $h=5 \text{mm}$

dargestellt. Die Lösung für w konvergiert mit $\frac{1}{(m \cdot n)^5}$ schon nach wenigen Reihen-

gliedern. Die Normalspannungen werden nach (3.2.7.1) und (3.2.3.1) aus den Krümmungen, also den 2.Ableitungen von w berechnet. Diese konvergieren immer noch mit mindestens der dritten Potenz von m und n im Nenner. Die maximale Durchbiegung ist $w_{\max}=0.089 \text{mm}$.

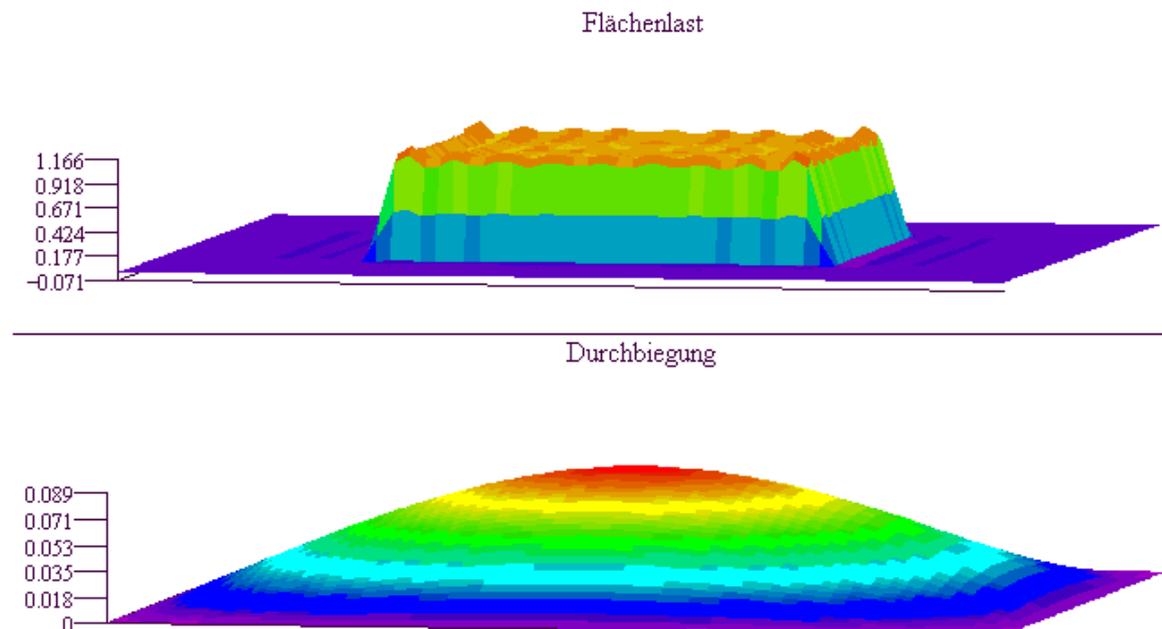


Abbildung 3.2.4: Lösung $p(x,y)$ und $w(x,y)$ für eine Quadratplatte

Die zugehörige Lastfunktion $f_x(x)$, die mit $p(x,y)=p_0 f_x(x) f_y(y)$ die Dgl. und die RBn. erfüllt, ist in Abbildung 3.2.5 dargestellt. Der Wertebereich ist von $x=0 \text{mm}$ bis $x=100 \text{mm}$.



Abbildung 3.2.5: Flächenlastfunktion $f_x(x)$

3.3 Grundlagen der Biegetheorie der Rotationsschalen

Allgemeine Schalen sind doppelt gekrümmte Flächentragwerke, d.h. eine Abmessung, die Wanddicke der Schale, ist klein gegenüber den Krümmungsradien. Durch geeignete kinematische und kinetische Annahmen in Richtung der Wanddicke können aus der 3D-Theorie der Kontinuumsmechanik 2D-(Schalen-)Theorien hergeleitet werden. Die Klasse der Rotationsschalen, als ein Sonderfall der allgemeinen Schale, hat eine drehsymmetrische Geometrie. Während es für allgemeine Schalen notwendig ist, numerische Lösungsverfahren anzuwenden, gibt es für die Rotationsschalen analytische Formulierungen der zugehörigen Randwertprobleme und für wichtige Spezialfälle auch geschlossenen Lösungen. In Abbildung 3.3.1 ist die Geometrie einer allgemeinen Rotationsschale dargestellt

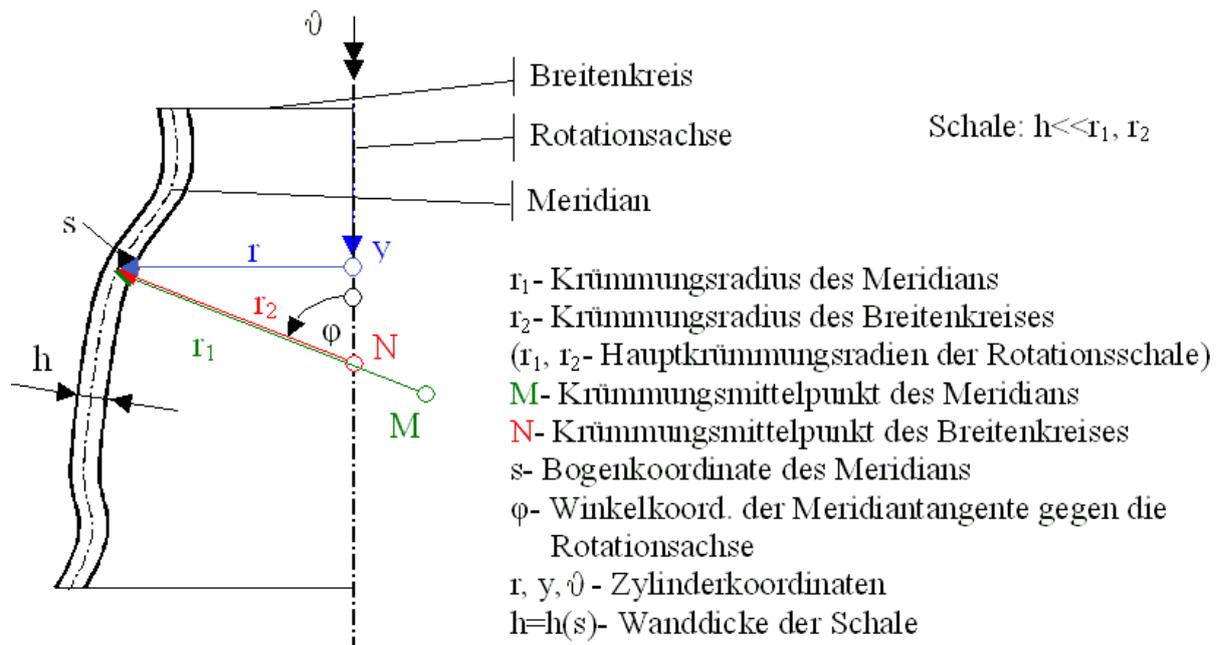
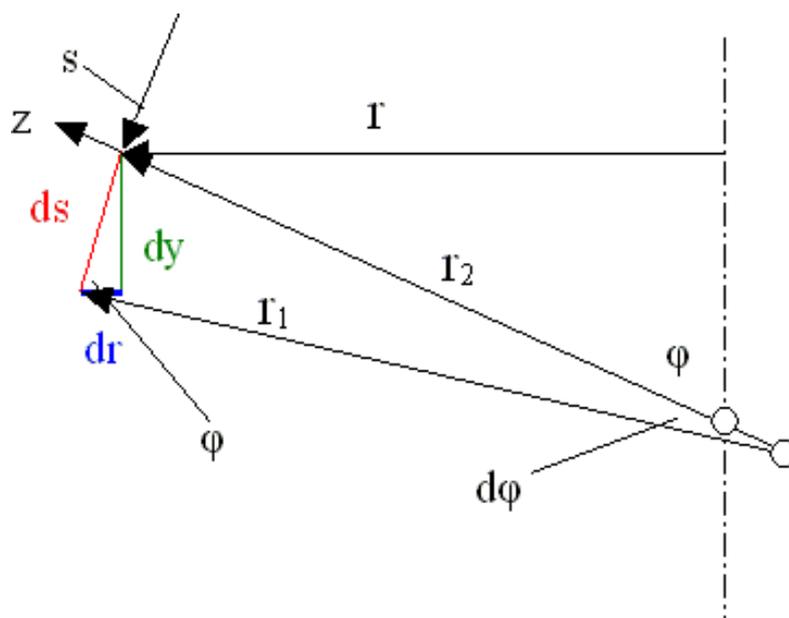


Abbildung 3.3.1: Geometrie der Rotationsschale

Durch die Rotation des Meridians um die Rotationsachse entsteht die Schalenmittelfläche (SMF).

Spezialfälle: $\left\{ \begin{array}{l} \varphi(s) = 0^\circ \text{ Kreisscheibe bzw. -platte, } (r_1 \rightarrow \infty, r_2 \rightarrow \infty) \\ \quad = 90^\circ \text{ Kreiszyinderschale, } (r_1 \rightarrow \infty, r_2 = r) \\ \quad = \text{konst. } (\neq 0^\circ, 90^\circ) \text{ Kreiskegelschale, } (r_1 \rightarrow \infty) \\ r_1 = r_2 = \text{konst. Kugelschale} \end{array} \right.$



Die Abbildung 3.3.2 zeigt ein Element ds der Schalenmittelfläche zur Herleitung der differentialgeometrischen Beziehungen von (3.3.1).

Abbildung 3.3.2: Element ds der Schalenmittelfläche

$$\begin{aligned}
 ds &= r_1 d\varphi & ()' &= ()_{,\varphi} = \frac{\partial()}{\partial\varphi} \\
 r &= r_2 \sin \varphi \\
 r' &= r_2' \sin \varphi + r_2 \cos \varphi \\
 dr &= ds \cos \varphi = r_1 \cos \varphi \cdot d\varphi \Rightarrow r' = r_1 \cos \varphi \\
 dy &= ds \sin \varphi & r_2' &= \frac{(r_1 - r_2) \cos \varphi}{\sin \varphi}, \text{ für } \sin \varphi \neq 0
 \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

3.3.1 Verzerrungs-Verformungsbeziehungen für die Rotationsschale (kleine Verzerrungen)

Die allgemeinen mathematischen Koordinaten des Verzerrungstensors sind in kartesischen Koordinaten $K,L=x,y,z$ und in beliebigen (krummlinigen, schiefwinkligen) Koordinaten $\lambda,\mu=x_1,x_2,x_3$:

$$\begin{aligned}
 \vec{\varepsilon} &= \varepsilon_{KL} \cdot \overset{\rightarrow K}{\mathbf{e}} \cdot \overset{\rightarrow L}{\mathbf{e}} = \varepsilon_{\lambda\mu} \cdot \overset{\rightarrow \lambda}{\mathbf{g}} \cdot \overset{\rightarrow \mu}{\mathbf{g}} \\
 \varepsilon_{KL} &= \frac{1}{2} \left(v_{L,K} + v_{K,L} + \delta^{MN} v_{M,K} \cdot v_{N,L} \right) \\
 \varepsilon_{\lambda\mu} &= \frac{1}{2} \left(v_{\lambda|\mu} + v_{\mu|\lambda} + \mathbf{g}^{\nu\rho} v_{\nu|\mu} \cdot v_{\rho|\lambda} \right)
 \end{aligned} \tag{3.3.1.1}$$

Über in einem Summanden einmal oben und einmal unten auftretende gleiche Indizes wird summiert.

Im kartesischen Koordinatensystem, sind die Basisvektoren (unveränderliche) Einheitsvektoren. Es sind im Verzerrungstensor nur die Koordinaten ortsabhängig. Im beliebigen Koordinatensystem sind auch die Basisvektoren nicht mehr konstant. Bei Fortschreiten in Koordinatenrichtung müssen auch deren partielle Ableitungen berücksichtigt werden. Das hat zur Konsequenz, daß die partiellen Ableitungen formal durch die kovarianten Ableitungen ersetzt werden müssen, z.B. $v_{L,K}$ durch $v_{\lambda|\mu}$. Bei kleinen Verzerrungen dürfen die in den Verformungen quadratischen Glieder vernachlässigt werden. Über die relevanten Grundlagen der Tensorrechnung und deren Anwendung in der Festigkeitslehre kann in ⁴ nachgelesen werden.

Bei der Rotationsschale werden die Meridianbogenkoordinate s , die Breitenkreiswinkelkoordinate ϑ und die Wanddickenkoordinate z verwendet. Diese Koordinaten sind orthogonal, also nicht schiefwinklig, aber krummlinig. Die aus (3.3.1.1) abgeleiteten Verzerrungs-Verformungs-Beziehungen der Rotationsschale für kleine Verzerrungen in physikalischen Koordinaten sind:

$\varepsilon_{\lambda\mu} =$ $\varepsilon_{\mu\lambda}$		μ		
		φ	ϑ	z
λ	φ	$\frac{r_1 \bar{v}_{\varphi,s} + \bar{v}_z}{r_{1z}}$	$\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{v}_{\varphi,\vartheta} - \bar{v}_\vartheta \cos \varphi}{r_z} + \frac{r_1 \bar{v}_{\vartheta,s}}{r_{1z}} \right)$	$\frac{1}{2} \left(\bar{v}_{\varphi,z} + \frac{r_1 \bar{v}_{z,s} - \bar{v}_\varphi}{r_{1z}} \right)$
	ϑ		$\frac{\bar{v}_{\vartheta,\vartheta} + \bar{v}_r}{r_z}$	$\frac{1}{2} \left(\bar{v}_{\vartheta,z} + \frac{\bar{v}_{z,\vartheta} - \bar{v}_\vartheta \sin \varphi}{r_z} \right)$
	z	symmetrisch		$\bar{v}_{z,z}$

$$r_{1z} = r_1 + z \quad , \quad r_z = (r_2 + z) \sin \varphi$$

Tabelle 3.3.1: *Verzerrungs-Verformungs-Beziehungen in physikalischen Koordinaten*

Die Meridianbogenkoordinate s ist im Gegensatz zur Winkelkoordinate φ immer eindeutig. Für einen geraden Meridian (Platte/Scheibe, Kegel, Zylinder) gilt $\varphi = \text{konst.}$

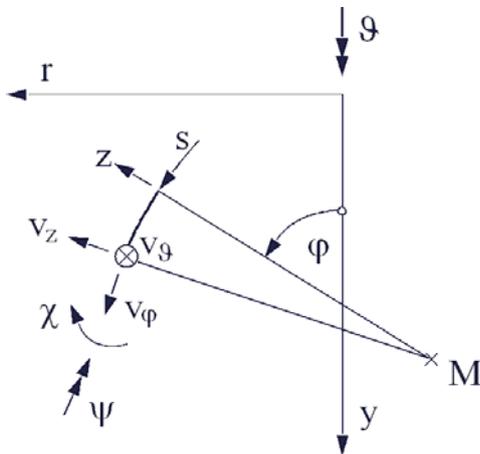
$$\Rightarrow d\varphi = 0, \text{ aber } r_1 \rightarrow \infty \text{ und } ds = r_1 d\varphi \neq 0 .$$

Deshalb wurden in den Verzerrungs-Verformungs-Beziehungen der Tabelle 3.3.1 die partielle Ableitung nach φ durch die Ableitung nach s ersetzt.

3.3.2 Kinematische Annahmen

3.3.2.1 Körperfeste Verformungen

Bei der Schale entkoppeln Scheiben- und Plattenzustand entsprechend (3.1.1.1), (3.2.1.1) nicht mehr. Dem Scheibenzustand entsprechen die Verschiebungen v_φ und v_ϑ der Schalenmittelfläche, und dem Plattenzustand die Verschiebung v_z , die Verdrehung der Meridiantangente χ und der Breitenkreistangente ψ



- Es gilt die Geradenhypothese bezüglich der Abhängigkeit der Verformungen von der Wanddickenkoordinate z :

Abbildung 3.3.3: *Verformungen der Rotationsschale*

$$\bar{v}_\varphi(s, \vartheta, z) = v_\varphi(s, \vartheta) - \chi(s, \vartheta) \cdot z, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}, \quad h \ll r_1, r_2 \quad (3.3.2.1)$$

$$\bar{v}_\vartheta(s, \vartheta, z) = v_\vartheta(s, \vartheta) - \psi(s, \vartheta) \cdot z$$

$$\bar{v}_z(s, \vartheta, z) = v_z(s, \vartheta)$$

- Die beiden Schubverzerrungen $\gamma_{\varphi z}$, $\gamma_{\vartheta z}$ werden entsprechend der Normalenhypothese (Bernoulli-Hypothese) Null gesetzt:

$$\text{mit } r_{1z} = r_1 + z, \quad r_z = (r_2 + z) \sin \varphi, \quad ()' = ()_{,s}, \quad ()^\bullet = ()_{,\vartheta}$$

$$\gamma_{\varphi z} = 2\varepsilon_{\varphi z} = 0 = -\chi + \frac{1}{r_{1z}} \left[r_1 v_z' - (v_\varphi - \chi z) \right] \Big|_{\cdot r_{1z}}$$

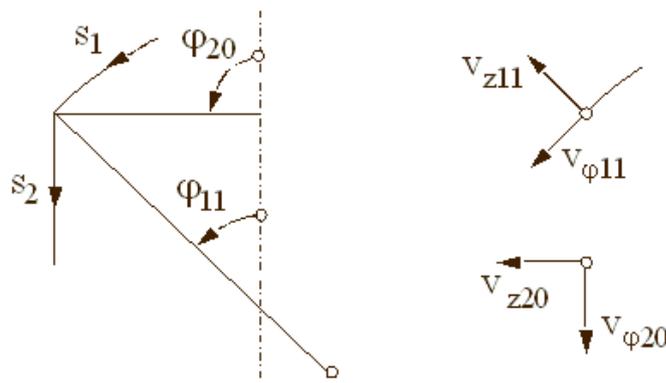
$$\Rightarrow \chi = v_z' - \frac{v_\varphi}{r_1} \quad (3.3.2.2)$$

$$\gamma_{\vartheta z} = 2\varepsilon_{\vartheta z} = 0 = -\psi + \frac{1}{r_z} \left[v_z^\bullet - (v_\vartheta - \psi z) \sin \varphi \right] \Big|_{\cdot r_z}$$

$$\Rightarrow \psi = \frac{1}{r} \left(v_z^\bullet - v_\vartheta \sin \varphi \right)$$

Analog (3.2.1.2) enthält (3.3.2.2) infolge der Normalen-Hypothese zwei Zwangsbedingungen für die Verdrehungen χ und ψ .

3.3.2.2 Raumfeste Verformungen



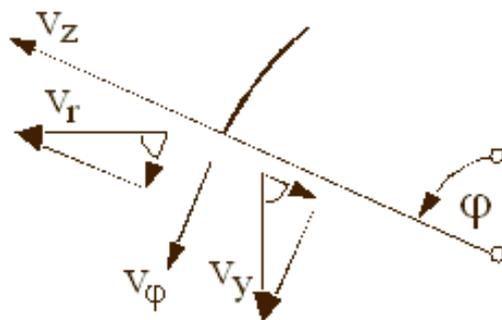
Die Verformungen v_φ und v_z haben eine körperfeste Basis. In Abbildung 3.3.4 ist exemplarisch der Übergang einer Kugelschale 1 mit dem Öffnungswinkel $\varphi_{11} < 90^\circ$ in eine Zylinderschale 2 mit dem Winkel $\varphi_{20} = 90^\circ$ dargestellt. Es gilt $v_{z1}(\varphi_{11}) \neq v_{z2}(\varphi_{20})$ und $v_{\varphi1}(\varphi_{11}) \neq v_{\varphi2}(\varphi_{20})$.

Abbildung 3.3.4: körperfeste Verschiebungen v_φ und v_z

⇒ Bei körperfesten Verschiebungen ist am Bereichsübergang eine Koordinatentransformation notwendig (Das ist

natürlich kein Problem).

⇒ Bei endlichen Verformungen dreht sich bei körperfesten Koordinaten die Basis mit. Das führt zu komplizierten Dgln.



Deshalb ist es, besonders bei der Berücksichtigung endlicher Verformungen, sinnvoll, raumfeste Verformungen v_r und v_y einzuführen. Mit den Abkürzungen:

$$s_\varphi = \sin \varphi, \quad c_\varphi = \cos \varphi$$

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{r_1 d\varphi} = \frac{1}{r_1}$$

$$s'_\varphi = \frac{1}{r_1} c_\varphi, \quad c'_\varphi = -\frac{1}{r_1} s_\varphi$$

s – Meridianbogenkoordinate

Abbildung 3.3.5: raumfeste Verschiebungen v_r und v_y

ergeben sich die erforderlichen Transformationen für die Verschiebungen und deren Ableitungen:

$$v_\varphi = v_r c_\varphi + v_y s_\varphi, \quad v_z = v_r s_\varphi - v_y c_\varphi$$

$$v'_\varphi = v'_r c_\varphi + v'_y s_\varphi + \frac{1}{r_1} (-v_r s_\varphi + v_y c_\varphi) = v'_r c_\varphi + v'_y s_\varphi - \frac{v_z}{r_1} \tag{3.3.2.3}$$

$$v'_z = v'_r s_\varphi - v'_y c_\varphi + \frac{1}{r_1} (v_r c_\varphi + v_y s_\varphi) = v'_r s_\varphi - v'_y c_\varphi + \frac{v_\varphi}{r_1}$$

Die jeweils letzten Summanden in den Gleichungen für die Ableitungen heben sich mit den entsprechenden Glieder von $\epsilon_{\varphi\varphi}$ und $\epsilon_{\varphi z}$ aus Tabelle 3.3.1 weg.

3.3.2.3 Linearisierung in Wanddickenrichtung

Die Verzerrungs-Verformungs-Beziehungen aus Tabelle 3.3.1 sind nichtlinear in z , wegen der Wanddicken-Koordinate z im Nenner. Bei der Beschränkung auf dünne Schalen und Voraussetzung der Normalen-Hypothese ist es sinnvoll, diese Beziehungen zu linearisieren, um einfachere Gleichungen zu erhalten. Bei der Erweiterung der Schalentheorie für dickere Schalen durch Berücksichtigung von Gliedern mit höheren Potenzen in z bei den kinematischen Annahmen (3.3.2.1) ist das nicht mehr erlaubt.

Die Linearisierung ergibt z.B. für ein Glied mit:

$$\alpha = \frac{z}{r_1} \ll 1, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}, \quad |\alpha| \leq \frac{h}{2r_1} \quad (3.3.2.4)$$

$$\frac{1}{r_1 + z} = \frac{1}{r_1} \frac{1}{1 + \alpha} = \frac{1}{r_1} \frac{1}{1 + \alpha} \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha} = \frac{1}{r_1} \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha^2} \approx \frac{1 - \alpha}{r_1}$$

Der bei dieser Linearisierung auftretende Fehler beträgt:

		Exakt	Näherung	$\frac{\text{Näherung}}{\text{exakt}} \quad [\%]$
$\frac{h}{r_1}$	α_{\max}	$\frac{1}{1 + \alpha_{\max}}$	$(1 - \alpha_{\max})$	$1 - \alpha_{\max}^2$
0.01	0.005	0.99502	0.99500	99.9996
0.05	0.025	0.97561	0.97500	99.9375
0.1	0.05		0.95000	99.7500

Also selbst bei einer schon relativ dicken Schale mit z.B. der Wanddicke $h=100\text{mm}$ und dem Krümmungsradius $r_1=1000\text{mm}$ beträgt dieser Fehler nur 0.25%.

Tabelle 3.3.2: Fehler bei der Linearisierung in z -Richtung

3.3.2.4 Linearisierte Verzerrungs-Verformungsbeziehungen

Nach der Einführung raumfester Verformungen und der Linearisierung in Richtung der Wanddickenkoordinate z ergeben sich folgende Verzerrungs-Verformungsbeziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\varphi\vartheta}(\mathbf{s}, \vartheta, \mathbf{z}) &= \varepsilon_{\varphi}(\mathbf{s}, \vartheta) - \kappa_{\varphi}(\mathbf{s}, \vartheta) \cdot \mathbf{z} \\ \varepsilon_{\vartheta\vartheta}(\mathbf{s}, \vartheta, \mathbf{z}) &= \varepsilon_{\vartheta}(\mathbf{s}, \vartheta) - \kappa_{\vartheta}(\mathbf{s}, \vartheta) \cdot \mathbf{z} \\ 2\varepsilon_{\varphi\vartheta}(\mathbf{s}, \vartheta, \mathbf{z}) &= \gamma_{\varphi\vartheta}(\mathbf{s}, \vartheta) - \omega_{\varphi\vartheta}(\mathbf{s}, \vartheta) \cdot \mathbf{z} \end{aligned} \right\} \text{Linearisierte Verzerrungen}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\varphi} &= \mathbf{v}'_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{c}_{\varphi} + \mathbf{v}'_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{s}_{\varphi} & \kappa_{\varphi} &= \bar{\kappa}_{\varphi} + \frac{\varepsilon_{\varphi}}{r_1}, & \bar{\kappa}_{\varphi} &= \chi' \\ \varepsilon_{\vartheta} &= \frac{1}{r}(\mathbf{v}_{\mathbf{r}} + \mathbf{v}_{\vartheta}^{\bullet}) & \kappa_{\vartheta} &= \bar{\kappa}_{\vartheta} + \frac{\varepsilon_{\vartheta}}{r_2}, & \bar{\kappa}_{\vartheta} &= \frac{1}{r}(\chi \cdot \mathbf{c}_{\varphi} + \psi^{\bullet}) \\ \gamma_{\varphi\vartheta} &= \frac{1}{r}(\mathbf{v}_{\mathbf{r}}^{\bullet} \cdot \mathbf{c}_{\varphi} + \mathbf{v}_{\mathbf{y}}^{\bullet} \cdot \mathbf{s}_{\varphi} - \mathbf{v}_{\vartheta} \cdot \mathbf{c}_{\varphi}) + \mathbf{v}'_{\vartheta}, & \omega_{\varphi\vartheta} &= \bar{\omega}_{\varphi\vartheta} + \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\gamma_{\varphi\vartheta} \quad (3.3.2.5) \\ \bar{\omega}_{\varphi\vartheta} &= \frac{2}{r} \left(\frac{\mathbf{v}_{\mathbf{y}}^{\bullet}}{r} + \chi^{\bullet} \right) \end{aligned}$$

$$\text{mit } \chi = \mathbf{v}'_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}_{\varphi} - \mathbf{v}'_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{c}_{\varphi} \quad \psi = \frac{1}{r} \overbrace{(\mathbf{v}_{\mathbf{r}}^{\bullet} \cdot \mathbf{s}_{\varphi} - \mathbf{v}_{\mathbf{y}}^{\bullet} \cdot \mathbf{c}_{\varphi} - \mathbf{v}_{\vartheta} \cdot \mathbf{s}_{\varphi})}^{\mathbf{v}_{\mathbf{z}}^{\bullet}}$$

$$\text{und } \mathbf{s}_{\varphi} = \sin \varphi(\mathbf{s}), \quad \mathbf{c}_{\varphi} = \cos \varphi(\mathbf{s}), \quad ()' = ()_{,\mathbf{s}}, \quad ()^{\bullet} = ()_{,\vartheta}$$

Dabei sind: $\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{\varphi}, \varepsilon_{\vartheta}, \gamma_{\varphi\vartheta} \text{ Verzerrungen der SMF} \\ \kappa_{\varphi}, \kappa_{\vartheta}, \omega_{\varphi\vartheta} \text{ Krümmungsänderungen der SMF} \\ \chi \text{ Verdrehung der Meridiantangente} \\ \psi \text{ Verdrehung der Breitenkreistangente} \\ \text{SMF – Schalenmittelfläche} \end{array} \right.$

Für die Glieder: $\frac{\varepsilon_{\varphi}}{r_1}, \frac{\varepsilon_{\vartheta}}{r_2}, \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\gamma_{\varphi\vartheta}$ in den Krümmungsänderungen gilt bei

dünnen Schalen $\frac{\varepsilon_{\varphi}}{r_1} \ll \bar{\kappa}_{\varphi}, \frac{\varepsilon_{\vartheta}}{r_2} \ll \bar{\kappa}_{\vartheta}, \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\gamma_{\varphi\vartheta} \ll \bar{\omega}_{\varphi\vartheta}$. Sie sind bei

Starrkörperbewegungen gleich Null und wurden genau aus diesem Grund so gewählt. Sie werden wegen ihrer Kleinheit vernachlässigt und es gilt für die Krümmungsänderungen näherungsweise:

$$\begin{aligned}
\kappa_{\varphi} &= \chi' \\
\kappa_{\vartheta} &= \frac{1}{r} (\chi \cdot \mathbf{c}_{\varphi} + \psi \cdot) \\
\omega_{\varphi\vartheta} &= \frac{2}{r} \left(\frac{\dot{v}_y}{r} + \chi \cdot \right)
\end{aligned}
\tag{3.3.2.6}$$

Starrkörperbewegungen liefern bei Vernachlässigung der kleinen Glieder keine Verzerrungen, damit auch keine Spannungen und verletzen also nicht die Gleichgewichtsbedingungen. Sie können deshalb bei dünnen Schalen gegenüber den überstrichenen Gliedern vernachlässigt werden.

3.3.3 Kinetische Annahmen

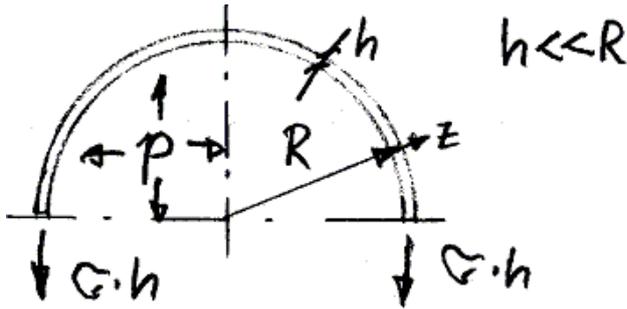
Die kinetischen Annahmen berücksichtigen die bei (gekrümmten) Schalen auftretende Kopplung des Membranspannungszustandes mit über der Wanddicke konstanten Spannungen (entspricht dem Scheibenzustand (3.1.2.1)) und des Biegespannungszustandes mit über der Wanddicke linear verteilten Spannungen (entspricht dem Plattenzustand (3.2.2.1)):

$$\begin{aligned}
\sigma_{\varphi}(s, \vartheta, z) &= \sigma_{\varphi 0}(s, \vartheta) + \sigma_{\varphi 1}(s, \vartheta) \frac{2z}{h}, \quad \sigma_{\vartheta}(s, \vartheta, z) = \sigma_{\vartheta 0}(s, \vartheta) + \sigma_{\vartheta 1}(s, \vartheta) \frac{2z}{h} \\
\tau_{\varphi\vartheta}(s, \vartheta, z) &= \tau_0(s, \vartheta) + \tau_1(s, \vartheta) \frac{2z}{h} \\
\sigma_z(s, \vartheta) &= -p_z(s, \vartheta), \quad p_z - \text{Flächenlast in Richtung der Koordinate } z \\
\tau_{\varphi z}(s, \vartheta, z) &= \tau_{\varphi z 0}(s, \vartheta) \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] \\
\tau_{\vartheta z}(s, \vartheta, z) &= \tau_{\vartheta z 0}(s, \vartheta) \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right]
\end{aligned}
\tag{3.3.3.1}$$

Auch hier gilt, wie schon in (3.2.2.2), die Spannungen mit einem Index z sind klein gegenüber den anderen und dürfen deshalb in den Grundgleichungen vernachlässigt werden.

$$\sigma_z = \tau_{\varphi z} = \tau_{\vartheta z} = 0
\tag{3.3.3.2}$$

Es gilt z.B. für eine Kugelschale unter Innendruck die GGB:



$$\downarrow: \sigma h 2\pi R - p\pi R^2 = 0$$

$$\Rightarrow \sigma = -\frac{pR}{2h}$$

Die Normalspannungen σ_z auf der Kugeloberfläche sind klein gegenüber den Membranspannungen σ .

Abbildung 3.3.6: Kugelschale unter Innendruck

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_z(z = -h/2) = -p \\ \sigma_z(z = h/2) = 0 \end{array} \right\} |\sigma_z|_{\max} = p \Rightarrow |\sigma| = |\sigma_z|_{\max} \frac{R}{2h} \gg |\sigma_z|$$

Es gelten näherungsweise die Voraussetzungen eines ebenen Spannungszustandes. Für nicht mehr streng dünnwandige Schalen mit entsprechend um Glieder mit höheren z -Potenzen erweiterten kinematischen Ansätzen (3.3.2.1) kann nicht mehr von einem ebenen Spannungszustand ausgegangen werden. In diesem Fall ist ein allgemeines 3D-Stoffgesetz zu verwenden und die Spannungsverteilung ergibt sich über die kinematischen Annahmen widerspruchsfrei aus dem Materialgesetz.

3.3.4 Materialgesetz (Hookesches Gesetz)

Das Materialgesetz für den ebenen Spannungszustand ist:

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{E}(\sigma_{\varphi} - \nu\sigma_{\vartheta}) \quad \gamma_{\varphi\vartheta} = 2\varepsilon_{\varphi\vartheta} = \frac{1}{G}\tau_{\varphi\vartheta} \\ \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{E}(\sigma_{\vartheta} - \nu\sigma_{\varphi}) \quad \gamma_{z\varphi} = 0 \\ \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{\varphi} + \sigma_{\vartheta}) \quad \gamma_{z\vartheta} = 0 \end{array} \right\} \text{aus Normalenhypothese} \quad (3.3.4.1)$$

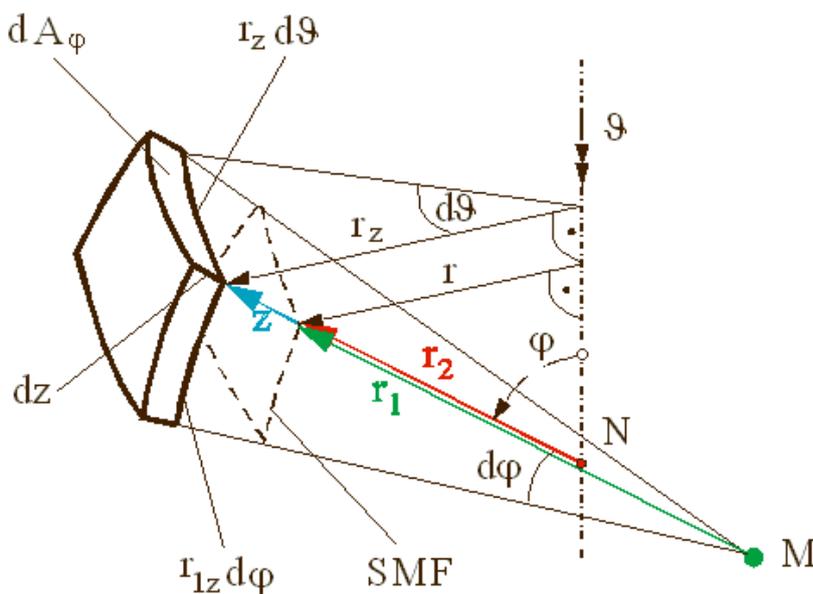
und mit (3.3.2.5) und (3.3.2.6) umgestellt nach den Spannungen:

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\varphi\varphi} + \nu\varepsilon_{\vartheta\vartheta}) = \frac{E}{1-\nu^2} [(\varepsilon_\varphi + \nu\varepsilon_\vartheta) - (\kappa_\varphi + \nu\kappa_\vartheta)z] \\ \sigma_\vartheta &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \nu\varepsilon_{\varphi\varphi}) = \frac{E}{1-\nu^2} [(\varepsilon_\vartheta + \nu\varepsilon_\varphi) - (\kappa_\vartheta + \nu\kappa_\varphi)z] \\ \tau_{\varphi\vartheta} &= G2\varepsilon_{\varphi\vartheta} = G(\gamma_{\varphi\vartheta} - \omega_{\varphi\vartheta}z) \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \tag{3.3.4.2}$$

Bezüglich der Widersprüchlichkeit von kinematischen und kinetischen Annahmen gelten analoge Aussagen wie in Abschnitt 3.2.2

$$\begin{aligned} v_z = v_z(\varphi, \vartheta) \Rightarrow \varepsilon_{zz} = v_{z,z} = 0 \\ \gamma_{z\varphi} = \frac{1}{G_z} \tau_{z\varphi} = 0 \\ \gamma_{z\vartheta} = \frac{1}{G_z} \tau_{z\vartheta} = 0 \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{aber Querkräfte} \neq 0 \\ q_\varphi = \int \tau_{z\varphi} dz \neq 0 \\ q_\vartheta = \int \tau_{z\vartheta} dz \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Dieses Material} \\ \text{gibt es nicht.} \\ G_z \rightarrow \infty \end{array} \right. \tag{3.3.4.3}$$

3.3.5 Trapezeffekt



Infolge der Krümmung der Koordinatenlinien ist die Größe des Volumenelementes dV entsprechend Abbildung 3.3.7 von der Wanddickenkoordinate z abhängig. Dieser Effekt wird Trapezeffekt genannt.

Abbildung 3.3.7: Trapezeffekt

$$\begin{aligned}
 dV &= r_z d\vartheta r_{1z} d\varphi dz = r_2 \left(1 + \frac{z}{r_2}\right) \sin \varphi d\vartheta \cdot r_1 \left(1 + \frac{z}{r_1}\right) d\varphi dz \\
 &= \left(1 + \frac{z}{r_2}\right) \cdot \left(1 + \frac{z}{r_1}\right) r d\vartheta ds dz, \quad \frac{z}{r_1}, \frac{z}{r_2} \ll 1
 \end{aligned}
 \tag{3.3.5.1}$$

$$r_z = (r_2 + z) \sin \varphi, \quad r_{1z} = r_1 + z$$

3.3.6 Schnittgrößen

Die Schnittgrößen resultieren aus der Integration der Spannungen mit den in 3.3.3 getroffenen kinetischen Annahmen über die Wanddicke. Durch den Trapezeffekt ergibt sich bei den Schnittgrößen eine Kopplung des Membran- und des Biegespannungszustandes, z.B. bei n_φ und m_φ :

$$\begin{aligned}
 dA_\varphi &= \left(1 + \frac{z}{r_2}\right) r d\vartheta dz \\
 r d\vartheta n_\varphi &= \int \sigma_\varphi dA_\varphi \quad \Rightarrow \quad n_\varphi = \int \sigma_\varphi \left(1 + \frac{z}{r_2}\right) dz \\
 r d\vartheta m_\varphi &= - \int \sigma_\varphi z dA_\varphi \quad \Rightarrow \quad m_\varphi = - \int \sigma_\varphi z \left(1 + \frac{z}{r_2}\right) dz
 \end{aligned}
 \tag{3.3.6.1}$$

für lineare Spannungsverteilung : $\sigma_\varphi = \sigma_{\varphi 0} + \frac{2z}{h} \sigma_{\varphi 1}$

Membranspannung: $\sigma_{\varphi 0}$, Biegespannung: $\sigma_{\varphi 1}$

$$n_\varphi = \left(\sigma_{\varphi 0} + \frac{1}{6} \frac{h}{r_2} \sigma_{\varphi 1} \right) h, \quad m_\varphi = - \left(\sigma_{\varphi 1} + \frac{1}{2} \frac{h}{r_2} \sigma_{\varphi 0} \right) \frac{h^2}{6}$$

Das ergibt die Kopplung von Membran- und Biegespannungszustand:

$$n_\varphi = n_\varphi(\sigma_{\varphi 0}, \sigma_{\varphi 1}), \quad m_\varphi = m_\varphi(\sigma_{\varphi 0}, \sigma_{\varphi 1})$$

Bei Vernachlässigung des Trapezeffektes im Volumenelement (3.3.5.1) und den Flächenelementen entsprechend (3.3.6.1) und sinnvoller Weise der Glieder gleicher Größenordnung in den Verzerrungs-Verformungsbeziehungen (3.3.2.5) :

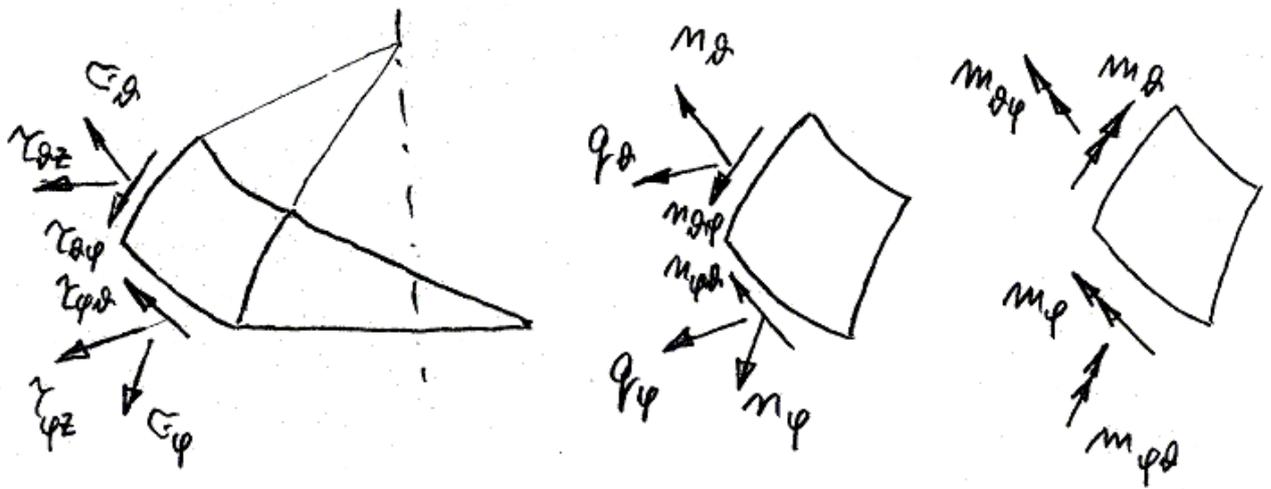


Abbildung 3.3.8: Schnittgrößen der Rotationsschale

$$dV = \left(1 + \frac{z}{r_2}\right) \cdot \left(1 + \frac{z}{r_1}\right) r d\vartheta ds dz$$

$$n_{\varphi} = \int \sigma_{\varphi} \left(1 + \frac{z}{r_2}\right) dz = \left(\sigma_{\varphi 0} + \frac{1}{6} \frac{h}{r_2} \sigma_{\varphi 1}\right) h \quad (3.3.6.2)$$

$$m_{\varphi} = - \int \sigma_{\varphi} z \left(1 + \frac{z}{r_2}\right) dz = - \left(\sigma_{\varphi 1} + \frac{1}{2} \frac{h}{r_2} \sigma_{\varphi 0}\right) \frac{h^2}{6}$$

$$\kappa_{\varphi} = \bar{\kappa}_{\varphi} + \frac{\epsilon_{\varphi}}{r_1}, \quad \kappa_{\vartheta} = \bar{\kappa}_{\vartheta} + \frac{\epsilon_{\vartheta}}{r_2}, \quad \omega_{\varphi\vartheta} = \bar{\omega}_{\varphi\vartheta} + \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \gamma_{\varphi\vartheta}$$

werden die Schnittgrößen entsprechend der Definition in Abbildung 3.3.8:

$$n_{\varphi} = \int \sigma_{\varphi} dz = D(\epsilon_{\varphi} + \nu \epsilon_{\vartheta}) \quad m_{\varphi} = - \int \sigma_{\varphi} z dz = K(\kappa_{\varphi} + \nu \kappa_{\vartheta})$$

$$n_{\vartheta} = \int \sigma_{\vartheta} dz = D(\epsilon_{\vartheta} + \nu \epsilon_{\varphi}) \quad m_{\vartheta} = - \int \sigma_{\vartheta} z dz = K(\kappa_{\vartheta} + \nu \kappa_{\varphi}) \quad (3.3.6.3)$$

$$n_{\varphi\vartheta} = \int \tau_{\varphi\vartheta} dz = G \gamma_{\varphi\vartheta} \quad m_{\varphi\vartheta} = - \int \tau_{\varphi\vartheta} z dz = G \frac{h^3}{12} \omega_{\varphi\vartheta}$$

$$D = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Nur bei Vernachlässigung des Trapezeffektes folgt aus der Gleichheit der zugeordneten Schubspannungen auch:

$$\tau_{\vartheta\vartheta} = \tau_{\vartheta\varphi} \xrightarrow{\text{ohne Trapezeffekt}} n_{\varphi\vartheta} = n_{\vartheta\varphi}, \quad m_{\varphi\vartheta} = m_{\vartheta\varphi} \quad (3.3.6.4)$$

Die negativen Vorzeichen bei den Schnittmomenten resultieren aus der Forderung, daß die Arbeit positiver Schnittgrößen an den positiven zugeordneten Verformungen, den Krümmungsänderungen, positiv ist.

3.4 Biegetheorie der Rotationsschale mit rotationssymmetrischer Belastung

3.4.1 Dgl. und RBN für Kreis-(Ring-) Scheibe

- Die Kreis-(Ring-)Scheibe mit rotationssymmetrischer Belastung wurde schon in der Lehrveranstaltung SF3 des Grundstudiums behandelt.
- Beliebige Belastung weiter hinten in 3.5 als Spezialfall ($\varphi=0^\circ$, $r_1, r_2 \rightarrow \infty$, $v_\varphi \equiv v_r$, $(\quad)_{,\vartheta} = 0$, $v_\vartheta = 0$, $v_z = 0$) der beliebig belasteten Rotationsschale.
- Hier soll die Möglichkeit vorgestellt werden, die Dgln. und die RBN. aus einem zugehörigen Extremalprinzip herzuleiten.

Über die Grundlagen der Anwendung der Variationsrechnung in der Elastizitätstheorie und die Extremalprinzipie der Elastizitätstheorie kann in ⁴ nachgelesen werden. Das ist im Rahmen des hier vermittelten Stoffes nicht zwingend erforderlich, wenn man die verwendeten Prinzipie und die damit im Zusammenhang stehenden Regeln der Mathematik als Definition ohne Beweis akzeptiert.

Ausgegangen werden kann vom „Prinzip der virtuellen Arbeit“:

Bei einem sich im Gleichgewicht befindlichen mechanischen System (resultierende Wirkung aller angreifenden äußeren Beanspruchungen ist Null) ist die durch virtuelle Verformungen geleistete virtuelle Arbeit gleich Null:

$$\Leftrightarrow \delta W = \delta W_i - \delta W_a = 0 \quad \delta W - \text{virtuelle Arbeit}$$

$$\delta W_i - \text{virtuelle innere Arbeit, } \delta W_a - \text{virtuelle äußere Arbeit} \quad (3.4.1.1)$$

Virtuelle Verformung δv , $\delta\varphi$, $\delta\varepsilon$, $\delta\gamma$:

- Verschiebung δv , Verdrehung $\delta\varphi$, Dehnung $\delta\varepsilon$, Winkeländerung $\delta\gamma$
- Gedachte Verformung
- Differentiell klein
- Mit den inneren (Zusammenhang des Kontinuums) und äußeren (Lager-, Verformungsbedingungen) Bindungen verträglich

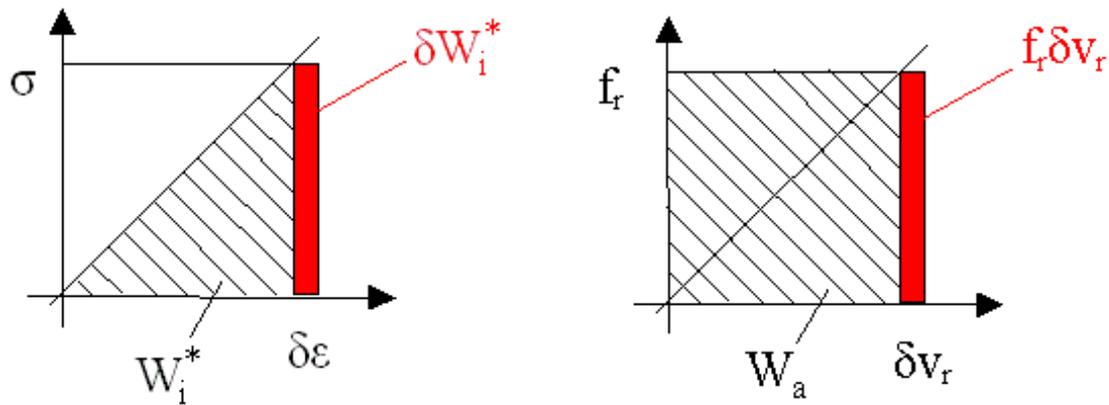


Abbildung 3.4.1: spezifische innere Energie W_i^* , Endwertarbeit W_a der Volumenkraft f_r

Die virtuelle innere Arbeit bei einer Kreisscheibe nach Abbildung 3.4.2 mit der Radialverschiebung v_r und den Dehnungen aus (3.3.2.5) beträgt:

$$\delta W_i = \int \delta W_i^* dV = \int \underline{\sigma}^T \delta \underline{\varepsilon} dV = \delta \int \underline{\sigma}^T \underline{\varepsilon} dV, \quad ()' = \frac{d()}{dr} \quad (3.4.1.2)$$

$$\text{mit } \underline{\sigma}^T = (\sigma_r, \sigma_\vartheta) \quad \text{und} \quad \underline{\varepsilon}^T = (\varepsilon_r, \varepsilon_\vartheta) = \left(v_r', \frac{v_r}{r} \right)$$

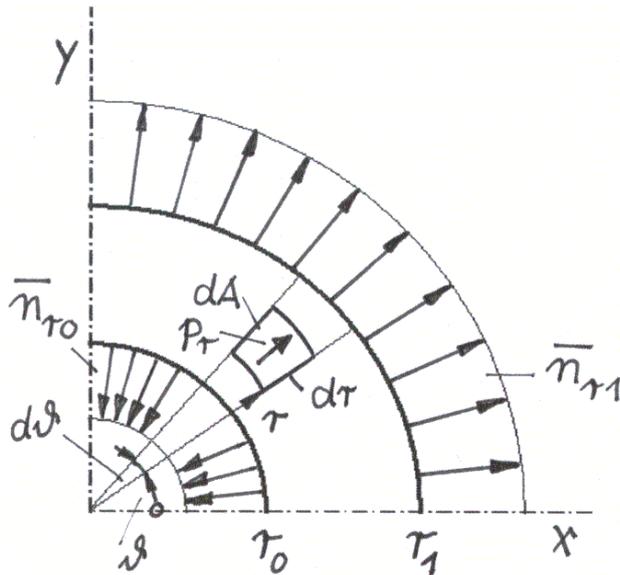
und die virtuelle äußere Arbeit der Volumenkraft im Gebiet $r_0 \leq r \leq r_1$ und die virtuelle Arbeit der Spannungen auf den Rändern $r=r_0$ und $r=r_1$:

$$\delta W_a = \int f_r \delta v_r dV + \int \bar{\sigma}_r \delta v_r dA_R \quad \text{mit } f_r - \text{Volumenkraft, } dV = h dA$$

$$dA = r d\vartheta dr - \text{Flächenelement auf Scheibenmittelfläche} \quad (3.4.1.3)$$

$$\text{und } dA_R = (h \cdot r \cdot d\vartheta)_R - \text{Flächenelement auf Rand } R = r_0, r_1$$

Mit der Integration über die Wanddicke h werden die Schnittkräfte im Inneren, die Randschnittkraft und die Flächenlast eingeführt:



$$n_r = \int \sigma_r dz = \sigma_r h \quad n_\theta = \int \sigma_\theta dz = \sigma_\theta h$$

$$\bar{n}_r = \int \bar{\sigma}_r dz = \bar{\sigma}_r h \quad p_r = \int f_r dz = f_r h$$

Die Integration über den Umfangswinkel ergibt unter der Voraussetzung (3.4.1.1) ($\delta W=0$):

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta = 2\pi \Rightarrow \delta P = \frac{\delta W}{2\pi} = 0$$

Abbildung 3.4.2: Kreisscheibe (ein Viertel)

$$\delta P = \int_{r_0}^{r_1} \delta Q(r, v_r, v_r') dr - [\bar{n}_r r \delta v_r]_{r_0}^{r_1} = 0$$

$$\text{mit } \delta Q = \left(n_r \delta(v_r') + n_\theta \frac{\delta v_r}{r} - p_r \delta v_r \right) r, \quad \delta(v_r') \equiv \delta v_r' \quad (3.4.1.4)$$

$$Q = \left(n_r v_r' + n_\theta \frac{v_r}{r} - p_r v_r \right) r$$

Ab hier ist es sinnvoll, das Symbol δ nicht mehr für die Bezeichnung einer virtuellen Verformungsgröße δv zu betrachten, sondern als 1.Variation δv einer Verformung v . Man kann dann rein formal die Regeln der Variationsrechnung verwenden, ohne sich um die anschauliche Bedeutung entsprechend des „Prinzipes der virtuellen Arbeit“ kümmern zu müssen. Die hier verwendeten Regeln der Variationsrechnung sind analog zu den entsprechenden der Differentialrechnung (totales Differential, Kettenregel, Produktenregel).

1.Variation der Verformung δv , $\delta\varphi$, $\delta\varepsilon$, $\delta\gamma$:

- Verschiebung δv , Verdrehung $\delta\varphi$, Dehnung $\delta\varepsilon$, Winkeländerung $\delta\gamma$
- Differentiell kleine Abweichung von der exakten Lösung
- Mit den inneren (Zusammenhang des Kontinuums) und äußeren (Lager-, Verformungsbedingungen) Bindungen verträgliche Änderung der exakten Lösung

Zur Variation sind nur die Verformungen (hier v_r) und keine Verformungsableitungen (hier v_r') zugelassen \Rightarrow partielle Integration

$$\left(\int uv' dr = [uv]_{r_0}^{r_1} - \int u'v dr \right):$$

$$\delta Q = \frac{\partial Q}{\partial v_r} \delta v_r + \frac{\partial Q}{\partial v_r'} \delta v_r' \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial v_r'} = u \quad \text{und} \quad \delta v_r' = v'$$

damit wird aus dem 2.Summanden nach partieller Integration :

$$\int \frac{\partial Q}{\partial v_r'} \delta v_r' dr = \left[\frac{\partial Q}{\partial v_r'} \delta v_r \right]_{r_0}^{r_1} - \int \left(\frac{\partial Q}{\partial v_r'} \right)' \delta v_r dr \quad (3.4.1.5)$$

$$\delta P = 0 = \int_{r_0}^{r_1} \underbrace{\left[\frac{\partial Q}{\partial v_r} - \left(\frac{\partial Q}{\partial v_r'} \right)' \right]}_{\text{Dgl.}} \delta v_r dr + \underbrace{\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial v_r'} - \bar{n}_r r \right) \delta v_r \right]_{r_0}^{r_1}}_{\text{RBn.}}$$

Da $\delta v_r \neq 0$ eine kleine, kompatible aber sonst beliebige Variation der Radialverschiebung v_r ist, kann das Integral in δP allgemein nur für „Dgl.=0“ Null werden. Demzufolge müssen die RBn. auch an jedem Rand für sich verschwinden. Aus (3.4.1.6) folgt die Dgl. der Scheibe:

$$\frac{\partial Q}{\partial v_r} - \left(\frac{\partial Q}{\partial v_r'} \right)' = n_\vartheta - r \cdot p_r - (r \cdot n_r)' = 0 \quad (3.4.1.6)$$

und die RBn.:

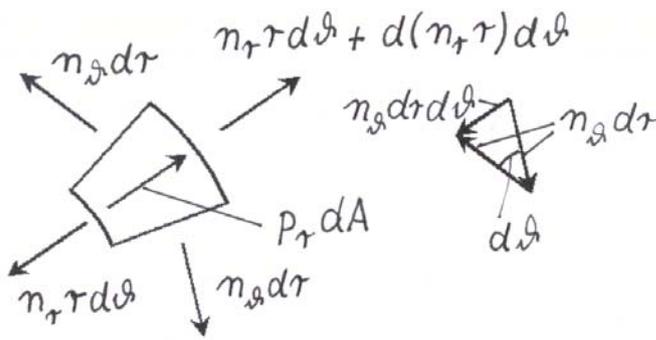
$$\begin{aligned} & \left[(r \cdot n_r) - (r \cdot \bar{n}_r) \right] \delta v_r \Big|_{r_0}^{r_1} \\ & = \left[r_1 (n_{r1} - \bar{n}_{r1}) \delta v_{r1} \right] - \left[r_0 (n_{r0} - \bar{n}_{r0}) \delta v_{r0} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.4.1.7)$$

\Rightarrow An jedem Rand r_i ($i=0,1$) ist entweder die wesentliche RB: $\delta v_{ri} = 0 \Rightarrow v_{ri} = \bar{v}_{ri}$ - vorgegebene Verschiebung auf dem Rand $r=r_i$ (bei einer vorgegebenen Verschiebung am Rand $r=r_i$ muß die Variation der Verschiebung δv_{ri} auf diesem Rand Null sein)

oder

die natürliche RB:

$$r_i (n_{ri} - \bar{n}_{ri}) = 0 \Rightarrow n_{ri} = \bar{n}_{ri} - \text{vorgegebene Randschnittkraft auf dem Rand } r=r_i \text{ zu erfüllen.}$$



Bisher (bei den Stäben, Scheiben und Platten) haben wir die GGBn am freigeschnittenen, differentiellen Element des Bauteiles aufgestellt. Die Abbildung 3.4.3 zeigt ein solches Element der Scheibe. Die GGB in radialer Richtung ergibt:

Abbildung 3.4.3: Element der Scheibenmittelfläche

$$\underline{g}_r = d(r n_r) d\vartheta - n_\vartheta d\vartheta dr + p_r dA = 0, \quad dA = r d\vartheta dr \quad (3.4.1.8)$$

$$\frac{\underline{g}_r}{d\vartheta dr} = (r n_r)' - n_\vartheta + r p_r = 0$$

Ein Vergleich zeigt, daß die Dgl. (3.4.1.6) die GGB (3.4.1.8) des Problems ist. Sie gilt allgemein für kleine Verzerrungen (im Sinne der Theorie 1.Ordnung: GGB am unverformten Bauteil), da noch kein Materialverhalten vorausgesetzt wurde. Wenn man in (3.4.1.2) schon das Materialgesetz einsetzt, wird:

$$\underline{\sigma} = \underline{E} \cdot \underline{\varepsilon}, \quad \underline{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{pmatrix} = \underline{E}^T \quad (3.4.1.9)$$

$$\delta W_i = \int \underline{\sigma}^T \delta \underline{\varepsilon} dV = \int \underline{\varepsilon}^T \underline{E}^T \delta \underline{\varepsilon} dV = \delta \int \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^T \underline{E}^T \underline{\varepsilon} dV$$

Die Variation darf nicht auf das $\underline{\varepsilon}$ des Materialgesetzes angewendet werden. Deshalb ergibt sich beim Vorziehen des Variationssymbol δ vor das Integral der Faktor $\frac{1}{2}$ im Integral. Analog wie in der Differentialrechnung für das Differential einer Funktion

$$y(x) = \frac{k}{2} x^2, \quad dy = \frac{d}{dx} \left(\frac{k}{2} x^2 \right) dx = k \cdot x dx$$

gilt in der Variationsrechnung:

$$\begin{aligned} W_i &= \int \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^T \underline{E}^T \underline{\varepsilon} dV \\ \delta W_i &= \delta \int \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^T \underline{E}^T \underline{\varepsilon} dV = \int \frac{\partial}{\partial \underline{\varepsilon}} \left(\frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^T \underline{E}^T \underline{\varepsilon} \right) \delta \underline{\varepsilon} dV = \int \underline{\varepsilon}^T \underline{E}^T \delta \underline{\varepsilon} dV \end{aligned} \quad (3.4.1.10)$$

In dieser Form folgt aus dem „Prinzip der virtuellen Arbeit“ (3.4.1.1) die notwendige Bedingung $\delta W=0$ für das „Prinzip vom Minimum des elastischen Gesamtpotentials“:

Die in einem elastischen System auftretenden Verformungen stellen sich im Gleichgewichtszustand so ein, daß das elastische Gesamtpotential einen minimalen Wert annimmt.

$$W = W_i - W_a = \text{Min.}, W_i = \int \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}^T \underline{\underline{E}}^T \underline{\underline{\varepsilon}} dV$$

$$\Rightarrow \delta W = \delta(W_i - W_a) = 0 \quad (3.4.1.11)$$

W- elastisches Gesamtpotential

W_i - innere Arbeit (lineare Elastizität), W_a - äußere Endwertarbeit

Die äußere Endwertarbeit W_a ist dabei nicht gleich der äußeren Arbeit der eingepprägten Lasten. Bei einem linearelastischen System ist sie entsprechend Abbildung 3.4.1 genau doppelt so groß.

Bei der Methode der finiten Elemente (FEM) wird durch Diskretisierung des Kontinuums in finite Elemente und die Einführung geeigneter Ansätze für die Verformungen dieser Elemente, ausgehend von der Extremalforderung (3.4.1.11), das Problem in ein algebraisches Gleichungssystem für die Freiwerte der Ansätze überführt.

Wir wollen hier aus (3.4.1.11) die exakten Dgln. ableiten, die wir dann analytisch oder numerisch integrieren.

Aus (3.4.1.11) wird mit den Dehnungen von (3.4.1.2) und der Integration über die Wanddicke h entsprechend (3.4.1.4) aus (3.4.1.6) die Eulersche Dgl. der Kreisscheibe:

$$\delta Q = \delta \left[\frac{1}{2} D \left(v_r'^2 + 2\nu v_r' \frac{v_r}{r} + \frac{v_r^2}{r^2} \right) - p_r v_r \right] r$$

Eulersche Dgl. : $\frac{\partial Q}{\partial v_r} - \left(\frac{\partial Q}{\partial v_r'} \right)' = D \left(\nu v_r' + \frac{v_r}{r} \right) - p_r r - D (r v_r' + \nu v_r)'$

$$\Rightarrow D \left[- \left(\cancel{\nu v_r'} + \frac{v_r}{r} \right) + \left(v_r' + r v_r'' + \cancel{\nu v_r'} \right) \right] + p_r r = 0 \quad (3.4.1.12)$$

$$\Rightarrow v_r'' + \frac{v_r'}{r} - \frac{v_r}{r^2} = - \frac{p_r}{D} = - \frac{1-\nu^2}{E} f_r, \quad f_r = \frac{p_r}{h} - \text{Volumenkraft}$$

Die RBn. entsprechend (3.4.1.5) sind:

$$\left[D \left(v_r' + \nu \frac{v_r}{r} \right) r - (r \cdot \bar{n}_r) \right] \delta v_r \Big|_{r_0}^{r_1} = 0, \quad D = \frac{Eh}{1-\nu^2} - \text{Dehnsteifigkeit} \quad (3.4.1.13)$$

Die RBN. enthalten für jeden Rand immer jeweils entweder eine Vorgabe für eine generalisierte Verformungsgröße oder für die zugeordnete (konjugierte) Kraftgröße. Es ist auch möglich analog zur Herleitung der Dgl. (3.1.7.3) für die Scheibe in kartesischen Koordinaten die Dgl. für eine übergeordnete Spannungsfunktion herzuleiten. Diese ist für rotationssymmetrische Beanspruchung:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} F_{,r}, \quad \sigma_{\vartheta} = F_{,rr} \quad (3.4.1.14)$$

$$\Delta \Delta F = 0, \quad \Delta(\quad) = (\quad)_{,rr} + \frac{1}{r} (\quad)_{,r}$$

3.4.2 Kanonisches Differentialgleichungssystem

Natürlich gibt es für die Dgl. (3.4.1.12) geschlossene Lösungen. Hier soll am einfachen Beispiel der Kreis-(Ring-) Scheibe mit rotationssymmetrischer Belastung die Umformung der Eulerschen Dgl. in ein kanonisches Dgl.-System vorgenommen werden, für dessen Lösung effektive numerische Verfahren existieren. Das Ziel besteht dann in der numerischen Integration für Probleme, bei denen eine geschlossene Lösung nicht existiert, bzw. relativ aufwendig ist und in der Regel auch numerisch ausgewertet werden muß.

Kanonisches Dgl.-System (3.4.2.1):

- lineares, gewöhnliches Dgl.-System k-ter Ordnung, $k=2,4,\dots$
- System von k-Dgln. je 1.Ordnung

$$\underline{\tilde{y}}'_{(k)} = \underline{\tilde{B}}_{(k,k)} \cdot \underline{\tilde{y}}_{(k)} + \underline{b}_{(k)} \quad (3.4.2.1)$$

Die Koeffizientenmatrix von (3.4.2.1) kann man in Untermatrizen darstellen:

$$\underline{\tilde{B}}_{(k,k)} = \begin{bmatrix} 00 & 01 \\ \underline{\tilde{B}}_{(k2,k2)} & \underline{\tilde{B}}_{(k2,k2)} \\ 10 & 11 \\ \underline{\tilde{B}}_{(k2,k2)} & \underline{\tilde{B}}_{(k2,k2)} \end{bmatrix}, \quad k2 = \frac{k}{2} \quad (3.4.2.2)$$

$$\underline{\tilde{B}} = \underline{\tilde{B}}^{01} \quad , \quad \underline{\tilde{B}} = \underline{\tilde{B}}^{10} \quad , \quad \underline{\tilde{B}} = -\underline{\tilde{B}}^{00T}$$

Die Symmetriebeziehungen nach (3.4.2.2) gelten allgemein, wenn die Energieausdrücke in (3.4.1.11) ein Potential bilden und können zur Kontrolle bei der Herleitung der Koeffizientenmatrix verwendet werden.

In den Eulerschen Dgln. entsprechend (3.4.1.12) sind Ableitungen 2.Ordnung der Verformungen enthalten. Um diese bei der Überführung in ein kanonisches Dgl.-

System zu eliminieren, werden nach dem Formalismus von Hamilton-Jacobi Hilfsgrößen \underline{Z} eingeführt:

$$\underline{F} = \frac{\partial Q}{\partial \underline{v}} - \left(\frac{\partial Q}{\partial \underline{v}'} \right)' = \underline{0}$$

$$\underline{Z} = \frac{\partial Q}{\partial \underline{v}'} \Rightarrow \text{(durch Einsetzen in } \underline{F}) \quad \underline{Z}' = \frac{\partial Q}{\partial \underline{v}} \quad (3.4.2.3)$$

In (3.4.2.3) sind statt der $k/2$ Dgln. je 2. Ordnung von \underline{F} 2 mal $k/2$ Dgln. je 1. Ordnung in $\underline{Z}=\dots$ und $\underline{Z}'=\dots$, die noch in die Form (3.4.2.1) gebracht werden müssen.

Am Beispiel der Kreisscheibe mit $k=2$ durchgeführt:

$$\frac{\partial Q}{\partial v_r'} = Z_r = D r \left(v_r' + \nu \frac{v_r}{r} \right) \Rightarrow v_r' = -\nu \frac{v_r}{r} + \frac{1}{D r} Z_r$$

$$\frac{\partial Q}{\partial v_r} = Z_r' = D \left(\nu v_r' + \frac{v_r}{r} \right) - p_r r$$

$$= D \left[\nu \left(-\nu \frac{v_r}{r} + \frac{Z_r}{D r} \right) + \frac{v_r}{r} \right] - p_r r = \frac{D(1-\nu^2)}{r} v_r + \frac{\nu}{r} Z_r - p_r r \quad (3.4.2.4)$$

$$\underline{\tilde{y}}' = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} -\nu & \frac{1}{D} \\ E h & \nu \end{bmatrix} \underline{\tilde{y}} + \begin{pmatrix} 0 \\ -p_r r \end{pmatrix}, \quad \underline{\tilde{y}}^T = (v_r \quad Z_r)$$

Die $k=2$ RBn nach (3.4.1.13) ergeben sich zu:

$$\left[Z_r - (r \cdot \bar{n}_r) \right] \delta v_r \Big|_{r_0}^{r_1} = 0$$

$$\text{für } r = r_0 : Z_{r0} = (r \cdot \bar{n}_r)_0 \text{ oder } \delta v_{r0} = 0 \text{ und damit } v_{r0} = \bar{v}_{r0} \quad (3.4.2.5)$$

$$\text{für } r = r_1 : Z_{r1} = (r \cdot \bar{n}_r)_1 \text{ oder } \delta v_{r1} = 0 \text{ und damit } v_{r1} = \bar{v}_{r1}$$

Aus den RBn (3.4.2.5) kann man auch die physikalische Bedeutung der mit (3.4.2.4) eingeführten Hilfsgröße Z_r als mit dem Radius r multiplizierte Schnittkraft n_r ablesen. Sie hat die Bedeutung einer der generalisierten Verschiebung v_r (hier gibt es nur eine Verschiebung) zugeordneten (konjugierten) generalisierten Kraft.

3.4.3 Numerische Lösung

3.4.3.1 Überführung der RWA in eine zugehörige AWA

Mit dem allgemeinen kanonischen Dgl.-System (3.4.2.1) k-ter Ordnung und den zugehörigen RBn (3.4.1.13), bzw. entsprechend (3.4.2.4) und (3.4.2.5) für den Spezialfall der Kreis-(Ring-) Scheibe mit rotationssymmetrischer Belastung liegt eine 2 Punkt Randwertaufgabe (RWA) vor, d.h. an jedem der 2 Ränder sind je k/2 der generalisierten Verformungen oder der dazu konjugierten Kraftgrößen bekannt und die anderen k/2 Größen sind unbekannt. Eine numerische Integration vom Rand r_0 zum Rand r_1 kann aber nur mit k bekannten Anfangswerten des Zustandsvektors $\tilde{\underline{y}}$ am Rand r_0 durchgeführt werden. Deshalb muß zuerst die RWA in eine AWA (Anfangswertaufgabe) überführt werden. Zur einfacheren Schreibweise wird das kanonischen Dgl.-System (3.4.2.1) formal in eine „homogene Formulierung“ überführt. Dabei wird der Zustandsvektor um eine „1“ ergänzt. Außerdem werden die RBn in eine Vektor-Matrix Schreibweise überführt:

$$\underline{y}'(s) = \underline{B}(s) \cdot \underline{y}(s) \quad \underline{y}(s)^T = \left(\tilde{\underline{y}}(s)^T \quad 1 \right) = \left(\underline{v}(s)^T \quad \underline{Z}(s)^T \quad 1 \right)$$

$$\underline{B}(s) = \begin{pmatrix} \tilde{\underline{B}}(s) & \underline{b}(s) \\ \underline{0}^T & 0 \end{pmatrix}, \quad s_0 \leq s \leq s_1$$

Hinzufügen der "Dgl" $1' = 0$ (3.4.3.1)

$$\text{je } k/2 \text{ RBn am Rand } s = s_0 : \underline{S}_0 \cdot \underline{y}_0 = \underline{0}$$

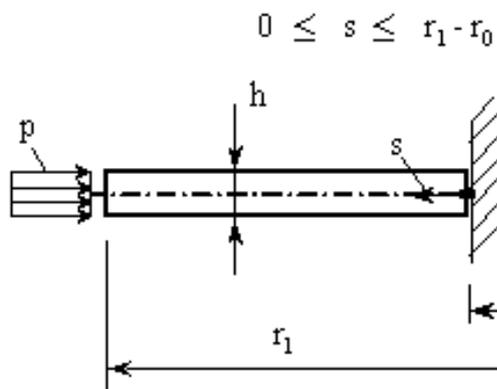
$$\text{und am Rand } s = s_1 : \underline{S}_1 \cdot \underline{y}_1 = \underline{0}$$

Wenn das Berechnungsmodell aus mehreren Bereichen besteht, müssen an jedem Bereichsübergang zwischen 2 Bereichen j und j+1 je k Übergangsbedingungen erfüllt werden. Diese ergeben sich aus Stetigkeits- oder Unstetigkeitsforderungen in der Form

$$\underline{y}_{j+1} = \underline{R} \cdot \underline{y}_j + \underline{r} \quad (3.4.3.2)$$

Mit (3.4.3.1) liegt eine RWA k-ter Ordnung vor. Die Bogenkoordinate s ist dabei die unabhängige Ortsvariable (bei Kreisscheibe $s = r - r_0$).

Beispiel für RBn bei einer Kreisringscheibe:



Rand $r=r_0$: Scheibe ist auf „starre Welle“ aufgeschraubt:

- Bekannt: Übermaß \bar{v}_{r0}
- Unbekannt: Schnittkraft \bar{n}_{r0}

Rand $r=r_1$: Scheibe wird von außen mit Druck p beansprucht:

- Bekannt: Schnittkraft $\bar{n}_{r1} = -p \cdot h$
- Unbekannt: Verschiebung \bar{v}_{r1}

Abbildung 3.4.4: Kreisringscheibe

sind:

$$\underline{S}_0 \cdot \underline{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\bar{v}_{r0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{r0} \\ Z_{r0} \\ 1 \end{pmatrix} = v_{r0} - \bar{v}_{r0} = 0 \quad (3.4.3.3)$$

$$\underline{S}_1 \cdot \underline{y}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & r_1 \cdot p \cdot h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{r1} \\ Z_{r1} \\ 1 \end{pmatrix} = Z_{r1} + r_1 \cdot p \cdot h = 0$$

Die numerische Integration muß mit bekannten Anfangswerten durchgeführt werden:

⇒ Überführung RWA in AWA

Am Anfangsrand $s=s_0$ wird ein Unbekanntenvektor \underline{x} eingeführt, der alle $k/2$ am Anfangsrand unbekanntes Größen des Zustandsvektors \underline{y}_0 (und wegen der „Homogenisierung“ in (3.4.3.1) die bekannte „1“) enthält:

$$\begin{aligned} \underline{S}_0 \cdot \underline{y}_0 = \underline{0} &\Rightarrow \underline{y}_0 = \underline{A} \cdot \underline{x} \\ \underline{S} \cdot \underline{y}_1 = \underline{0} &\quad (\underline{S} = \underline{S}_1) \end{aligned} \quad (3.4.3.4)$$

Für das Beispiel entsprechend (3.4.3.3) gilt:

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{v}_{r0} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.4.3.5)$$

$$\underline{\mathbf{y}}_0 = \begin{pmatrix} v_{r0} \\ z_{r0} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{v}_{r0} \\ x_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{x}} \Rightarrow \begin{cases} v_{r0} = \bar{v}_{r0} & \text{bekannt} \\ z_{r0} = x_1 & \text{unbekannt} \\ 1 = 1 \end{cases}$$

Aus der RWA (3.4.3.1) wird mit $k_1=k+1$ und $k_2=k/2+1$:

$$\underline{\mathbf{y}}'_{(k_1)} = \underline{\mathbf{B}}_{(k_1, k_1)} \cdot \underline{\mathbf{y}}$$

$$\underline{\mathbf{y}}_0 = \underline{\mathbf{A}}_{(k_1, k_2)} \underline{\mathbf{x}}_{(k_2)}$$

⋮

$$\underline{\mathbf{y}}(s) = \underline{\ddot{\mathbf{U}}}(s)_{(k_1, k_1)} \underline{\mathbf{y}}_0 = \overbrace{\underline{\ddot{\mathbf{U}}}(s) \cdot \underline{\mathbf{A}}}_{\underline{\mathbf{F}}(s)} \cdot \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{x}}, \quad \underline{\mathbf{y}}' = \underline{\mathbf{F}}' \cdot \underline{\mathbf{x}} \quad (3.4.3.6)$$

⋮

$$\underline{\mathbf{S}}_{(k/2, k_1)} \cdot \underline{\mathbf{y}}_1 = \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{F}}(s_1) \cdot \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{G}} \cdot \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}} \Rightarrow \underline{\mathbf{x}}, \quad \underline{\mathbf{G}} = \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{F}}(s_1)$$

$$\underline{\mathbf{y}}' = \underline{\mathbf{F}}' \cdot \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{y}} = \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{x}} \Rightarrow \underline{\mathbf{F}}' = \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{F}}$$

die AWA

$$\underline{\mathbf{F}}(s_0) = \underline{\mathbf{A}} \quad (3.4.3.7)$$

⋮

$$\underline{\mathbf{F}}'(s) = \underline{\mathbf{B}}(s) \cdot \underline{\mathbf{F}}(s)$$

Die Übertragungsmatrix $\underline{\ddot{\mathbf{U}}}(s)$ bzw. die daraus folgende Zustandsmatrix $\underline{\mathbf{F}}(s) = \underline{\ddot{\mathbf{U}}}(s) \underline{\mathbf{A}}$ wird durch numerische Integration des kanonischen Dgl.-Systems aus (3.4.3.1) zwischen s_0 und s berechnet. Am Endrand $s=s_1$ wird das zu den Endrandbedingungen gehörige (inhomogene) Gleichungssystem gelöst. Das Ergebnis ist der (nun bekannte) Unbekanntenvektor $\underline{\mathbf{x}}$. Damit liegt die Lösung des Problems vor:

$$\Rightarrow \underline{y}(s) = \underline{F}(s) \cdot \underline{x} \tag{3.4.3.8}$$

$$\underline{y}'(s) = \underline{B}(s) \cdot \underline{y}$$

$$\underline{z}(s) = \underline{f}(s, \underline{y}(s), \underline{y}'(s))$$

Der Vektor $\underline{z}(s)$ enthält alle interessierenden Größen, z.B. Verformungen, Schnittgrößen, Verzerrungen, Spannungen, Vergleichsspannungen.

3.4.3.2 RK4-Integration einer Dgl.

Die numerische Integration des kanonischen Dgl.-Systems erfolgt mit dem Runge-Kutta-Vierschrittverfahren (RK4). Dies soll entsprechend der speziellen Dgl. in Abbildung 3.4.5 zunächst für eine allgemeine Dgl. der Form $y'(x) = g(x) \cdot y(x)$ demonstriert werden. Zunächst muß das Integrationsintervall von x in Abschnitte dx eingeteilt werden.

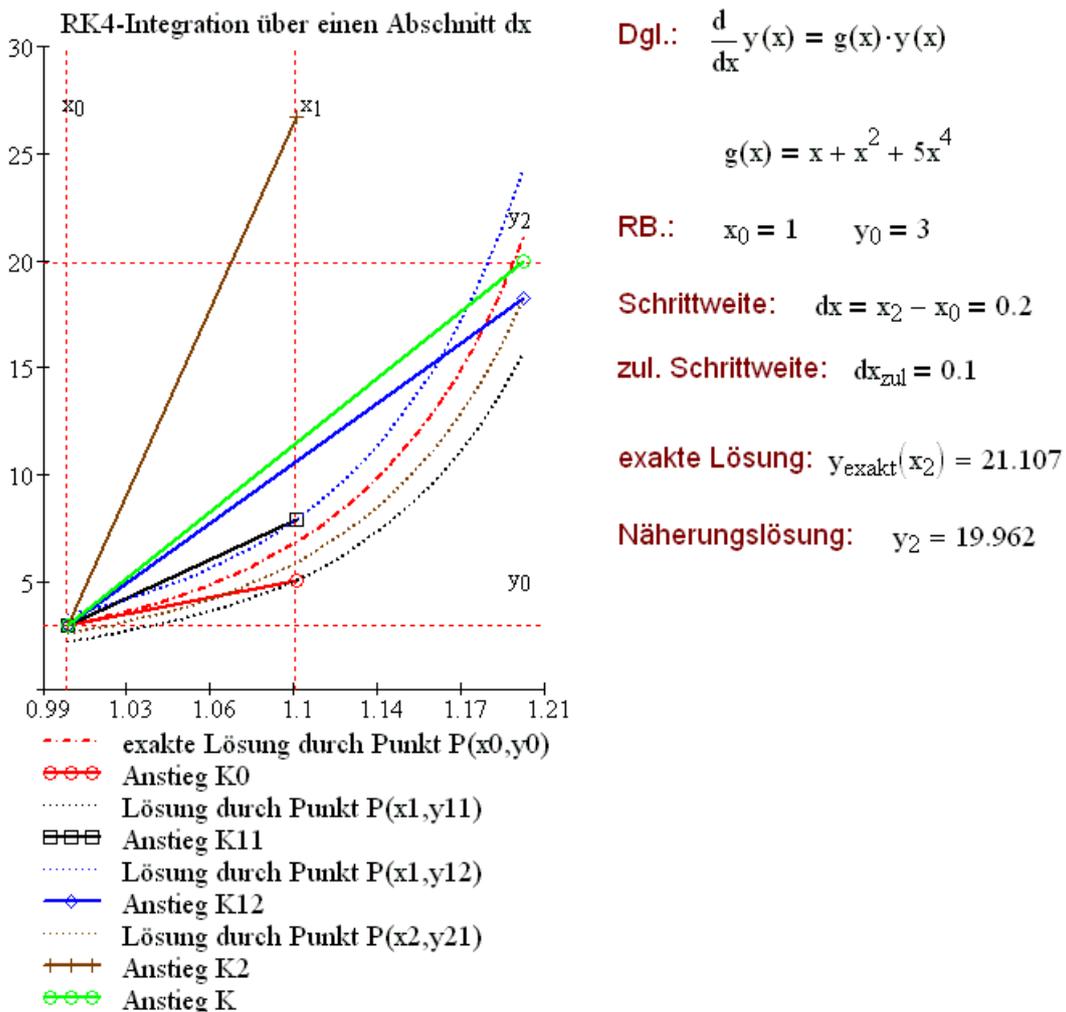


Abbildung 3.4.5: Runge-Kutta-Vierschritt-Integration über einen Abschnitt dx

Dgl: $y'(x) = g(x) \cdot y(x)$, Schrittweite: $dx = x_2 - x_0$

Anstiege: $K_0 = g(x_0) \cdot y_0$ Funktionswerte: $y_{11} = y_0 + K_0 \cdot \frac{dx}{2}$

$$K_{11} = g(x_1) \cdot y_{11} \quad y_{12} = y_0 + K_{11} \cdot \frac{dx}{2} \quad (3.4.3.9)$$

$$K_{12} = g(x_1) \cdot y_{12} \quad y_{21} = y_0 + K_{12} \cdot dx$$

$$K_2 = g(x_2) \cdot y_{21}$$

gemittelter Anstieg: $K = \frac{1}{6} [K_0 + 2(K_{11} + K_{12}) + K_2]$

genäherter Funktionswert bei $x = x_2$: $y_2 = y_0 + K \cdot dx$

$$\int_{x_0}^{x_2} g(x) dx$$

exakte Lösung: $y_2 = y_0 \cdot e^{x_0}$

Integriert wird hier über einen Abschnitt $dx=x_2-x_0$. Der Funktionswert y_0 für $x=x_0$ ist bekannt, entweder aus der RB am Anfang des Integrationsintervalls, wenn der Abschnitt dx , über den integriert wird der 1. Abschnitt des Integrationsintervalls ist, oder aus der Integration über den vorhergehenden Abschnitt dx . Es werden 4 Anstiege K_0, K_{11}, K_{12} und K_2 berechnet. Aus diesen ergibt sich der gemittelte Anstieg K und mit diesem die Berechnung des diskreten (genäherten) Funktionswertes y_2 für $x=x_2$. RK4 ist ein Integrationsverfahren 4. Ordnung, d.h. es ist genau bis einschließlich der Glieder mit $(dx)^4$ in der durch ein Polynom in dx angenäherten exakten Lösung für einen Abschnitt dx . In dem Beispiel aus Abbildung 3.4.5 ist der Fehler zwischen exakter und genäherter Lösung noch relativ groß, damit man den Näherungs-Charakter der Lösung im Diagramm erkennen kann. Eine Halbierung der Schrittweite dx auf $dx_{zul}=0.1$ (s. 3.4.3.4) drückt den Fehler schon in den %-Bereich.

Die Integration mit RK4 nach (3.4.3.9) entspricht der Integration nach der Simpson-Regel für eine Dgl. der Form $y' = f(x)$

$$\text{Dgl: } y' = f(x) \quad (3.4.3.10)$$

$$\int_{y_0}^{y_2} dy = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{1}{6} \left[f(x_0) + 4 \cdot f\left(\frac{x_0 + x_2}{2}\right) + f(x_2) \right]$$

3.4.3.3 RK4-Integration für Matrizen

Integriert werden soll (3.4.3.7): $\underline{F}'(s) = \underline{B}(s) \cdot \underline{F}(s)$.

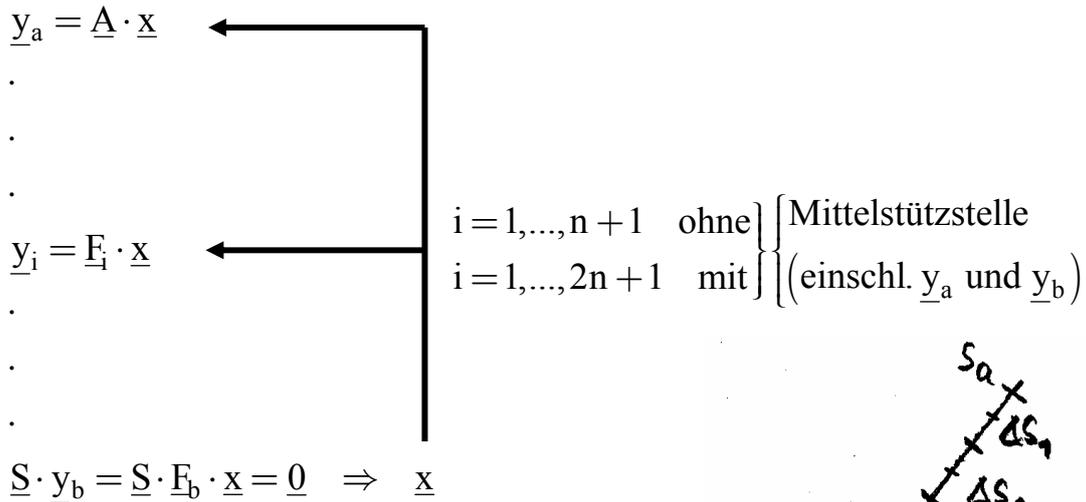
- Die Integration erfolgt über einen diskreten Abschnitt $\Delta s = s_{i+2} - s_i$ von $s = s_i$ nach $s = s_{i+2}$. Die Mittelstützstelle ist bei $s = s_{i+1} = s_i + \Delta s/2$.
- Die Zustandsmatrix $\underline{F}_0 = \underline{F}(s = s_i)$ ist aus der Integration vom Anfangsrand $s = s_a$ bis $s = s_i$ bekannt. Am Anfangsrand $s = s_a$ ist $\underline{F}_0 = \underline{A}$ mit der Matrix \underline{A} der RBn $\underline{y}_0 = \underline{A} \cdot \underline{x}$.
- Berechnung der Anstiegsmatrizen mit $\underline{B}_0 = \underline{B}(s_i)$, $\underline{B}_1 = \underline{B}(s_{i+1})$, $\underline{B}_2 = \underline{B}(s_{i+2})$, $\underline{F}_0 = \underline{F}(s_i)$ analog (3.4.3.9).

$$\begin{aligned} \text{Anstiege: } \underline{K}_0 &= \underline{F}'_0 = \underline{B}_0 \underline{F}_0 & \text{Funktionswerte: } \underline{Y}_{11} &= \underline{F}_0 + \underline{K}_0 \cdot \frac{\Delta s}{2} \\ \underline{K}_{11} &= \underline{B}_1 \cdot \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} &= \underline{F}_0 + \underline{K}_{11} \cdot \frac{\Delta s}{2} \\ \underline{K}_{12} &= \underline{B}_1 \cdot \underline{Y}_{12} & \underline{Y}_{21} &= \underline{F}_0 + \underline{K}_{12} \cdot \Delta s \\ \underline{K}_2 &= \underline{B}_2 \cdot \underline{Y}_{21} \end{aligned} \quad (3.4.3.11)$$

- Matrizen der gemittelten Anstiege und Zustandsmatrizen $\underline{F}_2 = \underline{F}(s_{i+2})$ und $\underline{F}_1 = \underline{F}(s_{i+1})$ an den Integrationsstützstellen $s = s_{i+2}$, s_{i+1}

$$\begin{aligned} \underline{K} &= \frac{1}{6} [\underline{K}_0 + 2(\underline{K}_{11} + \underline{K}_{12}) + \underline{K}_2] \\ \underline{F}_2 &= \underline{F}_0 + \underline{K} \cdot \Delta s \quad \left(\text{genau bis zur Potenz } (\Delta s)^4 \right) \\ \underline{K}_{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{6} \left[\frac{5}{4} \underline{K}_0 + \underline{K}_{11} + \underline{K}_{12} - \frac{1}{4} \underline{K}_2 \right] \\ \underline{F}_1 &= \underline{F}_0 + \underline{K}_{\frac{1}{2}} \cdot \Delta s \quad \left(\text{nur genau bis zur Potenz } (\Delta s)^3, \text{ wird aber zur Integration über den nächsten Abschnitt } \Delta s \text{ nicht gebraucht} \right) \end{aligned} \quad (3.4.3.12)$$

Integration über n-Abschnitte Δs_j , $j=1,2,\dots,n$ von $s=s_a$ bis $s=s_b$



- Berechnung der benötigten Größen:

Verformungen
 Spannungen, Vergleichsspannungen
 Verzerrungen
 $y'_i = B_i \cdot y_i$
 $z_i = f(s_i, y_i, y'_i)$

- Nachteil des Verfahrens: RK4 ist nur für Randwertaufgaben mit linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen anwendbar, also auf lineare Differentialgleichungen für eindimensionale Probleme beschränkt.
- Unterschied zur FEM: Bei der FEM wird das Problem entsprechend dem RITZschen Verfahren auf der Basis des Energiepotentials algebraisiert und bei RK4 werden die exakten Differentialgleichungen (näherungsweise) integriert.
- Vorteile des Verfahrens:
 - Die Kraftgrößen und damit die Spannungen haben die gleiche Genauigkeit wie die Verformungsgrößen. Bei der FEM auf der Basis von Verformungsansätzen ergeben sich die Spannungen über die Verzerrungen aus den Verformungsableitungen und sind demzufolge ungenauer als die Verformungen.
 - Für die Größe der zulässigen Integrationsschrittweite Δs_{zul} existiert ein zuverlässiges Kriterium und der Integrationsfehler kann gut abgeschätzt werden. Bei der FEM läßt sich ein solches Kriterium nicht angeben.

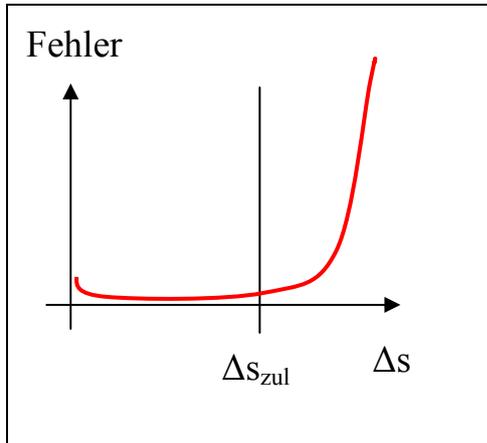
3.4.3.4 Integrationsschrittweite Δs_{zul} , Fehlerabschätzung

Die obere Grenze Δs_{zul} für die Integrationsschrittweite $\Delta s \leq \Delta s_{zul}$ läßt sich aus dem betragsmäßig größten Eigenwert der Koeffizientenmatrix des kanonischen Dgl.-systems bestimmen:

$$\Delta s_{\text{zul}} = \frac{C}{|\lambda|_{\text{max}}}, \quad |\lambda|_{\text{max}} = \max |\lambda_K(\tilde{\mathbf{B}})| \quad (3.4.3.13)$$

$$(\tilde{\mathbf{B}} - \lambda \cdot \mathbf{I}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \det(\tilde{\mathbf{B}} - \lambda \cdot \mathbf{I}) = 0, \quad \mathbf{I} - \text{Einheitsmatrix}$$

C – Konstante (hängt von der Problemstellung und Ziffernzahl der numerischen Berechnung ab). Bei den Schalen sollte ungefähr eingehalten werden $0.7 \leq C \leq 1.3$.



- $C < 0.7$ unnötiger Aufwand, wenn nicht aus Gründen der Auswertung feiner diskretisiert werden muß.
- $C > 1.3$ kann zu völlig unbrauchbaren Ergebnissen führen.
- Analytische Bestimmung der Eigenwerte ist oft sehr aufwendig oder nicht möglich
 \Rightarrow numerische Berechnung von $|\lambda|_{\text{max}}$.

Für Kreis-(Ring-)Scheibe mit (3.4.2.4):

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \frac{\nu}{r} & \frac{1-\nu^2}{Ehr} \\ \frac{Eh}{r} & \frac{\nu}{r} \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{vmatrix} \frac{\nu}{r} - \lambda & \frac{1-\nu^2}{Ehr} \\ \frac{Eh}{r} & \frac{\nu}{r} - \lambda \end{vmatrix} = -\frac{\nu^2}{r^2} + \lambda^2 - \frac{1-\nu^2}{r^2} = \lambda^2 - \frac{1}{r^2} = 0$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \Delta s_{\text{zul}} = C \cdot r$$

Für Kreiszyylinder ergibt sich aus dem oberen kanonischen Dgl.-System (3.4.4.17):

$$\lambda^4 + \frac{12(1-\nu^2)}{R^2 h^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|\lambda|_{\text{max}}} = \frac{\sqrt{Rh}}{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}}$$

Dieser Wert ist auch sehr gut zur Abschätzung der zulässigen Schrittweite für beliebige (doppelt gekrümmte) Rotationsschalen geeignet.

- Fehlerabschätzung: RK4 ist genau bis einschließlich Glied mit $(\Delta s)^4 \Rightarrow$

Zwei Integrationen durchführen (Das entspricht der Netzverfeinerung bei der FEM. Allerdings kann der Fehler bei RK4 im Gegensatz zur FEM quantitativ abgeschätzt werden)

1. Integration über $L=n \cdot \Delta s$ mit Schrittweite Δs über n Abschnitte.

Fehler: $f_{\Delta s} \approx n \cdot K \cdot (\Delta s)^5$ K - unbekannte „Konstante“

2. Integration über $L=\frac{n}{2} \cdot (2 \cdot \Delta s)$ mit Schrittweite $2 \cdot \Delta s$ über $\frac{n}{2}$ Abschnitte.

Fehler: $f_{2\Delta s} \approx \frac{n}{2} \cdot K \cdot (2 \cdot \Delta s)^5 = 16nK(\Delta s)^5$

$$\left. \begin{aligned} y &\approx y_{\Delta s} + nK(\Delta s)^5 & | \cdot 16 \\ &\approx y_{2\Delta s} + 16 \cdot nK(\Delta s)^5 & | \cdot (-1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y \approx \frac{16y_{\Delta s} - y_{2\Delta s}}{15}$$

Bedingung: $2 \Delta s$ darf Δs_{zul} nicht wesentlich überschreiten.

3.4.3.5 Numerische Stabilität

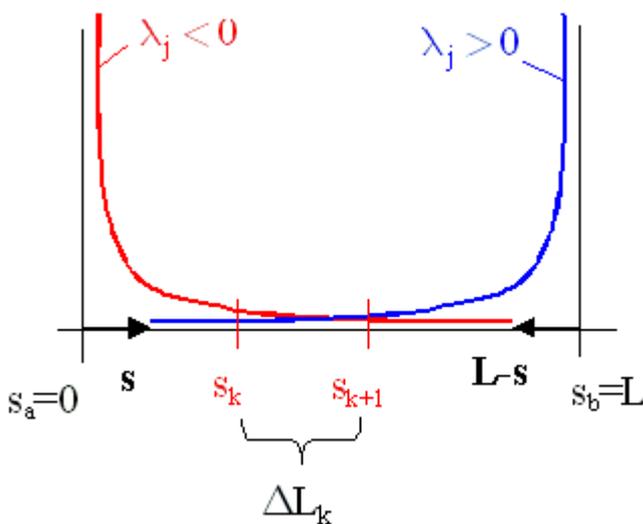
Die numerische Stabilität des Verfahrens wird am Beispiel der Anfangswertaufgabe für eine Dgl. erläutert:

$$y'(s) = g \cdot y(s), \quad RB: y_a = y(s_a), \quad g = \text{konst.}, \quad s_a \leq s \leq s_b, \quad s_a = 0, \quad s_b = L$$

Die Lösung lautet $\ln\left(\frac{y}{y_a}\right) = g \cdot s \Rightarrow y = y_a e^{g \cdot s}$. Der Eigenwert ist $\lambda = g$.

Für $\lambda > 0$ läßt sich die Lösung umformen:

$$y = y_a e^{\lambda \cdot s} \cdot \frac{e^{-\lambda L}}{e^{-\lambda L}} = \tilde{y}_a e^{-\lambda \tilde{s}}, \quad \tilde{y}_a = \frac{y_a}{e^{-\lambda L}}, \quad \tilde{s} = L - s. \text{ Die Lösung klingt je nach}$$



dem Vorzeichen des Eigenwertes λ vom Anfang oder Ende des Intervalls ins Innere ab.

- Allgemein gilt für ein System von k kanonischen Differentialgleichungen

$$y_i = \sum_j A_{ij} e^{\lambda_j s}, \quad i, j = 1, 2, \dots, k$$

- Dieses Abklingverhalten ist günstig für analytische Lösungen. Wenn die Abklingfaktoren $|\lambda_j| \cdot L$ groß genug sind, entkoppeln die Lösungen für positive und negative Eigenwerte und können

Abbildung 3.4.6: Abklingverhalten der Lösung

demzufolge getrennt aus den Randbedingungen am Anfangsrand s_a (für $\lambda_j < 0$) und am Endrand s_b (für $\lambda_j > 0$) erfüllt werden.

Bei der Anfangswertaufgabe (3.4.3.7):

$$\underline{y}_a = \underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{F}(s_a) \cdot \underline{x}, \quad [\underline{F}'(s) = \underline{B}(s) \cdot \underline{F}(s)] \cdot \underline{x}, \quad \underline{S} \cdot \underline{F}(s_b) \cdot \underline{x} = 0$$

ist es wegen dieses Abklingverhaltens ab einer bestimmten Übertragungslänge $\Delta L_k = s_{k+1} - s_k$ nicht mehr möglich, den Zustandsvektor $\underline{y}(s_{k+1}) = \underline{F}(s_{k+1}) \cdot \underline{x}$, $\underline{y}(s_k) = \underline{F}(s_k) \cdot \underline{x}$

durch die am Anfangsrand eingeführten Komponenten des Unbekanntenvektors \underline{x} auszudrücken. Die Zeilen der Matrix $\underline{F}(s_{k+1})$ werden wegen der begrenzten Ziffernzahl der numerischen Berechnung linear abhängig. Durch lineare Transformationen des Unbekanntenvektors \underline{x} nach jeweils der Übertragungslänge $\Delta L_k \approx 5 \cdot \Delta s_{zul}$ lassen sich diese numerischen Instabilitäten beseitigen. Die Lösung ist dann über beliebig lange Integrationsintervalle stabil.

Physikalisch entsprechen diese Transformationen elastischen Einspannungen von jeweils zwei Teilschalen an der Transformationsstelle ineinander.

Die Transformation des Unbekanntenvektors \underline{x}_k an der Stelle s_{k+1} (zur einfacheren Schreibweise ohne Lastspalte, also ohne Komponente „1“, im Unbekanntenvektor \underline{x} und Zustandsvektor \underline{y}) wird wie folgt durchgeführt:

$$\tilde{\underline{y}}(s_k) = \tilde{\underline{F}} \cdot \tilde{\underline{x}}_k = \begin{pmatrix} \underline{F}_v \\ \underline{F}_z \end{pmatrix} \cdot \tilde{\underline{x}}_k = \begin{pmatrix} \underline{F}_v \\ \underline{F}_z \end{pmatrix}_{neu} \cdot \tilde{\underline{x}}_{k+1}, \quad \tilde{\underline{y}} = \begin{pmatrix} \underline{v} \\ \underline{z} \end{pmatrix}$$

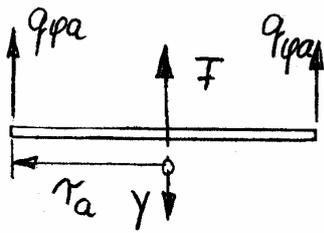
Wenn als Komponenten des neuen Unbekanntenvektors \underline{x}_{k+1} die Verformungen \underline{v} an der Stelle s_k gewählt werden gilt:

$$\tilde{\underline{x}}_{k+1} = \underline{v} = \underline{F}_v \cdot \tilde{\underline{x}}_k \Rightarrow \tilde{\underline{x}}_k = \underline{F}_v^{-1} \cdot \tilde{\underline{x}}_{k+1} \Rightarrow \underline{F}_{neu} = \begin{pmatrix} \underline{F}_v \cdot \underline{F}_v^{-1} \\ \underline{F}_z \cdot \underline{F}_v^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{I} \\ \underline{F}_z \cdot \underline{F}_v^{-1} \end{pmatrix}$$

Falls die Matrix \underline{F}_v singularär ist, weil z.B. durch Lagerungsbedingungen an der Stelle s_k Verformungen Null sind, können auch (beliebige, nicht verschwindende) andere Komponenten des Zustandsvektors $\tilde{\underline{y}}(s_k)$ als neuer Unbekanntenvektor $\tilde{\underline{x}}_{k+1}$ eingeführt werden.

3.4.3.6 Radius $r=0$

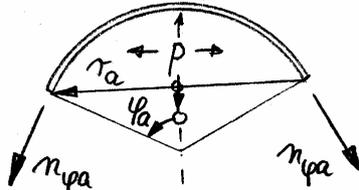
Bei Rotationsschalen sind die entsprechend (3.4.2.3) nach dem Formalismus von Hamilton-Jacobi eingeführten Komponenten des Kraftgrößenvektors \underline{z} die mit dem Radius r multiplizierten Schnittgrößen. Deshalb hat der Kraftgrößenvektor \underline{z} (bei i.a. endlichen Schnittgrößen) für im Scheitel $r=0$ geschlossenen Schalen bei $r=0$ verfahrensbedingt eine Singularität. Bei der Modellbildung muß dort ein „Loch“ gelassen werden (minimaler Lochradius \approx Wanddicke). Die Lösung am Lochrand weicht natürlich dann von der richtigen Lösung ab und muß extrapoliert werden. Man kann auch alternativ (bei einem kleinen Loch) am Lochrand die Randbedingungen für die Verformungen auf der Rotationsachse $r=0$ vorgeben



(z.B. $v_r(r=0)=0, \chi(r=0)=0$) oder die Schnittgrößen am herausgeschnittenen Teil aus den GGBn. bestimmen und damit den Fehler der Lösung am Lochrand verringern.

Beispiel Platte:

$$2\Pi r_a q_{\varphi a} + F = 0 \Rightarrow Z_{ya} = -r_a q_{\varphi a} = \frac{F}{2\Pi}$$



Beispiel Kugel:

$$2\Pi r_a n_{\varphi a} \sin \varphi_a - p\Pi r_a^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} Z_{\varphi a} = r_a n_{\varphi a} = \frac{p r_a^2}{2 \sin \varphi_a} \\ Z_{ya} = Z_{\varphi a} \sin \varphi_a \\ Z_{ra} = Z_{\varphi a} \cos \varphi_a \end{cases}$$

3.4.4 Beliebige Rotationsschale mit kleinen Verformungen

- Ableitungen nach dem Winkel ϑ sind Null: $() \cdot = 0$
 - Außerdem ohne Torsionsproblem: $v_{\vartheta} = 0$
- $$\left. \begin{array}{l} \bullet \\ \bullet \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_{\varphi\vartheta} = 0 \\ \omega_{\varphi\vartheta} = 0 \end{cases}$$

(wird als Spezialfall der allgemeinen Belastung behandelt)

- Abkürzungen $s = \sin \varphi, c = \cos \varphi, \tilde{s}$ – Meridianbogenkoordinate, $()' = ()_{,\tilde{s}}$

Entsprechend (3.4.1.4), Integration über den Breitenkreiswinkel ϑ und die Wanddicke h ($\int dz = h, \int z dz = 0, \int z^2 dz = \frac{h^3}{12}$) \Rightarrow Entkopplung von Gliedern der Mittelflächenverzerrungen und der Krümmungsänderungen) durchgeführt ergibt:

$$Q = \left[\frac{1}{2} D (\varepsilon_{\varphi}^2 + 2\nu \varepsilon_{\varphi} \varepsilon_{\vartheta} + \varepsilon_{\vartheta}^2) + \frac{1}{2} G h \gamma_{\varphi\vartheta}^2 + \frac{1}{2} K (\kappa_{\varphi}^2 + 2\nu \kappa_{\varphi} \kappa_{\vartheta} + \kappa_{\vartheta}^2) + \frac{1}{2} G \frac{h^3}{12} \omega_{\varphi\vartheta}^2 \right] \cdot r + \left[\lambda (\chi - v_r' s + v_y' c) - (p_r v_r + p_y v_y) \right] r \tag{3.4.4.1}$$

$$D = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad s = \sin \varphi, \quad c = \cos \varphi$$

Der 5. Summand ist eine der Nebenbedingungen von (3.3.2.5): $\chi - v'_r s + v'_y c = 0$ aus der Normalenhypothese mit $\lambda(\tilde{s})$ als Lagrangescher (noch unbekannter) Multiplikator-Funktion. Nach Einsetzen der Verzerrungs-Verformungsbeziehungen (3.3.2.5), sortieren, und mit Randgliedern der äußeren Arbeit (entsprechend (3.4.1.4) wird das Funktional P in Vektor-Matrix-Schreibweise:

$$\begin{aligned}
 P &= \int Q(\underline{v}, \underline{v}', \lambda) d\tilde{s} - \left[\underline{r} \underline{n}^T \underline{v} \right]_R = \text{Min.} \\
 \text{mit } \underline{v}^T &= (v_r, v_y, \chi), \quad \underline{n}^T = (n_r, n_y, m_\varphi) \\
 \text{und } Q &= \frac{1}{2} \left(\underline{v}^T \underline{A}_{00} \underline{v} + \underline{v}^T \underline{A}_{01} \underline{v}' + \underline{v}'^T \underline{A}_{10} \underline{v} + \underline{v}'^T \underline{A}_{11} \underline{v}' \right) + \\
 &\quad + \lambda \left(\underline{g}_0^T \underline{v} + \underline{g}_1^T \underline{v}' \right) - \underline{p} \underline{v} \underline{r} \\
 \underline{p}^T &= (p_r, p_y, 0), \quad p_r = p_\varphi c + p_z s, \quad p_y = p_\varphi s - p_z c \\
 \text{und } \underline{A}_{10} &= \underline{A}_{01}^T
 \end{aligned} \tag{3.4.4.2}$$

Mit den 3 Dgln. entsprechend (3.4.1.6):

$$\frac{\partial Q}{\partial \underline{v}} - \left(\frac{\partial Q}{\partial \underline{v}'} \right)' = \underline{0},$$

den Hilfsgrößen (generalisierten Kräften) entsprechend (3.4.2.3):

$$\underline{Z} = \frac{\partial Q}{\partial \underline{v}'} \quad \text{und} \quad \underline{Z}' = \frac{\partial Q}{\partial \underline{v}}$$

(Diese erfüllen die Dgln., aber keine 2.Ableitungen mehr in den Dgln.)

$$\underline{Z}^T = (Z_r, Z_y, Z_\chi) = (r \cdot n_r, r \cdot n_y, r \cdot m_\varphi) \tag{3.4.4.3}$$

und wegen der Nebenbedingung $\frac{\partial Q}{\partial \lambda} = 0$ ergeben sich die 7 Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 \underline{Z} &= \underline{A}_{01}^T \underline{v} + \underline{A}_{11} \underline{v}' + \lambda \underline{g}_1 \\
 0 &= \underline{g}_0^T \underline{v} + \underline{g}_1^T \underline{v}' + \lambda \cdot 0 \quad \underline{C} = \begin{pmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{g}_1 \\ \underline{g}_1^T & 0 \end{pmatrix} \\
 \underline{Z}' &= \underline{A}_{00} \underline{v} + \underline{A}_{01} \underline{v}' + \lambda \underline{g}_0 - \underline{p} \underline{r}
 \end{aligned} \tag{3.4.4.4}$$

Die Matrix \underline{A}_{11} ist singular, da die Komponenten des Verformungsvektors wegen der Nebenbedingung nicht linear unabhängig sind. Deshalb muß bei der Auflösung von (3.4.4.4) die reguläre Matrix \underline{C} invertiert werden

Die Matrizen und Vektoren von (3.4.4.4) haben folgenden Aufbau:

$$\underline{A}_{01} = \nu \begin{pmatrix} Dc & Ds & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Kc \end{pmatrix} = \underline{A}_{10}^T, \quad \underline{A}_{00} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Kc^2 \end{pmatrix} = \underline{A}_{00}^T,$$

$$\underline{A}_{11} = r \begin{pmatrix} Dc^2 & Dcs & 0 \\ Dcs & Ds^2 & 0 \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix} = \underline{A}_{11}^T, \quad \underline{g}_0^T = r(0 \quad 0 \quad 1) \\ \underline{g}_1^T = r(-s \quad c \quad 0)$$

mit $\text{Det}(\underline{A}_{11}) = 0$ aber $\text{Det}(\underline{C}) = -rDK \neq 0$

Die Auflösung der 1. vier Gleichungen von (3.4.4.4) ergibt:

$$\underline{C}^{-1} \begin{pmatrix} \underline{Z} \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{C}^{-1} \begin{pmatrix} \underline{A}_{01}^T \\ \underline{g}_0^T \end{pmatrix} \underline{v} + \begin{pmatrix} \underline{v}' \\ \lambda \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} v'_r \\ v'_y \\ \chi' \\ \lambda \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \frac{c^2}{D} & \frac{cs}{D} & 0 & -s \\ \frac{cs}{D} & \frac{s^2}{D} & 0 & c \\ 0 & 0 & \frac{1}{K} & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_r \\ Z_y \\ Z_\chi \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \nu Dc & 0 & 0 \\ \nu Ds & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu Kc \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_r \\ v_y \\ \chi \end{pmatrix}$$

Das sind 4 Gleichungen. Einsetzen der ersten drei dieser Gleichungen in die letzten drei Gleichungen (3.4.4.4) und Eliminieren von

$$\lambda = \frac{1}{r} (-s \cdot Z_r + c \cdot Z_y) = -s \cdot n_r + c \cdot n_y = -q_\varphi \quad (3.4.4.5)$$

(negative Quer-(Schnitt-)kraft) ergibt das kanonische Differentialgleichungssystem entsprechend (3.4.2.1):

$$\underline{y}' = \underline{B} \cdot \underline{y}, \quad \underline{y}^T = (\underline{v} \quad \underline{Z} \quad 1), \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} \tilde{\underline{B}} & \underline{b} \\ \underline{0}^T & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\underline{B}} = \begin{pmatrix} \underline{B}_{00} & \underline{B}_{01} \\ \underline{B}_{10} & \underline{B}_{11} \end{pmatrix} \quad (3.4.4.6)$$

$$\begin{aligned}
 \underline{B}_{00} = -\underline{B}_{11}^T &= \begin{pmatrix} -\frac{c\nu}{r} & 0 & s \\ -\frac{s\nu}{r} & 0 & -c \\ 0 & 0 & -\frac{c\nu}{r} \end{pmatrix}, & \underline{B}_{01} = \underline{B}_{01}^T &= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \frac{c^2}{D} & \frac{sc}{D} & 0 \\ \frac{sc}{D} & \frac{s^2}{D} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{K} \end{pmatrix} \\
 \underline{B}_{10} = \underline{B}_{10}^T &= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} Eh & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Eh^3}{12c^2} \end{pmatrix}, & \underline{b}^T &= (0 \quad 0 \quad 0 \quad -r \cdot p_r \quad -r \cdot p_y \quad 0) \\
 \begin{pmatrix} v_r \\ v_y \\ \chi \\ Z_r \\ Z_y \\ Z_\chi \end{pmatrix}' &= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\nu c & 0 & sr & \frac{c^2}{D} & \frac{sc}{D} & 0 \\ -\nu s & 0 & -cr & \frac{sc}{D} & \frac{s^2}{D} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu c & 0 & 0 & \frac{1}{K} \\ Eh & 0 & 0 & \nu c & \nu s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Eh^3}{12} c^2 & -sr & cr & \nu c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_r \\ v_y \\ \chi \\ Z_r \\ Z_y \\ Z_\chi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -rp_r \\ -rp_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.4.7)
 \end{aligned}$$

Die Randbedingungen entsprechend (3.4.2.5) sind:

$$(\underline{Z} - \underline{n} \cdot \underline{r})^T \delta \underline{v} \Big|_{s_a}^{s_b} = \underline{0} \quad (\text{Das sind 6 Randbedingungen.}) \quad (3.4.4.8)$$

\Rightarrow Definition der Hilfsgrößen $\underline{Z} = \underline{n} \cdot \underline{r}$

in (3.4.4.8) sind entweder Komponenten der Randschnittkraftgrößen \underline{n}_R oder der Randverformungen \underline{v}_R vorgegeben ($R = s_a, s_b$).

z.B.: $n_{rR} = 100 \text{ N/mm} \Rightarrow Z_{rR} = (r \cdot n_r)_R$ und v_{rR} ist unbekannt oder

$v_{rR} = 1 \text{ mm} \Rightarrow \delta v_r = 0$ und Z_{rR} ist unbekannt

- Es sind auch RBn. aus Lagersteifigkeiten möglich. Dann sind die Schnittgrößen am Rand: $\underline{n}_R = \underline{C}_R \cdot \underline{v}_R$, mit der Matrix \underline{C}_R der Federsteifigkeiten

Spannungsberechnung aus den Schnittgrößen (3.4.4.5):

$$\underline{n} = \frac{1}{r} \underline{Z} = \begin{pmatrix} n_r \\ n_y \\ m_\varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} n_\varphi &= n_r \cos \varphi + n_y \sin \varphi \\ q_\varphi &= n_r \sin \varphi - n_y \cos \varphi \end{aligned}$$

- Einsetzen der Verzerrungs-Verformungsbeziehungen (3.3.2.5) in die Definition der nach den Verzerrungen $(\varepsilon_\vartheta, \kappa_\vartheta)$ aufgelösten Gleichungen für die Schnittgrößen (3.3.6.3)

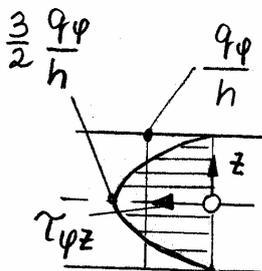
$$\text{zur Elimination von } \varepsilon_\vartheta \text{ und } \kappa_\vartheta \Rightarrow \begin{cases} n_\vartheta = Eh \frac{v_r}{r} + \nu n_\varphi \\ m_\vartheta = \frac{Eh^3}{12} \frac{\chi}{r} \cos \varphi + \nu m_\varphi \end{cases}$$

- Damit Berechnung der Spannungen und der Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsenergiehypothese

$$\sigma_\varphi = \frac{n_\varphi}{h} - \frac{12m_\varphi}{h^3} z, \quad \sigma_\vartheta = \frac{n_\vartheta}{h} - \frac{12m_\vartheta}{h^3} z$$

$$\tau_{\varphi z} = \frac{3}{2} \frac{q_\varphi}{h} \left[1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^2 \right] \quad (3.4.4.9)$$

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_\varphi^2 - \sigma_\varphi \sigma_\vartheta + \sigma_\vartheta^2 + 3\tau_{\varphi z}^2}, \quad \sigma_{v \max} = \text{Max} \left(\left| \sigma_v \right|_{z=\pm \frac{h}{2}} \right)$$



3.4.4.1 Spezialfälle: Kreisscheibe und Kreisplatte

Für den Winkel $\varphi=0$ und damit $s=\sin\varphi=0$ und $c=\cos\varphi=1$ entkoppelt das kanonische Dgl.-System (3.4.4.7) in ein System für den Scheibenzustand

$$\tilde{\underline{y}} = \begin{pmatrix} v_r \\ Z_r \end{pmatrix}, \quad \tilde{\underline{B}} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\nu & \frac{1}{D} \\ Eh & \nu \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -rp_r \end{pmatrix} \quad (3.4.4.10)$$

und eins für den Plattenzustand

$$\tilde{\underline{y}} = \begin{pmatrix} v_y \\ \chi \\ Z_y \\ Z_\chi \end{pmatrix}, \quad \tilde{\underline{B}} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 & -r & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 & \frac{1}{K} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Eh^3}{12} & r & \nu \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -rp_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.4.11)$$

Mit (3.4.4.10) wird das kanonische Dgl.-System für die Kreisscheibe:

$$\begin{aligned} v_r' &= -\frac{\nu}{r} v_r + \frac{1}{Dr} Z_r \quad \Rightarrow \quad Z_r = Dr \left(v_r' + \frac{\nu}{r} v_r \right) \\ &\quad \downarrow \\ Z_r' &= \frac{Eh}{r} v_r + \frac{\nu}{r} Z_r - rp_r \quad \Rightarrow \quad Z_r' = \frac{Eh}{r} v_r + \frac{\nu}{r} \left[Dr \left(v_r' + \frac{\nu}{r} v_r \right) \right] - rp_r \end{aligned} \quad (3.4.4.12)$$

Um eine übergeordnete Dgl. für die Radialverschiebung v_r zu erhalten, muß Z_r aus (3.4.4.12) eliminiert werden:

Die 1. Gleichung abgeleitet (mit $D=\text{konst}$ und $\nu=\text{konst}$):

$$\begin{aligned} v_r'' &= -\left(\frac{\nu}{r} v_r \right)' + \left(\frac{1}{Dr} Z_r \right)' \\ &= -\nu \left(\frac{v_r'}{r} - \frac{v_r}{r^2} \right) + \frac{1}{D} \left(\frac{Z_r'}{r} - \frac{Z_r}{r^2} \right) \end{aligned}$$

Z_r und Z_r' aus (3.4.4.12) eingesetzt und nach Ableitungen von v_r geordnet ergibt:

$$v_r'' + \frac{v_r'}{r} - \frac{v_r}{r^2} = -\frac{p_r}{D}, \quad v_r = A_1 r + \frac{A_2}{r} + v_{rp}, \quad v_{rp} \text{ -- partikulär Lösung}$$

Das ist die Gleichung (3.4.1.12) aus 3.4.

Durch ein analoges Vorgehen kann man aus (3.4.4.11) eine übergeordnete lineare, gewöhnliche Dgl. 4.Ordnung für $w=v_y$ herleiten:

$$K \cdot \Delta \Delta w = K \cdot \left(w'''' + \frac{2}{r} w'''' - \frac{1}{r^2} w'' + \frac{1}{r^3} w' \right) = p_y \quad (3.4.4.13)$$

$$\text{mit } \Delta w = \frac{1}{r} (r \cdot w')' = w'' + \frac{w'}{r}$$

Diese ist mit (3.2.7.2) in kartesischen Koordinaten schon von der Rechteckplatte aus 3.2 bekannt. Die Schnittgrößen sind entsprechend (3.2.7.1) und (3.2.7.3)

$$m_\varphi = \frac{Z_\chi}{r} = -K \left(w'' + \nu \frac{w'}{r} \right) \quad \text{mit } w' = -\chi$$

$$m_\vartheta = -K \left(\frac{w'}{r} + \nu w'' \right) \quad \text{auf Schnitt } \vartheta = \text{konst.} \quad (3.4.4.14)$$

$$q = \frac{Z_y}{r} = -K \left(w'''' + \frac{w''}{r} - \frac{w'}{r^2} \right) = -K (\Delta w)'$$

Die allgemeine Lösung der Platten-Dgl. ist:

$$w(\beta) = B_1 + B_2 \ln(\beta) + B_3 \beta^2 + B_4 \beta^2 \ln(\beta) + w_p$$

$$\beta = \frac{r}{r_a}, \quad w' = \frac{dw}{dr} = \frac{1}{r_a} \frac{dw}{d\beta}, \quad w_p = \frac{p r_a^4}{64K} \beta^4 \quad \text{für } p = \text{konst.} \quad (3.4.4.15)$$

3.4.4.2 Spezialfall: Kreiszylinderschale

Für den Winkel $\varphi=90^\circ$ und damit $s=\sin\varphi=1$ und $c=\cos\varphi=0$, den Radius $r=R$ wird aus (3.4.4.7)

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_y \\ \chi \\ Z_r \\ Z_y \\ Z_\chi \end{pmatrix}' = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{D} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K} \\ Eh & 0 & 0 & 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_r \\ v_y \\ \chi \\ Z_r \\ Z_y \\ Z_\chi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -R p_r \\ -R p_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.4.16)$$

Dieses System kann in zwei (schwach gekoppelte) Systeme eingeteilt werden

$$\begin{pmatrix} v_r \\ \chi \\ Z_r \\ Z_\chi \end{pmatrix}' = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K} \\ Eh & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_r \\ \chi \\ Z_r \\ Z_\chi \end{pmatrix} + \frac{1}{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R^2 p_r + \nu Z_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.4.17)$$

$$\begin{pmatrix} v_y \\ Z_y \end{pmatrix}' = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{D} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_y \\ Z_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\nu \cdot \frac{v_r}{R} \\ -R p_y \end{pmatrix}$$

Aus dem ersten kann man die übergeordnete Dgl. für die Radialverschiebung v_r der Kreiszylinderschale ableiten:

$$v_r'''' + 4\alpha^4 v_r = \frac{p_r^*}{K}, \quad 4\alpha^4 = \frac{Eh}{R^2 K} = \frac{12(1-\nu^2)}{R^2 h^2}, \quad p_r^* = p_r - \nu \frac{Z_y}{R^2} \quad (3.4.4.18)$$

Das Koppelglied mit Z_y beeinflusst lediglich die Partikulärlösung. Die Lösung für eine Zylinderschale der Länge L ist:

$$\begin{aligned} v_r = & e^{-\alpha y} [C_1 \cos(\alpha y) + C_2 \sin(\alpha y)] & v_r' = \chi \\ & + e^{-\alpha y^*} [C_3 \cos(\alpha y^*) + C_4 \sin(\alpha y^*)] + v_{rp} & , \quad y^* = L - y \end{aligned} \quad (3.4.4.19)$$

Die Lösungen klingen jeweils von einem Rand $y=0$ oder $y=L$ örtlich exponentiell ab, analog dem zeitlichen Abklingen gedämpfter Schwingungen.

Für lange Zylinderschalen ($e^{-\alpha L} \ll 1$) entkoppeln die Lösungsanteile mit y und y^* , d.h., es können jeweils zwei der insgesamt 4 Konstanten aus einem entkoppelten Gleichungssystem für C_1 und C_2 bzw. C_3 und C_4 bestimmt werden.

Die Dgl. (3.4.4.18) ist identisch mit der für den elastisch gebetteten Balken. Dort sind $4\alpha^4 = c/EI$ und das Störglied q/EI mit der Bettungssteifigkeit c , der Streckenlast q und der Biegesteifigkeit EI .

Die 2.Gleichung des 2.Dgl.-Systems von (3.4.4.17) ist eine GGB zur Bestimmung von Z_y . Die zugehörige Integrationskonstante kann bei statisch bestimmter Lagerung aus der entsprechenden RB bestimmt werden. Mit der 1. Gleichung wird

Daraus ergeben sich die Konstanten:

$$B_1 = \frac{pR^4}{2\alpha R + 1} \left[\frac{2\alpha R + 5}{64K} - \frac{\alpha^2}{Eh} \right], \quad B_3 = \frac{pR^4}{2\alpha R + 1} \left[-\frac{2\alpha R + 3}{32K} + \frac{\alpha^2}{Eh} \right] \quad (3.4.4.21)$$

$$C_1 = -\frac{pR^2}{Eh}, \quad C_2 = -\frac{pR^2}{2\alpha R + 1} \left(\frac{R}{8\alpha K} + \frac{1}{Eh} \right)$$

Die Funktionsverläufe $w(\beta)$ der Platte (biegt sich in Richtung der Flächenlast durch, also nach unten, $w(\beta) = -v_y(r) > 0$):

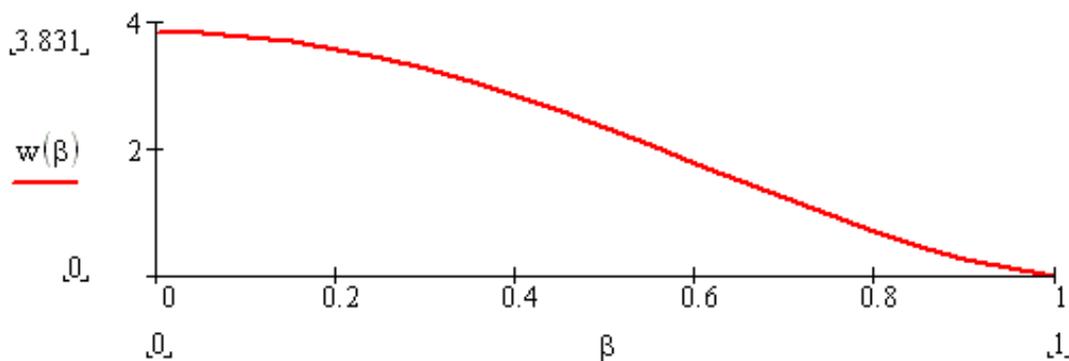


Abbildung 3.4.8: Plattendurchbiegung w

und $v_r(y)$ des Zylinders (Am Rand $y=0$ ist die Verdrehung gleich der in der Platte an deren Außenrand. Deshalb ist in der Nähe des Randes $y=0$ $v_r < 0$):

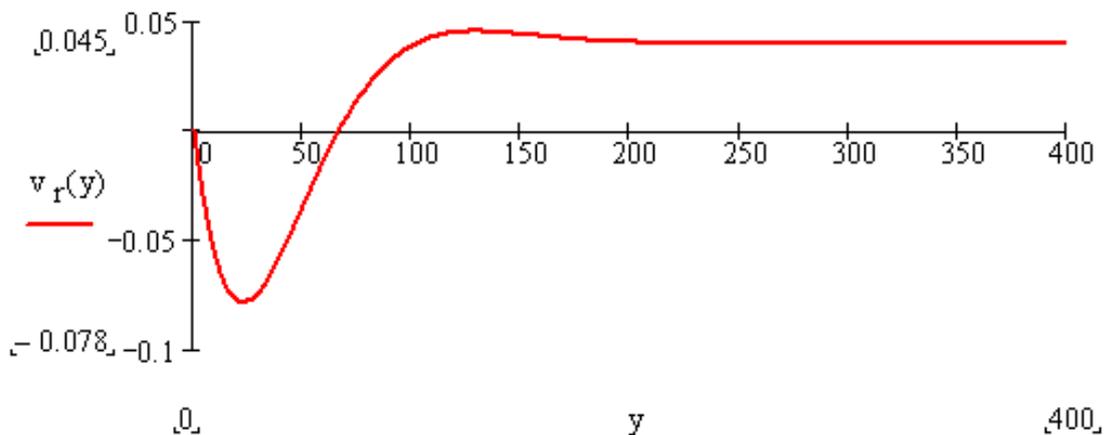


Abbildung 3.4.9: Zylinderaufweitung v_r

Zum Vergleich die numerische Lösung des Programmes RoScha. Diese wurde mit dem Dgl.-System (3.4.4.7) für 2 Bereiche berechnet, also nicht für die Spezialfälle Platte oder Zylinder.

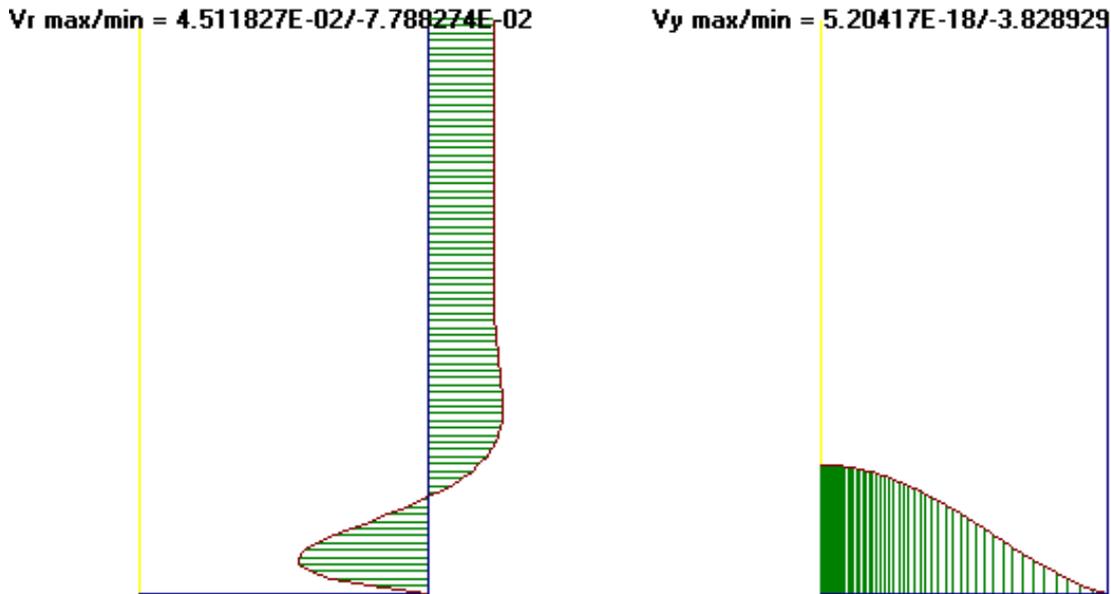


Abbildung 3.4.10: RoScha-Vergleichslösung

Der Einfluß der Randstörung im Zylinder durch die elastische Einspannung in die Platte ist in der Entfernung $y=R$ vom Rand praktisch abgeklungen.

Bei Berechnung mit der Querdehnungszahl $\nu=0.3$ wird im Zylinder $v_{r_max/min}=0.0448/-0.0712$ und in der Platte $v_{y_min}=-3.48$.

3.4.5 Beliebige Rotationsschale mit endlichen Verformungen

- Ableitungen nach dem Winkel ϑ sind Null: $(\quad)_{,\vartheta} = 0$
- Außerdem ohne Torsionsproblem: $v_{\vartheta} = 0$
(Torsion wird als Spezialfall der allgemeinen Belastung behandelt)
- Abkürzungen: $s = \sin \varphi$, $c = \cos \varphi$, \tilde{s} – Meridianbogenkoordinate
- $(\quad)' = \frac{\partial(\quad)}{\partial \tilde{s}}$, $(\quad)^{\cdot} = \frac{\partial(\quad)}{\partial t}$, t- Zeit bei zeitabhängigem Stoffgesetz, sonst Lastparameter, der die Geschichte der Lastaufbringung beschreibt.
- Linearelastisches, isotropes Materialverhalten (trotzdem wird der Parameter t als Zeit bezeichnet und Ableitungen nach diesem Parameter als Geschwindigkeit)
- λ, μ, \dots - körperfeste Schalenkoordinaten φ (oder \tilde{s}), z ($, \vartheta$)
- k, l, \dots - raumfeste (Zylinder-)Koordinaten r, y ($, \vartheta$)
- K, L, \dots - kartesische Koordinaten x, y ($, z$)

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma_{\varphi\vartheta} = 0 \\ \omega_{\varphi\vartheta} = 0 \end{cases}$$

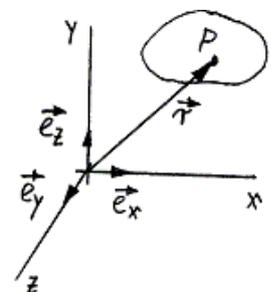


Abbildung 3.4.11: kartesisches Koordinatensystem

- Einführung einer konvektiven (zeitlich mitgeführten) Metrik

Der Ortsvektor \vec{r} zu einem beliebigen Punkt P auf der Schalenbezugsfläche ergibt sich aus der Produktsumme (über einen oben und unten je einmal auftretenden Index wird summiert) aus Koordinaten und Basisvektoren. Dessen Differential dient zur Definition der Basisvektoren in den verschiedenen Koordinatensystemen. Das Besondere an den konvektiven Koordinaten ist: Die Koordinaten von P behalten per Definition während der Verformung ihren Wert. Es ändern sich die Basisvektoren. Anschaulich bedeutet das, auf die unverformte Struktur wird ein Gitternetz von Koordinatenlinien aufgebracht, jeder Gitterpunkt erhält eine Nummer (die konvektive Koordinate). Das Gitternetz der Koordinatenlinien wird bei Lastaufbringung verzerrt, der Punkt behält seine Nummer.

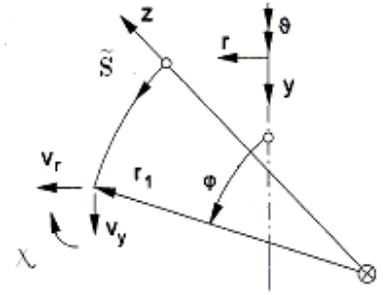
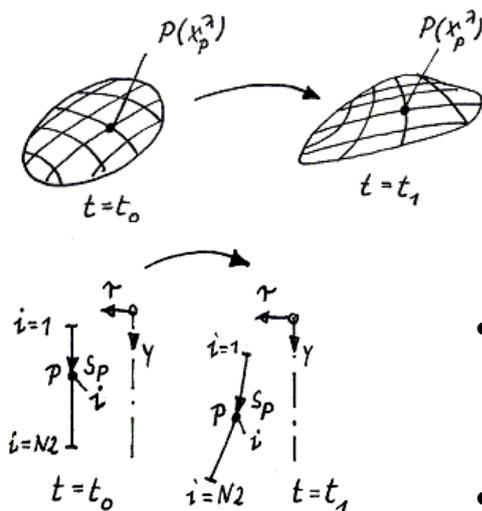


Abbildung 3.4.12: raumfeste Verformungen

$$\left. \begin{aligned}
 \vec{r} &= x^K \vec{e}_K \\
 d\vec{r} &= dx^K \vec{e}_K = dx^k \vec{g}_k = dx^\lambda \vec{g}_\lambda \\
 &= \vec{r}_{,K} dx^K = \vec{r}_{,k} dx^k = \vec{r}_{,\lambda} dx^\lambda \\
 \Rightarrow \vec{r}_{,K} &= \vec{e}_K, \quad \vec{r}_{,k} = \vec{g}_k, \quad \vec{r}_{,\lambda} = \vec{g}_\lambda
 \end{aligned} \right\} \text{Definition der Basisvektoren} \tag{3.4.5.1}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{d}\vec{r} &= d\dot{x}^K \vec{e}_K = d\dot{x}^k \vec{g}_k = dx^\lambda \dot{\vec{g}}_\lambda + d\dot{x}^\lambda \vec{g}_\lambda \quad \text{Definition } d\dot{x}^\lambda = 0 \\
 \dot{\vec{e}}_K &= \dot{\vec{g}}_k = 0
 \end{aligned}$$



Der Punkt P behält seine Koordinaten X_p^λ beim Übergang von t_0 zu t_1 bei. Die Koordinaten X_p^λ sind reiner Zählindex analog den Knotennummern bei der FEM.

- Die Skalierung des Netzes ändert sich (Die Basisvektoren \vec{g}_λ sind veränderlich, da ihr Zuwachs $\dot{\vec{g}}_\lambda \neq 0$ ist.)
- Bei der Rotationsschale ist die konvektive Koordinate des Punktes P die Schnittstellennummer i auf dem Meridian oder auch die Bogenlänge s_p (ist nur im Ausgangszustand die „wirkliche Bogenlänge“)

Abbildung 3.4.13: konvektive Koordinate der Rotationsschale

3.4.5.1 Variationsprinzip in Zuwachsformulierung, ohne Arbeit der Randspannungen

Verschiebungsgeschwindigkeiten:

$$\vec{w} = \dot{\vec{v}} = w_{\lambda} \vec{g}^{\lambda} = w_k \vec{g}^k = \dot{v}_k \vec{g}^k = \left(v_{\lambda} \vec{g}^{\lambda} \right)^{\cdot} \quad (3.4.5.2)$$

⇒ nur in raumfester, zeitlich unveränderlicher Basis gilt:

$$w_k = \dot{v}_k \quad \Rightarrow \quad v_k = \int w_k dt \quad (3.4.5.3)$$

Verzerrungsgeschwindigkeiten für konvektive Koordinaten:

$$\begin{aligned} d_{\lambda\mu} &= \dot{\varepsilon}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} (w_{\lambda|\mu} + w_{\mu|\lambda}) = \vec{g}_{\lambda} \cdot \dot{\vec{g}}_{\mu} \quad \text{mathematische Koordinaten} \\ d_{\lambda\mu}^* &= \mathbf{g}^{(\lambda\mu)} d_{(\lambda\mu)} \quad \text{physikalische Koordinaten} \\ d_{\lambda\mu}^* &\neq \dot{\varepsilon}_{\lambda\mu}^* = \left(\mathbf{g}^{(\lambda\mu)} \varepsilon_{(\lambda\mu)} \right)^{\cdot} = \dot{\mathbf{g}}^{(\lambda\mu)} \varepsilon_{(\lambda\mu)} + \mathbf{g}^{(\lambda\mu)} \dot{\varepsilon}_{(\lambda\mu)} \\ &\quad \dot{\varepsilon}_{\lambda\mu}^* = \dot{\mathbf{g}}^{(\lambda\mu)} \varepsilon_{(\lambda\mu)} + d_{\lambda\mu}^* \end{aligned} \quad (3.4.5.4)$$

Für kleine Verzerrungen (bei linearem Stoffgesetz sind i.a. nur kleine Verzerrungen zugelassen) gilt: $d_{\lambda\mu}^* \approx \dot{\varepsilon}_{\lambda\mu}^*$

Beispiel: Ringdehnung (3.4.1.2) mit quadratischem Glied entsprechend (3.3.1.1), (3.4.5.8) (physikalisch) $\varepsilon_{\vartheta\vartheta}^* \ll 1$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\vartheta\vartheta}^* &= \frac{v_r}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{v_r}{r} \right)^2, \quad \left(\frac{v_r}{r} \right)^{\cdot} = \frac{1}{r^2} (\dot{v}_r r - v_r \dot{r}) = \frac{\dot{v}_r}{r} \left(1 - \frac{v_r}{r} \right), \quad \dot{r} = \dot{v}_r \\ \dot{\varepsilon}_{\vartheta\vartheta}^* &= \left(\frac{v_r}{r} \right)^{\cdot} \left(1 + \frac{v_r}{r} \right) = \frac{\dot{v}_r}{r} \left[1 - \left(\frac{v_r}{r} \right)^2 \right] \\ d_{\vartheta\vartheta}^* &= \frac{\dot{v}_r}{r} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varepsilon}_{\vartheta\vartheta}^* = d_{\vartheta\vartheta}^* \left[1 - \left(\frac{v_r}{r} \right)^2 \right] \approx d_{\vartheta\vartheta}^* \left[1 - \left(\varepsilon_{\vartheta\vartheta}^* \right)^2 \right] \approx d_{\vartheta\vartheta}^* \end{aligned} \quad (3.4.5.5)$$

damit ergibt sich die 1. Variation des Potentials I in der Zuwachsformulierung:

$$\begin{aligned} \delta I = & \int (\sigma^{\lambda\mu} dV) \cdot \delta d_{\lambda\mu} - \int (\overbrace{p^k}^{c_{\lambda}^k p^{\lambda}} dA) \cdot \delta w_k + \\ & + \frac{1}{2} \int \sigma^{\lambda\mu} g^{\nu\rho} \delta \left(\overbrace{w_{\nu|\lambda} \cdot w_{\rho|\mu}}^{(c_{\nu}^k w_k)|_{\lambda} \cdot (c_{\rho}^k w_k)|_{\mu}} \right) dV \end{aligned} \quad (3.4.5.6)$$

$\delta I = 0$ ist die notwendige Bedingung für ein Minimum des Potentials I.

Die Gleichung (3.1) (Koordinaten des Verzerrungstensors für große Verzerrungen):

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (v_{k,l} + v_{l,k} + \delta^{mn} v_{m,k} \cdot v_{n,l})$$

in beliebigen Koordinaten werden die partiellen Ableitungen durch die kovarianten Ableitungen ersetzt und die Koordinaten des Kronecker-Tensors $\delta^{kl} = \vec{e}^k \cdot \vec{e}^l$ durch die Koordinaten des Metrik-Tensors $g^{\mu\nu} = \vec{g}^{\mu} \cdot \vec{g}^{\nu}$:

$$\varepsilon_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} (v_{\lambda|\mu} + v_{\mu|\lambda} + g^{\nu\rho} v_{\nu|\lambda} \cdot v_{\rho|\mu}) \quad (3.4.5.7)$$

\Rightarrow Das quadratische Glied der Verzerrungen in (3.4.5.7) hat die gleiche Form wie das quadratische Glied der Geschwindigkeiten im 3. Summanden, dem geometrisch nichtlinearen Glied von (3.4.5.6). Wenn die quadratischen Verzerrungsglieder bekannt sind, ist damit auch das geometrisch nichtlineare Glied bekannt. Die physikalischen, in Wanddickenrichtung z linearisierten Verzerrungskordinaten mit den quadratischen Gliedern sind ($v_{\vartheta} = 0$, $(\quad)_{,\vartheta} = 0$):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\varphi\varphi} = & \overbrace{v'_r c + v'_y s - z \chi'}^{\text{lineares Glied}} + \frac{1}{2} \left[(v'_r c + v'_y s)^2 + \chi^2 \right] - \left[(v'_r c + v'_y s) \chi' - \frac{\chi^2}{r_1} \right] z \\ \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = & \underbrace{\frac{v_r}{r} - \frac{c}{r}}_{\text{lineares Glied}} \chi z + \frac{1}{2} \left(\frac{v_r}{r} \right)^2 - \frac{v_r}{r} \frac{c}{r} \chi z \end{aligned} \quad (3.4.5.8)$$

3.4.5.2 Aufbereitung der Gleichungen

Der 1.Summand von (3.4.5.6) ergibt:

$$\left(\sigma^{\lambda\mu} dV\right)^{\cdot} = \left(\dot{\sigma}^{\lambda\mu} + \dot{e} \sigma^{\lambda\mu}\right) dV \quad (3.4.5.9)$$

mit der Volumenänderungsgeschwindigkeit $d\dot{V} = \dot{e} \cdot dV$

Für kleine Verzerrungen ist $\dot{e} \approx 0$ und es darf $d\dot{V} = 0$ gesetzt werden. Feldkräfte im Kontinuum können als Kräfte/Masseinheit definiert werden mit $dM = \rho dV = \text{konst.}$, so daß die Vernachlässigung der Volumenänderungsgeschwindigkeit die GGBn. nicht verletzt.

Aus dem 2.Summanden wird:

$$\left(c_{\lambda}^k p^{\lambda} dA\right)^{\cdot} = \underbrace{\left(c_{\lambda}^k \dot{p}^{\lambda} + \overbrace{\dot{c}_{\lambda}^k p^{\lambda}}^{\text{"Drehglied"}}\right)}_{\dot{p}_k} + \dot{a} \underbrace{c_{\lambda}^k p^{\lambda}}_{p_k} dA \quad (3.4.5.10)$$

mit der Mittelflächenänderungsgeschwindigkeit $d\dot{A} = \dot{a} \cdot dA$

$$dA = r d\vartheta d\tilde{s}, \quad d\dot{A} = \left(\dot{r} d\tilde{s} + r d\dot{\tilde{s}}\right) d\vartheta$$

$$\dot{a} = \frac{d\dot{A}}{dA} = \frac{\dot{r}}{r} + \frac{d\dot{\tilde{s}}}{d\tilde{s}} = d_r + d_{\varphi}$$

Die Mittelflächenänderungsgeschwindigkeit könnte wegen ihrer Kleinheit auch vernachlässigt werden. Dann stimmen aber die Gleichgewichtsbedingungen nicht mehr (exakt). Bei einer Änderung der Größe der Mittelfläche ändern sich auch bei zeitlich konstanten Flächenlasten deren resultierende Kräfte.

Nach Abbildung 3.4.12 gilt:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= -\dot{\chi} \\ \text{mit } s &= \sin \varphi & c &= \cos \varphi \\ \text{wird } \dot{s} &= \dot{\varphi} c = -\dot{\chi} c & \dot{c} &= -\dot{\varphi} s = \dot{\chi} s \end{aligned} \quad (3.4.5.11)$$

Damit ergibt sich für die Zuwüchse der Flächenlasten in den raumfesten Richtungen r und y :

$$\begin{aligned} p_r &= p_z s + p_{\varphi} c & p_y &= -p_z c + p_{\varphi} s \\ \dot{p}_r &= \dot{p}_z s + \dot{p}_{\varphi} c + p_z \dot{s} + p_{\varphi} \dot{c} & \dot{p}_y &= -\dot{p}_z c + \dot{p}_{\varphi} s - p_z \dot{c} + p_{\varphi} \dot{s} \\ &= \underbrace{\dot{p}_z s + \dot{p}_{\varphi} c}_{\dot{p}_r} + \underbrace{\dot{\chi} (-p_z c + p_{\varphi} s)}_{p_y} & &= \underbrace{-\dot{p}_z c + \dot{p}_{\varphi} s}_{\dot{p}_y} + \underbrace{\dot{\chi} (-p_z c - p_{\varphi} s)}_{-p_r} \end{aligned} \quad (3.4.5.12)$$

Aus (3.4.5.6) wird mit

$$\dot{\epsilon} = 0, \quad \int d\vartheta = 2\Pi, \quad \int z dz = 0, \quad \underline{\dot{\sigma}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{pmatrix} \cdot \underline{\underline{d}}$$

$$\frac{1}{2\Pi} \delta I = \int \delta U d\tilde{s} = 0 \quad \text{mit}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \delta U = & \frac{1}{2} D \delta \left[(\dot{v}'_r c + \dot{v}'_y s)^2 + 2\nu (\dot{v}'_r c + \dot{v}'_y s) \frac{\dot{v}_r}{r} + \left(\frac{\dot{v}_r}{r} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{2} K \delta \left[\dot{\chi}'^2 + 2\nu \dot{\chi}' \frac{c}{r} \dot{\chi} + \left(\frac{c}{r} \dot{\chi} \right)^2 \right] + \\ & - \underbrace{(\dot{p}_r + \dot{\chi} p_y)}_{\dot{p}_r} \delta \dot{v}_r - \underbrace{(\dot{p}_y - \dot{\chi} p_r)}_{\dot{p}_y} \delta \dot{v}_y + \\ & - \frac{1}{r} \left\{ \underbrace{\frac{1}{D} (\dot{Z}_r c + \dot{Z}_y s + \dot{\chi} r q_\varphi)}_{\dot{a} = \frac{d\dot{A}}{dA} = (d_\vartheta + d_\varphi)_{z=0}} + \left[(1-\nu) - \frac{n_\varphi}{D} \right] \dot{v}_r \right\} (p_r \delta \dot{v}_r + p_y \delta \dot{v}_y) + \\ & + \frac{1}{2} n_\varphi \delta \left[(\dot{v}'_r c + \dot{v}'_y s)^2 + \dot{\chi}^2 \right] + m_\varphi \delta \left[(\dot{v}'_r c + \dot{v}'_y s) \dot{\chi}' - \frac{\dot{\chi}^2}{r_1} \right] + \left. \begin{array}{l} \text{geometrisch} \\ \text{nichtlineares} \\ \text{Glied} \end{array} \right\} \\ & + \frac{1}{2} n_\vartheta \delta \left[\left(\frac{\dot{v}_r}{r} \right)^2 \right] + m_\vartheta \delta \left[\frac{c}{r} \dot{\chi} \frac{\dot{v}_r}{r} \right] + \\ & + \underbrace{\dot{\lambda} \delta \left[\dot{\chi} - (\dot{v}'_r s - \dot{v}'_y c) \right]}_{\text{Nebenbedingung}} \end{aligned} \tag{3.4.5.13}$$

Die Mittelflächenänderungsgeschwindigkeit könnte einfacher durch

$$\dot{a} = (d_\vartheta + d_\varphi)_{z=0} = d_{\vartheta 0} + d_{\varphi 0} = \frac{\dot{v}_r}{r} + \dot{v}'_r c + \dot{v}'_y s \tag{3.4.5.14}$$

ausgedrückt werden.

Für die nachfolgende Variation und die Erstellung des kanonischen Dgl.-Systems ist es aber günstiger, die Verzerrungen über das Materialgesetz durch die Schnittgrößen und diese durch die generalisierten Kraftgrößen zu ersetzen

$$\begin{aligned}
 d_{\varphi 0} &= \frac{1}{Eh} (\dot{n}_{\varphi} - \nu \dot{n}_{\vartheta}), \quad d_{\vartheta 0} = \frac{\dot{v}_r}{r} = \frac{1}{Eh} (\dot{n}_{\vartheta} - \nu \dot{n}_{\varphi}) \\
 \dot{a} &= \frac{1-\nu}{Eh} (\dot{n}_{\varphi} + \dot{n}_{\vartheta}) = \frac{1-\nu^2}{Eh} \dot{n}_{\varphi} + (1-\nu) \frac{\dot{v}_r}{r} \\
 \dot{Z}_{\varphi} &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_{\varphi})^{\cdot} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}_{\varphi} + \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{n}}_{\varphi} = (\mathbf{Z}_r \mathbf{c} + \mathbf{Z}_y \mathbf{s})^{\cdot}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{v}_r \mathbf{r} \\
 &= \dot{Z}_r \mathbf{c} + \dot{Z}_y \mathbf{s} + \dot{\chi} \mathbf{r} \cdot \mathbf{q}_{\varphi}, \quad \dot{\mathbf{s}} = -\dot{\chi} \mathbf{c}, \quad \dot{\mathbf{c}} = \dot{\chi} \mathbf{s} \\
 \mathbf{r} \cdot \mathbf{q}_{\varphi} &= -Z_r \mathbf{s} + Z_y \mathbf{c}
 \end{aligned} \tag{3.4.5.15}$$

Das Variationssymbol δ ist in (3.4.5.13) nicht vor das Integral gezogen worden, um zu kennzeichnen, daß die Variation nur für die Verformungsgrößen durchzuführen ist, vor denen das Variationssymbol steht.

3.4.5.3 Kanonisches Dgl.-System, Lösungs-Schema

Die Gleichung (3.4.5.13) wird analog dem Vorgehen in 3.4.4 für die Rotationschale mit kleinen Verformungen in ein kanonisches Dgl.-System überführt.

$$\text{Eulersche Dgln. für die Zuwüchse: } \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{v}'_k} \right)' - \frac{\partial U}{\partial \dot{v}'_k} = 0 \quad , \quad v_k = v_r, v_y, \chi$$

$$\text{Hamilton-Jacobi:} \quad \dot{Z}_k = \frac{\partial U}{\partial \dot{v}'_k}, \quad \dot{Z}'_k = \frac{\partial U}{\partial \dot{v}'_k}, \quad Z_k = Z_r, Z_y, Z_\chi$$

$$\text{außerdem aus Nebenbedingung: } \frac{\partial U}{\partial \dot{\lambda}} = \dot{\chi} - (\dot{v}'_r s - \dot{v}'_y c) = 0$$

⇒ kanonisches Dgl.-System für die Zuwüchse:

$$[\underline{\dot{y}}(\tilde{s}_0, t)]' = \underline{\mathbf{B}}[\tilde{s}_0, \underline{\mathbf{Z}}(\tilde{s}_0, t)] \cdot \underline{\dot{y}}(\tilde{s}_0, t)$$

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} \underline{v} \\ \underline{Z} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}^T = (v_r \ v_y \ \chi), \quad \underline{Z}^T = (Z_r \ Z_y \ Z_\chi)$$

(3.4.5.16)

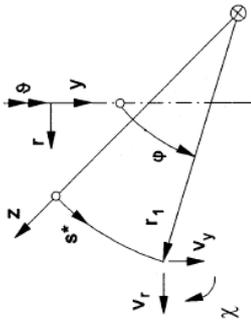
$$\left(\cdot \right)' = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \tilde{s}} \neq \frac{\partial(\cdot)}{\partial \tilde{s}_0}, \quad \tilde{s}_0 = \tilde{s}(t = t_A)$$

\tilde{s}_0 – konvektive Koordinate, $t_A = 0$

$$d\tilde{s}(t) = [1 + \varepsilon_\varphi(\tilde{s}_0, t)] d\tilde{s}_0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\dot{y}}' = \frac{1}{1 + \varepsilon_\varphi} \frac{\partial}{\partial \tilde{s}_0} \underline{\dot{y}} = \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\dot{y}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{s}_0} \underline{\dot{y}} = (1 + \varepsilon_\varphi) \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\dot{y}}$$

Kanon. Dgl.-Syst. für rot.symm. belast. Rotationschale in Zuwuchsformulierung, Biegeth., ohne Volumendehnung, dimensionslos



$$\underline{\dot{y}}' = (1 + \varepsilon_\varphi)(\underline{B}\underline{\dot{y}} + \underline{\dot{b}}) \quad n_\varphi = \frac{\alpha}{r}(Z_r c + Z_y s) \quad p_r = \alpha(p_z s + p_\varphi c) \quad Z_r = r n_r$$

$$(\quad)' = \frac{d(\quad)}{ds^*}, \quad (\quad)\dot{} = \frac{d(\quad)}{dt}$$

$$-h/2 \leq z \leq +h/2$$

$$m_\varphi = \frac{\alpha}{r} Z_\chi \quad p_y = \alpha(-p_z c + p_\varphi s) \quad Z_y = r n_y$$

$$q_\varphi = \frac{\alpha}{r}(Z_r s - Z_y c) \quad \bar{p}_r = \dot{p}_z s + \dot{p}_\varphi c \quad \bar{p}_\chi = r m_\varphi$$

$$s = \sin \varphi, \quad c = \cos \varphi, \quad \dot{\varphi} = -\dot{\chi}$$

$$\alpha = \frac{\sigma_0}{E_0} \quad \beta = \frac{l_0}{h_0}$$

$$D = \frac{Eh}{1 - \mu^2} \quad K = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}$$

$$H = D + n_\varphi \quad X = \frac{1}{r(HK - m_\varphi^2)}$$

dimensionslos mit den Grundbezugsgrößen: E-Modul: E_0 , Spannung: σ_0 , Länge: l_0 , Wanddicke: h_0

und den Bezugsgrößen für: Schnittkraft: $n_0 = \sigma_0 h_0$, Verschiebung: $v_0 = \frac{\sigma_0}{E_0} l_0$, Druck: $p_0 = \sigma_0 \frac{h_0}{l_0}$,

Schnittmoment: $m_0 = \sigma_0 h_0^2$, Verdrehung: $\chi_0 = \frac{\sigma_0}{E_0} \frac{l_0}{h_0}$, Radius: $r_0 = l_0$, Bogenkoordinate: $s_0 = l_0$

\underline{B}	\dot{v}_r	\dot{v}_y	$\dot{\chi}$	\dot{Z}_r	\dot{Z}_y	\dot{Z}_χ	1
\dot{v}_r'	$-\mu c DKX$	0	$\mu c^2 KXm_\varphi + \beta s$	$c^2 KX$	$cs KX$	$-cXm_\varphi$	0
\dot{v}_y'	$-\mu s DKX$	0	$\mu cs KXm_\varphi - \beta c$	$cs KX$	$s^2 KX$	$-sXm_\varphi$	0
$\dot{\chi}'$	μDXm_φ	0	$-\mu c HKX$	$-cXm_\varphi$	$-sXm_\varphi$	HX	0
\dot{Z}_r'	$D \left(\frac{1}{r} - \mu^2 DKX \right) + \frac{n_0}{r} - \left(1 - \mu - \frac{n_\varphi}{D} \right) p_r$	0	$\mu^2 c DKXm_\varphi + \frac{c}{r} m_0 - r\beta \left(p_y + \frac{q_\varphi}{D} p_r \right)$	$\mu c DKX - \frac{c}{D} p_r$	$\mu s DKX - \frac{s}{D} p_r$	$-\mu DXm_\varphi$	$-\bar{p}_r$
\dot{Z}_y'	$-\left(1 - \mu - \frac{n_\varphi}{D} \right) p_y$	0	$r\beta \left(p_r - \frac{q_\varphi}{D} p_y \right)$	$-\frac{c}{D} p_y$	$-\frac{s}{D} p_y$	0	$-\bar{p}_y$
\dot{Z}_χ'	$\mu^2 c DKXm_\varphi + \frac{c}{r} m_0$	0	$Kc \left(\frac{1}{r} - \mu^2 HKX \right) + r\beta \left(\beta n_\varphi - \frac{2}{r_1} m_\varphi \right)$	$-\mu c^2 KXm_\varphi - \beta s$	$-\mu cs KXm_\varphi + \beta c$	$\mu c HKX$	0

Lösung: Integration über t , $t_A \leq t \leq t_E$ (AWA, AnfangsWertAufgabe) mit eingebetteter Integration über \tilde{s} , $\tilde{s}_a \leq \tilde{s} \leq \tilde{s}_e$ (RWA, RandWertAufgabe)

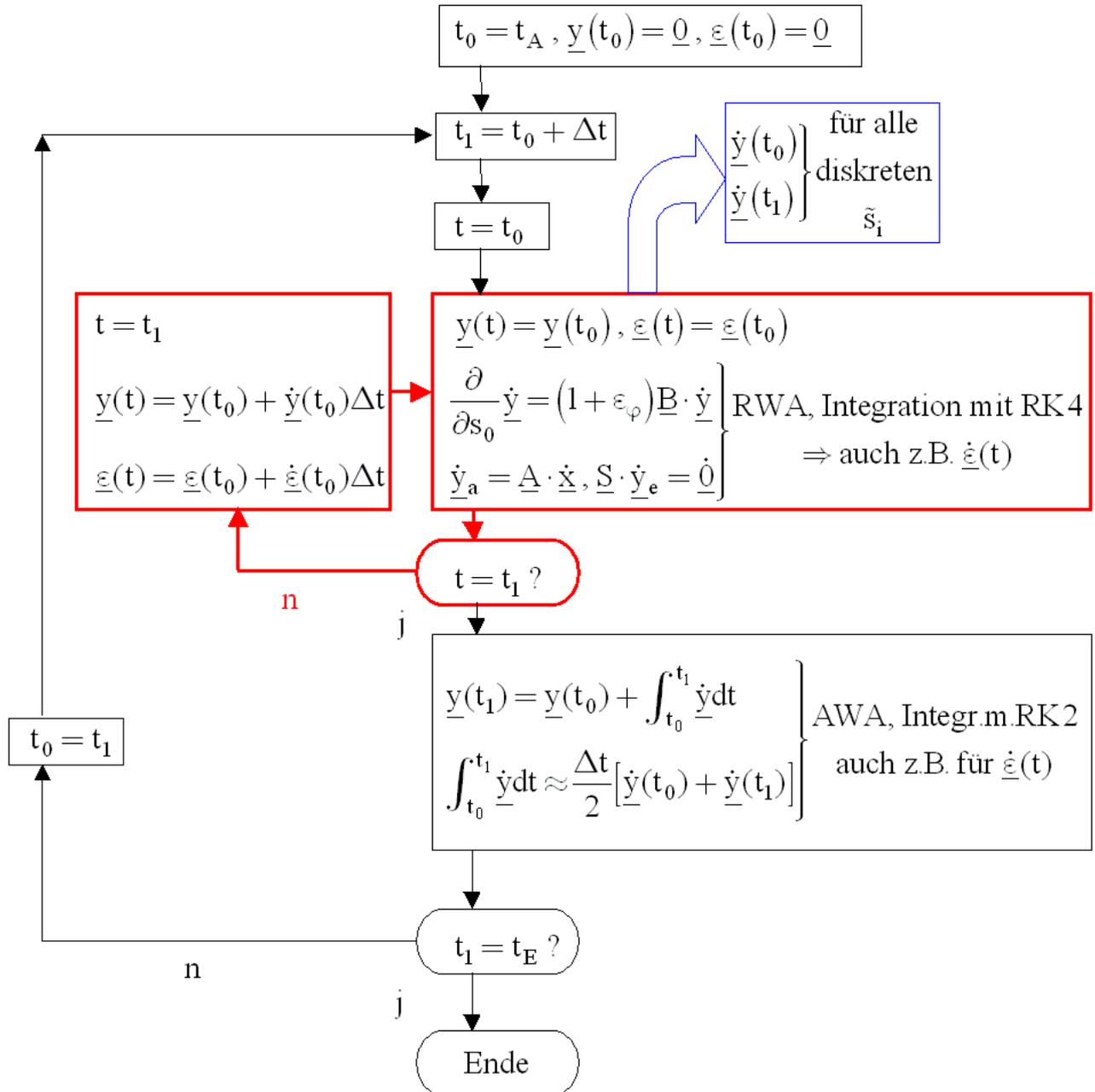


Abbildung 3.4.14: Integration der AWA-RWA

Die Geometrie, das sind hier speziell der Radius r und der Meridianneigungswinkel φ , werden mit über t integriert.

3.4.5.4 Beispiel: Kreisplatte mit großer Durchbiegung

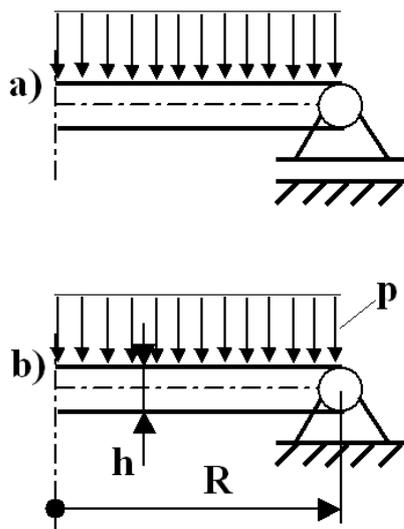


Abbildung 3.4.15: Kreisplatte mit unterschiedlicher Lagerung

Die (Kirchhoffsche-) Plattentheorie aus 3.2 und 3.4.4.1 gilt nur für kleine Durchbiegungen, entsprechend der Theorie 1.Ordnung. Infolge der Durchbiegung wird aus der (ebenen) Platte eine (gekrümmte) Schale. Platten- und Scheibenzustand entkoppeln nicht mehr. Bei größeren Durchbiegungen ist die daraus resultierende Veränderung des Tragverhaltens nicht mehr zu vernachlässigen. Die beiden Platten in Abbildung 3.4.15 unterscheiden sich nur durch die Lagerung, also die Scheibenrandbedingungen. Nach der linearen Plattentheorie gibt es für beide Varianten keine Unterschiede. Die lineare Lösung soll den nichtlinearen Lösungen aus der numerischen Integration der kanonischen Dgln. (3.4.5.16) für beide Fälle gegenüber gestellt werden. Die analytische Lösung des linearen Problems ist:

$$E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}, \quad \nu = 0.3, \quad p = 1 \text{ MPa}$$

$$h = 4 \text{ mm}, \quad R = 100 \text{ mm}, \quad K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \alpha = \frac{r}{R}$$

(3.4.5.17)

$$w_{\text{lin}}(\alpha, p) = \frac{pR^4}{64(1+\nu)K} \left[(1+\nu)\alpha^4 - 2(3+\nu)\alpha^2 + (5+\nu) \right]$$

Die Ergebnisse für die maximale Durchbiegung w_{max} (in Plattenmitte) in Abhängigkeit von der Flächenlast p sind in Abbildung 3.4.16 gegenübergestellt. Bis zu $w_{\text{max}} = 0.2h$ stimmen die drei Lösungen noch gut überein. Das Los-(Ring-)Lager des Falles a) kann im Gegensatz zum Fest-(Ring-)Lager des Falles b) keine Scheibenkräfte aufnehmen. Deshalb ist die Platte a) nicht so steif wie die Platte b). Bei einer Flächenlast von $p=1 \text{ MPa}$ weichen die drei Lösungen schon beträchtlich voneinander ab und die lineare Lösung ist unbrauchbar. Das als starr angenommenen Fest-(Ring-)Lager des Falles b) muß dabei natürlich beträchtliche Scheibenkräfte aufnehmen und wird sich dabei selbst auch verformen. Deshalb ist die Platte nach b) praktisch wohl zu steif und die Wahrheit liegt zwischen a) und b).

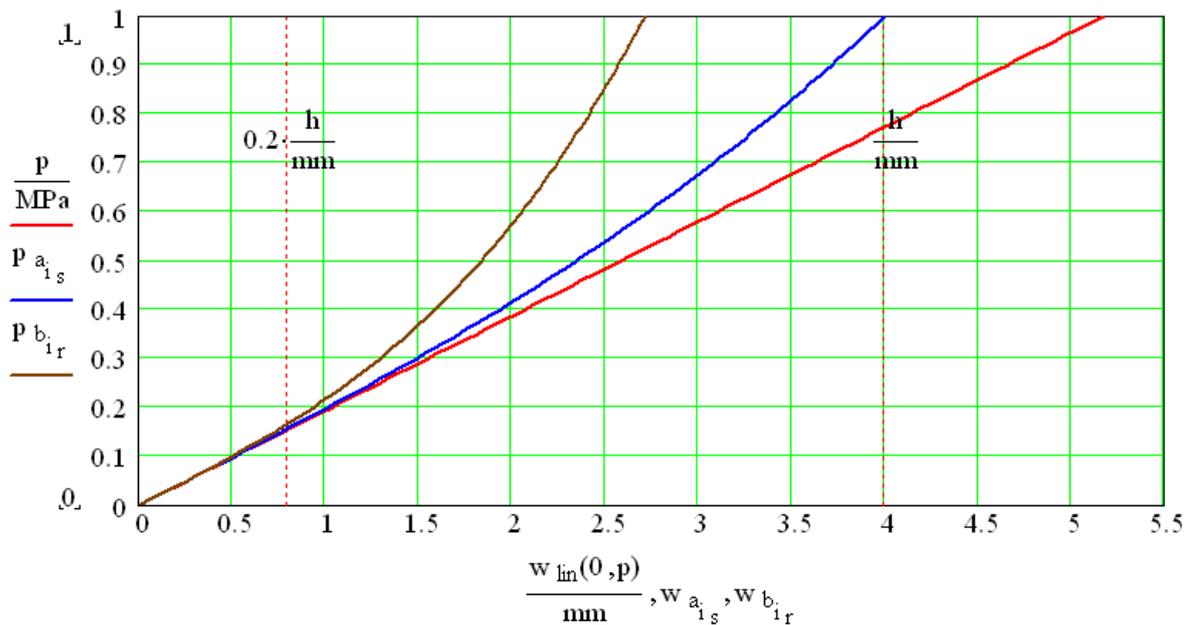


Abbildung 3.4.16: Kreisplatte mit großer Durchbiegung

3.5 Beliebige Rotationschale mit beliebiger Belastung

3.5.1 Membrantheorie

Die Membrantheorie ist eine momentenfreie Theorie. Biegemomente und die damit über die GGBn. gekoppelten Querkräfte sind per Definition nicht vorhanden. Es wird vorausgesetzt, daß sowohl die Verformungen, als auch die Spannungen über der Wanddicke konstant sind. Diese Voraussetzungen sind mit guter Näherung nur für sehr dünne Schalen in ausreichender Entfernung von Randstörungen erfüllt.

3.5.1.1 Kinematische und kinetische Annahmen

Wegen der Annahme über der Wanddicke konstanter Verformungen und Spannungen werden in (3.3.2.1) und (3.3.3.1) alle Glieder mit der Wanddickenkoordinate z gestrichen.

3.5.1.2 Materialgesetz

Es wird linearelastisches Materialverhalten vorausgesetzt. Die entsprechenden Gleichungen ergeben sich aus (3.3.4.2) durch Streichen der Glieder mit der Koordinate z .

3.5.1.3 Verzerrungs-Verformungsbeziehungen

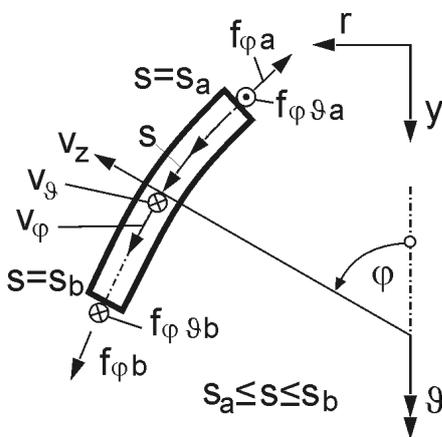
Die Verzerrungs-Verformungsbeziehungen in (3.5.1.1) ergeben sich wegen der Voraussetzung konstanter Verzerrungen über der Wanddicke und der Linearisierung in z aus Tabelle 3.3.1 durch streichen aller Glieder mit der Koordinate z .

$$\begin{aligned} \varepsilon_\varphi(s, \vartheta) &= v_\varphi' + \frac{v_z}{r_1} \\ \varepsilon_\vartheta(s, \vartheta) &= \frac{1}{r} (v_\varphi \cdot c_\varphi + v_z \cdot s_\varphi + v_\vartheta^\bullet) \\ \gamma_{\varphi\vartheta}(s, \vartheta) &= \frac{1}{r} (v_\varphi^\bullet - v_\vartheta \cdot c_\varphi) + v_\vartheta' \end{aligned} \tag{3.5.1.1}$$

mit $s_\varphi = \sin \varphi(s)$, $c_\varphi = \cos \varphi(s)$, $(\)' = (\)_{,s}$, $(\)^\bullet = (\)_{,\vartheta}$

Es wird bei der Membrantheorie besser in den körperfesten Verschiebungs-koordinaten $v_\varphi, v_z, v_\vartheta$ gerechnet, da in (3.5.1.1) keine Ableitungen der Verschiebung v_z vorkommen und demzufolge v_z aus den Dgln. eliminiert werden kann.

3.5.1.4 Variationsaufgabe



In Abbildung 3.5.1 ist eine Membranschale mit Randschnittkräften skizziert. Deren virtuelle Arbeit oder die 1.Variation des Energiepotentials ist in (3.5.1.2) als zweidimensionales Problem in s und ϑ formuliert.

Analog wie in 3.4.1 kann man aus (3.5.1.2):

Abbildung 3.5.1: Membranschale mit Randschnittkräften

$$\delta W = \int_{(\vartheta)} \left[\int_{(s)} \delta U(s, \vartheta) ds - \left(f_{\varphi} \delta v_{\varphi} r \right) \Big|_{s_a}^{s_b} - \left(f_{\varphi\vartheta} \delta v_{\vartheta} r \right) \Big|_{s_a}^{s_b} \right] d\vartheta = 0 \quad (3.5.1.2)$$

$$\delta U = \left[\underline{n}^T \cdot \delta \underline{\varepsilon} - \underline{p}^T \cdot \delta \underline{v} \right] r$$

$$\delta W = 0 \Rightarrow W = \text{Extr. (= Min.)}$$

$$\underline{n} = \left(n_{\varphi} \quad n_{\vartheta} \quad n_{\varphi\vartheta} \right)^T, \quad \underline{\varepsilon} = \left(\varepsilon_{\varphi} \quad \varepsilon_{\vartheta} \quad \gamma_{\varphi\vartheta} \right)^T$$

$$\underline{p} = \left(p_{\varphi} \quad p_{\vartheta} \quad p_z \right)^T, \quad \underline{v} = \left(v_{\varphi} \quad v_{\vartheta} \quad v_z \right)^T$$

mit den 3 Eulerschen Dgln.:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \underline{v}'} \right)' + \left(\frac{\partial U}{\partial \underline{v}^{\bullet}} \right)^{\bullet} - \frac{\partial U}{\partial \underline{v}} = \underline{0} \quad (3.5.1.3)$$

$$\text{RBn} : \left[\left(n_{\varphi} - f_{\varphi} \right) r \delta v_{\varphi} \right]_{s_a}^{s_b} = 0, \quad \left[\left(n_{\varphi\vartheta} - f_{\varphi\vartheta} \right) r \delta v_{\vartheta} \right]_{s_a}^{s_b} = 0$$

die 3 GGBn. der Membrantheorie für die Schnittgrößen herleiten. Diese Gleichungen sind (GGB in Meridianrichtung s , GGB in Umfangsrichtung ϑ , GGB in Wanddickenrichtung z):

$$\left(n_{\varphi} r \right)' + n_{\varphi\vartheta}^{\bullet} - n_{\vartheta} c_{\varphi} + p_{\varphi} r = 0$$

$$\left(n_{\varphi\vartheta} r \right)' + n_{\vartheta}^{\bullet} + n_{\varphi\vartheta} c_{\varphi} + p_{\vartheta} r = 0 \quad (3.5.1.4)$$

$$\frac{n_{\varphi}}{r_1} + \frac{n_{\vartheta}}{r_2} - p_z = 0, \quad \frac{1}{r_2} = \frac{s_{\varphi}}{r}$$

Das sind 3 Gleichungen für 3 Schnittkräfte, die Membrantheorie ist deshalb eine statisch bestimmte Theorie. Falls die zugehörigen RBn ausschließlich Bedingungen für die Schnittkräfte an den Rändern sind, kann die Lösung unabhängig vom Materialverhalten gefunden werden.

3.5.1.5 Differentialgleichungen

Die GGBn. sind ein partielles Dgl.-System in den Koordinaten s und ϑ . Zur Überführung in gewöhnliche Dgln. für die Koordinate s (Reduktionsverfahren) wird ein Fourierreihenansatz gewählt:

$$f_A(s, \vartheta) = f_{A0}(s) + \sum_{m=1}^{\infty} f_{Am}(s) \cdot g_{Am}(\vartheta) \quad \text{Form (A)}$$

$$f_B(s, \vartheta) = f_{B0}(s) + \sum_{m=1}^{\infty} f_{Bm}(s) \cdot g_{Bm}(\vartheta) \quad \text{Form (B)} \quad (3.5.1.5)$$

$$g_{Am}(\vartheta) = a_m \cos m\vartheta + b_m \sin m\vartheta, \quad \dot{g}_{Am} = -m \cdot g_{Bm}$$

$$g_{Bm}(\vartheta) = a_m \sin m\vartheta - b_m \cos m\vartheta, \quad \dot{g}_{Bm} = m \cdot g_{Am}$$

Form (A) für : $\mathbf{n}_\varphi, \mathbf{n}_\vartheta, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_\vartheta, \mathbf{v}_\varphi, \mathbf{v}_z, \mathbf{p}_\varphi, \mathbf{p}_z, \mathbf{f}_\varphi$

Form (B) für : $\mathbf{n}_{\varphi\vartheta}, \gamma_{\varphi\vartheta}, \mathbf{v}_\vartheta, \mathbf{p}_\vartheta, \mathbf{f}_{\varphi\vartheta}$

Entsprechend dieses Ansatzes werden die Flächenlasten und Randschnittkräfte als periodische Funktionen mit der Periode 2π entwickelt. Z.B.:

$$\mathbf{p}_\varphi(s, \vartheta) = \mathbf{p}_{\varphi 0}(s) + \sum_m \mathbf{p}_{\varphi m}(s) \cdot g_{Am}(\vartheta) \quad \text{Form (A)} \quad (3.5.1.6)$$

$$\mathbf{p}_\vartheta(s, \vartheta) = \mathbf{p}_{\vartheta 0}(s) + \sum_m \mathbf{p}_{\vartheta m}(s) \cdot g_{Bm}(\vartheta) \quad \text{Form (B)}$$

Die Funktionen g_{Am} und g_{Bm} sind damit bekannt (für alle Zustandsgrößen gleich) und damit die Fourierkoeffizienten a_m und b_m für jedes Reihenglied mit dem Index m . (Das Glied der rotationssymmetrischen Belastung ($m=0$) kann formal auch als ein Glied der Summe mit $\cos(0)=1$ diskutiert werden.) Wenn man diese Ansätze in (3.5.1.4) einsetzt wird aus dem Koeffizientenvergleich für jedes Glied der Fourierreihe:

mit

$$\mathbf{g}_{\varphi m} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_{\varphi m})' + \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}_{\varphi \vartheta m} - \mathbf{n}_{\vartheta m} \mathbf{c}_{\varphi} + \mathbf{p}_{\varphi m} \mathbf{r}$$

$$\mathbf{g}_{\vartheta m} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_{\varphi \vartheta m})' - \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}_{\vartheta m} + \mathbf{n}_{\varphi \vartheta m} \mathbf{c}_{\varphi} + \mathbf{p}_{\vartheta m} \mathbf{r}$$

$$\mathbf{g}_{zm} = \mathbf{n}_{\varphi m} \frac{\mathbf{r}}{r_1} + \mathbf{n}_{\vartheta m} \cdot \mathbf{s}_{\varphi} - \mathbf{p}_{zm} \mathbf{r}$$

folgt aus Koeffizientenvergleich

$$\mathbf{g}_{\varphi m}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{g}_{Am}(\vartheta) = 0 \quad (3.5.1.7)$$

$$\mathbf{g}_{\vartheta m}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{g}_{Bm}(\vartheta) = 0$$

$$\mathbf{g}_{zm}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{g}_{Am}(\vartheta) = 0$$

daraus folgt wegen : $\mathbf{g}_{Am}(\vartheta) \neq 0$, $\mathbf{g}_{Bm}(\vartheta) \neq 0$

$$\mathbf{g}_{\varphi m} = \mathbf{g}_{\vartheta m} = \mathbf{g}_{zm} = 0$$

In (3.5.1.7) ist für jedes Glied der Fourierreihen ein gewöhnliches Dgl.-System (3 GGBn). Dieses wird für jedes nicht verschwindende Reihenglied der äußeren Lasten (mit dem Index m) integriert und danach die Superposition (Fouriersynthese) entsprechend (3.5.1.5) durchgeführt.

Das Materialgesetz, die Verzerrungs-Verformungs-Beziehungen und die Verdrehungen sind auch gliedweise zu erfüllen:

$$\varepsilon_{\varphi m} = \frac{1}{Eh} (\mathbf{n}_{\varphi m} - \nu \mathbf{n}_{\vartheta m}), \quad \varepsilon_{\vartheta m} = \frac{1}{Eh} (\mathbf{n}_{\vartheta m} - \nu \mathbf{n}_{\varphi m})$$

$$\gamma_{\varphi \vartheta m} = \frac{1}{Gh} \mathbf{n}_{\varphi \vartheta m}$$

$$\varepsilon_{\varphi m} = \mathbf{v}'_{\varphi m} + \frac{\mathbf{v}_{zm}}{r_1}, \quad \varepsilon_{\vartheta m} = \frac{1}{r} (\mathbf{v}_{\varphi m} \cdot \mathbf{c}_{\varphi} + \mathbf{v}_{zm} \cdot \mathbf{s}_{\varphi} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{v}_{\vartheta m}) \quad (3.5.1.8)$$

$$\gamma_{\varphi \vartheta m} = \mathbf{v}'_{\vartheta m} - \frac{1}{r} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{v}_{\varphi m} + \mathbf{v}_{\vartheta m} \cdot \mathbf{c}_{\varphi})$$

$$\chi_m = \mathbf{v}'_{\vartheta m} - \frac{\mathbf{v}_{\varphi m}}{r_1}$$

$$\psi_m = -\frac{1}{r} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{v}_{zm} + \mathbf{v}_{\vartheta m} \cdot \mathbf{s}_{\varphi})$$

Man kann die Ansätze (3.5.1.5) auch schon in (3.5.1.2) einsetzen. Dort treten dann jeweils immer Produkte der Ansatzfunktionen auf. Unter Beachtung der Orthogonalität der Ansatzfunktionen:

$$\int_0^{2\pi} \sin m\vartheta \cdot \sin n\vartheta \cdot d\vartheta = \begin{cases} 0 & \text{für } m = n = 0 \\ \pi & \text{für } m = n > 0 \\ 0 & \text{für } m \neq n \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos m\vartheta \cdot \cos n\vartheta \cdot d\vartheta = \begin{cases} 2\pi & \text{für } m = n = 0 \\ \pi & \text{für } m = n > 0 \\ 0 & \text{für } m \neq n \end{cases} \quad (3.5.1.9)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin m\vartheta \cdot \cos n\vartheta \cdot d\vartheta = 0$$

entkoppeln die einzelnen Reihenglieder nach der Integration über den Umfangswinkel ϑ und es bleibt eine Minimalforderung für die Funktionen $f_{Am}(s)$, $f_{Bm}(s)$ aus (3.5.1.5) für jedes Reihenglied zu erfüllen:

$$W_m = \int_{(s)} U_m(s) ds - \left(f_{\varphi m} v_{\varphi m} r \right) \Big|_{s_a}^{s_b} - \left(f_{\vartheta m} v_{\vartheta m} r \right) \Big|_{s_a}^{s_b} = \text{Min.}$$

$$U_m = \left[\underline{n}_m^T \cdot \underline{\varepsilon}_m - \underline{p}_m^T \cdot \underline{v}_m \right] r \quad (3.5.1.10)$$

$$\underline{n}_m = \left(n_{\varphi m} \quad n_{\vartheta m} \quad n_{\varphi\vartheta m} \right)^T, \quad \underline{\varepsilon}_m = \left(\varepsilon_{\varphi m} \quad \varepsilon_{\vartheta m} \quad \gamma_{\varphi\vartheta m} \right)^T$$

$$\underline{p}_m = \left(p_{\varphi m} \quad p_{\vartheta m} \quad p_{zm} \right)^T, \quad \underline{v}_m = \left(v_{\varphi m} \quad v_{\vartheta m} \quad v_{zm} \right)^T$$

Einsetzen der Verzerrungen aus (3.5.1.8) ergibt:

$$U_m = n_{\varphi m} r \left(v'_{\varphi m} + \frac{v_{zm}}{r_1} \right) + n_{\vartheta m} r \left(\frac{1}{r} \left(v_{\varphi m} \cdot c_{\varphi} + v_{zm} \cdot s_{\varphi} + m \cdot v_{\vartheta m} \right) \right) + \quad (3.5.1.11)$$

$$n_{\varphi\vartheta m} r \left(v'_{\vartheta m} - \frac{1}{r} \left(m \cdot v_{\varphi m} + v_{\vartheta m} \cdot c_{\varphi} \right) \right) +$$

$$- r \left(p_{\varphi m} v_{\varphi m} + p_{\vartheta m} v_{\vartheta m} + p_m v_{zm} \right)$$

Mit den Eulerschen-Dgln. und den RBn. wird:

$$\left(\frac{\partial U_m}{\partial \underline{v}'_m} \right)' - \frac{\partial U_m}{\partial \underline{v}_m} = \underline{0} \quad (3.5.1.12)$$

$$\text{RBn} : \left[(\mathbf{n}_{\varphi m} - \mathbf{f}_{\varphi m}) \mathbf{r} \delta \mathbf{v}_{\varphi m} \right]_{s_a}^{s_b} = \mathbf{0}, \quad \left[(\mathbf{n}_{\vartheta m} - \mathbf{f}_{\vartheta m}) \mathbf{r} \delta \mathbf{v}_{\vartheta m} \right]_{s_a}^{s_b} = \mathbf{0}$$

Die 3 Dgln. in (3.5.1.12) sind identisch mit denen aus (3.5.1.7). Wenn man in (3.5.1.10) schon das Materialgesetz einsetzt und in (3.5.1.12) den Formalismus von Hamilton-Jacobi entsprechend (3.4.2.3) zur Vermeidung der 2. Ableitungen in den Dgln. verwendet, führt das auf das zugehörige kanonische Dgl.-System 4. Ordnung für den Zustandsvektor:

$$\mathbf{y}_m(\mathbf{s}) = \left[\mathbf{v}_{\varphi m}(\mathbf{s}) \quad \mathbf{v}_{\vartheta m}(\mathbf{s}) \quad \mathbf{Z}_{\varphi m}(\mathbf{s}) \quad \mathbf{Z}_{\vartheta m}(\mathbf{s}) \right]^T \quad (3.5.1.13)$$

$$\mathbf{Z}_{\varphi m}(\mathbf{s}) = \mathbf{r}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{n}_{\varphi m}(\mathbf{s}), \quad \mathbf{Z}_{\vartheta m}(\mathbf{s}) = \mathbf{r}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{n}_{\vartheta m}(\mathbf{s})$$

RBn. können nur für die Komponenten des Zustandsvektors gestellt werden, d.h. nicht für die Verschiebung in Richtung der Wanddickenkoordinate z und nicht für die Meridianverdrehung χ . Deshalb sind an einem Bereichsübergang diese Verformungen i.a. unstetig!

3.5.1.6 Beispiel: Zylinderschale mit Randlast allgemein

Für einen Zylinder mit dem Mittelflächenradius $r=R$, dem Meridiankrümmungsradius $r_1=\infty$ und dem Meridianneigungswinkel $\varphi=90^\circ$ wird aus den Dgln. (3.5.1.7):

$$\begin{aligned} Rn'_{\varphi m} + m \cdot n_{\varphi \vartheta m} + p_{\varphi m} R &= 0 \\ Rn'_{\varphi \vartheta m} - m \cdot n_{\vartheta m} + p_{\vartheta m} R &= 0 \\ n_{\vartheta m} + p_{zm} R &= 0 \end{aligned} \quad (3.5.1.14)$$

Diese ergeben für verschwindende Flächenlasten als Lösung:

$$n_{\vartheta m} = 0, \quad n_{\varphi \vartheta m} = C_{1m}, \quad n_{\varphi m} = -\frac{m}{R} C_{1m} \cdot s + C_{2m} \quad (3.5.1.15)$$

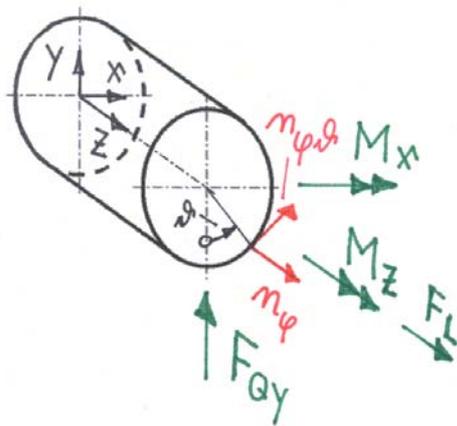


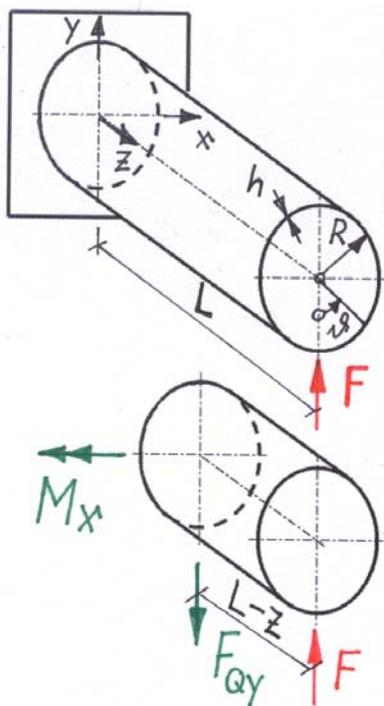
Abbildung 3.5.2: „Balken-Schnittgrößen“ der Membranschale

Aus 3.4.4.2 ist für die Zylinderschale nach der Biegetheorie bekannt, daß Randstörungen (die Gleichgewichtsgruppen sind) örtlich schnell ins Schaleninnere abklingen. Das entspricht dem realen Tragverhalten einer Zylinderschale. Die Lösungen nach (3.5.1.15) gehen ohne dieses Abklingverhalten durch die ganze Schale durch. An den (nicht abklingenden) Schnittgrößen (keine Gleichgewichtsgruppen) haben aber nur die in (3.5.1.16) aufgezeigten, aus beliebigen ($m=0,1,2,\dots$) zugehörigen Randlasten resultierenden Schnittkräfte mit $m=0$ und $m=1$ Anteil. Alle anderen haben keine resultierende Gesamtwirkung (ihre Integrale über den Umfang verschwinden).

$$\begin{aligned}
 F_L &= \int_0^{2\pi} n_\varphi(\vartheta) R d\vartheta = \int_0^{2\pi} n_{\varphi 0} R d\vartheta = 2\pi n_{\varphi 0} R \\
 M_x &= - \int_0^{2\pi} n_\varphi(\vartheta) R^2 \cos \vartheta d\vartheta = - \int_0^{2\pi} n_{\varphi 1} (R \cos \vartheta)^2 d\vartheta = - \pi n_{\varphi 1} R^2 \\
 M_z &= \int_0^{2\pi} n_{\varphi \vartheta}(\vartheta) R^2 d\vartheta = \int_0^{2\pi} n_{\varphi \vartheta 0} R^2 d\vartheta = 2\pi n_{\varphi \vartheta 0} R^2 \\
 F_{Qy} &= \int_0^{2\pi} n_{\varphi \vartheta}(\vartheta) \sin \vartheta R d\vartheta = \int_0^{2\pi} n_{\varphi \vartheta 1} R (\sin \vartheta)^2 d\vartheta = \pi n_{\varphi \vartheta 1} R
 \end{aligned} \tag{3.5.1.16}$$

Diese Anteile entsprechen den Partikulärlösungen der Dgln. für die Biegetheorie der Zylinderschale. Ab $m=2$ sind alle Schalen-Schnittgrößen Gleichgewichtsgruppen (und klingen bei einer realen Schale ab). Deshalb ist die Membrantheorie für statische Berechnungen nur für $m=0$ (rotationssymmetrische Belastung) und $m=1$ (entspricht der Querkraft-Biegung beim Biegebalken) sinnvoll anzuwenden. Bei der Bestimmung der Eigenfrequenzen sind auch für $m>1$ brauchbare Ergebnisse zu erzielen. Die dazu erforderlichen Trägheitskräfte sind hier nicht enthalten.

3.5.1.7 Beispiel: Zylinderschale mit Randquerkraft



Dieses Modell wurde schon im Teil 1 des Manuskriptes (Stabtragwerke) als Beispiel: Querkraftbiegung eines Stabes mit Kreisprofil behandelt.

Eine Zylinderschale wird durch eine Querkraft F beansprucht.

Es sind die Spannungen und die maximale Durchbiegung nach der Membrantheorie zu berechnen.

Geg.: E-Modul $E=2 \cdot 10^5 \text{MPa}$, Querdehnungszahl $\nu=0.3$, Länge $L=800 \text{mm}$, Radius $R=100 \text{mm}$, Wanddicke $h=4 \text{mm}$, Kraft $F=10^4 \text{N}$

Ges.: Verlauf der Normalspannungen σ und der Schubspannungen τ , maximale Durchbiegung der Zylinderschale.

Die Schnittgrößen sind: $F_{Qy}=F$, $M_x=-F(L-z)$.

Die Lösung (3.5.1.15) für einen Zylinder mit der Ordnung $m=1$ des Fourierreihengliedes ist:

Abbildung 3.5.3: Zylinderschale mit Randquerkraft

$$n_{\vartheta 1} = 0, \quad n_{\varphi\vartheta 1} = C_{11}, \quad n_{\varphi 1} = -\frac{1}{R}C_{11} \cdot z + C_{21}, \quad s = z \quad (3.5.1.17)$$

Aus den RBn. für die Schnittkräfte am Rand $z=L$ folgen die 2 Konstanten:

$$n_{\vartheta}(\vartheta) = 0$$

$$n_{\varphi\vartheta}(\vartheta) = n_{\varphi\vartheta 1} \sin \vartheta, \quad n_{\varphi\vartheta 1} = C_{11} = \frac{F_{Qy}}{\pi R} \quad (3.5.1.18)$$

$$n_{\varphi}(\vartheta) = \left(-\frac{z}{R} n_{\varphi\vartheta 1} + C_{21} \right) \cdot \cos \vartheta, \quad C_{21} = \frac{L}{R} n_{\varphi\vartheta 1}$$

$$\sigma = n_{\varphi} / h, \quad \tau = n_{\varphi\vartheta} / h$$

Über (3.5.1.8) können, bei nun bekannten Schnittgrößen, die Verzerrungen und die Verformungen berechnet werden. Zuerst die Verschiebung in Achsrichtung:

$$\varepsilon_{\varphi 1} = v'_{\varphi 1} + \frac{v_{\varphi 1}}{r_1} = \frac{1}{Eh} (n_{\varphi 1} - \nu n_{\vartheta 1}), \quad r_1 \rightarrow \infty$$

$$v_{\varphi 1} = \frac{n_{\varphi\vartheta 1}}{Eh} \int_0^z \frac{L - \bar{z}}{R} d\bar{z} + v_{\varphi 1}(z=0), \quad v_{\varphi 1}(z=0) = 0 \quad (3.5.1.19)$$

$$= \frac{n_{\varphi\vartheta 1}}{EhR} z \left(L - \frac{z}{2} \right), \quad v_{\varphi}(z, \vartheta) = v_{\varphi 1} \cdot \cos \vartheta$$

und damit die Verschiebung in Umfangsrichtung:

$$\gamma_{\varphi\vartheta 1} = v'_{\vartheta 1} - \frac{v_{\varphi 1}}{R} = \frac{n_{\varphi\vartheta 1}}{Gh}$$

$$v'_{\vartheta 1} = \frac{n_{\varphi\vartheta 1}}{h} \left(\frac{1}{G} + \frac{z \left(L - \frac{z}{2} \right)}{ER^2} \right) \quad v_{\vartheta}(z, \vartheta) = v_{\vartheta 1} \sin \vartheta \quad (3.5.1.20)$$

$$v_{\vartheta 1} = \frac{n_{\varphi\vartheta 1} z}{h} \left(\frac{1}{G} + \frac{z \left(\frac{L}{2} - \frac{z}{6} \right)}{ER^2} \right) + v_{\vartheta 1}(z=0), \quad v_{\vartheta 1}(z=0) = 0$$

Die maximale Verschiebung:

$$v_{\vartheta \max} = v_{\vartheta} \left(z = L, \vartheta = \frac{\pi}{2} \right) = v_{\vartheta 1} (z = L) = \frac{FL}{E\pi Rh} \left[\frac{E}{G} + \frac{1}{3} \left(\frac{L}{R} \right)^2 \right] \quad (3.5.1.21)$$

$$= 0.762 \text{ mm}$$

Diese ist identisch mit der o.a. aus Teil 1 des Manuskriptes (Stabtragwerke), weil dort die Querkraftschubverzerrung über den Satz von Castigliano berücksichtigt wurde. Zusätzlich tritt bei der Schale nach der Membrantheorie für $v \neq 0$ noch eine Umfangsdehnung auf die beim Stab wegen der Voraussetzung starrer Stabquerschnitte (entspricht bei der Membrantheorie $v=0$) nicht zugelassen sind. Nur für $v=0$ gilt $v_{\vartheta 1} = v_{z1}$ (v_{z1} Verschiebung in Richtung der Wanddickenkoordinate), also starrer Querschnitt. Bei der Membrantheorie ist, wie bei der Stabtheorie, der Einfluß von Randstörungen auf den homogenen Beanspruchungszustand nicht zu erfassen. Dazu wird dieses Beispiel unter 3.5.2.5 auch nach der Biegetheorie berechnet.

3.5.2 Biegetheorie

3.5.2.1 Variationsprinzip

Ziel ist die Lösung von 3 unterschiedlichen Aufgaben:

1. statisches Problem
2. freie und erzwungene harmonische Schwingungen
3. lineares Stabilitäts(-Verzweigungs)-Problem.

Ausgegangen wird vom Variationsproblem in Zuwuchsformulierung (3.4.5.6), das bei der Rotationsschale mit rotationssymmetrischer Belastung und endlichen Verformungen eingeführt wurde. Dieses enthält als Spezialfälle schon die 1. und 3. Aufgabe (auch hier zur Vereinfachung der Herleitung ohne Glieder der Randbelastung oder Randverformung).

$$\delta W = \int (\sigma^{\lambda\mu} dV) \delta d_{\lambda\mu} - \int (c_{\lambda}^k p^{\lambda} dA) \delta w_k + \frac{1}{2} \int \sigma^{\lambda\mu} g^{\nu\rho} \delta \left[(c_{\nu}^k w_k) |_{\lambda} \cdot (c_{\rho}^k w_k) |_{\mu} \right] dV = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{kleine Verzerrungen} \Rightarrow d\dot{V} = 0, d\dot{A} = 0, d_{\lambda\mu} = \dot{\epsilon}_{\lambda\mu} \\ \text{kleine Verformungen} \Rightarrow \dot{v}_k = w_k \end{array} \right\} \text{auch für die physikalischen Koord.} \quad (3.5.2.1)$$

$$\delta W = \int \dot{\sigma}^{\lambda\mu} \delta \dot{\epsilon}_{\lambda\mu} dV - \int (\dot{c}_{\lambda}^k p^{\lambda} + c_{\lambda}^k \dot{p}^{\lambda}) \delta \dot{v}_k dA + \frac{1}{2} \int \sigma^{\lambda\mu} g^{\nu\rho} \delta \left[(c_{\nu}^k \dot{v}_k) |_{\lambda} \cdot (c_{\rho}^k \dot{v}_k) |_{\mu} \right] dV = 0$$

Wir betrachten zwei differentiell benachbarte Zustände:

$t = t^0$ (unbelasteter Ausgangszustand) und

$t = t^1$ (belasteter Nachbarzustand) mit $dt = t^1 - t^0$

Im Ausgangszustand ist schon ein Spannungszustand $\sigma^{\lambda\mu} = \alpha \cdot \tilde{\sigma}^{\lambda\mu}$ vorhanden. Der Faktor α ist dabei eine beliebige Konstante. Dieser Spannungszustand erfüllt die Gleichgewichtsbedingungen mit den Flächenlasten $p^{\lambda} = \alpha \tilde{p}^{\lambda}$. Es gilt also:

$$\delta \tilde{I} = \alpha \cdot \left(\int \tilde{\sigma}^{\lambda\mu} \delta \tilde{\epsilon}_{\lambda\mu} dV - \int \tilde{p}^{\lambda} \delta \tilde{v}_{\lambda} dA \right) = 0 \quad (3.5.2.2)$$

Das kann auch ein Eigenspannungszustand, also ein Spannungszustand ohne äußere Lasten sein. Wenn alle Zuwüchse in (3.5.2.1) formal mit dem Differential dt multipliziert werden, ergeben sich für den Nachbarzustand die Änderungen zum Ausgangszustand, z.B.: $\sigma^{\lambda\mu} = \dot{\sigma}^{\lambda\mu} \cdot dt$ und aus (3.5.2.1) wird dann:

$$\begin{aligned} \delta P = & \int \sigma^{\lambda\mu} \delta \varepsilon_{\lambda\mu} dV - \int \left[\left(\dot{c}_{\lambda}^k dt \right)_{\alpha} \cdot \tilde{p}^{\lambda} + c_{\lambda}^k p^{\lambda} \right] \cdot \delta v_k dA + \\ & + \frac{1}{2} \alpha \int \tilde{\sigma}^{\lambda\mu} g^{\nu\rho} \delta \left[\left(c_{\nu}^k v_k \right) |_{\lambda} \cdot \left(c_{\rho}^k v_k \right) |_{\mu} \right] dV = 0 \end{aligned} \quad (3.5.2.3)$$

Für die freien und erzwungenen harmonischen Schwingungen gehen wir davon aus, daß alle inneren und äußeren Zustandsgrößen harmonisch von der Zeit abhängen, z.B. der Vektor der Verformungen: $\underline{v}_{\omega} = \underline{v} \sin \omega t \Rightarrow \ddot{\underline{v}}_{\omega} = -\omega^2 \underline{v} \sin \omega t$. Der Summand mit den Trägheitsgliedern wird zweckmäßigerweise zur Abkürzung schon in Vektorschreibweise dargestellt.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta P_{\omega} = \delta I \cdot \sin^2 \omega t = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta I = 0 \quad \text{mit} \quad \delta I = \delta P + \int \rho \ddot{\underline{v}}^T \delta \underline{v} dV \\ \delta I = \int \sigma^{\lambda\mu} \delta \varepsilon_{\lambda\mu} dV - \int c_{\lambda}^k p^{\lambda} \delta v_k dA + \\ - \alpha \underbrace{\int \left(\dot{c}_{\lambda}^k dt \right) \tilde{p}^{\lambda} \cdot \delta v_k dA}_{\text{Drehglied}} + \frac{1}{2} \alpha \underbrace{\int \tilde{\sigma}^{\lambda\mu} g^{\nu\rho} \delta \left[\left(c_{\nu}^k v_k \right) |_{\lambda} \cdot \left(c_{\rho}^k v_k \right) |_{\mu} \right] dV}_{\text{geometrisch nichtlineares Glied}} + \\ - \omega^2 \underbrace{\int \rho \underline{v}^T \delta \underline{v} dV}_{\text{Trägheitsglied}} = 0 \end{aligned} \quad (3.5.2.4)$$

Dieses Variationsproblem enthält als Spezialfälle alle drei Aufgaben:

1. statisches Problem:

$\alpha = 0$: unbelasteter Ausgangszustand (ohne Eigenspannungen)

$\omega^2 = 0$: keine Schwingungen.

Damit wird aus (3.5.2.4) wie bisher z.B. bei Rotationsschale mit rot.-sym. Belastung:

$$\delta I = \int \sigma^{\lambda\mu} \delta \varepsilon_{\lambda\mu} dV - \int c_{\lambda}^k p^{\lambda} \delta v_k dA = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma^{\lambda\mu} \quad \text{und} \quad v_k$$

2. freie und erzwungene harmonische Schwingungen:

$\alpha = 0$: unbelasteter Ausgangszustand (ohne Eigenspannungen)

$\omega^2 > 0$: Schwingungen

$$\delta I = \int \sigma^{\lambda\mu} \delta \varepsilon_{\lambda\mu} dV - \int c_{\lambda}^k p^{\lambda} \delta v_k dA - \omega^2 \int \rho \underline{v}^T \delta \underline{v} dV = 0$$

freie harmonische Schwingungen

keine äußere Belastung \Rightarrow homogenes Problem (Dgln. + RBn., $p^{\lambda} = 0$)

Eigenwertproblem mit Eigenwertparameter ω^2

erzwungene harmonische Schwingungen

$\underline{p}_\omega = \underline{p} \sin \omega t$ (Erregung durch Flächenlasten bzw. durch Randschnittgrößen oder Randverformungen)

3. lineares Stabilitäts(-Verzweigungs)-Problem:

$\alpha \neq 0$: belasteter Ausgangszustand

$\omega^2 = 0$: keine Schwingungen

$p^\lambda = 0$: keine Zuwachs der äußeren Lasten

Fragestellung: gibt es einen Gleichgewichtszustand der

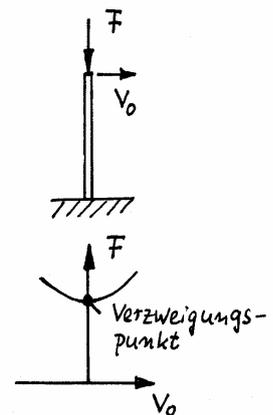
a) einem Grundzustand entsprechend (3.5.2.2) differentiell

benachbart ist

und

b) bei dem kein Lastzuwachs erfolgt $p^\lambda = 0$?

Also gibt es zur gleichen Last mehrere (mindestens aber zwei) differentiell benachbarte Gleichgewichtszustände?



$$\delta \tilde{I} = \alpha \cdot \left(\int \tilde{\sigma}^{\lambda\mu} \delta \tilde{\varepsilon}_{\lambda\mu} dV - \int \tilde{p}^\lambda \delta \tilde{v}_\lambda dA \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\sigma}^{\lambda\mu}$$

$$\begin{aligned} \delta I = & \int \sigma^{\lambda\mu} \delta \varepsilon_{\lambda\mu} dV - \alpha \int (\dot{c}_\lambda^k dt) \tilde{p}^\lambda \cdot \delta v_k dA + \\ & + \frac{1}{2} \alpha \int \tilde{\sigma}^{\lambda\mu} g^{\nu\rho} \delta \left[\left(c_\nu^k v_k \right) |_\lambda \cdot \left(c_\rho^k v_k \right) |_\mu \right] dV \end{aligned} \quad (3.5.2.5)$$

keine äußere Belastung (keinen Zuwachs gegenüber dem belasteten Ausgangszustand) \Rightarrow (3.5.2.5) ist homogenes Problem (Dgln. + RBn.)

\Rightarrow Eigenwertproblem mit Eigenwertparameter α .

Die Gleichung (3.5.2.4) gilt allgemein für eine beliebige Schale. Für den Spezialfall der Rotationsschale teilweise in Vektor-Matrix-Schreibweise wir daraus mit:

- linearelastisches Materialgesetz (3.3.4.2) eingesetzt,
- Integration über die Wanddicke h durchgeführt,
- Variationsoperator δ vor die Integrale gezogen (variiert werden nur Verformungs- und keine Kraftgrößen \Rightarrow folgen die Faktoren $\frac{1}{2}$ vor den in

den Verformungsgrößen quadratischen Integralen,

$$\frac{1}{2} E \delta(\varepsilon^2) = \frac{1}{2} E \frac{\partial(\varepsilon^2)}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon = E \varepsilon \delta \varepsilon = \sigma \delta \varepsilon \quad ,$$

- Grundspannungszustand beim linearen Stabilitäts-Problem ist ein rotationssymmetrischer Membranspannungszustand mit den Schnittgrößen $\underline{n}^T = (n_\varphi, n_\vartheta)$ und der zugehörigen Flächenlast $p = p_z$ in Richtung der Wanddickenkoordinate z ,
- dieser Grundspannungszustand beim linearen Stabilitäts-Problem muß bekannt sein (z.B. durch Lösung des zugehörigen Variationsproblem),
- in dem Drehglied werden die aus $\dot{\chi}^k dt$ resultierenden Verdrehungen χ und ψ nicht variiert, da sie die Änderung der Metrik darstellen und keine zu variiierenden Verformungsgrößen,
- die Zwangsbedingung in (3.3.2.5) für die Meridianverdrehung χ ergibt eine Nebenbedingung, die zusätzlich aufgenommen werden muß,
- die Zwangsbedingung in (3.3.2.5) für die Breitenkreisverdrehung ψ muß noch zur Elimination von ψ verwendet werden:

$$\begin{aligned} \delta I = & \delta \int \left[\frac{1}{2} \left(\underline{\varepsilon}^T \underline{E}^T \underline{\varepsilon} h + \underline{\kappa}^T \underline{E}^T \underline{\kappa} \frac{h^3}{12} \right) - \underline{p}^T \underline{v} \right] dA + \\ & + \underbrace{\alpha \int p \left[\chi \delta \left(\overbrace{v_r c + v_y s}^{\delta v_\varphi} \right) + \psi \delta v_\vartheta \right] dA}_{\text{Drehglied, die Verdrehungen } \chi \text{ und } \psi \text{ werden nicht variiert}} + \underbrace{\alpha \delta \int \underline{n}^T \underline{\varepsilon}_n dA}_{\text{geometr.nichtlin. Glied}} + \\ & - \underbrace{\omega^2 \delta \frac{1}{2} \int \rho \left[\underline{v}^T \underline{v} h + (\chi^2 + \psi^2) \frac{h^3}{12} \right]}_{\text{Trägheitsglied}} + \underbrace{\delta \int \lambda (\chi - v_r' s + v_y' c) dA}_{\text{Nebenbedingung}} \end{aligned} \quad (3.5.2.6)$$

Dabei sind:

- $(\)' = \frac{\partial(\)}{\partial \bar{s}}, \quad (\)\dot{\ } = \frac{\partial(\)}{\partial \vartheta}, \quad s = \sin \varphi, \quad c = \cos \varphi$

- Element der Schalenmittelfläche (SMF): $dA = r d\vartheta d\bar{s}$
- Mittelflächenverzerrungen aus (3.3.2.5) :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^T = (\varepsilon_\varphi, \varepsilon_\vartheta, \gamma_{\varphi\vartheta})$$

- Krümmungsänderungen aus (3.3.2.5) :

$$\underline{\underline{\kappa}}^T = (\kappa_\varphi, \kappa_\vartheta, \omega_{\varphi\vartheta})$$

- Elastizitätsmatrix : $\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} H & \nu H & 0 \\ \nu H & H & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix}, \quad H = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

- Flächenlasten auf der SMF :

$$\underline{\underline{p}}^T = (p_r, p_y, p_\vartheta), \quad p_r = p_z s + p_\varphi c, \quad p_y = -p_z c + p_\varphi s$$

- Verschiebungen der SMF : $\underline{\underline{v}}^T = (v_r, v_y, v_\vartheta)$

- Verdrehungen der SMF aus (3.3.2.5) : χ, ψ

- Membranschnittgrößen des Grundspannungszustandes:

$$\underline{\underline{n}}^T = (n_\varphi, n_\vartheta), \quad \underline{\underline{p}} = \frac{n_\varphi}{r_1} + \frac{n_\vartheta}{r_2}$$

- nichtlineare Verzerrungsglieder : $\underline{\underline{\varepsilon}}_n^T = (\varepsilon_{n\varphi}, \varepsilon_{n\vartheta})$

$$\varepsilon_{n\varphi} = \frac{1}{2} \left[(v_r' c + v_y' s)^2 + v_\vartheta'^2 + \chi^2 \right] = \frac{1}{2} (v_r'^2 + v_y'^2 + v_\vartheta'^2)$$

$$\varepsilon_{n\vartheta} = \frac{1}{2r^2} \left[(v_r + \dot{v}_\vartheta)^2 + \dot{v}_y^2 + (\dot{v}_r - v_\vartheta)^2 \right]$$

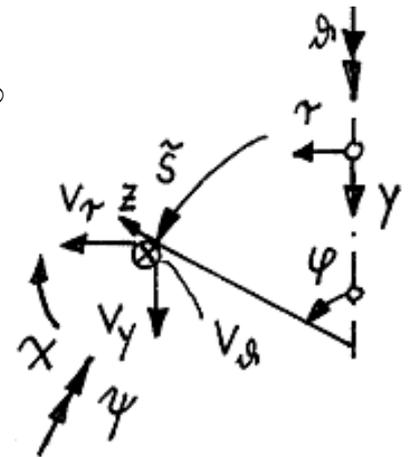


Abbildung 3.5.4: Definition der Verformungen

3.5.2.2 Kanonisches Differentialgleichungssystem

Die Gleichung (3.5.2.6) hat die Form:

$$\delta I = \delta \int U(\tilde{s}, \vartheta) d\vartheta d\tilde{s} = 0 \quad (3.5.2.7)$$

$$I = \int U(\tilde{s}, \vartheta) d\vartheta d\tilde{s} = \text{Min. (Extremum)}$$

Es handelt sich um ein 2D-Variationsproblem. Die dazugehörigen Euler-Lagrangeschen-Differentialgleichungen sind lineare, partielle Differentialgleichungen. Zur Überführung in ein 1D-Variationsproblem (Reduktionsverfahren: Reduktion von 2D- auf 1D-Problem) werden wie bei der Membrantheorie mit (3.5.1.5) Ansatzfunktionen (Fourier-Reihen) der Formen (A) und (B) für die Abhängigkeit vom Breitenkreiswinkel ϑ eingeführt.

Zur Vermeidung von 2.Ableitungen in den Euler-Lagrangeschen-Differentialgleichungen werden gemäß dem Formalismus von Hamilton-Jacobi (3.4.2.3) Hilfsgrößen Z_k eingeführt. Die Dgln. sind hier schon für das 1D-Problem formuliert:

$$\text{Differentialgleichungen: } \left(\frac{\partial U}{\partial v'_k} \right)' - \frac{\partial U}{\partial v_k} = 0 \quad , \quad v_k = v_r, v_y, v_\vartheta, \chi$$

$$\text{Hamilton-Jacobi: } Z_k = \frac{\partial U}{\partial v'_k} \quad , \quad Z'_k = \frac{\partial U}{\partial v_k}$$

$$\text{außerdem aus Nebenbedingung: } \frac{\partial U}{\partial \lambda} = \chi - (v'_r s - v'_y c) = 0$$

$$\text{Die Form (A) wird gewählt für: } f_A = v_r, v_y, \chi, Z_r, Z_y, Z_\chi, p_r, p_y \quad (3.5.2.8)$$

$$\text{und die Form (B) für: } f_B = v_\vartheta, Z_\vartheta, p_\vartheta$$

Die Reihen für die Flächenlasten p_r , p_y , p_ϑ und für die vorhandenen Randbeanspruchungen ergeben sich durch Fourierreihenentwicklung aus den bekannten äußeren Belastungen.

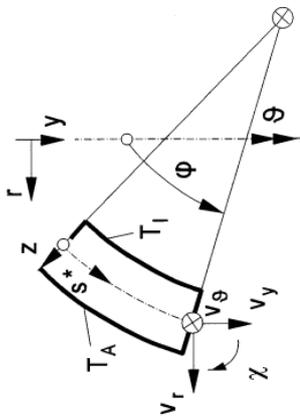
- Durch die Einführung der o.a. Ansatzfunktionen (Fourierreihen) entkoppeln die Euler-Lagrangeschen-Differentialgleichungen, wie schon bei der Membrantheorie gezeigt, für jedes Glied m der Fourierreihen. Statt einem partiellen Differentialgleichungssystem ergibt sich für jedes Glied m der Fourierreihen ein (von den anderen Reihengliedern entkoppeltes) gewöhnliches Differentialgleichungssystem.
- Die Integration über den Breitenkreiswinkel ϑ kann analytisch durchgeführt werden. Der allen Gliedern gemeinsame Faktor 2Π für $m=0$ bzw. Π für $m>0$ aus den Integralen $\int \sin^2 m\vartheta \cdot d\vartheta$ und $\int \cos^2 m\vartheta \cdot d\vartheta$ kann in (3.5.2.7) ausgeklammert und gestrichen werden.
- Für jedes Glied m der Fourierreihen ergibt sich nach Elimination der Größen, die nicht nach der Meridianbogenkoordinate abgeleitet auftreten und entsprechender Teilinversion, analog wie in 0 bei der Rotationsschale mit rotationssymmetrischer Belastung ein kanonisches Differentialgleichungssystem

$$\underline{y}'_m = \underline{B}_m \cdot \underline{y}_m, \quad \underline{y}_m^T = \left(\underline{v}_m^T \quad \underline{z}_m^T \quad 1 \right) \quad (3.5.2.9)$$

- Mit den zugehörigen RBn. liegt damit für das statische Problem und für die erzwungenen Schwingungen eine Anfangswertaufgabe (3.4.3.7) vor.

Das kanonische Dgl.-System und die Matrix zur Spannungsberechnung sind in den 3 nachfolgenden Abbildungen dargestellt.

Kanonisches Dgl.-System für die Rotationsschale (m-tes Fourierreihenglied), dimensionslos (Teil I)



$$\underline{y}' = \begin{pmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} & -B_{00}^T \end{pmatrix} \underline{y} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}, \quad B_{10} = \underline{B}_{10}^s + \underline{B}_{10}^d, \quad ()' = \frac{d()}{ds^*}$$

$$\underline{y}^T = (v_r, v_\vartheta, v_\gamma, \chi, r n_r, r n_\vartheta, r n_\gamma, r m_\varphi)$$

statisch: $n_\varphi = 0, \quad n_\vartheta = 0, \quad p = 0, \quad \omega^2 = 0$

freie Schwingungen: Eigenwertparameter ω^2

$$s = \sin \varphi, \quad c = \cos \varphi$$

$$\alpha = \lambda \frac{\sigma_0}{E_0}, \quad \beta = \frac{h_0}{l_0}, \quad \gamma = \omega^2 \rho h r$$

$$D = \frac{Eh}{1 - \mu^2}, \quad D_1 = D + n_\varphi, \quad D_2 = D \left(1 - \mu^2 \frac{D}{D_1} \right)$$

$$K = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}, \quad K_1 = \frac{Eh^3}{12}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}, \quad M = \frac{Gh^3}{12}$$

$$L = Gh, \quad L_1 = L + n_\varphi, \quad L_2 = L \left(1 - \frac{L}{L_1} \right)$$

$$T_M = \alpha_T \frac{T_A + T_I}{2}, \quad T_B = \alpha_T (T_A - T_I)$$

$$\omega_0^2 = \frac{E}{\rho_0 l_0^2}, \quad m_0 = \sigma_0 h_0^2, \quad \chi_0 = \frac{\sigma_0 l_0}{E_0 h_0}, \quad r_0 = s_0^* = l_0$$

erzwungene Schwingung: $n_\varphi = 0, \quad n_\vartheta = 0, \quad p = 0, \quad T_M = T_B = 0$

lineare Stabilität: Eigenwertparameter λ , Membrangrundzustand: $n_\varphi, \quad n_\vartheta, \quad p_z$

$$n_\varphi = \alpha n_\varphi, \quad n_\vartheta = \alpha n_\vartheta, \quad p = \alpha p_z, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = 0$$

$$v_0 = \frac{\sigma_0}{E_0} l_0, \quad p_0 = \sigma_0 \frac{h_0}{l_0}, \quad T_0 = \frac{\sigma_0}{E_0}$$

Teil2:

Kanonisches Dgl.-System für die Rotationsschale (m-tes Fourierreihenglied), dimensionslos (Teil 2)

$$\begin{aligned}
 \underline{B}_{00} &= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -\frac{\mu c}{r} \frac{D}{D_1} & -\frac{\mu c m}{r} \frac{D}{D_1} & 0 & \frac{s}{\beta} \\ \hline \frac{c m}{r} \frac{L}{L_1} & \frac{c}{r} \frac{L}{L_1} & \frac{s m}{r} \frac{L}{L_1} & 0 \\ \hline -\frac{\mu s}{r} \frac{D}{D_1} & -\frac{\mu s m}{r} \frac{D}{D_1} & 0 & -\frac{c}{\beta} \\ \hline \frac{\mu s m^2}{r^2} \beta & \frac{\mu s m}{r^2} \beta & -\frac{\mu c m^2}{r^2} \beta & -\frac{\mu c}{r} \\ \hline \end{array} \\
 \underline{B}_{01} &= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \frac{c^2}{D_1 r} & & & \text{symm.} \\ \hline 0 & \frac{1}{L_1 r} & & \\ \hline \frac{c s}{D_1 r} & 0 & \frac{s^2}{D_1 r} & \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K r} \\ \hline \end{array} \\
 \underline{B}_{10}^s &= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \frac{D_2 + n_\phi}{r} (1+m^2) + \frac{m^2}{r} c^2 L_2 + \left(\frac{s m \beta}{r}\right)^2 K_1 & & \dots + m p s & \\ \hline m \left(\frac{D_2 + 2 n_\phi}{r} - p s \right) + \frac{m}{r} c^2 L_2 + \left(\frac{s m \beta}{r}\right)^2 K_1 & \frac{m^2}{r} D_2 + \frac{n_\phi}{r} (1+m^2) - p s + \frac{1}{r} c^2 L_2 + \left(\frac{s m \beta}{r}\right)^2 K_1 & \text{symm.} & \dots + m p c \\ \hline \frac{c s m^2}{r} L_2 - \left(\frac{m \beta}{r}\right)^2 K_1 & \frac{c s m}{r} L_2 - \left(\frac{m \beta}{r}\right)^2 K_1 & \frac{m^2}{r} s^2 L_2 + \left(\frac{c m \beta}{r}\right)^2 K_1 + 4 \beta^2 M + n_\phi & \dots + p r s \frac{1}{\beta} \\ \hline -\frac{c s m^2 \beta}{r^2} K_1 & -\frac{c s m \beta}{r^2} K_1 & \frac{m^2}{r^2} \beta (c^2 K_1 + 4 M) & \frac{c^2}{r} K_1 + \frac{4 m^2}{r} M + \frac{r}{\beta^2} n_\phi \\ \hline \end{array} \\
 \underline{B}_{10}^d = \gamma &= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -\left[1 + \frac{1}{12} \left(\frac{s m h \beta}{r} \right)^2 \right] & \text{symm.} & & \\ \hline -\frac{m}{12} \left(\frac{s h \beta}{r} \right)^2 & & & \\ \hline \frac{c s}{12} \left(\frac{m h \beta}{r} \right)^2 & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & -\frac{h^2}{12} \\ \hline \end{array} \\
 & \quad \underline{b}_0 = \begin{array}{|c|} \hline (1+\mu) c T_M \\ \hline 0 \\ \hline (1+\mu) s T_M \\ \hline -\frac{(1+\mu)}{h} T_B \\ \hline \end{array} \\
 & \quad \underline{b}_1 = \begin{array}{|c|} \hline -r(p_\phi c + p_z s) - E h \left(T_M + \frac{s m^2 h \beta}{12 r} T_B \right) \\ \hline -r p_\phi - m E h \left(T_M + \frac{s h \beta}{12 r} T_B \right) \\ \hline -r(p_\phi s - p_z c) - E h^2 \frac{c m^2 \beta}{12 r} T_B \\ \hline E h^2 \frac{c}{12} T_B \\ \hline \end{array}
 \end{aligned}$$

Abbildung 3.5.6: kan.-Dgl.-System, Koeffizienten-Matrizen

Teil3:

Spannungsberechnung für die Rotationsschale (m-tes Fourierreihenglied), dimensionslos (Teil 3)

$$\psi \text{ - Verdrehung der Breitenkreistangente, Normalspannungen: } \sigma_\varphi = \sigma_{\varphi M} - \sigma_{\varphi B} \frac{2z}{h}, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2},$$

$$\text{Schubspannungen: } \tau_{\varphi\theta} = \tau_{\varphi\theta M} - \tau_{\varphi\theta B} \frac{2z}{h}, \quad \sigma_\theta = \sigma_{\theta M} - \sigma_{\theta B} \frac{2z}{h},$$

$$\text{Vergleichsspannungen: } \sigma_v(z) = \left(\sqrt{\sigma_\varphi^2 - \sigma_\varphi \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 + 3\tau_{\varphi\theta}^2} \right)_z, \quad \sigma_{vA} = \sigma_v \left(\frac{h}{2} \right), \quad \sigma_{vI} = \sigma_v \left(-\frac{h}{2} \right)_B$$

Die Querkraftschubspannungen $\tau_{\varphi z M}, \tau_{\theta z M}$ gelten für $z=0$ (außen und innen gleich Null)

\underline{C}	v_r	v_θ	v_y	χ	m_r	$m_{\varphi\theta}$	m_y	m_φ	1
ψ	$-\frac{\beta m}{r} s$	$-\frac{\beta}{r} s$	$-\frac{\beta m}{r} c$	0	0	0	0	0	0
$\sigma_{\varphi M}$	0	0	0	0	$\frac{c}{hr}$	0	$\frac{s}{hr}$	0	0
$\sigma_{\varphi B}$	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{6}{h^2 r}$	0
$\sigma_{\theta M}$	$\frac{E}{r}$	$\frac{Em}{r}$	0	0	$\frac{\mu c}{hr}$	0	$\frac{\mu s}{hr}$	0	$-\frac{ET_M}{2}$
$\sigma_{\theta B}$	$-\frac{E}{2r^2} \beta h m^2 s$	$-\frac{Em}{2r^2} \beta h s$	$\frac{E}{2r^2} \beta h m^2 c$	$\frac{E}{2r} hc$	0	0	0	$\frac{6\mu}{h^2 r}$	$\frac{ET_B}{2}$
$\tau_{\varphi\theta m}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{hr}$	0	0	0
$\tau_{\varphi\theta B}$	0	0	$-\frac{G\beta h m}{r^2}$	$-\frac{G h m}{r}$	0	$-\frac{\beta(3s - r\kappa)}{2r^2}$	0	0	0
$\tau_{\varphi z M}$	0	0	$-\frac{G\beta^2 h^2 m^2}{4r^3}$	$-\frac{G\beta h^2 m^2}{4r^2}$	$\frac{3s}{2hr}$	$-\frac{\beta^2 h m}{8r^3} (2s - r\kappa)$	$-\frac{3c}{2hr}$	0	0
$\tau_{\theta z M}$	$\frac{G\beta^2 h^2 m}{4r^3} [(1 - m^2)s - r\kappa]$	$-\frac{G\beta^2 h^2 m^2}{4r^2} \kappa$	$\frac{G\beta^2 h^2 m^3}{4r^3} c$	$\frac{G\beta h^2 m}{4r^2} c$	$\frac{\beta^2 h m}{8r^3} (s - r\kappa)c$	0	$\frac{\beta^2 h m}{8r^3} (s - r\kappa)s$	$\frac{3\beta m}{2hr^2}$	0

Abbildung 3.5.7: Matrix zur Spannungsberechnung

3.5.2.3 Lösung der AWA

- Die Lösungen für die einzelnen Reihenglieder konvergieren mit wachsendem Index m i.a. sehr schnell, auch dann, wenn die Reihen für die Lasten infolge örtlicher Lastkonzentrationen schlechter konvergieren. Diese gute Konvergenz liegt daran, daß eine Rotationsschale gegenüber einem Lastglied mit großem m (z.B. $p_z = p_{zAm}(\tilde{s}) \cdot \sin m\vartheta$) relativ steif ist. Deshalb kann die Reihe oft schon nach wenigen Lastgliedern abgebrochen werden.
- beim Eigenwertproblem des Stabilitäts-Problems mit dem Eigenwertparameter $\beta = \alpha$ (Lastfaktor des rotationssymmetrischen Membran-Grundspannungszustandes mit $m=0$) und beim Eigenwertproblem der freien Schwingungen mit dem Eigenwertparameter $\beta = \omega^2$ (Quadrat der Winkelgeschwindigkeit der Schwingung) werden die Eigenwerte β_e nach dem Restwertverfahren bei vorgegebener Fourierordnung m ermittelt. Restwert ist der Wert der Determinante $\det(\underline{G})$ der Koeffizientenmatrix \underline{G} des Gleichungssystems am Endrand aus (3.4.3.6). Für jeden diskreten Eigenwertparameter β_n muß dabei eine Anfangswertaufgabe (3.4.3.7) gelöst werden, wie in Abbildung 3.5.8 schematisch skizziert. Bei einem Vorzeichenwechsel der Determinante wird durch weitere numerische Integrationen der AWA der zwischenliegende Eigenwert interpoliert. Bei vorliegendem Eigenwert ist die Koeffizientenmatrix \underline{G} des Gleichungssystems singulär (homogenes Problem: homogene Dgl., homogene RBn.), d.h. die Gleichungen sind linear abhängig. Die Eigenvektoren sind nur bis auf einen beliebigen Faktor bestimmt. Deshalb wird bei bekanntem Eigenwert eine Normierung vorgenommen, d.h. die RBn. am Endrand werden durch Vorgabe einer dort nicht verschwindenden Komponente des Zustandsvektors \underline{y} verändert. Damit sind die Eigenvektoren normiert und die lineare Abhängigkeit der Gleichungen beseitigt.

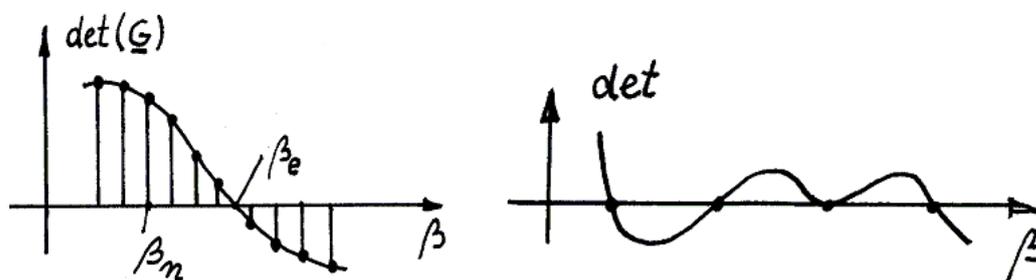


Abbildung 3.5.8: Restwertkurve

Die Schrittweite für den Eigenwertparameter β darf dabei nicht zu groß sein, damit zwischen zwei benachbarten diskreten Punkten auf der Restwertkurve nicht mehrere Eigenwerte liegen. Dafür läßt sich aber kein Kriterium angeben. Eine Überprüfung der Eigenvektoren gibt Anhaltspunkte, ob Eigenwerte übersprun-

gen wurden. Die Eigenvektoren des nächstgrößeren Eigenwertes haben i.A. ei-
nen Knoten mehr (also einen örtlichen Nulldurchgang mehr in der Beul- oder
Schwingform).

1. statisches Problem:

- Für jedes Glied m der Fourierreihen wird (3.5.2.9) numerisch über \tilde{s} integriert $\Rightarrow \underline{y}_m(\tilde{s}_i)$ und $\underline{y}'_m(\tilde{s}_i)$ an den diskreten Stellen \tilde{s}_i .
- Mit den aus der Entwicklung der äußeren Lasten bekannten Fourierkoeffizienten a_m und b_m wird entsprechend (3.5.1.5), (3.5.2.8) die Fouriersynthese für diskrete Winkel ϑ_k durchgeführt $\Rightarrow \underline{y}(\tilde{s}_i, \vartheta_k)$, $\underline{y}'(\tilde{s}_i, \vartheta_k)$

2. freie und erzwungene harmonische Schwingungen:

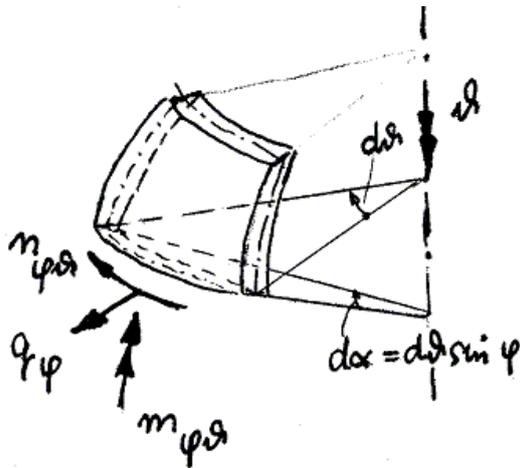
- Beim Eigenwertproblem der freien Schwingung werden für jeweils eine vorgegebene Fourierordnung m die zugehörigen Eigenwertprobleme gelöst und damit das Eigenwertspektrum bestimmt.
- Eigenvektoren sind die diskreten Schwingformen (Amplituden der Schwingungen).
- Die numerische Lösung der Anfangswertaufgabe der erzwungenen Schwingungen für vorgegebene Erregung mit der Winkelgeschwindigkeit ω ergibt als Lösungen ebenfalls die Amplituden der Schwingungen.

3. Stabilitäts-Problem:

- Beim Stabilitäts-Problem wird der Grundspannungszustand entsprechend (3.5.2.5) durch numerische Integration der zugehörigen Anfangswertaufgabe nach der Membrantheorie bestimmt.
- Daran anschließend erfolgt die Lösung des Eigenwertproblems mit dem Eigenwertparameter $\beta = \alpha$ wie oben beschrieben.
- Eigenvektoren sind die diskreten Beulformen.

3.5.2.4 Ersatzkräfte

Schon bei der Rechteckplatte mußte mit (3.2.7.4) eine Ersatzquerkraft eingeführt werden. Bei der Rotationschale mit beliebiger Belastung ist das analog. Infolge der



kinematischen Annahme (3.3.2.2) (Normalenhypothese) gibt es an einem Rand $\tilde{s} = \text{konst.}$ nur vier Verformungsgrößen ($v_{\varphi}, v_{\vartheta}, v_z, \chi$) (ψ wird, da keine Ableitungen nach \tilde{s} auftreten, über die Nebenbedingung in (3.3.2.2) eliminiert) aber fünf Kraftgrößen $(n_{\varphi}, n_{\varphi\vartheta}, q_{\varphi}, m_{\varphi}, m_{\varphi\vartheta})$

die statisch äquivalent den vier Verformungsgrößen zugeordnet werden müssen. Das Drillmoment wird statisch äquivalent auf die Querkraft und die Schubkraft aufgeteilt. Diese statische Äquivalenz ergibt sich rein formal aus den RBN. des Variationsproblems, kann aber auch anschaulich erläutert werden:

Abbildung 3.5.9: Schnittgrößen bei $s = \text{konst.}$

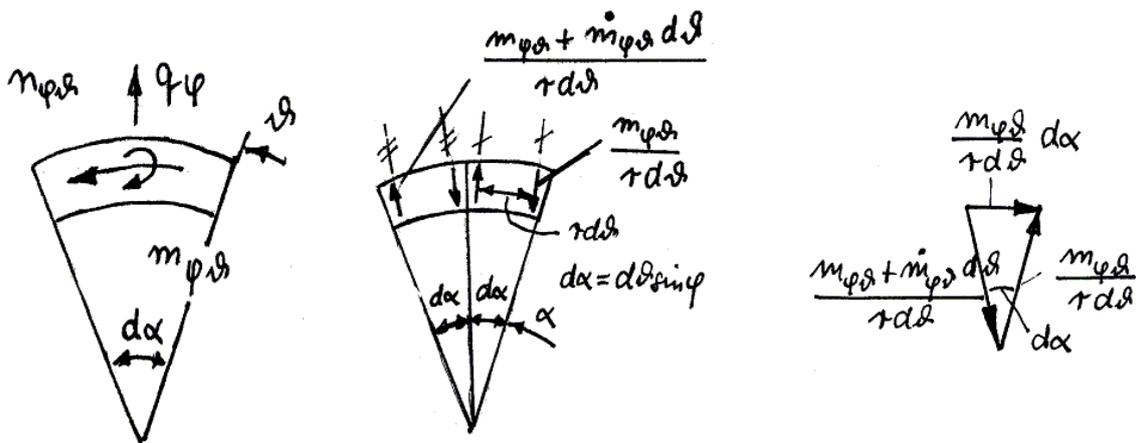


Abbildung 3.5.10: Aufteilung des Drillmomentes

Die Äquivalenzbedingungen sind:

$$\rightarrow: \frac{m_{\varphi\vartheta}}{rd\vartheta} d\alpha = \frac{m_{\varphi\vartheta}}{r} \sin \varphi, \quad \uparrow: \frac{1}{r} \dot{m}_{\varphi\vartheta}$$

$$\bar{n}_{\varphi\vartheta} = n_{\varphi\vartheta} - \frac{m_{\varphi\vartheta}}{r} \sin \varphi \quad \text{Ersatzschubkraft} \tag{3.5.2.10}$$

$$\bar{q}_{\varphi} = q_{\varphi} - \frac{1}{r} \dot{m}_{\varphi\vartheta} \quad \text{Ersatzquerkraft}$$

3.5.2.5 Beispiel: Zylinderschale mit Randquerkraft

Dieses Modell wurde schon im Teil 1 des Manuskriptes (Stabtragwerke) als Beispiel: Querkraftbiegung eines Stabes mit Kreisprofil und in 3.5.1.7 mit der Membrantheorie behandelt.

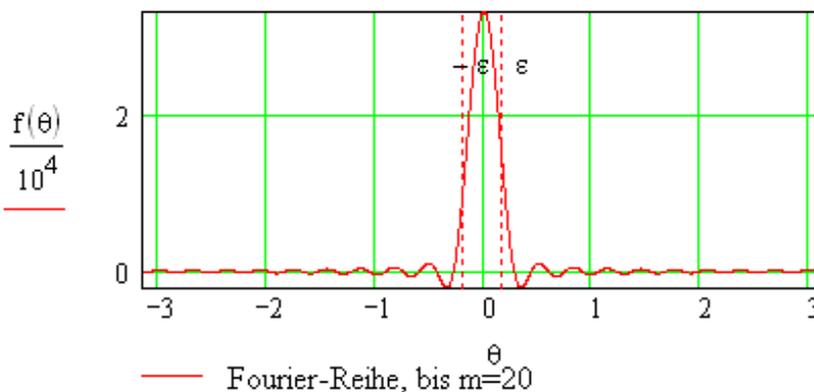
Eine Zylinderschale wird durch eine Querkraft F beansprucht.

Es sind die Spannungen und die maximale Durchbiegung nach der Biegetheorie zu berechnen.

Geg.: E-Modul $E=2 \cdot 10^5 \text{MPa}$, Querdehnungszahl $\nu=0.3$, Länge $L=800 \text{mm}$, Radius $R=100 \text{mm}$, Wanddicke $h=4 \text{mm}$, Kraft $F=10^4 \text{N}$

Ges.: Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsenergiehypothese, Verschiebung v_r .

Die Geometrie der Schale ist in Abbildung 3.5.3 dargestellt. Um nicht unzulässig hohe Spannungen zu berechnen, wurde der Endquerschnitt mit der Lasteinleitung



durch einen Kreisring aus gleichem Material versteift (Wanddicke $h=4 \text{mm}$, Innenradius $R_i=50 \text{mm}$). Die Einleitung der Einzelkraft erfolgte als konstante Linienlast auf dem Umfangswinkel $-\varepsilon < \vartheta < \varepsilon$, $\varepsilon = 10^\circ$. Die Fourierreihe für die Last $Z_r=q_r R$

Abbildung 3.5.11: *Fourierreihe der Linienlast*

in radialer Richtung wurde bis zum Glied mit $m=20$ mitgenommen.

$$f(\vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{20} a_m \cos(m\vartheta) \quad (3.5.2.11)$$

$$a_m = \frac{f_0}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \cos(m\vartheta) d\vartheta, \quad f_0 = \frac{F}{2\pi}$$

Die Vergleichsspannung ist in Abbildung 3.5.12 dargestellt. Spannungskonzentrationen sind rechts am Ort der Lasteinleitung und links an der Einspannung. Der

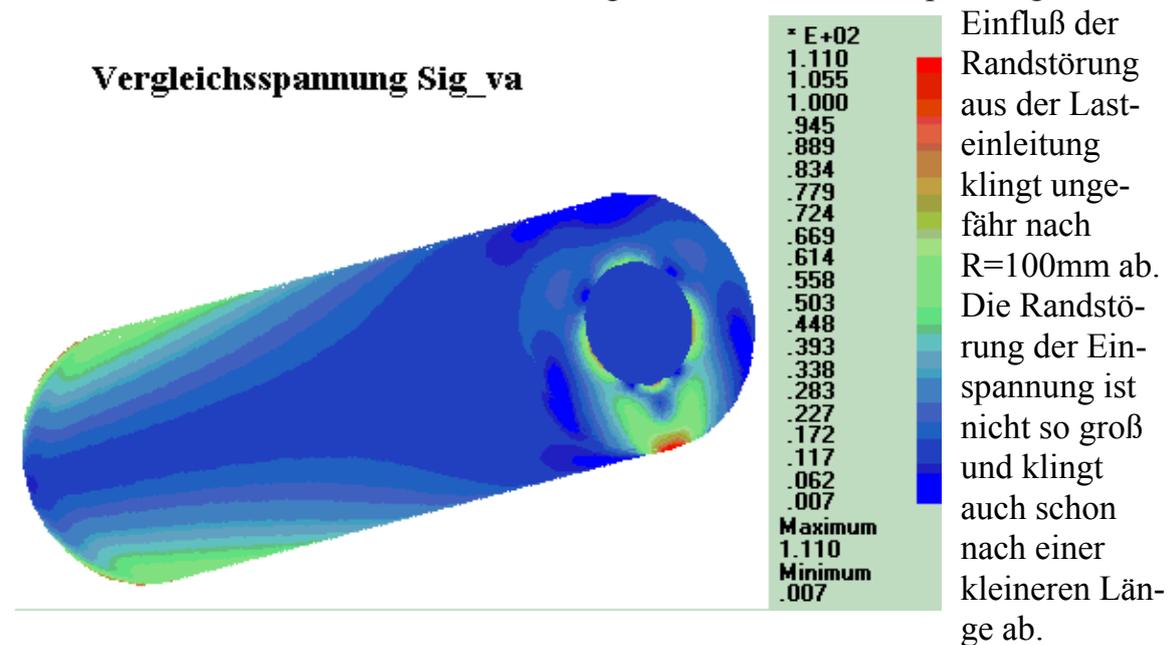


Abbildung 3.5.12: Vergleichsspannung an der Außenfläche

Die Radialverschiebung der Schalenmittelfläche ist Abbildung 3.5.13 zu entnehmen. Nach der Balkentheorie mit Berücksichtigung der Querkraftschubverzerrung

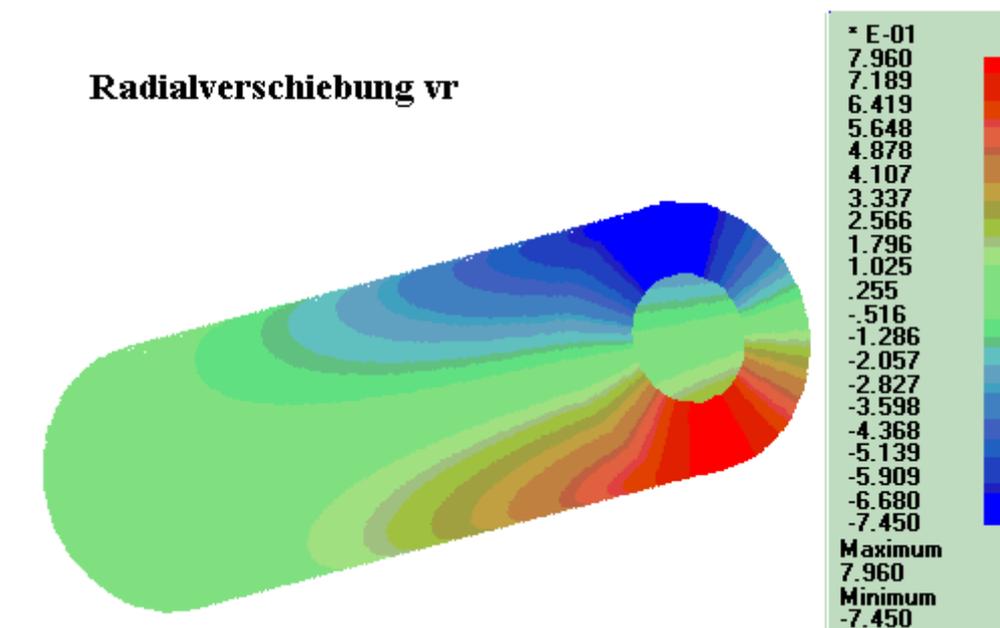


Abbildung 3.5.13: Radialverschiebung

und nach der Membrantheorie war $v_{\max}=0.762\text{mm}$.

Hier ist $-0.745\text{mm} < v_r < 0.796\text{mm}$. Der Unterschied zwischen dem Betrag des minimalen und dem maximalen Wert ist durch die Abweichung von der Kreisform des verformten Zylinders begründet.

Für das Lasteinleitungsproblem waren die Balkentheorie und die Membrantheorie ungeeignet, lieferten also an der Lasteinleitung keine brauchbaren Spannungen.

3.6 Zusammenfassung

Bei Flächentragwerken gibt es eine Vorzugsrichtung, die Koordinate in Richtung der Wanddicke. Es gilt, die Wanddicke ist klein gegenüber den anderen Abmessungen. Scheiben und Platten sind ebene Flächentragwerke, die sich durch ihre Beanspruchung unterscheiden. Eine Schale ist einfach (z.B. Kreiszylinderschale) oder doppelt gekrümmt (z.B. Kugelschale). Bei Schalen ist die Wanddicke klein gegenüber den Krümmungsradien.

In der Vorzugsrichtung werden kinematische und kinetische Annahmen getroffen. Damit kann über diese Richtung integriert werden und aus dem 3D-Problem wird über diese Reduktion ein 2D-Problem.

Bei Rotationsschalen kann auch noch in Richtung des Umfangswinkels reduziert werden.

Das damit entstehende 1D-Problem wird in das zugehörige kanonische Dgl.-System überführt und mit dem Runge-Kutta-Vierschrittverfahren numerisch integriert.

Es werden die Membrantheorie und die Biegetheorie vorgestellt. Bei rotations-symmetrischer Belastung und nicht mehr kleinen Verformungen ist es möglich über eine Zuwuchsformulierung lineare Dgln. in den Zuwüchsen zu erhalten.

Für nichtrotationssymmetrische Spannungs- und Verformungszustände erfolgt die Herleitung der Dgln. für statische Beanspruchung, für freie und erzwungene harmonische Schwingungen und für das Verzweigungsproblem der linearen Stabilität.

Verzeichnis der Abbildungen

Abbildung 3.1.1: Scheibe, Platte, Schale (2D-Kontinua)	3
Abbildung 3.1.1: Element dA der Scheibenmittelfläche	5
Abbildung 3.1.2: Rechteckscheibe	8
Abbildung 3.1.3: Vergleichsspannung, RBn. oberer Rand: $v_x(x,0) \neq 0$, $v_y(x,0) = 0$	10
Abbildung 3.1.4 Vergleichsspannung, RBn. oberer Rand: $v_x(x,0) = 0$, $v_y(x,0) = 0$	10
Abbildung 3.2.1: Element dA der Plattenmittelfläche	13
Abbildung 3.2.2: Ersatzquerkraft	15
Abbildung 3.2.3: Rechteckplatte mit Flächenlast	17
Abbildung 3.2.4: Lösung $p(x,y)$ und $w(x,y)$ für eine Quadratplatte	18
Abbildung 3.2.5: Flächenlastfunktion $f_x(x)$	19
Abbildung 3.3.1: Geometrie der Rotationsschale	20
Abbildung 3.3.2: Element ds der Schalenmittelfläche	20
Abbildung 3.3.3: Verformungen der Rotationsschale	23
Abbildung 3.3.4: körperfeste Verschiebungen v_ϕ und v_z	24
Abbildung 3.3.5: raumfeste Verschiebungen v_r und v_y	24
Abbildung 3.3.6: Kugelschale unter Innendruck	28
Abbildung 3.3.7: Trapezeffekt	29
Abbildung 3.3.8: Schnittgrößen der Rotationsschale	31
Abbildung 3.4.1: spezifische innere Energie W_i^* , Endwertarbeit W_a der Volumenkraft f_r	33
Abbildung 3.4.2: Kreisscheibe (ein Viertel)	34
Abbildung 3.4.3: Element der Scheibenmittelfläche	36
Abbildung 3.4.4: Kreisringscheibe	41
Abbildung 3.4.5: Runge-Kutta-Vierschritt-Integration über einen Abschnitt dx	43
Abbildung 3.4.6: Abklingverhalten der Lösung	48
Abbildung 3.4.7: Modell Platte-Zylinder	58
Abbildung 3.4.8: Plattendurchbiegung w	59
Abbildung 3.4.9: Zylinderaufweitung v_r	59
Abbildung 3.4.10: RoScha-Vergleichslösung	60
Abbildung 3.4.11: kartesisches Koordinatensystem	60
Abbildung 3.4.12: raumfeste Verformungen	61
Abbildung 3.4.13: konvektive Koordinate der Rotationsschale	61
Abbildung 3.4.14: Integration der AWA-RWA	69
Abbildung 3.4.15: Kreisplatte mit unterschiedlicher Lagerung	70
Abbildung 3.4.16: Kreisplatte mit großer Durchbiegung	71
Abbildung 3.5.1: Membranschale mit Randschnittkräften	72
Abbildung 3.5.2: „Balken-Schnitt-größen“ der Membranschale	78
Abbildung 3.5.3: Zylinderschale mit Randquerkraft	79
Abbildung 3.5.4: Definition der Verformungen	86
Abbildung 3.5.5: kan.-Dgl.-System, Definitionen	89
Abbildung 3.5.6: kan.-Dgl.-System, Koeffizienten-Matrizen	90
Abbildung 3.5.7: Matrix zur Spannungsberechnung	91
Abbildung 3.5.8: Restwertkurve	92
Abbildung 3.5.9: Schnittgrößen bei $s = \text{konst.}$	94
Abbildung 3.5.10: Aufteilung des Drillmomentes	94
Abbildung 3.5.11: Fourierreihe der Linienlast	95
Abbildung 3.5.12: Vergleichsspannung an der Außenfläche	96
Abbildung 3.5.13: Radialverschiebung	96

Verzeichnis der Tabellen

Tabelle 3.3.1: Verzerrungs-Verformungs-Beziehungen in physikalischen Koordinaten	22
Tabelle 3.3.2: Fehler bei der Linearisierung in z -Richtung	25

Verzeichnis der Gleichungen

(3.1) 3	
(3.1.1.1).....	4
(3.1.1.2)	4
(3.1.1.3)	4
(3.1.1.4).....	4
(3.1.2.1).....	5
(3.1.2.2).....	5
(3.1.3.1).....	5
(3.1.4.1).....	6
(3.1.5.1).....	6
(3.1.7.1).....	7
(3.1.7.2).....	7
(3.1.7.3).....	8
(3.1.7.4).....	8
(3.1.8.1).....	8
(3.1.8.2).....	9
(3.1.8.3).....	9
(3.2.1.1).....	11
(3.2.1.2).....	11
(3.2.1.3).....	11
(3.2.1.4).....	11
(3.2.2.1).....	12
(3.2.2.2).....	12
(3.2.3.1).....	12
(3.2.4.1).....	13
(3.2.4.2).....	14
(3.2.5.1).....	14
(3.2.7.1).....	15
(3.2.7.2).....	15
(3.2.7.3).....	15
(3.2.7.4).....	16
(3.2.7.5).....	16
(3.2.7.6).....	16
(3.2.8.1).....	17
(3.2.8.2).....	18
(3.3.1).....	21
(3.3.1.1).....	21
(3.3.2.1).....	23
(3.3.2.2).....	23
(3.3.2.3).....	24
(3.3.2.4).....	25
(3.3.2.5).....	26
(3.3.2.6).....	27
(3.3.3.1).....	27
(3.3.3.2).....	27
(3.3.4.1).....	28
(3.3.4.2).....	29
(3.3.4.3).....	29
(3.3.5.1).....	30
(3.3.6.1).....	30
(3.3.6.2).....	31
(3.3.6.3).....	31
(3.3.6.4).....	32
(3.4.1.1).....	32
(3.4.1.2).....	33
(3.4.1.3).....	33
(3.4.1.4).....	34
(3.4.1.5).....	35

(3.4.1.6).....	35
(3.4.1.7).....	35
(3.4.1.8).....	36
(3.4.1.9).....	36
(3.4.1.10).....	36
(3.4.1.11).....	37
(3.4.1.12).....	37
(3.4.1.13).....	37
(3.4.1.14).....	38
(3.4.2.1).....	38
(3.4.2.2).....	38
(3.4.2.3).....	39
(3.4.2.4).....	39
(3.4.2.5).....	39
(3.4.3.1).....	40
(3.4.3.2).....	40
(3.4.3.3).....	41
(3.4.3.4).....	41
(3.4.3.5).....	42
(3.4.3.6).....	42
(3.4.3.7).....	42
(3.4.3.8).....	43
(3.4.3.9).....	44
(3.4.3.10).....	44
(3.4.3.11).....	45
(3.4.3.12).....	45
(3.4.3.13).....	47
(3.4.4.1).....	50
(3.4.4.2).....	51
(3.4.4.3).....	51
(3.4.4.4).....	51
(3.4.4.5).....	52
(3.4.4.6).....	52
(3.4.4.7).....	53
(3.4.4.8).....	53
(3.4.4.9).....	54
(3.4.4.10).....	55
(3.4.4.11).....	55
(3.4.4.12).....	55
(3.4.4.13).....	56
(3.4.4.14).....	56
(3.4.4.15).....	56
(3.4.4.16).....	56
(3.4.4.17).....	57
(3.4.4.18).....	57
(3.4.4.19).....	57
(3.4.4.20).....	58
(3.4.4.21).....	59
(3.4.5.1).....	61
(3.4.5.2).....	62
(3.4.5.3).....	62
(3.4.5.4).....	62
(3.4.5.5).....	62
(3.4.5.6).....	63
(3.4.5.7).....	63
(3.4.5.8).....	63
(3.4.5.9).....	64
(3.4.5.10).....	64
(3.4.5.11).....	64
(3.4.5.12).....	64
(3.4.5.13).....	65

(3.4.5.14).....	65
(3.4.5.15).....	66
(3.4.5.16).....	67
(3.4.5.17).....	70
(3.5.1.1).....	72
(3.5.1.2).....	73
(3.5.1.3).....	73
(3.5.1.4).....	73
(3.5.1.5).....	74
(3.5.1.6).....	74
(3.5.1.7).....	75
(3.5.1.8).....	75
(3.5.1.9).....	76
(3.5.1.10).....	76
(3.5.1.11).....	76
(3.5.1.12).....	77
(3.5.1.13).....	77
(3.5.1.14).....	78
(3.5.1.15).....	78
(3.5.1.16).....	79
(3.5.1.17).....	80
(3.5.1.18).....	80
(3.5.1.19).....	80
(3.5.1.20).....	80
(3.5.1.21).....	81
(3.5.2.1).....	82
(3.5.2.2).....	82
(3.5.2.3).....	83
(3.5.2.4).....	83
(3.5.2.5).....	84
(3.5.2.6).....	85
(3.5.2.7).....	87
(3.5.2.8).....	87
(3.5.2.9).....	88
(3.5.2.10).....	94
(3.5.2.11).....	95

¹ Lehrbuch Höhere Festigkeitslehre, Band 1, VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1979

² Gross, Hauger, Schnell, Wriggers: Technische Mechanik, Band 4, Springer Verlag

³ Göldner Witt: Technische Mechanik I, Fachbuchverlag Leipzig-Köln

⁴ Lehrbuch Höhere Festigkeitslehre, Band 2, VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1985