

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Einführung in die Tensorrechnung</b>	<b>5</b>
2.1	Begriffe und Vereinbarungen . . . . .	5
2.2	Tensorkoordinatentransformation . . . . .	6
2.3	Tensoralgebra . . . . .	7
2.4	Tensoren 2. Stufe . . . . .	9
2.5	Tensorfelder . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Konfiguration, Betrachtungsweise und Bewegung</b>	<b>13</b>
<b>4</b>	<b>Kinematik</b>	<b>17</b>
4.1	Verschiebung, Geschwindigkeit und Beschleunigung . . . . .	17
4.2	Deformationen und Verzerrungen . . . . .	18
4.2.1	Definition von Deformations- und Verzerrungstensoren . . . . .	18
4.2.2	Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Verschiebungen . . . . .	23
4.2.3	Hauptachsentransformation . . . . .	24
4.2.4	Änderung von Flächen- und Volumenelementen . . . . .	27
4.3	Deformationsgeschwindigkeiten . . . . .	28
4.3.1	Definition von Deformationsgeschwindigkeitstensoren . . . . .	28
4.3.2	Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Deformationsgeschwindigkeit . . . . .	30
4.3.3	Zeitableitung von Flächen- und Volumenelementen . . . . .	31
4.4	Beispiel Ebener Schub . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Kinetik</b>	<b>37</b>
<b>6</b>	<b>Bilanzgleichungen</b>	<b>40</b>
6.1	Allgemeine Formulierung von Bilanzgleichungen . . . . .	40
6.2	Massenbilanz . . . . .	42
6.3	Impulsbilanz . . . . .	43
6.4	Drehimpulsbilanz . . . . .	44
<b>7</b>	<b>Thermomechanik</b>	<b>46</b>
7.1	Einführende Bemerkungen . . . . .	46
7.2	Energieerhaltungssatz (1. Hauptsatz der Thermodynamik) . . . . .	47
7.2.1	Globale Formulierung . . . . .	47

7.2.2	Lokale Formulierung . . . . .	49
7.3	Entropieprinzip (2. Hauptsatz der Thermodynamik) . . . . .	51
7.3.1	Entropie und Entropiebilanz . . . . .	51
7.3.2	Globale Formulierung des 2. Hauptsatzes . . . . .	52
7.3.3	Lokale Formulierung des 2. Hauptsatzes . . . . .	53
<b>8</b>	<b>Materialtheorie</b>	<b>54</b>
8.1	Einführung . . . . .	54
8.2	Prinzipien der Materialtheorie . . . . .	55
8.3	Objektive Variablen in der Theorie einfacher Materialien . . . . .	56
8.4	Elastisches Material . . . . .	64

---

# 1 Einleitung

In der Kontinuumsmechanik wird das Verhalten von Körpern unter äußeren Einwirkungen untersucht. Äußere Einwirkungen können beispielsweise Kräfte, Randverschiebungen oder eine Erwärmung des Körpers sein. Dabei werden von vornherein keinerlei Einschränkungen hinsichtlich der Größe der Deformationen bzw. hinsichtlich des vorliegenden Materialverhaltens getroffen. In diesem Sinne bildet die Kontinuumsmechanik einen gemeinsamen theoretischen Rahmen für so verschiedene Materialien wie Festkörper, Flüssigkeit oder Gas.

Während die theoretischen Grundlagen der Kontinuumsmechanik seit vielen Jahrzehnten bekannt sind, hat sich ihre Anwendung erst mit dem Aufkommen der Rechentechnik und der damit verbundenen Entwicklung numerischer Lösungsverfahren verbreitet. Heute bieten die meisten allgemeinen FEM-Programme (z.B. MARC, ABAQUS) die Möglichkeit, Randwertprobleme unter Berücksichtigung großer Verformungen und nichtlinearen Materialverhaltens zu lösen. Darüberhinaus gibt es auf spezielle Anwendungen zugeschnittene Software, die als Grundlage die nichtlineare Kontinuumsmechanik nutzt. Ein Beispiel hierfür ist die Simulation von Umformvorgängen. Für den Ingenieur, der die Modellierung solcher praktischer Probleme unter Nutzung der Rechentechnik durchzuführen hat, sind damit Grundkenntnisse des theoretischen Hintergrundes unentbehrlich.

Das wesentliche an einer kontinuumsmechanischen Modellierung besteht darin, daß der atomare oder mikrostrukturelle Aufbau der Körper vollkommen vernachlässigt wird. Der Körper wird als strukturloses Kontinuum betrachtet, welches aus einer zusammenhängenden Menge materieller Punkte besteht. Diesen Punkten sind Werte physikalischer Größen, wie Verschiebungen oder Spannungen, zugeordnet. Man spricht dann von Feldern, an die gewisse Stetigkeitsforderungen gestellt werden. Neben der Definition werden die Beziehungen zwischen den physikalischen Größen in dem Umfang abgeleitet, daß die Berechnung der Bewegung eines Körpers bei vorgegebenen Randbedingungen prinzipiell möglich ist. Das ist sicher dann der Fall, wenn genau so viele unabhängige Gleichungen zur Verfügung stehen, wie unbekannte Größen in ihnen vorkommen. Die dazu erforderlichen Gleichungen lassen sich in drei große Gruppen einordnen: den kinematischen Beziehungen, den Bilanzgleichungen sowie den konstitutiven Beziehungen. Während die Gleichungen der beiden ersten Gruppen stoffunabhängig sind, kommen durch die konstitutiven Beziehungen die unterschiedlichen Eigenschaften der einzelnen Materialien zum Tragen. Wie bereits oben angeführt, erfolgt dabei die Beschreibung des Materialverhaltens rein phänomenologisch.

Die Gesamtheit der notwendigen Gleichungen zur Lösung des Randwertproblems ergeben die Feldgleichungen. Es handelt sich dabei in der Regel um ein System gekoppelter

nichtlinearer partieller Differentialgleichungen. Eine Lösung des Randwertproblems wird deswegen nur numerisch zu erhalten sein.

Gegenstand des vorliegenden Lehrbriefes ist die Zusammenstellung der Feldgleichungen, auf die numerische Lösung wird dagegen nicht eingegangen. Um bei der Zusammenstellung der Gleichungen eine gewisse Systematik zu erreichen, ist es sinnvoll, die für die Lösung des Randwertproblems gesuchten Funktionen zu definieren. Daraus lassen sich dann Anhaltspunkte ableiten, von welchem prinzipiellen Aufbau der konstitutiven Gleichungen man auszugehen hat.

Die Darstellung in diesem Lehrbrief erfolgt sowohl in der symbolischen Tensorschreibweise als auch der vielleicht etwas bekannteren Koordinatenschreibweise. Durch die symbolische Schreibweise werden besonders die physikalischen Zusammenhänge deutlich, die unabhängig von einem speziellen Koordinatensystem Bestand haben. Für eine konkrete Rechnung ist jedoch immer die Koordinatendarstellung erforderlich. In diesem Lehrbrief wird aus Vereinfachungsgründen immer ein kartesisches Koordinatensystem vorausgesetzt. Dadurch soll auch dem Lernenden der Einstieg in die überaus interessante aber mitunter nicht immer einfache Materie erleichtert werden.

Für ein tiefergehendes Studium der Kontinuumsmechanik sollen abschließend einige Lehrbücher genannt werden. In [1] [2] [3] [4] sind die theoretischen Grundlagen umfassend zusammengestellt. Als deutschsprachige Lehrbücher sollen [5] [6] [7] erwähnt werden. Eine Darstellung der Thermodynamik findet der Leser in [8] [9].

## 2 Einführung in die Tensorrechnung

### 2.1 Begriffe und Vereinbarungen

Physikalische Größen, die einen Richtungsbezug besitzen, bezeichnet man als Tensoren. Die Anzahl der unabhängigen Richtungen legt die Stufe der Tensorgröße fest. Tensoren 0. Stufe, d.h. Größen, wie z.B. Arbeit, Leistung, Dichte, die keinen Richtungsbezug aufweisen, heißen Skalare. Die Vektorgrößen (z.B. Kraft, Verschiebung, Geschwindigkeit) sind Tensoren 1. Stufe. Für tensorielle Größen 2. Stufe (z.B. Spannung, Verzerrung) und höherer Stufe existieren keine speziellen Bezeichnungen. Generell sind Tensoren reale physikalische Größen, die unabhängig vom 'Betrachter' und der Wahl eines Koordinatensystems existieren. Diese Eigenschaft drückt die symbolische Schreibweise unmittelbar aus. Sie erlaubt es, die zu erarbeitenden physikalischen Zusammenhänge recht übersichtlich darzustellen. Nachteilig steht diesem Vorzug gegenüber, daß eine Vielzahl neuer 'Begriffe' und 'Regeln' zu definieren sind. In diesem Lehrbrief sollen einfache Buchstaben, einfache Buchstaben mit Pfeil sowie fettgedruckte Buchstaben die Symbolik für Tensoren nullter bis zweiter Stufe bilden, z.B.

$\varrho$  - Tensor 0. Stufe (Skalar)

$\vec{v}$  - Tensor 1. Stufe (Vektor)

$\sigma$  - Tensor 2. Stufe.

Damit sind die wichtigsten Tensoren der Kontinuumsmechanik eindeutig unterscheidbar. Ein Tensor 3. Stufe, der Permutationstensor  $\vec{E}$  wird als Hilfsgröße für vektorielle Produkte eingeführt. Die Materialtheorie benötigt zumindest Tensoren 4. Stufe (z.B.  $\mathcal{L}$  oder  $\vec{C}$ ), häufiger aber einen ganzen Satz von Tensoren geradzahligter Stufen höher als 4.

Aussagen zum quantitativen Verhalten von Tensoren setzen eine Vektorbasis voraus. In der Wahl des Basissystems besteht eine gewisse Willkür. Die bekannteste und einfachste Basis ist die orthonormierte Basis eines kartesischen Koordinatensystems. Für die Skalarprodukte der drei senkrecht aufeinanderstehenden Einheitsvektoren  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} = \{\vec{e}_k\}_{k=1,2,3}$  gilt

$$\vec{e}_k \cdot \vec{e}_m = \delta_{km} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = m \\ 0 & \text{für } k \neq m \end{cases} . \quad (2.1)$$

Festgelegt wird, daß die lateinischen Indizes immer die Werte 1,2,3 durchlaufen. Die Beziehung (2.1) enthält die Definition des KRONECKER-Symbols  $\delta_{km}$ . Die Darstellung eines Tensors 1. und 2. Stufe bezüglich dieser Basis führt auf

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3 = v_k \vec{e}_k \\ \sigma &= \sigma_{11} \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \sigma_{12} \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \cdots + \sigma_{33} \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 = \sigma_{km} \vec{e}_k \otimes \vec{e}_m \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dabei gilt als vereinbart, daß in einem Ausdruck über doppelt auftretende Indizes generell von 1 bis 3 summiert wird (EINSTEIN'sche Summationsvereinbarung). Die drei Vektoren  $v_1 \vec{e}_1, v_2 \vec{e}_2$  und  $v_3 \vec{e}_3$  bezeichnet man als die Komponenten und die drei Werte  $v_1, v_2, v_3$  als die Koordinaten eines Tensors 1. Stufe. Analog besteht ein Tensor 2. Stufe aus 9 Komponenten  $\sigma_{11} \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1$  bis  $\sigma_{33} \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3$  und besitzt 9 unabhängige Koordinaten  $\sigma_{11}$  bis  $\sigma_{33}$ . Mit dem Symbol ' $\otimes$ ' wird das dyadische Produkt gekennzeichnet, bei dem im Gegensatz zu anderen Produktbildungen die Richtungseigenschaft erhalten bleibt. Damit ist auch die Darstellung beliebiger Tensoren  $n$ -ter Stufe eindeutig festgelegt. So gilt z.B. für einen Tensor 4. Stufe

$${}^4\vec{C} = C_{klmn} \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l \otimes \vec{e}_m \otimes \vec{e}_n . \quad (2.3)$$

Zu beachten ist, daß i.a. zu jeder Kombination der dyadischen Produkte der Basisvektoren ein Tensorkoordinatenwert existiert, und somit

$$\sigma_{12} \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 \neq \sigma_{21} \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1 \quad \text{und} \quad \sigma_{12} \neq \sigma_{21} \quad (2.4)$$

gilt.

## 2.2 Tensorkoordinatentransformation

Da die Wahl des Basissystems willkürlich ist, andererseits aber in jedem Basissystem der gleiche physikalische Sachverhalt beschrieben werden muß, existieren eindeutige Regeln zur Umrechnung der Tensorkoordinaten bezüglich der verschiedenen Basissysteme. Diese Transformationsregeln werden häufig als die kennzeichnende Eigenschaft von Tensoren betrachtet. Zur Erläuterung dieses Sachverhaltes soll eine zweite orthonormierte Basis  $\{\vec{e}_K\} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  eingeführt werden, die gegenüber  $\{\vec{e}_k\}$  beliebig gedreht ist. Die Skalarprodukte dieser Basisvektoren

$$\vec{e}_k \cdot \vec{e}_K = c_{kK} = |\vec{e}_k| |\vec{e}_K| \cos(\vec{e}_k, \vec{e}_K) \quad (2.5)$$

definieren die Transformationskoeffizienten  $c_{kK}$ , die im betrachteten Fall identisch mit dem jeweiligen Kosinus des Winkels zwischen den zugehörigen Basisvektoren sind. Der Sonderfall, daß beide Systeme identisch sind, liefert

$$c_{kK} = \vec{e}_k \cdot \vec{e}_K = \delta_{kK} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = K \\ 0 & \text{für } k \neq K \end{cases} . \quad (2.6)$$

Für einen Vektor folgt, ausgehend von der Identität

$$\vec{v} = v_k \vec{e}_k = v_K \vec{e}_K \quad (2.7)$$

nach Skalarmultiplikation mit dem Vektor  $\vec{e}_m$  unter Beachtung von (2.1), (2.5) sowie der 'Austauschregel'

$$v_k \delta_{km} = v_m \quad (2.8)$$

sofort die 'Transformationsregel'

$$v_m = c_{mK} v_K . \quad (2.9)$$

Das analoge Vorgehen auf der Basis der skalaren Multiplikation von (2.7) mit  $\vec{e}_M$  liefert

$$v_M = c_{kM} v_k . \quad (2.10)$$

Bei Tensoren zweiter und höherer Stufe müssen mehrfache skalare Multiplikationen ausgeführt werden. Die Ergebnisse für einen Tensor 2. Stufe lauten dann

$$\sigma_{km} = c_{kK} c_{mM} \sigma_{KM} \quad , \quad \sigma_{KM} = c_{kK} c_{mM} \sigma_{km} . \quad (2.11)$$

Der in (2.6) beschriebene Sonderfall der Identität der beiden Basissysteme würde in (2.9) und (2.11) zu

$$v_m = \delta_{mK} v_K \quad , \quad \sigma_{km} = \delta_{kK} \delta_{mM} \sigma_{KM} \quad (2.12)$$

führen, d.h. die Transformationsregeln werden durch Austauschregeln wiedergegeben.

### 2.3 Tensoralgebra

Eine Tensoraddition ist für Tensoren gleichen physikalischen Typs und gleicher Stufe möglich, z.B.

$$\vec{v} = \vec{v}^1 + \vec{v}^2 \quad , \quad \sigma = \sigma^1 + \sigma^2 . \quad (2.13)$$

Werden die beteiligten Tensoren bezüglich der gleichen Basis dargestellt, dann liefert der Koordinatenvergleich

$$v_k = v_k^1 + v_k^2 \quad , \quad \sigma_{km} = \sigma_{km}^1 + \sigma_{km}^2 . \quad (2.14)$$

Die allgemeine Tensormultiplikation von einem Tensor  $m$ -ter Stufe mit einem Tensor  $n$ -ter Stufe führt auf einen Tensor  $(m+n)$ -ter Stufe, z.B.

$$\begin{aligned} {}^4\vec{C} &= \sigma \mathbf{d} \\ C_{klmn} \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l \otimes \vec{e}_m \otimes \vec{e}_n &= \sigma_{kl} \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l d_{mn} \vec{e}_m \otimes \vec{e}_n \\ C_{klmn} &= \sigma_{kl} d_{mn} . \end{aligned} \quad (2.15)$$

Werden bei der Multiplikation bestimmte Basisvektoren skalar miteinander verknüpft, dann vermindert sich die Stufe des Ergebnistensors dieses 'verjüngenden Produktes' um zwei:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} \\ C_{kn} \vec{e}_k \otimes \vec{e}_n &= \sigma_{kl} \vec{e}_k \delta_{lm} d_{mn} \vec{e}_n \\ C_{kn} &= \sigma_{kl} d_{ln} . \end{aligned} \quad (2.16)$$

In der symbolischen Schreibweise ist neben dem speziellen Operationszeichen '·' die Festlegung erforderlich, daß der letzte Basisvektor des ersten Tensors mit dem ersten des zweiten Tensors verknüpft wird. Bei höheren verjüngenden Produkten wird diese Zuordnung sinngemäß übertragen. So gilt z.B.

$$C = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \quad , \quad C = \sigma_{km} d_{mk} \quad (2.17)$$

Das vektorielle Produkt

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad (2.18)$$

definiert einen Vektor  $\vec{c}$ , der auf der von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Ebene senkrecht steht und den Betrag  $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$  besitzt. Dabei bilden  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  ein Rechtssystem. Die Einführung der Koordinatenschreibweise in (2.18) führt zunächst auf

$$c_k \vec{e}_k = a_l \vec{e}_l \times b_m \vec{e}_m = (\vec{e}_l \times \vec{e}_m) a_l b_m ,$$

nach skalarer Multiplikation dieser Beziehung mit  $\vec{e}_n$  unter Beachtung der Austauschregel zu

$$c_n = \vec{e}_n \cdot (\vec{e}_l \times \vec{e}_m) a_l b_m$$

und nach Umbenennung des Index  $n$  in  $k$  auf

$$c_k = \vec{e}_k \cdot (\vec{e}_l \times \vec{e}_m) a_l b_m = e_{klm} a_l b_m \quad (2.19)$$

Dabei werden mit dem Spatprodukt

$$e_{klm} = \vec{e}_k \cdot (\vec{e}_l \times \vec{e}_m) = [\vec{e}_k \vec{e}_l \vec{e}_m] \quad (2.20)$$

die Koordinaten eines Tensors 3. Stufe  $\overset{3}{\vec{E}} = e_{klm} \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l \otimes \vec{e}_m$  definiert. Dieser 'Permutationstensor' ermöglicht die Darstellung des vektoriellen Produktes in symbolischer Schreibweise durch

$$\vec{c} = ( \overset{3}{\vec{E}} \cdot \vec{b} ) \cdot \vec{a} . \quad (2.21)$$



Infolge der orthonormierten Basis sowie der Eigenschaften des Spatproduktes besitzen die Koordinaten des Permutationstensors die Werte

$$e_{klm} = \begin{cases} 1 & \text{für } k, l, m = 1, 2, 3 \text{ zyklisch} \\ -1 & \text{für } k, l, m = 3, 2, 1 \text{ zyklisch} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (2.22)$$

## 2.4 Tensoren 2. Stufe

Wie bereits erwähnt, besitzen Tensoren 2. Stufe in der Kontinuumsmechanik eine besondere Bedeutung. In Analogie zur Matrixrechnung sollen daher einige spezielle Eigenschaften und Definitionen bereitgestellt werden. Der zu  $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{km} \vec{e}_k \otimes \vec{e}_m$  transponierte Tensor  $\boldsymbol{\sigma}^T$  wird durch eine vertauschte Anordnung der Basisvektoren definiert

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \sigma_{km} \vec{e}_m \otimes \vec{e}_k . \quad (2.23)$$

Ein Tensor 2. Stufe heißt symmetrisch, wenn

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{km} = \sigma_{mk} \quad (2.24)$$

und antimetrisch, falls

$$\boldsymbol{\sigma} = -\boldsymbol{\sigma}^T \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{km} = -\sigma_{mk} \quad (2.25)$$

gelten. Mit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^T) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^T) \\ &= \boldsymbol{\sigma}^s + \boldsymbol{\sigma}^a \end{aligned} \quad (2.26)$$

kann ein beliebiger Tensor 2. Stufe in einen symmetrischen und antimetrischen Tensor zerlegt werden. Die zugeordneten Koordinatenbeziehungen lauten

$$\sigma_{@!km}^s = \frac{1}{2} (\sigma_{km} + \sigma_{mk}) \quad , \quad \sigma_{@!km}^a = \frac{1}{2} (\sigma_{km} - \sigma_{mk}) . \quad (2.27)$$

Der zu  $\boldsymbol{\sigma}$  inverse Tensor  $\boldsymbol{\sigma}^{-1}$  erfüllt die Bedingung

$$\boldsymbol{\sigma}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{I} \quad , \quad \sigma_{km}^{-1} \sigma_{ml} = \delta_{kl} , \quad (2.28)$$

wobei mit  $\mathbf{I} = \delta_{kl} \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l$  der 'Einheitstensor 2. Stufe' definiert wurde. Falls

$$\boldsymbol{\sigma}^{-1} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad , \quad \sigma_{km}^{-1} = \sigma_{km}^T = \sigma_{mk} \quad (2.29)$$

gilt, bezeichnet man  $\boldsymbol{\sigma}$  als 'orthogonalen Tensor'.

Ein symmetrischer Tensor 2. Stufe ist immer bezüglich einer orthonormierten Basis

$$\{\vec{h}_\alpha\}_{\alpha=I,II,III} \quad \text{mit} \quad |\vec{h}_\alpha| = 1 \quad (2.30)$$

darstellbar, so daß

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \sigma_{II} \vec{h}_I \otimes \vec{h}_I + \sigma_{III} \vec{h}_II \otimes \vec{h}_II + \sigma_{III} \vec{h}_III \otimes \vec{h}_III \\ &= \sum \sigma_\alpha \vec{h}_\alpha \otimes \vec{h}_\alpha = \sigma_{(\alpha)} \vec{h}_\alpha \otimes \vec{h}_\alpha \end{aligned} \quad (2.31)$$

durch die 3 Werte  $\sigma_\alpha = \{\sigma_{II}, \sigma_{III}, \sigma_{III}\}$  physikalisch äquivalent beschrieben werden kann. In (2.31) wurde als neue Regel eingeführt, daß ein eingeklammelter Index von der Summation ausgeschlossen wird. Mit dem Ansatz  $\vec{h}_\alpha = c_{\alpha m} \vec{e}_m$  folgt unter Beachtung der Transformations- und Austauschregel aus dem Skalarprodukt

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{h}_\alpha = \sigma_{km} c_{\alpha m} \vec{e}_k = \sigma_{(\alpha)} \delta_{km} c_{\alpha m} \vec{e}_k \quad (2.32)$$

ein homogenes Gleichungssystem der Form

$$(\sigma_{km} - \sigma_{(\alpha)} \delta_{km}) c_{\alpha m} = 0 \quad (2.33)$$

für die Transformationskoeffizienten  $c_{\alpha m}$ . Eine nichttriviale Lösung dieses Gleichungssystems erfordert, daß die Determinante der Systemmatrix Null ist

$$\det[\sigma_{km} - \sigma_{(\alpha)} \delta_{km}] = 0 . \quad (2.34)$$

Dies führt auf eine Eigenwertgleichung 3. Grades

$$\sigma_{(\alpha)}^3 - I_1^\sigma \sigma_{(\alpha)}^2 + I_2^\sigma \sigma_{(\alpha)} - I_3^\sigma = 0 \quad (2.35)$$

mit

$$\begin{aligned} I_1^\sigma &= \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{kk} \\ I_2^\sigma &= \frac{1}{2}(\sigma_{kk} \sigma_{mm} - \sigma_{km} \sigma_{km}) \\ I_3^\sigma &= \det[\boldsymbol{\sigma}] = \frac{1}{6} \epsilon_{klm} \epsilon_{rst} \sigma_{kr} \sigma_{ls} \sigma_{mt} , \end{aligned} \quad (2.36)$$

die für symmetrische, positiv definite Tensoren 2. Stufe immer drei reelle Lösungen  $\sigma_\alpha$  besitzt. Ordnet man diese 'Hauptwerte' der Größe nach, so gilt

$$\sigma_I \geq \sigma_{km} \geq \sigma_{III} .$$

Für jeden Wert  $\sigma_\alpha$  kann (2.33) gelöst werden, so daß damit die 9 Werte für  $c_{\alpha m}$  vorliegen, die die Richtung der Hauptachsenbasis  $\{\vec{h}_\alpha\}$  bezüglich  $\{\vec{e}_m\}$  eindeutig festlegen. Das Gleichungssystem (2.33) ist allerdings linear abhängig. Deshalb muß jeweils eine Gleichung gestrichen und durch die 'Einheitsbedingung'

$$\vec{h}_{(\alpha)} \cdot \vec{h}_{(\alpha)} = 1 = c_{(\alpha)k} c_{(\alpha)k} \quad (2.37)$$

ersetzt werden. Nach dem Wurzelsatz der Algebra besitzt die Gleichung

$$(\sigma_{(\alpha)} - \sigma_I) (\sigma_{(\alpha)} - \sigma_{II}) (\sigma_{(\alpha)} - \sigma_{III}) = 0 \quad (2.38)$$

genau die Lösung  $\sigma_\alpha = \{\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}\}$ . Die Überführung von (2.38) in die Normalform (2.35) liefert für die in (2.36) definierten Größen die Vorschrift

$$\begin{aligned} I_1^\sigma &= \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} \\ I_2^\sigma &= \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_{III} \sigma_I \\ I_3^\sigma &= \sigma_I \sigma_{II} \sigma_{III} . \end{aligned} \quad (2.39)$$

Die 3 Werte  $I_i^\sigma$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sind also unabhängig von der gewählten Basis und werden als die Invarianten eines symmetrischen Tensors 2. Stufe bezeichnet.

## 2.5 Tensorfelder

Für die Kontinuumsmechanik ist typisch, daß alle auftretenden Tensoren Funktionen vom Ort und der Zeit sind. Diese Tatsache wurde in den bisherigen Ausführungen noch nicht berücksichtigt. Eine tensorielle Größe heißt Tensorfeld, wenn eine eindeutige Zuordnung zum Raumpunkt vorliegt. Im EUKLID'schen Raum wird ein Punkt durch den Ortsvektor

$$\vec{x} = x_k \vec{e}_k = \vec{x}(x_k) \quad (2.40)$$

beschrieben. Die kartesischen Koordinatenwerte  $x_k$  sind hierbei die Ortsvariablen. Für Tensorfelder besteht über die bereits behandelten Operationen hinaus die Möglichkeit, Differentiationen nach den Ortsvariablen auszuführen. Unter Beachtung der Ortsunabhängigkeit der orthonormierten Basis  $\{\vec{e}_k\}$  liefert z.B. die partielle Ortsableitung von (2.40)

$$\vec{x}_{,m} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x_m} = \frac{\partial x_k}{\partial x_m} \vec{e}_k = x_{k,m} \vec{e}_k = \delta_{km} \vec{e}_k = \vec{e}_m . \quad (2.41)$$

Die 'gerichtete Ableitung' wird mit dem NABLA-Operator gekennzeichnet, z.B.

$$\vec{\nabla} \sigma = \sigma_{,k} \vec{e}_k . \quad (2.42)$$

Dieser Differentialoperator erzeugt im allgemeinen Fall aus einem Tensor  $n$ -ter Stufe nach der Multiplikationsregel (2.15) einen Tensor  $(n+1)$ -ter Stufe. Das Skalarprodukt mit dem NABLA-Operator führt dagegen auf einen Tensor  $(n-1)$ -ter Stufe. Beispiele dafür sowie die zugehörigen Koordinatenbeziehungen sind:

$$\begin{aligned} \vec{q} &= \vec{\nabla} \varphi = \text{grad } \varphi & , & & q_k &= \varphi_{,k} \\ \mathbf{L} &= \vec{\nabla} \vec{v} & , & & L_{km} &= v_{k,m} \\ c &= \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \text{div } \vec{v} & , & & c &= v_{k,k} \\ \vec{w} &= \vec{\nabla} \times \vec{v} = \text{rot } \vec{v} & , & & w_l &= \epsilon_{lmn} v_{n,m} . \end{aligned} \quad (2.43)$$

Zu beachten ist, daß die Koordinatenschreibweise diese spezielle Symbolik nicht erfordert, da in (2.5)  $\varphi_{,k}$ ,  $v_{k,m}$  sowie  $v_{k,k}$  eindeutige Vorschriften sind.

Zur Integration von Tensorfeldern existieren eine Reihe von Integralsätzen. Voraussetzung ist, daß der Tensor in einem Gebiet  $V$  stetig ist und stetige erste partielle Ableitungen hat. Dieses Gebiet wird von der Oberfläche  $A$  abgeschlossen, die bis auf eine endliche Anzahl von Kanten und Ecken stetig ist. Eine besondere Bedeutung in der Kontinuumsmechanik besitzt der GAUSS'sche Integralsatz

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{t} \, dV = \int_A \vec{t} \cdot d\vec{A} \quad (2.44)$$

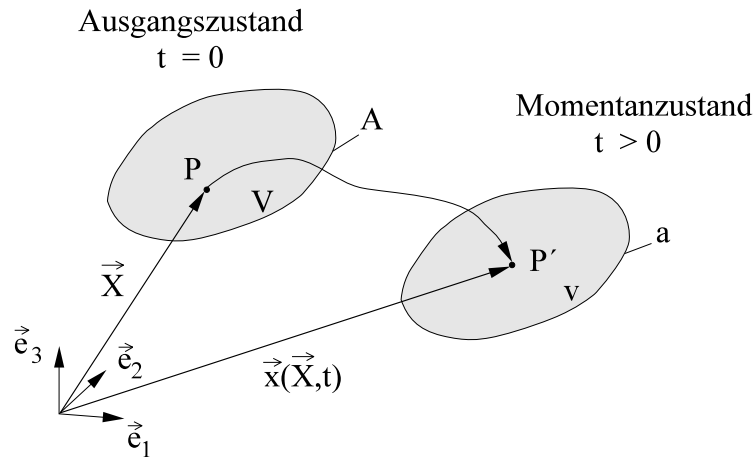
in symbolischer bzw.

$$\int_V t_{k,k} \, dV = \int_A t_k n_k \, dA \quad (2.45)$$

in Koordinatenschreibweise. Dabei bezeichnen  $d\vec{A} = \vec{n} \, dA$  den gerichteten Flächenelementvektor und  $\vec{n}$  den auswärtsgerichteten Normaleneinheitsvektor.

### 3 Konfiguration, Betrachtungsweise und Bewegung

Die Bewegung eines Körpers kann angesehen werden als zeitliche Abfolge unterschiedlicher Konfigurationen. Dabei wird zunächst davon ausgegangen, daß der Körper in seinem Ausgangszustand (Volumen  $V$ , Oberfläche  $A$ ) zum Zeitpunkt  $t = 0$  gegeben ist (Abbildung 1). Die Beschreibung des Ausgangszustandes erfolgt in einem kartesischen Koordinaten-



**Abbildung 1:** Unterschiedliche Konfigurationen eines materiellen Körpers

system mit den Basisvektoren  $\vec{e}_K = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  und den Koordinaten  $X_K$ . Durch das Wertetripel  $(X_1, X_2, X_3)$  bzw. durch den Ortsvektor

$$\vec{X} = X_K \vec{e}_K \quad (3.1)$$

wird damit ein bestimmtes materielles Teilchen identifiziert. Die Koordinaten  $X_K$  des materiellen Teilchens ändern sich mit der Bewegung nicht, sie sind zeitunabhängig.

Zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t > 0$  hat sich der Körper gegenüber dem Ausgangszustand verformt und liegt in der Momentankonfiguration (Volumen  $v$ , Oberfläche  $a$ ) vor. Zur Beschreibung der Momentankonfiguration dient der Ortsvektor  $\vec{x}$ , der bezüglich der gleichen kartesischen Basis  $\vec{e}_K = \vec{e}_k = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  die Koordinaten  $x_k$ , d.h. die Darstellung

$$\vec{x} = x_k \vec{e}_k \quad (3.2)$$

hat. Mit dem Wertetripel  $x_1, x_2, x_3$  wird im Unterschied zu den Koordinaten des Ausgangszustandes ein Punkt des Raumes identifiziert.

Die strikte Trennung zwischen dem materiellen Teilchen, welches zu jedem Zeitpunkt durch die konstanten Koordinaten  $X_K$  des Ausgangszustandes gekennzeichnet ist, und einem bestimmten Ort des Raumes, der durch die Koordinaten  $x_k$  gekennzeichnet wird,

ist für das Verständnis äußerst wichtig. Mit dem Bezug auf das gleiche Kartesische Koordinatensystem  $\{\vec{e}_K\} = \{\vec{e}_k\}$  liegt der in Abschnitt 2.2 erläuterte Sonderfall vor, für den (2.6) und (2.12) gilt.

Die Bewegung des Körpers ist nun vollständig bekannt, wenn zu jedem Zeitpunkt für jedes materielle Teilchen angegeben werden kann, an welchem Ort des dreidimensionalen Raumes es sich befindet. Das geschieht durch die hinreichend glatten Funktionen

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t) \quad , \quad x_k = x_k(X_M, t) \quad , \quad (3.3)$$

die gleichzeitig die gesuchten Felder für die Lösung des kontinuumsmechanischen Randwertproblems sind.

Werden in der hier dargelegten Weise und in Übereinstimmung zu (3.3) die noch zu definierenden und für die Lösung des Randwertproblems notwendigen kontinuumsmechanischen Größen wie Verschiebungen, Spannungen, Verzerrungen u.s.w. als Funktionen der Koordinaten  $X_K$  des Ausgangszustandes angesehen, spricht man von der LAGRANGE'schen oder materiellen Betrachtungsweise. Eine solche Formulierung bietet vor allem dann Vorteile, wenn wie zunächst vorausgesetzt, der Ausgangszustand bekannt ist und die Bewegung der einzelnen materiellen Teilchen verfolgt werden soll. Diese Situation ist bei der Untersuchung von Festkörpern in der Regel gegeben.

Daneben gibt es vor allem in der Strömungsmechanik den Fall, daß die Verfolgung der Bahn des einzelnen Teilchens viel zu aufwendig und auch gar nicht von Interesse ist. Viel entscheidender sind dann beispielsweise die örtlichen Druck- oder Geschwindigkeitsverteilungen in einem bestimmten Kontrollvolumen (z.B. einer Rohrleitung, einer Düse o.ä.). Unter diesen Umständen ist es zweckmäßig, als unabhängige Ortsvariablen für die vorkommenden Tensorfelder die Koordinaten  $x_k$  der Raumpunkte des Kontrollvolumens zu verwenden. Man spricht dann von der EULER'schen oder räumlichen Betrachtungsweise. Da es in diesem Fall den Ausgangszustand nicht mehr gibt, können auch (3.3) nicht mehr die gesuchten Funktionen des Randwertproblems sein. An ihre Stelle treten in der EULER'schen Betrachtungsweise das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$  und das Dichtefeld  $\varrho = \varrho(\vec{x}, t)$ .

Desweiteren werden in der Kontinuumsmechanik physikalische Größen (Skalare, Vektoren, Tensoren) verwendet, die von ihrer Definition her einer bestimmten Konfiguration zugeordnet bzw. auf eine Konfiguration bezogen sind. Um zu einer möglichst überschaubaren Darstellung der Kontinuumsmechanik zu gelangen, werden in der Regel bei der LAGRANGE'schen Betrachtungsweise solche Größen verwendet, die auf den Ausgangszustand bezogen sind, und bei der EULER'schen Betrachtungsweise diejenigen, die auf den Momentanzustand bezogen sind. In Übereinstimmung mit den gewählten unabhängigen

Ortsvariablen entsprechend (3.1) und (3.2) werden dann für die Koordinatendarstellungen von Tensoren auch die zugehörigen Basisvektoren mit jeweils großen und kleinen Indizes verwendet. Für das Beispiel der Tensoren 2. Stufe  $\mathbf{T}, \mathbf{t}$  lauten die verwendeten Darstellungen für die LAGRANGE'sche Betrachtungsweise

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(X_M, t) = T_{KL}(X_M, t) \vec{e}_K \otimes \vec{e}_L \quad (3.4)$$

und für die EULER'sche Betrachtungsweise

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(x_m, t) = t_{kl}(x_m, t) \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l . \quad (3.5)$$

Daneben gibt es aber noch physikalische Größen, die beiden Konfigurationen zugeordnet sind und für die eine gemischte Koordinatendarstellung vorzuziehen ist.

Weiterhin ist in der Kontinuumsmechanik die zeitliche Änderung einer physikalischen Größe  $f$  für den Fall, daß sich das materielle Teilchen, dem die Größe zugeordnet ist, nicht ändert, von großem Interesse. Man nennt diese Zeitableitungen materielle Zeitableitungen und kennzeichnet sie durch

$$\frac{Df}{Dt} = \dot{f} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\vec{x}=\text{konst.}} . \quad (3.6)$$

Die Auswertung von (3.6) ist für die LAGRANGE'sche Betrachtungsweise besonders einfach, weil die physikalische Größe  $f$  als Funktion von  $\vec{X}, t$  verwendet wird. Damit geht die materielle Zeitableitung in die einfache partielle Zeitableitung über. Etwas komplizierter ist die Situation bei der EULER'schen Betrachtungsweise, weil hier die physikalische Größe  $f$  eine Funktion von  $\vec{x}, t$  ist, wobei sich die Position  $\vec{x}$  eines festen materiellen Teilchens entsprechend (3.3) selbst zeitlich ändert. Deswegen tritt nach Anwendung der Kettenregel neben der partiellen Zeitableitung noch ein Zusatzglied auf. Die materielle Zeitableitung von  $f$  kann somit durch

$$\begin{aligned} \dot{f}(X_L, t) &= \frac{\partial f(X_L, t)}{\partial t} \\ \dot{f}(x_l, t) &= \frac{\partial f(x_l, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(x_l, t)}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_m} v_m \end{aligned} \quad (3.7)$$

angegeben werden.

Abschließend noch eine Bemerkung zu den Bewegungsfunktionen (3.3): Aufgrund der Undurchdringlichkeit der Materie, d.h. es können sich nicht gleichzeitig zwei unterschiedliche materielle Teilchen am selben Raumpunkt befinden, müssen die Funktionen (3.3) eindeutig umkehrbar sein. Diese Forderung ist erfüllt, wenn für die Funktionaldeterminante

$$J = \det(x_{i,L}) \neq 0 \quad (3.8)$$

gilt. Damit existiert auch zu (3.3) die Umkehrfunktion

$$\vec{X} = \vec{X}(\vec{x}(t), t) \quad , \quad X_K = X_K(x_m(t), t) \quad , \quad (3.9)$$

die angibt, welches materielle Teilchen sich an einem vorgegebenen Raumpunkt zur Zeit  $t$  befindet.



## 4 Kinematik

### 4.1 Verschiebung, Geschwindigkeit und Beschleunigung

Der Verschiebungsvektor  $\vec{u}$  kennzeichnet gemäß

$$\vec{u} = \vec{x} - \vec{X} \quad (4.1)$$

die Differenz zwischen der momentanen und der Ausgangslage des entsprechenden materiellen Teilchens. Er ist beiden Konfigurationen in gleicher Weise zugeordnet und kann durch

$$\begin{aligned} u_K(X_M, t) &= x_k(X_M, t) - X_K \\ u_k(x_m, t) &= x_k - X_K(x_m, t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

sowohl als Funktion von  $\vec{X}, t$  in der LAGRANGE'schen als auch als Funktion von  $\vec{x}, t$  in der EULER'schen Betrachtungsweise verwendet werden. In (4.2) werden jeweils gleiche Werte der kleinen und großen Koordinatenindizes vorausgesetzt.

Der Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{v} = v_k \vec{e}_k = v_K \vec{e}_K \quad (4.3)$$

des materiellen Teilchens ist definiert als die zeitliche Änderung seiner Lage. Für ihn gilt allgemein

$$\vec{v} = \dot{\vec{x}} = \dot{\vec{u}} \quad , \quad v_k = \dot{x}_k = \dot{u}_k . \quad (4.4)$$

und entsprechend (3.7) erhält man für die Koordinaten in (4.3) die beiden unterschiedlichen Darstellungsformen

$$\begin{aligned} v_k(X_M, t) &= \frac{\partial x_k(X_M, t)}{\partial t} = \frac{\partial u_K(X_M, t)}{\partial t} = v_K(X_M, t) \\ v_k(x_m, t) &= \frac{\partial u_k(x_m, t)}{\partial t} + u_{k,m} v_m . \end{aligned} \quad (4.5)$$

Für die EULER'sche Betrachtungsweise können die Koordinaten des Geschwindigkeitsvektors nicht als materielle Zeitableitung der Ortskoordinaten des materiellen Teilchens verwendet werden, weil die Koordinaten  $x_k$  die unabhängigen Ortskoordinaten und damit selbst zeitunabhängig sind. Wie schon betont, spielt das Geschwindigkeitsfeld die Rolle einer gesuchten Funktion.

Der Beschleunigungsvektor

$$\vec{a} = a_k \vec{e}_k = a_K \vec{e}_K \quad (4.6)$$

ergibt sich aus der materiellen Zeitableitung des Geschwindigkeitsvektors

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{x}} = \ddot{\vec{u}} \quad , \quad a_k = \dot{v}_k = \ddot{x}_k = \ddot{u}_k \quad (4.7)$$

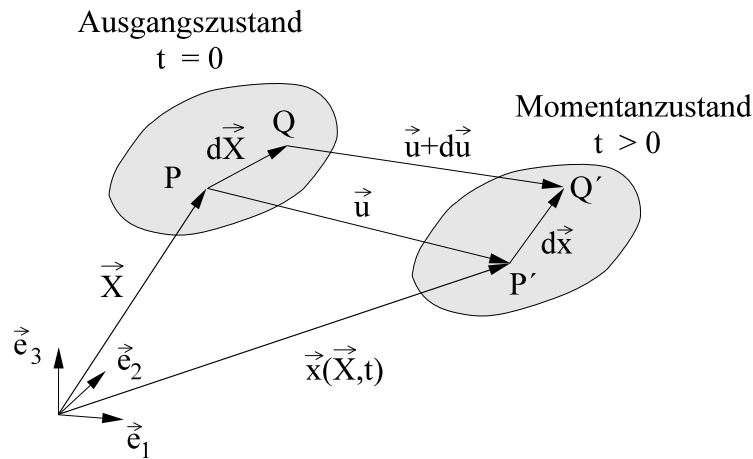
des materiellen Teilchens. Die Darstellung der Beschleunigung für die LAGRANGE'sche und EULER'sche Betrachtungsweise ergeben sich damit analog (4.5) zu

$$\begin{aligned} a_K(X_M, t) &= \frac{\partial v_K(X_M, t)}{\partial t} \\ a_k(x_m, t) &= \frac{\partial v_k(x_m, t)}{\partial t} + v_{k,m} v_m \end{aligned} \quad (4.8)$$

## 4.2 Deformationen und Verzerrungen

### 4.2.1 Definition von Deformations- und Verzerrungstensoren

Verzerrungen liefern eine Aussage darüber, wie sich ein materielles Teilchen deformiert hat, d.h. wie sich Längen und Winkel materieller Linienelemente infolge der Bewegung geändert haben. Dabei wird ein Vergleich zwischen Ausgangs- und Momentankonfiguration durchgeführt. Eine Aussage über den zeitlichen Verlauf der Bewegung ist im Deformations- bzw. Verzerrungsmaß nicht enthalten. In Abbildung 2 ist die Situation für den materiellen



**Abbildung 2:** Materielle Linienelemente im Ausgangs- und Momentanzustand

Punkt  $P$  dargestellt. Das materielle Linienelement  $d\vec{X} = dX_K \vec{e}_K$  des Ausgangszustandes geht über in  $d\vec{x} = dx_k \vec{e}_k$  im Momentanzustand, wobei sich die Koordinatendifferentiale aus (3.3) und (3.9) zu

$$dx_l = x_{l,L} dX_L \quad , \quad dX_L = X_{L,l} dx_l \quad (4.9)$$

ergeben. Zur Umrechnung der Linienelemente wird eine neue Größe, der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  so eingeführt, daß die beiden Beziehungen

$$d\vec{x} = \mathbf{F} \cdot d\vec{X} \quad , \quad d\vec{X} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{x} \quad (4.10)$$

gelten. Damit stellt der Deformationsgradient eine Verbindung zwischen Ausgangs- und Momentankonfiguration her, weswegen die Koordinatendarstellung in der Regel mit gemischten Indizes unter Beachtung von (4.9) gemäß

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}} = F_{kK} \vec{e}_k \otimes \vec{e}_K \quad , \quad \mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \vec{x}} = F_{Kk}^{-1} \vec{e}_K \otimes \vec{e}_k \\ F_{kK} &= x_{k,K} \quad , \quad F_{Kk}^{-1} = X_{K,k} \end{aligned} \quad (4.11)$$

verwendet werden. Man bezeichnet solche Größen auch als Zweipunktensortfelder. Wegen (3.8) gilt für die Determinante von  $\mathbf{F}$

$$\begin{aligned} J &= \det(x_{l,M}) = \det(F_{lM}) \\ &= \frac{1}{6} e_{lmn} e_{PQR} F_{lP} F_{mQ} F_{nR} \\ &\neq 0 . \end{aligned} \quad (4.12)$$

Der Übergang des materiellen Linienelementes von  $d\vec{X}$  zu  $d\vec{x}$  setzt sich aus einer Längenänderung und einer Drehung zusammen. Beide Anteile sind im Deformationsgradienten enthalten. Für die Berechnung von Verzerrungen ist es notwendig, diese Anteile zu trennen, da eine starre Drehung des materiellen Teilchens nicht zu einer Verzerrung führt. Für die Aufteilung des Deformationsgradienten gibt es ausgehend vom polaren Zerlegungstheorem dazu die beiden Möglichkeiten

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} . \quad (4.13)$$

Dabei ist  $\mathbf{R}$  ein orthogonaler Tensor

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T \quad , \quad R_{lN}^{-1} = R_{Nl} , \quad (4.14)$$

der eine reine starre Drehung des materiellen Teilchens bewirkt. Die beiden Tensoren  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{V}$  sind symmetrisch und positiv definit. Sie enthalten die Deformation des Teilchens, wobei entsprechend dem Aufbau von (4.13)  $\mathbf{U}$  als rechter Strecktensor und  $\mathbf{V}$  als linker Strecktensor bezeichnet wird. Damit kann (4.13) so interpretiert werden, daß einmal das materielle Teilchen zuerst gedreht und anschließend in der momentanen Position gestreckt wird oder umgekehrt, zuerst in der Ausgangslage gestreckt und danach starr in die

Momentanlage gedreht wird. Demzufolge ist auch  $\mathbf{U} = U_{MN} \vec{e}_M \otimes \vec{e}_N$  auf den Ausgangszustand und  $\mathbf{V} = V_{mn} \vec{e}_m \otimes \vec{e}_n$  auf den Momentanzustand bezogen. Damit ergibt sich die Koordinatendarstellung von (4.13) zu

$$F_{kK} = R_{kM} U_{MK} = V_{km} R_{mK} . \quad (4.15)$$

Unter Beachtung von (4.13) und (4.14) kann die Umrechnung durch

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T & , & & V_{mn} &= R_{mQ} U_{QR} R_{Rn} \\ \mathbf{U} &= \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} & , & & U_{MN} &= R_{kM} V_{kl} R_{lN} \end{aligned} \quad (4.16)$$

erfolgen.

Eine Möglichkeit, Deformationstensoren aus dem Deformationsgradienten abzuleiten, ohne die polare Zerlegung (4.13) ausführen zu müssen, besteht in der Einführung der symmetrischen Tensoren

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U}^2 \\ \mathbf{B} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{V}^T = \mathbf{V}^2 , \end{aligned} \quad (4.17)$$

wobei  $\mathbf{C}$  als Rechts-CAUCHY-GREEN-Deformationstensor und  $\mathbf{B}$  als Links-CAUCHY-GREEN-Deformationstensor bezeichnet wird. Wie man sieht, wird dadurch die starre Drehung  $\mathbf{R}$  eliminiert. Die physikalische Bedeutung dieser Tensoren ergibt sich aus der Berechnung des differentiellen Bogenelementes in der Form

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\vec{x} \cdot d\vec{x} = (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}) = d\vec{X} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}) \cdot d\vec{X} = d\vec{X} \cdot \mathbf{C} \cdot d\vec{X} \\ dS^2 &= d\vec{X} \cdot d\vec{X} = (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{x}) \cdot (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{x}) = d\vec{x} \cdot (\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \cdot d\vec{x} = d\vec{x} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot d\vec{x} \end{aligned} \quad (4.18)$$

bzw. in Koordinatenschreibweise

$$ds^2 = C_{KL} dX_K dX_L \quad , \quad dS^2 = B_{kl}^{-1} dx_k dx_l . \quad (4.19)$$

Die Quadrate der Bogenlängendifferentiale werden durch die jeweiligen Koordinatendifferentiale der anderen Konfiguration ausgedrückt. Die Tensoren  $\mathbf{C}, \mathbf{B}^{-1}$  können analog zu  $\mathbf{U}, \mathbf{V}$  als Deformationstensoren aufgefaßt werden, die alle für den unverzerrten Zustand in den Einheitstensor  $\mathbf{I}$  übergehen.

Aus der Differenz der Quadrate der beiden Bogenlängendifferentiale werden gemäß

$$ds^2 - dS^2 = 2 d\vec{X} \cdot \mathbf{E} \cdot d\vec{X} = 2 d\vec{x} \cdot \mathbf{e} \cdot d\vec{x} \quad (4.20)$$

der auf die Ausgangskonfiguration bezogene LAGRANGESche Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  sowie der auf die Momentankonfiguration bezogene EULERSche Verzerrungstensor  $\mathbf{e}$  definiert.

Der Bezug zu den jeweiligen Konfigurationen ist in (4.20) an den zugeordneten materiellen Linienelementen zu erkennen. Darin drückt sich eine physikalische Eigenschaft des jeweiligen Tensors aus, die unabhängig von einer Koordinatendarstellung besteht. Beide Verzerrungstensoren  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{e}$  verschwinden für den unverzerrten Zustand. Sie berechnen sich unter Beachtung von (4.18) aus

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}) \\ \mathbf{e} &= \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{V}^{-2})\end{aligned}\tag{4.21}$$

bzw. in Koordinatenschreibweise

$$E_{KL} = \frac{1}{2}(C_{KL} - \delta_{KL}) \quad , \quad e_{kl} = \frac{1}{2}(\delta_{kl} - B_{kl}^{-1}) .\tag{4.22}$$

Die Umrechnung der beiden Verzerrungstensoren ergibt sich direkt aus (4.20) unter Beachtung von (4.10) zu

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{F} & \mathbf{e} &= \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}^{-1} \\ E_{KM} &= x_{k,K} e_{km} x_{m,M} & e_{km} &= X_{K,k} E_{KM} X_{M,m} .\end{aligned}\tag{4.23}$$

Eine ausgehend von (4.21) verallgemeinerte Definition von Verzerrungstensoren ist durch

$$\mathbf{E}_{(m)} = \frac{1}{m}(\mathbf{U}^m - \mathbf{I}) \quad , \quad \mathbf{e}_{(m)} = \frac{1}{m}(\mathbf{I} - \mathbf{V}^{-m})\tag{4.24}$$

gegeben, wobei alle für den unverzerrten Zustand sich zu  $\mathbf{0}$  ergeben. Ein häufig verwendete Sonderfall ergibt sich für  $m = 0$ , für den die logarithmischen Verzerrungstensoren

$$\Phi = \ln \mathbf{U} \quad , \quad \varphi = \ln \mathbf{V}\tag{4.25}$$

definiert sind. Auf ihre Koordinatendarstellung wird im Abschnitt 4.2.3 noch eingegangen.

Um abschließend zu einer gewissen Interpretation der Koordinaten der oben eingeführten Verzerrungstensoren zu gelangen, wird die Streckung einer materiellen Faser infolge der Deformation untersucht. Dabei ist die materielle Faser zunächst im Ausgangszustand durch den Einheitsvektor  $\vec{N} = N_K \vec{e}_K$  im Punkt  $P$  gegeben. Durch die Bewegung verändert diese Faser ihre Richtung und soll im Momentanzustand in Richtung des Einheitsvektors  $\vec{n} = n_k \vec{e}_k$  im Punkt  $P'$  verlaufen. Als Streckung der Faser bezeichnet man die reine Verlängerung, die unabhängig von der Drehung durch

$$\Lambda_{\vec{N}} = \lambda_{\vec{n}} = \frac{ds}{dS}\tag{4.26}$$

gegeben ist. Der Zusammenhang zwischen den Einheitsvektoren der Richtung der materiellen Fasern und den Koordinatendifferentialen ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \frac{d\vec{X}}{|d\vec{X}|} = \frac{dX_K \vec{e}_K}{dS} = N_K \vec{e}_K \quad , \quad \vec{n} = \frac{d\vec{x}}{|d\vec{x}|} = \frac{dx_k \vec{e}_k}{ds} = n_k \vec{e}_k \\ N_K &= \frac{dX_K}{dS} \quad , \quad n_k = \frac{dx_k}{ds} . \end{aligned} \quad (4.27)$$

Einsetzen von (4.2.1) in (4.19) ergibt

$$ds^2 = C_{KL} N_K N_L dS^2 \quad , \quad dS^2 = B_{kl}^{-1} n_k n_l ds^2 \quad (4.28)$$

und schließlich

$$\Lambda_{\vec{N}} = \sqrt{C_{KL} N_K N_L} \quad , \quad \lambda_{\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{B_{kl}^{-1} n_k n_l}} . \quad (4.29)$$

Werden z.B. zwei unterschiedliche materielle Linienelemente untersucht, die im ersten Fall die Richtung der  $\vec{e}_1$ -Achse im Ausgangszustand und im zweiten Fall die Richtung der  $\vec{e}_1$ -Achse im Momentanzustand einnehmen, so gilt zunächst

$$N_1 = 1, N_2 = N_3 = 0 \quad , \quad n_1 = 1, n_2 = n_3 = 0 \quad (4.30)$$

und damit

$$\Lambda_1^2 = C_{11} \quad , \quad \lambda_1^2 = \frac{1}{B_{11}^{-1}} . \quad (4.31)$$

Analoge Beziehungen erhält man, wenn man die Linienelemente jeweils in Richtung der  $\vec{e}_2$ - und  $\vec{e}_3$ -Achse wählt. Mit den Koordinaten  $C_{11}, C_{22}$  und  $C_{33}$  bzw.  $B_{11}, B_{22}$  und  $B_{33}$  werden also die Streckungsquadrate von Linienelementen angegeben, die im Ausgangs- bzw. Momentanzustand in Richtung von  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  und  $\vec{e}_3$  zeigen. Eine Interpretation der gemischten Koordinaten von  $\mathbf{C}$  bzw.  $\mathbf{B}$  findet man, wenn das Skalarprodukt der Linienelemente von zwei verschiedenen materiellen Fasern untersucht wird. Zunächst gilt analog zu (4.2.1)

$$\begin{aligned} d\vec{X}^1 &= d\dot{S}^1 \vec{N}^1 & d\vec{X}^2 &= d\dot{S}^2 \vec{N}^2 & , & \quad d\vec{x}^1 &= d\dot{s}^1 \vec{n}^1 & \quad d\vec{x}^2 &= d\dot{s}^2 \vec{n}^2 \\ d\dot{X}_K^1 &= d\dot{S}^1 \dot{N}_K^1 & d\dot{X}_K^2 &= d\dot{S}^2 \dot{N}_K^2 & , & \quad d\dot{x}_k^1 &= d\dot{s}^1 \dot{n}_k^1 & \quad d\dot{x}_k^2 &= d\dot{s}^2 \dot{n}_k^2 . \end{aligned} \quad (4.32)$$

Jetzt bildet man folgende Skalarprodukte

$$\begin{aligned} d\vec{X}^1 \cdot d\vec{X}^2 &= d\dot{S}^1 d\dot{S}^2 \dot{N}_K^1 \dot{N}_K^2 = d\dot{S}^1 d\dot{S}^2 \cos(\vec{N}^1, \vec{N}^2) = d\dot{S}^1 d\dot{S}^2 \cos(\alpha_A) \\ d\vec{x}^1 \cdot d\vec{x}^2 &= d\dot{s}^1 d\dot{s}^2 \dot{n}_k^1 \dot{n}_k^2 = d\dot{s}^1 d\dot{s}^2 \cos(\vec{n}^1, \vec{n}^2) = d\dot{s}^1 d\dot{s}^2 \cos(\alpha_M) . \end{aligned} \quad (4.33)$$

Mit Hilfe von (4.18) erhält man

$$\begin{aligned} d^1\vec{x} \cdot d^2\vec{x} &= d^1\vec{X} \cdot \mathbf{C} \cdot d^2\vec{X} = d^1\dot{S}d^2\dot{S}^1\vec{N} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{N} & d^1\vec{X} \cdot d^2\vec{X} &= d^1\vec{x} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot d^2\vec{x} = d^1\dot{S}d^2\dot{S}^1\vec{n} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \vec{n} \\ d^1\dot{S}d^2\dot{S} \cos(\alpha_M) &= d^1\dot{S}d^2\dot{S}^1N_L C_{LM}^2\dot{N}_M & d^1\dot{S}d^2\dot{S} \cos(\alpha_A) &= d^1\dot{S}d^2\dot{S}^1n_l B_{lm}^{-1} \dot{n}_m . \end{aligned} \quad (4.34)$$

Bei Beachtung von (4.26) folgt

$$^1N_L C_{LM}^2 \dot{N}_M = \lambda_1 \lambda_2 \cos(\alpha_M) \quad ^1n_l B_{lm}^{-1} \dot{n}_m = \frac{\cos(\alpha_A)}{\lambda_1 \lambda_2} . \quad (4.35)$$

Wählt man nun

$$\begin{aligned} \vec{N}^1 &= \vec{e}_1 & \vec{n}^1 &= \vec{e}_1 \\ \vec{N}^2 &= \vec{e}_2 & \vec{n}^2 &= \vec{e}_2 , \end{aligned} \quad (4.36)$$

so berechnet man

$$C_{12} = \lambda_1 \lambda_2 \cos(\alpha_M) \quad B_{12}^{-1} = \frac{\cos(\alpha_A)}{\lambda_1 \lambda_2} . \quad (4.37)$$

Kennt man also  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  bzw.  $C_{11}$  und  $C_{22}$  bzw.  $B_{11}$  und  $B_{22}$  so erhält man aus  $C_{12}$  bzw.  $B_{12}$  Informationen über die Änderung von ursprünglich bzw. momentanen rechten Winkeln.

#### 4.2.2 Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Verschiebungen

Da die verformte Konfiguration des Körpers eindeutig durch das Verschiebungsfeld festgelegt ist, müssen auch alle Deformations- und Verzerrungsmaße durch die Verschiebungen berechenbar sein. Die entsprechenden Beziehungen für den LAGRANGE'schen und EULER'schen Verzerrungstensor werden im folgenden abgeleitet.

Aus (4.1) und Abbildung 2 folgt jeweils für die Koordinatendifferentiale

$$d\vec{x} = d\vec{X} + d\vec{u} \quad , \quad d\vec{X} = d\vec{x} - d\vec{u} \quad (4.38)$$

und mit (4.2.1) erhält man damit

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}} = \mathbf{I} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}} \quad , \quad \mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \vec{x}} = \mathbf{I} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}} . \quad (4.39)$$

Für die Ableitung der entsprechenden Koordinatenbeziehungen ist es zweckmäßig, im Gegensatz zu (4.2.1) den Deformationsgradienten bezüglich gleichartiger Basisvektoren in der Form  $\mathbf{F} = F_{KL} \vec{e}_K \otimes \vec{e}_L$  und  $\mathbf{F}^{-1} = F_{kl}^{-1} \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l$  darzustellen. In dem hier vorliegenden Fall gleicher kartesischer Koordinatensysteme ändern sich dadurch die einzelnen

Tensorkoordinaten von  $\mathbf{F}$  nicht. Im Fall allgemeiner krummliniger und für die jeweilige Konfiguration verschiedener Koordinaten ist jedoch eine Umrechnung erforderlich. Die Koordinatendarstellung von (4.39) ist damit durch

$$F_{KL} = \delta_{KL} + u_{K,L} \quad , \quad F_{kl}^{-1} = \delta_{kl} - u_{k,l} \quad (4.40)$$

gegeben. Damit können nach (4.2.1) die Koordinaten von  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{B}^{-1}$  wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} C_{KL} &= F_{MK} F_{ML} = (\delta_{MK} + u_{M,K})(\delta_{ML} + u_{M,L}) \\ &= \delta_{KL} + u_{K,L} + u_{L,K} + u_{M,K} u_{M,L} \quad , \\ B_{kl}^{-1} &= F_{mk}^{-1} F_{ml}^{-1} = (\delta_{mk} - u_{m,k})(\delta_{ml} - u_{m,l}) \\ &= \delta_{kl} - u_{k,l} - u_{l,k} + u_{m,k} u_{m,l} \quad . \end{aligned} \quad (4.41)$$

Durch Einsetzen dieser Beziehungen in (4.21) erhält man die gesuchten Verschiebungs-Verzerrungsbeziehungen in der Form

$$\begin{aligned} E_{KL} &= \frac{1}{2} (u_{K,L} + u_{L,K} + u_{M,K} u_{M,L}) \\ e_{kl} &= \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k} - u_{m,k} u_{m,l}) \quad , \end{aligned} \quad (4.42)$$

die aufgrund des letzten Anteils der jeweiligen rechten Seiten nichtlinear sind.

### 4.2.3 Hauptachsentransformation

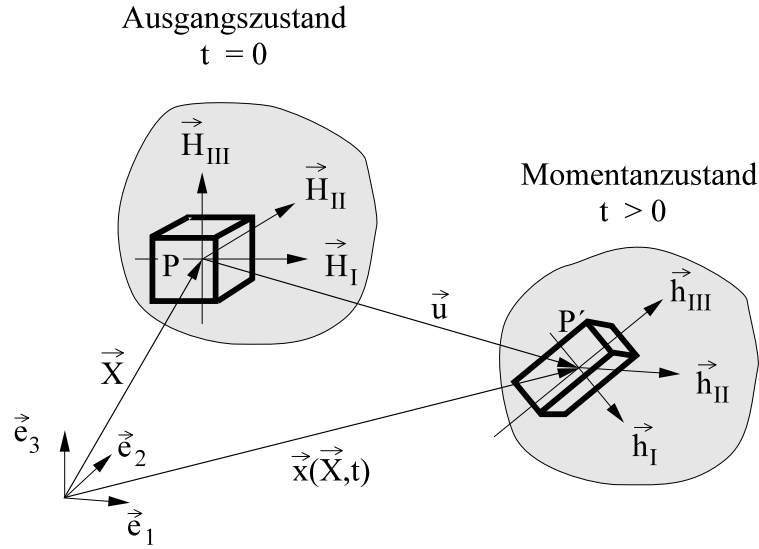
In jedem Punkt des materiellen Körpers lassen sich drei senkrechte materielle Fasern finden, die beim Übergang vom Ausgangs- in den Momentanzustand ihre rechten Winkel beibehalten und nur eine Streckung erfahren. Die Richtungen dieser materiellen Fasern werden im Ausgangszustand durch die Einheitsvektoren  $\vec{H}_\alpha$  ( $\alpha = I, II, III$ ) und im Momentanzustand durch die Einheitsvektoren  $\vec{h}_\alpha$  gekennzeichnet (Abbildung 3). Die Streckungen dieser Fasern bezeichnet man als Hauptstreckungen, für die nach (4.26)

$$\Lambda_{\vec{H}_\alpha} = \Lambda_\alpha = \lambda_{\vec{h}_\alpha} = \lambda_\alpha = \frac{ds_\alpha}{dS_{(\alpha)}} \quad (4.43)$$

gilt. Die Berechnung der Hauptstreckungen und Hauptstreckungsrichtungen kann auf Grund der Tatsache erfolgen, daß die Hauptstreckungen gleichzeitig extremale Streckungen sind. Es gilt demnach auch  $\Lambda_{\vec{H}_\alpha}^2 \rightarrow \text{Extremwert}$ , wobei mit (4.29)

$$\Lambda_{\vec{H}}^2 = C_{KL} H_K H_L \quad (4.44)$$





**Abbildung 3:** Materielle Hauptstreckungsrichtungen im Ausgangs- und Momentanzustand

sowie die Nebenbedingung  $|\vec{H}| = \delta_{KL} H_K H_L = 1$  zu beachten sind. Mit Einführung des LAGRANGE'schen Multiplikators  $C$  ergibt sich damit folgendes Extremwertproblem

$$\frac{\partial}{\partial H_M} [C_{KL} H_K H_L - C (\delta_{KL} H_K H_L - 1)] = 0, \quad (4.45)$$

das nach Ausführung der Differentiation auf das Eigenwertproblem der Form

$$(C_{ML} - C \delta_{ML}) H_L = 0 \quad (4.46)$$

führt. Die Bedeutung des LAGRANGE'schen Multiplikators ergibt sich aus der Multiplikation von (4.46) mit  $H_M$ , woraus mit (4.44)

$$C_{LM} H_L H_M = C = \Lambda_{\vec{H}}^2 \quad (4.47)$$

folgt. Entsprechend dem üblichen Vorgehen zur Lösung von Eigenwertproblemen ergeben sich die Hauptstreckungen als Lösung des charakteristischen Polynoms

$$\det(\mathbf{C} - \Lambda^2 \mathbf{I}) = 0. \quad (4.48)$$

Eine analoge Herleitung ist auch bezüglich der Momentankonfiguration möglich, aus der sich die gleichen Eigenwerte  $\lambda_\alpha$  aber verschiedenen Eigenrichtungen  $\vec{h}_\alpha$  ergeben.

Für die Komponentendarstellungen von  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{B}^{-1}$  bezüglich der Hauptstreckungsrich-

tungen ergeben sich die besonders übersichtlichen Spektraldarstellungen in der Form

$$\begin{aligned}\mathbf{U} &= U_{\alpha\beta} \vec{H}_\alpha \otimes \vec{H}_\beta = \sum \Lambda_\alpha \vec{H}_\alpha \otimes \vec{H}_\alpha \\ \mathbf{V} &= V_{\alpha\beta} \vec{h}_\alpha \otimes \vec{h}_\beta = \sum \lambda_\alpha \vec{h}_\alpha \otimes \vec{h}_\alpha \\ \mathbf{C} &= C_{\alpha\beta} \vec{H}_\alpha \otimes \vec{H}_\beta = \sum \Lambda_\alpha^2 \vec{H}_\alpha \otimes \vec{H}_\alpha \\ \mathbf{B}^{-1} &= B_{\alpha\beta}^{-1} \vec{h}_\alpha \otimes \vec{h}_\beta = \sum \lambda_\alpha^{-2} \vec{h}_\alpha \otimes \vec{h}_\alpha,\end{aligned}\quad (4.49)$$

wobei die Tensorkoordinaten explizit durch die Matrizen

$$\begin{aligned}U_{\alpha\beta} &= \begin{bmatrix} \Lambda_I & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_{III} \end{bmatrix} & V_{\alpha\beta} &= \begin{bmatrix} \lambda_I & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{III} \end{bmatrix} \\ C_{\alpha\beta} &= \begin{bmatrix} \Lambda_I^2 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{II}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_{III}^2 \end{bmatrix} & B_{\alpha\beta}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1/\lambda_I^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_{II}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda_{III}^2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

darstellbar sind. Ausgehend von der Hauptachsenform ergeben sich die logarithmischen Verzerrungstensoren  $\Phi$ ,  $\varphi$  nach (4.25) in der Gestalt

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_{\alpha\beta} \vec{H}_\alpha \otimes \vec{H}_\beta & \varphi &= \varphi_{\alpha\beta} \vec{h}_\alpha \otimes \vec{h}_\beta \\ \Phi_{\alpha\beta} &= \begin{bmatrix} \ln \Lambda_I & 0 & 0 \\ 0 & \ln \Lambda_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \ln \Lambda_{III} \end{bmatrix} & \varphi_{\alpha\beta} &= \begin{bmatrix} \ln \lambda_I & 0 & 0 \\ 0 & \ln \lambda_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \ln \lambda_{III} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Abschließend wird noch die Beziehung zwischen den Hauptachsenrichtungen der beiden Konfigurationen  $\vec{H}_\alpha$  und  $\vec{h}_\alpha$  hergeleitet. Mit

$$\vec{H}_\alpha = \frac{d\vec{X}_\alpha}{|d\vec{X}_{(\alpha)}|} = \frac{d\vec{X}_\alpha}{dS_{(\alpha)}} \quad (4.50)$$

folgt für

$$\vec{h}_\alpha = \frac{d\vec{x}_\alpha}{|d\vec{x}_{(\alpha)}|} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\vec{X}_\alpha}{ds_{(\alpha)}} = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot d\vec{X}_\alpha}{ds_{(\alpha)}} = \frac{dS_{(\alpha)} \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \vec{H}_\alpha}{ds_{(\alpha)}} = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \vec{H}_\alpha}{\Lambda_{(\alpha)}} \quad (4.51)$$

und unter Beachtung der Beziehung  $\mathbf{U}\vec{H}_\alpha = \Lambda_{(\alpha)}\vec{H}_\alpha$ , die sich aus (4.45) ergibt, erhält man damit den gesuchten Zusammenhang in der Form

$$\vec{h}_\alpha = \mathbf{R} \cdot \vec{H}_\alpha. \quad (4.52)$$

Der Drehtensor  $\mathbf{R}$  beschreibt damit die starre Drehung der materiellen Fasern eines Punktes, die die Hauptstreckungen ausführen. Es muß ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß für alle anderen materiellen Fasern durch denselben Punkt sich auch Drehungsanteile aus den Strecktensoren  $\mathbf{U}$  bzw.  $\mathbf{V}$  ergeben.

#### 4.2.4 Änderung von Flächen- und Volumenelementen

Für die Aufstellung von Bilanzgleichungen werden Aussagen über die durch die Bewegung verursachten Änderungen von Flächen- und Volumenelementen benötigt, die im folgenden untersucht werden.

Ein materielles Flächenelement an einem Punkt  $P$  des Ausgangszustandes ist durch den differentiellen Flächennormalenvektor  $d\vec{A}$

$$d\vec{A} = d\vec{X}^1 \times d\vec{X}^2 \quad , \quad dA_L = e_{LMN} dX_M^1 dX_N^2 \quad (4.53)$$

gegeben. Durch die Bewegung geht  $d\vec{A}$  in  $d\vec{a}$  am Punkt  $P'$  des Momentanzustandes gemäß

$$d\vec{a} = d\vec{x}^1 \times d\vec{x}^2 \quad , \quad da_l = e_{lmn} dx_m^1 dx_n^2 \quad (4.54)$$

über. Der Zusammenhang zwischen den differentiellen Linienelementen ergibt sich aus (4.10), so daß

$$da_l = e_{lmn} F_{mP} F_{nQ} dX_P^1 dX_Q^2 = e_{rmn} \delta_{rl} F_{mP} F_{nQ} dX_P^1 dX_Q^2 \quad (4.55)$$

folgt. Unter Beachtung von  $F_{rT} F_{Tl}^{-1} = \delta_{rl}$  und (4.12) erhält man damit

$$da_l = e_{rmn} F_{Tl}^{-1} F_{rT} F_{mP} F_{nQ} dX_P^1 dX_Q^2 = e_{TPQ} J F_{Tl}^{-1} dX_P^1 dX_Q^2 \quad (4.56)$$

und schließlich den gesuchten Zusammenhang in der Form

$$d\vec{a} = J \mathbf{F}^{-T} \cdot d\vec{A} \quad , \quad da_l = J X_{T,l} dA_T \quad (4.57)$$

Die Volumenelemente ergeben sich aus den Spatprodukten von drei differentiellen Linienelementen zu

$$\begin{aligned} dV &= [d\vec{X}^1 d\vec{X}^2 d\vec{X}^3] = e_{PQR} dX_P^1 dX_Q^2 dX_R^3 \\ dv &= [d\vec{x}^1 d\vec{x}^2 d\vec{x}^3] = e_{lmn} dx_l^1 dx_m^2 dx_n^3 \end{aligned} \quad (4.58)$$

wobei zwischen den differentiellen Linienelementen wieder die Umrechnung (4.10) gilt. Damit geschieht die Umrechnung analog zu (4.56) in der Form

$$dv = e_{lmn} F_{lP} F_{mQ} F_{nR} dX_P^1 dX_Q^2 dX_R^3 = e_{PQR} J dX_P^1 dX_Q^2 dX_R^3 \quad (4.59)$$

und man erhält den Zusammenhang durch

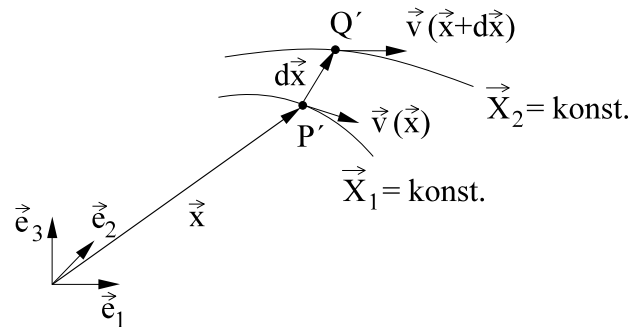
$$dv = J dV \quad (4.60)$$

### 4.3 Deformationsgeschwindigkeiten

#### 4.3.1 Definition von Deformationsgeschwindigkeitstensoren

Für das inelastische Materialverhalten werden die Stoffgesetze in der Regel in differentieller Form, d.h. einem Zusammenhang zwischen Änderung der Deformation zur Änderung der Spannung, angegeben. Deswegen wird im folgenden untersucht, wie in geeigneter Weise die Deformationsgeschwindigkeit eines materiellen Teilchens beschrieben werden kann. Dabei handelt es sich zunächst um reine geometrische Zusammenhänge.

Es wird ein materielles Teilchen zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t > 0$  in der Momentan-konfiguration betrachtet. Seine gesamte Bewegung setzt sich aus drei Anteilen zusammen: einer Translation, einer Rotation sowie einer Deformation, wobei die ersten beiden Anteile eine reine Starrkörperbewegung beinhalten. Alle drei Anteile können aus dem Geschwindigkeitsfeld des gesamten Körpers abgeleitet werden. Die Translationsbewegung kann eliminiert werden, wenn nur die Relativbewegung benachbarter Punkte untersucht wird. Die Verhältnisse für zwei benachbarte materielle Punkte sind in Abbildung 4 dargestellt. Für



**Abbildung 4:** Geschwindigkeitszustand benachbarter materieller Punkte

die Geschwindigkeit am Punkt  $Q'$  gilt

$$\vec{v}(\vec{x} + d\vec{x}) = \vec{v}(\vec{x}) + d\vec{v}(\vec{x}) . \quad (4.61)$$

Der Geschwindigkeitszuwachs  $d\vec{v}$  ist natürlich abhängig davon, welcher benachbarte Punkt  $d\vec{x}$  betrachtet wird. Allgemein gilt

$$d\vec{v} = \mathbf{L} \cdot d\vec{x} \quad , \quad dv_k = L_{km} dx_m , \quad (4.62)$$

wobei der Tensor zweiter Stufe

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} = L_{km} \vec{e}_k \otimes \vec{e}_m \quad , \quad L_{km} = v_{k,m} \quad (4.63)$$

als Geschwindigkeitsgradient bezeichnet wird. Unter Beachtung von (4.3), (4.10) ergibt sich folgende Umformung

$$d\vec{v} = d\dot{\vec{x}} = (\mathbf{F} \cdot d\vec{X})' = \dot{\mathbf{F}} \cdot d\vec{X} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{x} \quad (4.64)$$

und damit für die Berechnung von  $\mathbf{L}$  die Formel

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} . \quad (4.65)$$

Nach den bisherigen Ausführungen ist im Geschwindigkeitsgradienten  $\mathbf{L}$  noch die Starrkörperrotation und Deformation des materiellen Teilchens enthalten. Um hier eine Trennung vorzunehmen, wird  $\mathbf{L}$  in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Tensor gemäß

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{symm} + \mathbf{L}_{anti} = \mathbf{d} + \mathbf{w}$$

mit:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) & d_{km} &= \frac{1}{2}(v_{k,m} + v_{m,k}) \\ \mathbf{w} &= \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) & w_{km} &= \frac{1}{2}(v_{k,m} - v_{m,k}) \end{aligned} \quad (4.66)$$

aufgeteilt. Dabei ist  $\mathbf{d}$  der Deformationsgeschwindigkeitstensor und  $\mathbf{w}$  der Winkelgeschwindigkeitstensor. Zur mechanischen Interpretation dieser Aufteilung wird zunächst analog zu (4.18) die Änderung eines differentiellen Bogenlängenquadrates untersucht. Aus der Umformung

$$\begin{aligned} (ds^2)' &= (d\vec{x} \cdot d\vec{x})' = d\dot{\vec{x}} \cdot d\vec{x} + d\vec{x} \cdot d\dot{\vec{x}} \\ &= (\mathbf{L} \cdot d\vec{x}) \cdot d\vec{x} + d\vec{x} \cdot (\mathbf{L} \cdot d\vec{x}) \\ &= d\vec{x} \cdot \mathbf{L}^T \cdot d\vec{x} + d\vec{x} \cdot \mathbf{L} \cdot d\vec{x} \\ &= d\vec{x} \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \cdot d\vec{x} \end{aligned} \quad (4.67)$$

erhält man die Aussage, daß die Deformation des Teilchens im symmetrischen Anteil von  $\mathbf{L}$  enthalten ist. Wird dagegen eine Bewegung ohne Deformation betrachtet, d.h.  $\mathbf{d} = \mathbf{0}, \mathbf{L} = \mathbf{w}$ , so ergibt sich für den Geschwindigkeitszuwachs  $d\vec{v}$  eines benachbarten Punktes

$$dv_i = w_{lm} dx_m = e_{lmn} dx_m w_n = -e_{lmn} w_m dx_n = -(\vec{w} \times d\vec{x})_i . \quad (4.68)$$

Aus letzterer Darstellung ist erkennbar, daß es sich um eine Rotation des materiellen Teilchens mit dem Drehgeschwindigkeitsvektor  $\vec{w}$ , dem der antisymmetrische Tensor  $\mathbf{w}$  zugeordnet ist, handelt.

Ausgehend von (4.67) und analog zu (4.20) lassen sich durch

$$(ds^2)' = 2 d\vec{X} \cdot \mathbf{D} \cdot d\vec{X} = 2 d\vec{x} \cdot \mathbf{d} \cdot d\vec{x} \quad (4.69)$$

wieder zwei Deformationsgeschwindigkeitstensoren definieren. Dabei ist  $\mathbf{d}$  der bereits durch (4.66) eingeführte und auf den Momentanzustand bezogene EULER'sche Deformationsgeschwindigkeitstensor und  $\mathbf{D}$  der auf den Ausgangszustand bezogene LAGRANGE'sche Deformationsgeschwindigkeitstensor. Die Umrechnung erfolgt analog zu (4.2.1) durch

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{F} & \mathbf{d} &= \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}^{-1} \\ D_{KM} &= x_{k,K} d_{km} x_{m,M} & d_{km} &= X_{K,k} D_{KM} X_{M,m} . \end{aligned} \quad (4.70)$$

Im folgenden soll der Zusammenhang zwischen den eingeführten Deformationsgeschwindigkeitstensoren und den materiellen Zeitableitungen der Verzerrungstensoren untersucht werden. Ausgangspunkt bildet wieder die Zeitableitung eines differentiellen Bogenlängenquadrates. Für die LAGRANGE'sche Betrachtungsweise ergibt sich aus (4.20)

$$(ds^2)' = (2 d\vec{X} \cdot \mathbf{E} \cdot d\vec{X})' = 2 d\vec{X} \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot d\vec{X} \quad (4.71)$$

und durch Vergleich mit (4.69) der einfache Zusammenhang

$$\mathbf{D} = \dot{\mathbf{E}} \quad , \quad D_{KM} = \dot{E}_{KM} . \quad (4.72)$$

Für die EULER'sche Betrachtungsweise muß beachtet werden, daß das Linienelement  $d\vec{x}$  selbst zeitabhängig ist. In diesem Fall ergibt sich aus (4.20)

$$\begin{aligned} (ds^2)' &= (2 d\vec{x} \cdot \mathbf{e} \cdot d\vec{x})' \\ &= 2 (d\dot{\vec{x}} \cdot \mathbf{e} \cdot d\vec{x} + d\vec{x} \cdot \dot{\mathbf{e}} \cdot d\vec{x} + d\vec{x} \cdot \mathbf{e} \cdot d\dot{\vec{x}}) \\ &= 2 (d\vec{x} \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{e} \cdot d\vec{x} + d\vec{x} \cdot \dot{\mathbf{e}} \cdot d\vec{x} + d\vec{x} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{L} \cdot d\vec{x}) \\ &= 2 d\vec{x} \cdot (\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{L}) d\vec{x} \end{aligned} \quad (4.73)$$

und damit aus dem Vergleich mit (4.69)

$$\mathbf{d} = \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{L} \quad , \quad d_{km} = \dot{e}_{km} + v_{l,k} e_{lm} + e_{kl} v_{l,m} . \quad (4.74)$$

### 4.3.2 Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Deformationsgeschwindigkeit

Der Zusammenhang zwischen dem Deformationsgeschwindigkeitstensor und dem Geschwindigkeitsvektor an einem Punkt ist für die EULER'sche Betrachtungsweise aus (4.66) durch

$$d_{km} = \frac{1}{2}(v_{k,m} + v_{m,k}) \quad (4.75)$$

schon bekannt. Für die LAGRANGE'sche Betrachtungsweise kann der gesuchte Zusammenhang aus (4.72) und (4.42) unter Beachtung von

$$(u_{K,M})' = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_K}{\partial X_M} \right) = \frac{\partial}{\partial X_M} \left( \frac{\partial u_K}{\partial t} \right) = (\dot{u}_K)_{,M} = \dot{u}_{K,M} = v_{K,M} \quad (4.76)$$

in der Form

$$\begin{aligned} D_{KM} &= \dot{E}_{KM} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{K,M} + \dot{u}_{M,K} + \dot{u}_{L,K} u_{L,M} + u_{L,K} \dot{u}_{L,M}) \\ &= \frac{1}{2} (v_{K,M} + v_{M,K} + v_{L,K} u_{L,M} + v_{L,M} u_{L,K}) \end{aligned} \quad (4.77)$$

abgeleitet werden.

### 4.3.3 Zeitableitung von Flächen- und Volumenelementen

Für die materiellen Zeitableitungen von  $d\vec{a}$  und  $dv$  wird zunächst die Ableitung der Funktionaldeterminante  $J$  benötigt. Ausgangspunkt dafür bildet die Entwicklung der Determinante gemäß

$$J = \det(x_{k,M}) = \sum_N x_{k,N} A_{kN} , \quad (4.78)$$

wobei  $A_{kN}$  die Adjunkte zu  $x_{k,N}$  ist. Damit kann auch für den inversen Deformationsgradienten entsprechend den Regeln zur Invertierung einer Matrix die Beziehung

$$X_{N,k} = \frac{A_{kN}}{J} \quad (4.79)$$

angegeben werden. Die Zeitableitung von  $J$  ergibt sich damit aus folgender Rechnung

$$\dot{J} = \frac{\partial J}{\partial x_{k,M}} \dot{x}_{k,M} = A_{kM} \dot{x}_{k,M} = J \dot{x}_{k,M} X_{M,k} = J v_{k,M} X_{M,k} = J v_{k,k} . \quad (4.80)$$

Die Zeitableitung des gerichteten Flächenelementes nach (4.57) berechnet sich aus

$$\begin{aligned} d\dot{\vec{a}} &= (\dot{J} \mathbf{F}^{-T} + J \dot{\mathbf{F}}^{-T}) \cdot d\vec{A} \\ &= \frac{\dot{J}}{J} J \mathbf{F}^{-T} \cdot d\vec{A} + J \dot{\mathbf{F}}^{-T} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}^{-T}) \cdot d\vec{A} \\ &= \frac{\dot{J}}{J} d\vec{a} + \dot{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \mathbf{F}^T \cdot d\vec{a} \\ &= v_{m,m} d\vec{a} - \mathbf{L}^T \cdot d\vec{a} \end{aligned} \quad (4.81)$$

bzw. in Koordinatenschreibweise:

$$d\dot{a}_k = v_{m,m} da_k - v_{m,k} da_m .$$

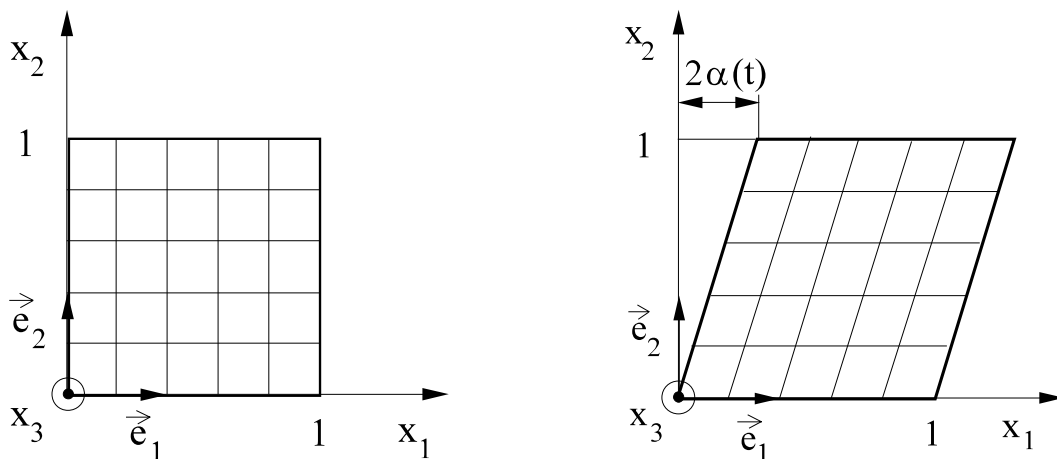
Bei der letzten Umformung in (4.81) wurde die Beziehung

$$\dot{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \mathbf{F}^T = -\mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T = -(\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1})^T = -\mathbf{L}^T \quad (4.82)$$

eingesetzt, die sich aus der Zeitableitung der Identität  $\mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^T = \mathbf{I}$  und (4.65) ergibt. Die Zeitableitung des Volumenelementes erhält man aus (4.60) und (4.80) in der Form

$$d\dot{v} = v_{m,m} dv . \quad (4.83)$$

#### 4.4 Beispiel Ebener Schub



**Abbildung 5:** Ebener Schub

Am Beispiel der in Abbildung 5 dargestellten ebenen Verformung werden die in den vorherigen Abschnitten herausgearbeiteten Beziehungen erläutert bzw. die eingeführten Deformations- und Verzerrungstensoren berechnet. Die Bewegung wird entsprechend (3.3) durch

$$x_1 = X_1 + 2\alpha(t)X_2$$

$$x_2 = X_2$$

$$x_3 = X_3$$

beschrieben. Der Deformationsgradient und der Rechts-CAUCHY-GREEN-Tensor berech-



nen sich gemäß (4.2.1) bzw. (4.2.1) zu

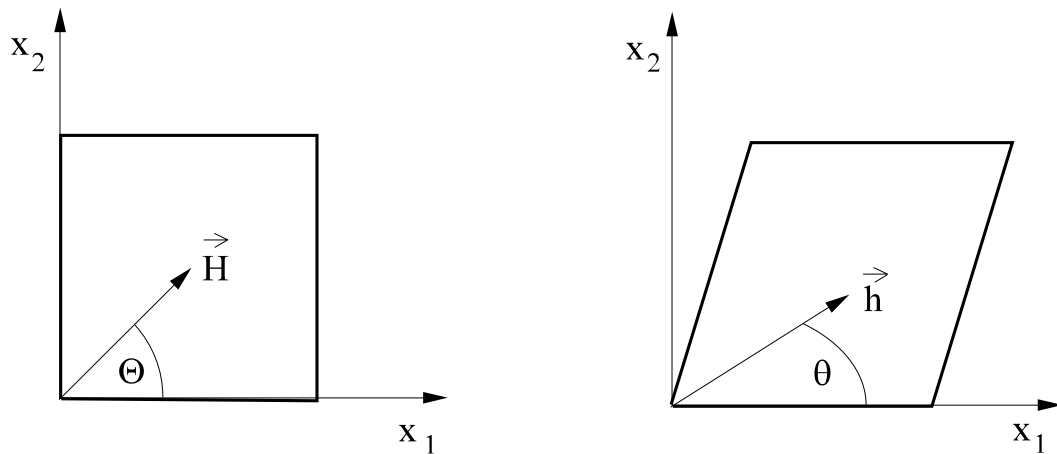
$$\mathbf{F} = [x_{k,L}] = \begin{bmatrix} 1 & 2\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [C_{KL}] = \begin{bmatrix} 1 & 2\alpha & 0 \\ 2\alpha & 1 + 4\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zur Ermittlung der Hauptwerte und Hauptrichtungen von  $\mathbf{C}$  wird für die Hauptachsenvektoren bezüglich des Ausgangszustandes  $\vec{H}$  der Ansatz

$$(H_L) = (\cos \Theta, \sin \Theta, 0)$$

eingeführt. Die Normierungsbedingung wurde bereits beachtet. Mit Hilfe von (4.29) be-



**Abbildung 6:** Hauptachsenvektoren

rechnet man zunächst

$$\begin{aligned} \Lambda_{\vec{H}}^2 &= C_{KL} H_K H_L \\ &= 1 + 4\alpha \sin \Theta \cos \Theta + 4\alpha^2 \sin^2 \Theta. \end{aligned}$$

Über die Forderung  $\Lambda_{\vec{H}}^2 \implies \text{Extr.}$  entsprechend (4.45) erhält man dann

$$\frac{d}{d\Theta}(\Lambda_{\vec{H}}^2) = 4\alpha(\cos 2\Theta + \alpha \sin 2\Theta) = 0$$

und damit

$$\tan 2\Theta = -\frac{1}{\alpha}.$$

Im Bereich  $0 \leq \Theta \leq 2\pi$  hat diese Gleichung genau 2 Lösungen für  $\Theta$ , die sich um die Winkeldifferenz von  $90^\circ$  unterscheiden. Dadurch sind in Abhängigkeit von  $\alpha$  die beiden Hauptachsenrichtungen bestimmt.

Der Links-CAUCHY-GREEN-Tensor (4.2.1) wird zu

$$\mathbf{B} = [B_{kl}] = \begin{bmatrix} 1 + 4\alpha^2 & 2\alpha & 0 \\ 2\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

berechnet. Damit erhält man für den inversen Tensor  $\mathbf{B}^{-1}$

$$\mathbf{B}^{-1} = [B_{kl}^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & -2\alpha & 0 \\ -2\alpha & 1 + 4\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Für die Hauptachsenvektoren in der Momentankonfiguration  $\vec{h}$  wird der normierte Ansatz

$$(h_i) = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

eingeführt. Mit Hilfe von (4.29) berechnet man zunächst

$$\begin{aligned} \lambda_h^2 &= \frac{1}{B_{kl}^{-1} h_k h_l} \\ &= \frac{1}{1 - 4\alpha \sin \theta \cos \theta + 4\alpha^2 \sin^2 \theta}. \end{aligned}$$

Über eine zu (4.45) analoge Forderung  $\lambda_h^2 \implies \text{Extr.}$  erhält man

$$\frac{d}{d\theta}(\lambda_h^2) = 0 \quad \implies \quad 4\alpha(-\cos 2\theta + \alpha \sin 2\theta) = 0$$

und damit

$$\tan 2\theta = \frac{1}{\alpha}.$$

Auch hierdurch sind wieder die beiden senkrechten Hauptachsenrichtungen in Abhängigkeit von der Verformung, d.h. von  $\alpha$ , eindeutig bestimmt. In Abbildung 7 sind die beiden berechneten Verzerrungshauptachsenrichtungen für einen vorgegebenen Verformungszustand graphisch dargestellt. Mittels polarer Zerlegung berechnet man

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = [R_{kL}] &= \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1 + \alpha^2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{U} = [U_{KL}] &= \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 + 2\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1 + \alpha^2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Diese Ergebnisse können durch

$$\begin{aligned} F_{kL} &= R_{kM}U_{ML} \\ C_{KL} &= U_{KM}U_{ML} \end{aligned}$$

kontrolliert werden. Für die Verzerrungstensoren nach (4.22) erhält man

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & -2\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Für kleine Verformungen gilt  $\alpha \ll 1$  und damit  $\alpha^2 \ll \alpha$ , so daß dann beide Verzerrungstensoren übereinstimmen und die einzige von Null verschiedene Komponente

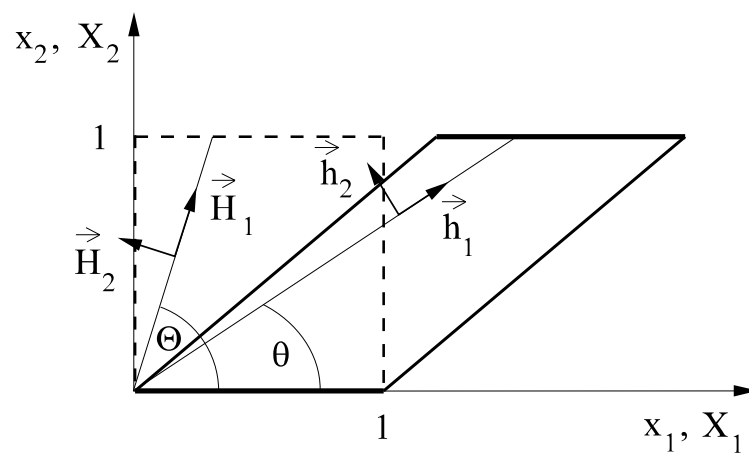
$$E_{12} = E_{21} = e_{12} = e_{21} = \varepsilon_{12} = \alpha$$

haben.

Für den Geschwindigkeitsvektor berechnet man aus (4.4)

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x}_1 = 2\dot{\alpha}X_2 \\ v_y &= \dot{x}_2 = 0 \\ v_z &= \dot{x}_3 = 0. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (4.63) und (4.66) erhält man für den Geschwindigkeitsgradienten, die De-



**Abbildung 7:** Hauptachsenrichtungen für Ebenen Schub

formationsgeschwindigkeit und den Winkelgeschwindigkeitstensor

$$\mathbf{L} = [L_{kl}] = 2\dot{\alpha} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{d} = [d_{kl}] = \dot{\alpha} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{w} = [w_{kl}] = \dot{\alpha} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

## 5 Kinetik

Die an einem Körper angreifenden äußeren Kräfte bewirken Verformungen und rufen innere Kräfte hervor. Diese Kräfte können z.B. mechanischer, elektrischer oder chemischer Natur sein.

Unter der Annahme, daß die äußeren Kräfte stetig bzw. stückweise stetig sind, kann eine Einteilung in

- äußere Körperkräfte  $d\vec{F}$  und
- äußere Oberflächenkräfte  $d\vec{s}$

erfolgen, wobei Körperkräfte auf ein Massen- oder Volumenelement des Körpers und Oberflächenkräfte auf ein Element der Körperoberfläche bezogen werden.

Die resultierende äußere Kraft  $\vec{F}_a$  und das resultierende äußere Moment  $\vec{M}_a$  auf den Körper berechnet sich damit aus

$$\vec{F}_a = \int_A d\vec{s} + \int_V d\vec{F} \quad (5.1)$$

$$\vec{M}_a = \int_A \vec{x} \times d\vec{s} + \int_V \vec{x} \times d\vec{F} \quad (5.2)$$

Der differentielle Schnittkraftvektor  $d\vec{s}$  kann sowohl auf das Flächenelement der Referenz- als auch der Momentankonfiguration bezogen werden. Dies führt zur Definition unterschiedlicher Spannungsvektoren. Man erhält:

$$d\vec{s} = \vec{t} da = \vec{p} dA . \quad (5.3)$$

Der Bezug des Schnittkraftvektors  $d\vec{F}$  auf das Massenelement anstatt auf das Volumenelement besitzt den Vorzug, damit  $\vec{f}$  wie auch  $d\vec{F}$  invariant gegenüber der Beschreibungsweise ist.

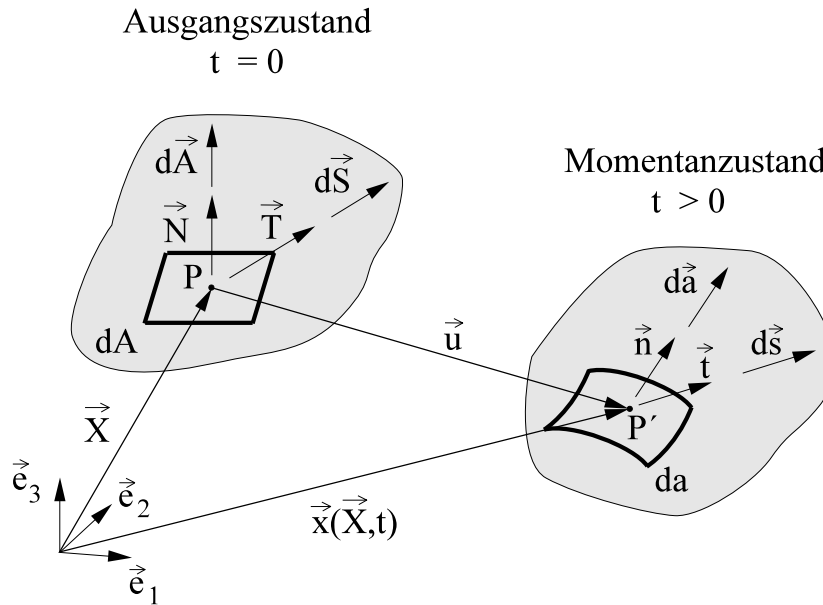
$$d\vec{F} = \vec{f} dm = \varrho \vec{f} dv = \varrho_0 \vec{f} dV . \quad (5.4)$$

Darüber hinaus erweist sich für die LAGRANGE'sche Beschreibung eine formale Umrechnung des Schnittkraftvektors  $d\vec{s}$  gemäß

$$d\vec{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{s} \quad (5.5)$$

sowie der Bezug auf das Flächenelement in der Referenzkonfiguration mit

$$d\vec{S} = \vec{T} dA \quad (5.6)$$



**Abbildung 8:** Schnittkraft- und Spannungsvektoren

als zweckmäßig. Die Gleichungen (5.1) und (5.2) können damit in Bezug auf die Momentankonfiguration in der Form

$$\begin{aligned}\vec{F}_a &= \int_a \vec{t} da + \int_v \rho \vec{f} dv \\ \vec{M}_a &= \int_a \vec{x} \times \vec{t} da + \int_v \rho \vec{x} \times \vec{f} dv \quad ,\end{aligned}\tag{5.7}$$

sowie in Bezug auf die Referenzkonfiguration in der Form

$$\begin{aligned}\vec{F}_a &= \int_A \mathbf{F} \cdot \vec{T} dA + \int_V \rho_0 \vec{f} dV \\ \vec{M}_a &= \int_A \vec{x} \times (\mathbf{F} \cdot \vec{T}) dA + \int_V \rho_0 \vec{x} \times \vec{f} dV\end{aligned}\tag{5.8}$$

geschrieben werden.

Die Formulierung eines Zusammenhangs zwischen den inneren Kräften, deren Summe aufgrund des NEWTON'schen Wechselwirkungsgesetzes gleich Null ist und den Oberflächenkräften  $d\vec{s}$  führt auf die Definition von Spannungstensoren.<sup>1</sup> Diese werden durch die

<sup>1</sup>Die willkürliche Festlegung, daß durch (5.9) der transponierte Spannungstensor definiert ist, hängt nur mit der Tradition zusammen, den ersten Index auf die Schnittfläche, und den zweiten auf die Schnittkraft zu beziehen.

Beziehungen

$$\begin{aligned} d\vec{s} &= \boldsymbol{\sigma}^T \cdot d\vec{a} = \mathbf{S}^T \cdot d\vec{A} & ds_k &= \sigma_{kl} da_l \\ d\vec{S} &= \mathbf{T}^T \cdot d\vec{A} & dS_K &= T_{KL} dA_L \end{aligned} \quad (5.9)$$

definiert, wobei  $\boldsymbol{\sigma}$  den CAUCHY'schen oder wahren Spannungstensor,  $\mathbf{S}$  den 1. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensor und  $\mathbf{T}$  den 2. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensor bezeichnet. Zwischen diesen Tensoren bestehen die Zusammenhänge:

$$\mathbf{S} = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad \mathbf{S} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^T \quad \mathbf{T} = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}. \quad (5.10)$$

Aus den unterschiedlichen Zerlegungen der differentiellen Schnittkraftvektoren  $d\vec{s}$  in (5.3) und (5.9) sowie  $d\vec{S}$  in (5.6) und (5.9) erhält man folgende Beziehungen zwischen den Spannungsvektoren und Spannungstensoren:

$$\begin{aligned} \vec{t} &= \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \frac{d\vec{a}}{da} = \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} & t_k &= \sigma_{lk} n_l = n_l \sigma_{lk} \\ \vec{T} &= \mathbf{T}^T \cdot \frac{d\vec{A}}{dA} = \mathbf{T}^T \cdot \vec{N} = \vec{N} \cdot \mathbf{T} & T_K &= T_{LK} N_L = N_L T_{LK} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Ersetzt man in den Gleichungen (5.7) und (5.8) die Spannungsvektoren durch die entsprechenden Spannungstensoren, führt dies auf folgende Beziehungen für die resultierende äußere Kraft und das resultierende äußere Moment:

$$\begin{aligned} \vec{F}_a &= \int_a \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \vec{n} da + \int_v \varrho \vec{f} dv \\ \vec{M}_a &= \int_a \vec{x} \times (\boldsymbol{\sigma}^T \cdot \vec{n}) da + \int_v \varrho (\vec{x} \times \vec{f}) dv \end{aligned} \quad (5.12)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \vec{F}_a &= \int_A \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}^T \cdot \vec{N} dA + \int_V \varrho_0 \vec{f} dV \\ \vec{M}_a &= \int_A \vec{x} \times (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}^T \cdot \vec{N}) dA + \int_V \varrho_0 (\vec{x} \times \vec{f}) dV \end{aligned} \quad (5.13)$$

## 6 Bilanzgleichungen

### 6.1 Allgemeine Formulierung von Bilanzgleichungen

Bilanzgleichungen beschreiben allgemeingültige Prinzipie bzw. Naturgesetze unabhängig von den speziellen Kontinuumseigenschaften. Sie werden zunächst in integraler Form als globale Aussagen für den Gesamtkörper angegeben. Für hinreichend glatte Felder der zu bilanzierenden Größen können aber auch lokale Formulierungen in der Form von Differentialgleichungen, die sich auf einen beliebig kleinen Teil des Körpers beziehen, gewählt werden. Bleibt bei einem zu bilanzierenden Prozeß die Bilanzgröße unverändert erhalten, haben Bilanzgleichungen den Charakter von Erhaltungssätzen.

Den momentanen Zustand eines Körpers kann man mathematisch durch Volumenintegrale über Dichteverteilungen<sup>2</sup> der mechanischen und/oder der thermischen Größen erfassen. Die Wirkung der äußeren Umgebung muß dagegen durch Volumen- und Oberflächenintegrale über die Volumen- und/oder Oberflächendichten von Belastungen ausgedrückt werden. Dabei können die auftretenden Integrale sowohl auf die Referenz- als auch auf die Momentankonfiguration bezogen werden.

Im folgenden soll  $\Phi$  eine den Zustand des Körpers beschreibende tensorielle physikalische Größe sein. Desweiteren sollen die Dichteverteilungen  $\varphi_v$  bzw.  $\varphi_{0v}$  bezüglich der Volumenelemente  $dv$  bzw.  $dV$  existieren, so daß gilt

$$\Phi(t) = \int_v \varphi_v(\vec{x}, t) dv = \int_V \varphi_{0v}(\vec{X}, t) dV . \quad (6.1)$$

Die materielle Zeitableitung der Funktion  $\Phi(t)$  entspricht der Änderungsgeschwindigkeit und muß mit der Wirkung der Umgebung auf den Körper bilanziert werden.

Für die Momentankonfiguration gilt dann

$$\dot{\Phi}(t) = \frac{D}{Dt} \int_v \varphi_v(\vec{x}, t) dv = \int_a \psi_a(\vec{x}, t) da + \int_v \psi_v(\vec{x}, t) dv \quad (6.2)$$

und für die Referenzkonfiguration

$$\dot{\Phi}(t) = \frac{D}{Dt} \int_V \varphi_{0v}(\vec{X}, t) dV = \int_A \psi_{0a}(\vec{X}, t) dA + \int_V \psi_{0v}(\vec{X}, t) dV , \quad (6.3)$$

wobei  $\psi_a$  und  $\psi_{0a}$  Oberflächendichten der äußeren Einwirkungen auf den Körper in der Momentan- und in der Referenzkonfiguration und  $\psi_v$  und  $\psi_{0v}$  die entsprechenden Volumendichten bezeichnen. Die Oberflächendichtewirkungen sind mit Zu- oder Abflüssen der

<sup>2</sup>Diese Art der Dichteverteilungen bezeichnet man im Gegensatz zur Massendichte  $\rho$  auch als spezifische Dichteverteilungen der entsprechenden physikalischen Größe pro Volumeneinheit. Weite Verbreitung besitzen auch spezifische Dichteverteilungen pro Masseneinheit.



entsprechenden Größe durch die Oberfläche des Körpers verbunden. Die Volumendichten repräsentieren eine äußere Volumendichtezufuhr oder die Erzeugung (Quellen) bzw. den Verlust (Senken) der Bilanzgröße innerhalb des Körpers.

Die Oberflächendichtefunktionen  $\psi_a$  und  $\psi_{0a}$  sind nicht nur Funktionen des Ortes und der Zeit, sondern hängen auch von der Orientierung des dem Materiepunktes zugeordneten Oberflächenelementes

$$d\vec{a} = \vec{n}(\vec{x}, t) da, \quad \text{bzw.} \quad (6.4)$$

$$d\vec{A} = \vec{N}(\vec{X}) dA \quad (6.5)$$

d.h. von der Normalenrichtung ab. Diese Abhängigkeit wird durch das CAUCHY'sche Lemma für Tensoren beliebiger Stufe  $p$

$$\psi_a^{(p)}(\vec{x}, \vec{n}, t) = \vec{n}(\vec{x}, t) \cdot \tilde{\psi}_a^{(p+1)}(\vec{x}, t) \quad (6.6)$$

$$\psi_{a0}^{(p)}(\vec{X}, \vec{N}, t) = \vec{N}(\vec{X}) \cdot \tilde{\psi}_{a0}^{(p+1)}(\vec{X}, t) \quad (6.7)$$

beschrieben, das eine lineare Abhängigkeit bezüglich der Normalen festlegt.

Die Bilanzgleichungen nehmen damit in den beiden Darstellungen die Struktur

$$\frac{D}{Dt} \int_v \varphi_v^{(p)}(\vec{x}, t) dv = \int_a \vec{n}(\vec{x}, t) \cdot \tilde{\psi}_a^{(p+1)}(\vec{x}, t) da + \int_v \psi_v^{(p)}(\vec{x}, t) dv \quad (6.8)$$

bzw.

$$\frac{D}{Dt} \int_V \varphi_{0v}^{(p)}(\vec{X}, t) dV = \int_A \vec{N}(\vec{X}) \cdot \tilde{\psi}_{0a}^{(p+1)}(\vec{X}, t) dA + \int_V \psi_{0v}^{(p)}(\vec{X}, t) dV \quad (6.9)$$

an.

Bei der Aufstellung spezieller Bilanzgleichungen ist es oft günstiger, wie bei der Formulierung der äußeren Kräfte statt mit Volumenkraftdichten mit Massendichten zu arbeiten. Versteht man unter  $\varphi_m$  und  $\psi_m$  Massendichtefunktionen, kann man die Bilanzgleichungen in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_m \varphi_m(\vec{x}, t) dm &\equiv \frac{D}{Dt} \int_v \varrho \varphi_m(\vec{x}, t) dv = \\ &\int_a \vec{n}(\vec{x}, t) \cdot \tilde{\psi}_a(\vec{x}, t) da + \int_v \varrho \psi_m(\vec{x}, t) dv \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_m \varphi_m(\vec{X}, t) dm &\equiv \frac{D}{Dt} \int_V \varrho_0 \varphi_m(\vec{X}, t) dV = \\ &\int_A \vec{N}(\vec{X}) \cdot \tilde{\psi}_{0a}(\vec{X}, t) dA + \int_V \varrho_0 \psi_m(\vec{X}, t) dV \end{aligned} \quad (6.11)$$

Nach Anwendung des GAUSS'schen Integralsatzes zur Umwandlung des Oberflächenintegrals in ein Volumenintegral in den Beziehungen (6.10) und (6.11) und mit  $dv \rightarrow 0$  bzw.  $dV \rightarrow 0$  folgen daraus die lokale Formulierung der allgemeinen Bilanzgleichungen

$$\frac{D}{Dt} [\varrho \varphi_m(\vec{x}, t)] = \frac{d \tilde{\psi}_a(\vec{x}, t)}{d\vec{x}} : \mathbf{I} + \varrho \psi_m(\vec{x}, t) \quad (6.12)$$

$$\frac{D}{Dt} [\varrho_0 \varphi_m(\vec{X}, t)] = \frac{d \tilde{\psi}_{0a}(\vec{X}, t)}{d\vec{X}} : \mathbf{I} + \varrho_0 \psi_m(\vec{X}, t) . \quad (6.13)$$

Schließt man zunächst thermodynamische Aufgabenstellungen aus, müssen Bilanzen für

- die Masse
- den Impuls sowie für
- den Drehimpuls

erfüllt werden. Diese werden im folgenden sowohl in ihrer globalen als auch lokalen Formulierung abgeleitet.

## 6.2 Massenbilanz

Die Masse eines materiellen Volumens ist zu allen Zeiten konstant.

$$M = \int_m dm = \int_v \varrho(\vec{x}, t) dv = \int_V \varrho_0(\vec{X}) dV = konst. \quad (6.14)$$

Geht man von der allgemeinen Form der Bilanzgleichungen (6.10) und (6.11) aus, verschwinden in diesem Fall die rechten Seiten und man erhält

$$\dot{M} = \frac{D}{Dt} \int_v \varrho(\vec{x}, t) dv = \frac{D}{Dt} \int_V \varrho_0(\vec{X}) dV = 0 . \quad (6.15)$$

Daraus ergibt sich die globale Massenbilanz in EULER'scher Darstellung zu

$$\int_v (\dot{\varrho} + \varrho v_{l,l}) dv = 0 \quad (6.16)$$

und in LAGRANGE'scher Darstellung zu

$$\int_V \frac{\partial \varrho_0}{\partial t} dV = 0 . \quad (6.17)$$

Die Forderung  $(dm) \cdot = 0$  führt auf die entsprechenden lokalen Formulierungen der Massenbilanz, die in der EULER'schen Darstellung durch die Differentialgleichung

$$\dot{\varrho} + \varrho v_{l,l} = 0 \quad (6.18)$$

angegeben werden kann. In der LAGRANGE'schen Darstellung ergibt sich die triviale Aussage  $\dot{\varrho}_0 = 0$ .

### 6.3 Impulsbilanz

Die Änderungsgeschwindigkeit des Gesamtimpulses  $I(\vec{x}, t)$  ist gleich der Summe aller auf den Körper wirkenden Oberflächen- und Volumenkräfte

$$\dot{\vec{I}} = \vec{F}_a. \quad (6.19)$$

Die allgemeine Form der Bilanzgleichung in EULER'scher Darstellung kann unter Beachtung der Definition für den Impulsvektor eines Körpers

$$\vec{I}(\vec{x}, t) = \int_m \vec{v}(\vec{x}, t) dm = \int_v \varrho(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t) dv = \int_V \varrho_0(\vec{X}) \vec{v}(\vec{X}, t) dV \quad (6.20)$$

sowie der Gleichung (5.12) mit  $\varphi_m = \vec{v}$ ,  $\tilde{\psi}_a = \boldsymbol{\sigma}$  und  $\psi_m = \vec{f}$  zur entsprechenden globalen Impulsbilanz

$$\dot{\vec{I}} = \frac{D}{Dt} \int_v \varrho(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t) dv = \int_a \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \vec{n} da + \int_v \varrho \vec{f} dv \quad (6.21)$$

umgeformt werden. Setzt man in (6.11) unter Beachtung von (5.13)  $\varphi_0 = \vec{v}$ ,  $\tilde{\psi}_{0a} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^T$  und  $\psi_m = \vec{f}$ , führt dies auf die globale Impulsbilanz in LAGRANGE'scher Darstellung

$$\dot{\vec{I}} = \frac{D}{Dt} \int_V \varrho_0(\vec{X}) \vec{v}(\vec{X}, t) dV = \int_A \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}^T \cdot \vec{N} dA + \int_V \varrho_0 \vec{f} dV. \quad (6.22)$$

Die materiellen Zeitableitungen der Integrale ergeben sich unter Beachtung der Massenbilanz zu:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_v \varrho v_k dv &= \int_v \dot{v}_k \varrho dv + v_k (\varrho dv) \cdot \\ &= \int_v \varrho a_k dv \end{aligned} \quad (6.23)$$

und

$$\frac{D}{Dt} \int_V \varrho_0 v_k dV = \int_V \varrho_0 \dot{v}_k dV = \int_V \varrho_0 a_k dV. \quad (6.24)$$

Die Oberflächenintegrale werden unter Verwendung des GAUSS'schen Integralsatzes in Volumenintegrale umgeformt. Man erhält

$$\begin{aligned} \int_a \sigma_{lk} n_l da &= \int_v \sigma_{lk,l} dv \\ \int_A x_{L,K} T_{MK} N_M dA &= \int_V (x_{L,K} T_{MK})_{,M} dV \end{aligned} \quad (6.25)$$

und somit als äquivalente Formulierung der globalen Impulsbilanz in EULER'scher Darstellung die Beziehung

$$\int_v [\sigma_{kl,k} + \varrho(f_l - a_l)] dv = 0 \quad (6.26)$$

bzw. in LAGRANGE'scher Darstellung den Zusammenhang

$$\int_V [(x_{L,K} T_{MK})_{,M} + \varrho_0(f_L - a_L)] dV = 0. \quad (6.27)$$

Als lokale Konsequenz ergibt sich daraus die 1. CAUCHY'sche Bewegungsgleichung, die in den beiden Darstellungen die Form

$$\sigma_{kl,k} + \varrho(f_l - a_l) = 0 \quad (6.28)$$

bzw. unter Einführung des Verschiebungsvektors  $\vec{u}$  die Form

$$[(\delta_{LK} + u_{L,K}) T_{MK}]_{,M} + \varrho_0(f_L - a_L) = 0 \quad (6.29)$$

annimmt. Für quasistatische Vorgänge können die Trägheitskräfte vernachlässigt werden, so daß die 1. CAUCHY'sche Bewegungsgleichung in die lokalen Gleichgewichtsbedingungen übergeht.

## 6.4 Drehimpulsbilanz

Die Änderungsgeschwindigkeit des Gesamtdrehimpulses des Körpers  $D_O(\vec{x}, t)$  in bezug auf einen gewählten Punkt O ist gleich dem Gesamtmoment aller von außen auf den Körper wirkenden Oberflächen- und Volumenkräfte bezüglich des gleichen Punktes O.

Unter Beachtung der Definition für den globalen Drehimpulsvektor

$$\vec{D} = \int_v \varrho(\vec{x}, t) [\vec{x} \times \vec{v}(\vec{x}, t)] dv \quad (6.30)$$

kann die Drehimpulsbilanz durch

$$\dot{\vec{D}} = \vec{M}_a. \quad (6.31)$$

formuliert werden. Daraus ergibt sich unter Beachtung (5.12)

$$\frac{D}{Dt} \int_v \varrho(\vec{x}, t) [\vec{x} \times \vec{v}(\vec{x}, t)] dv = \int_a \vec{x} \times (\boldsymbol{\sigma}^T \cdot \vec{n}) da + \int_v \varrho(\vec{x} \times \vec{f}) dv. \quad (6.32)$$

Für die materielle Zeitableitung des Integrals erhält man

$$\frac{D}{Dt} \int_v \varrho x_k v_l e_{klm} \vec{e}_m dv = \int_v x_k v_l e_{klm} \vec{e}_m (\varrho dv)' + \int_v v_k v_l e_{klm} \vec{e}_m \varrho dv + \int_v x_k a_l e_{klm} \vec{e}_m \varrho dv \quad (6.33)$$

wobei die beiden ersten Volumenintegrale aufgrund der Massenerhaltung  $(\varrho dv)' = 0$  sowie wegen  $\vec{v} \times \vec{v} = 0$  verschwinden.

Das Oberflächenintegral kann unter Beachtung der Beziehung

$$\int_a \vec{x} \times \vec{t} da = \int_a \vec{x} \times (\boldsymbol{\sigma}^T \cdot \vec{n}) da = - \int_a (\vec{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \times \vec{x} da \quad (6.34)$$

sowie des GAUSS'schen Integralsatzes in

$$\int_a n_p \sigma_{pl} x_k e_{klm} \vec{e}_m da = \int_v (\sigma_{pl} x_k e_{lkm})_{,p} \vec{e}_m dv \quad (6.35)$$

umgeformt werden. Faßt man alle Zwischenergebnisse zusammen, führt dies auf

$$\int_v x_k e_{klm} \vec{e}_m [(a_l - f_l) + \sigma_{pl,p}] dv + \int_v \sigma_{pl} \delta_{kp} e_{lkm} \vec{e}_m dv = 0 \quad (6.36)$$

Das erste Integral verschwindet infolge der Erfüllung der 1. CAUCHY'schen Bewegungsgleichung. Aus dem zweiten Integral folgt

$$\sigma_{kl} e_{lkm} = 0 \quad (6.37)$$

woraus direkt die Symmetrie des CAUCHY'schen Spannungstensors

$$\sigma_{kl} = \sigma_{lk} \quad (6.38)$$

folgt.

In der LAGRANGE'schen Darstellung führt die Drehimpulsbilanz auf die Symmetrie des 2.PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensors.

$$T_{KL} = T_{LK} \quad (6.39)$$

Die Symmetrieeigenschaften des CAUCHY'schen sowie des 2.PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensors geht bei sogenannten polaren Medien verloren. Polare Medien liegen vor, wenn als elementare Schnittreaktionen nicht nur Kräfte, sondern auch Momente zugelassen werden. In diesem Fall wird Gleichung (6.37) bzw. (6.39) durch die 2. CAUCHY'sche Bewegungsgleichung ersetzt.

## 7 Thermomechanik

### 7.1 Einführende Bemerkungen

In den bisherigen Abschnitten stand das mechanische Verhalten von Körpern im Vordergrund. Demnach waren die gesuchten Felder  $\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t)$  in der LAGRANGE'schen Betrachtungsweise sowie  $\vec{v}(\vec{x}, t)$ ,  $\varrho(\vec{x}, t)$  in der EULER'schen Betrachtungsweise.

Interessiert man sich darüber hinaus dafür, wie warm der Körper ist bzw. will man thermomechanische Wechselwirkungen untersuchen, sind Erweiterungen notwendig. Solche Wechselwirkungen können beispielsweise bei der Erwärmung infolge plastischer Verformung oder der Änderung des Elastizitätsmoduls bei veränderlicher Temperatur beobachtet werden.

Die Konsequenz für die mathematische Modellierung im Rahmen der Kontinuumsmechanik besteht darin, daß zusätzliche Felder eingeführt werden müssen. Diese sind in der LAGRANGE'schen Betrachtungsweise Funktionen von  $\vec{X}, t$  und in der EULER'schen Betrachtungsweise Funktionen von  $\vec{x}, t$ . Eine wichtige Rolle spielt die Temperatur  $\vartheta$ , weil sie analog zu den o.g. als zusätzliche gesuchte Feldgröße auftritt. Andere Größen, wie beispielsweise die Wärmemenge oder der Wärmestrom sind dagegen konstitutiver Natur.

Als zusätzliche, für die Lösung des Feldproblems auswertbare Bilanzgleichung steht jetzt der Energieerhaltungssatz (1. Hauptsatz der Thermodynamik) zur Verfügung. Für rein mechanische Probleme kann der Energiesatz aus dem Impulserhaltungssatz abgeleitet werden und liefert deswegen für die Lösung des Feldproblems keine zusätzliche Information.

Eine für die Kontinuumsmechanik wichtige Fragestellung ist die nach der Zulässigkeit thermodynamischer Prozesse. Dabei versteht man allgemein unter einem thermodynamischen Prozeß eine Lösung der Feldgleichungen (Bilanz- und konstitutive Gleichungen) unter bestimmten Anfangs- und Randbedingungen. Anders ausgedrückt ist ein thermodynamischer Prozeß ein Vorgang, der so abläuft, daß alle Feldgleichungen zu jedem Zeitpunkt erfüllt sind.

Aus der Erfahrung weiß man, daß es Prozesse gibt, die in einer Richtung ablaufen können, deren Umkehrung aber ohne, daß an der Umgebung Veränderungen vollzogen werden, nicht möglich sind. So kann beispielsweise Wärme immer von einem wärmeren auf einen kälteren Körper übergehen, die Umkehrung ist jedoch von selbst nicht möglich. Man nennt solche nicht umkehrbaren Prozesse irreversible Prozesse. Bei genauer Betrachtung sind aufgrund von Reibungsverlusten o.ä. alle in der Makrowelt ablaufenden Vorgänge, und nur diese können von der Kontinuumsmechanik beschrieben werden, irreversibel. Reversible Prozesse stellen dagegen eine Idealisierung dar.

Mathematisch wird diese Beobachtung durch den 2. Hauptsatz der Thermodynamik beschrieben. Hierzu wurde von CLAUSIUS eine neue Größe, die Entropie, eingeführt. In der Thermodynamik wird gezeigt, daß es sich dabei um eine sogenannte extensive Zustandsgröße handelt, die proportional zur Masse anwächst. Damit ist es möglich, auch für die Entropie eine Bilanz zu formulieren. Die Kernaussage des 2. Hauptsatzes besteht nun darin, daß in der Entropiebilanz eine spontane innere Entropieproduktion enthalten ist, die nicht negativ sein darf und nur für den Idealfall reversibler Prozesse verschwindet.

Im Rahmen der gesamten Gleichungen nimmt damit der 2. Hauptsatz der Thermodynamik eine gewisse Sonderstellung ein. Aus ihm kann keine zusätzliche Feldgleichung zur Lösung des Randwertproblems abgeleitet werden. Dagegen liefert der 2. Hauptsatz Einschränkungen für die noch aufzustellenden Materialgleichungen, die verhindern, daß als Lösung der Feldgleichungen unmögliche Prozesse erhalten werden. In diesem Sinn ist der 2. Hauptsatz der Thermodynamik eine wichtige Grundlage der Kontinuumsmechanik und Materialtheorie.

## 7.2 Energieerhaltungssatz (1. Hauptsatz der Thermodynamik)

### 7.2.1 Globale Formulierung

Für einen abgeschlossenen Bereich des Kontinuums lautet der Satz von der Erhaltung der Energie

$$\dot{U} + \dot{K} = \dot{W} + \dot{Q} \quad (7.1)$$

Dabei sind

$U$  - die innere Energie

$K$  - die kinetische Energie

$W$  - die mechanische Arbeit der äußeren Kräfte

$Q$  - die Wärmemenge

des Körpers. In dieser Form besagt der Energieerhaltungssatz, daß die Änderung der inneren und kinetischen Energie hervorgerufen wird durch die mechanische Leistung der äußeren Kräfte sowie durch zu- oder abgeführte Wärme pro Zeiteinheit. Die Vorzeichen werden aus der Sicht des Körpers so festgelegt, daß Energieerhöhung bzw. Zuführung von Wärme oder mechanischer Arbeit als positive Änderungen betrachtet werden.

Die in (7.1) vorkommenden Energieanteile  $U, K, W, Q$  sind dem gesamten Körper bzw. dem betrachteten Teil des Körpers, für den die Energie bilanziert werden soll, zugeordnet. Man bezeichnet sie deshalb auch als globale Größen, wobei es sich hier ausschließlich um additive (extensive) Größen handelt. Das bedeutet, daß bei einer Unterteilung des

Körpers sich deren Gesamtenergie aus der Summe der Energien der einzelnen Teile ergibt. Dadurch ist es möglich, zu Energiedichten überzugehen, d.h. zu lokalen Größen, die im Volumen zumindestens stückweise stetig sein sollen. Hierfür gibt es analog zu Abschnitt 6.1 verschiedene Varianten, weil der Bezug sowohl zur Masse als auch zum Volumen möglich und darüberhinaus zwischen Ausgangs- und Momentankonfiguration zu unterscheiden ist. Sei  $A$  eine beliebige globale Größe, dann sind folgende Darstellungen

$$A = \int_v \bar{A} dv = \int_V \hat{A} dV = \int_v \varrho A^* dv = \int_V \varrho_0 A^* dV \quad (7.2)$$

möglich. Dabei sind:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= dA / dv && \text{- Dichte von } A \text{ bezogen auf das momentane Volumen} \\ \hat{A} &= dA / dV && \text{- Dichte von } A \text{ bezogen auf das Ausgangsvolumen} \\ A^* &= dA / dm && \text{- Dichte von } A \text{ bezogen auf die Masse} \end{aligned}$$

Wegen  $dm = \varrho dv = \varrho_0 dV$  ändert sich  $A^*$  bei Wechsel der Bezugskonfiguration nicht. Deswegen wird im folgenden die massenbezogene Dichte verwendet. Für die materielle Zeitableitung von  $A$  ergibt sich damit

$$\dot{A} = \frac{D}{Dt} \int_v \varrho A^* dv = \int_v \varrho \dot{A}^* dv = \int_V \varrho_0 \dot{A}^* dV. \quad (7.3)$$

Damit erhält man für die einzelnen Anteile in (7.1):

*Innere Energie:*

$$U = \int_v \varrho U^* dv = \int_V \varrho_0 U^* dV \quad (7.4)$$

*Kinetische Energie:*

$$K = \frac{1}{2} \int_v \varrho \vec{v} \cdot \vec{v} dv = \frac{1}{2} \int_V \varrho_0 \vec{v} \cdot \vec{v} dV \quad (7.5)$$

*Mechanische Leistung der äußeren Kräfte:*

$$\dot{W} = \int_v \varrho \vec{f} \cdot \vec{v} dv + \int_a \vec{t} \cdot \vec{v} da = \int_V \varrho_0 \vec{f} \cdot \vec{v} dV + \int_A \vec{p} \cdot \vec{v} dA \quad (7.6)$$

*Wärmezufuhr:*

$$\dot{Q} = \int_v \varrho r dv - \int_a \vec{q} \cdot d\vec{a} = \int_V \varrho_0 r dV - \int_A \vec{Q} \cdot d\vec{A} \quad (7.7)$$



Hierbei kennzeichnen  $r$  Wärmequellen pro Masseneinheit im Inneren des Körpers und  $\vec{q}$  bzw.  $\vec{Q}$  den Wärmestrom durch die Oberfläche, wobei die Umrechnung

$$\vec{Q} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \vec{q} \quad , \quad Q_L = J X_{L,m} q_m \quad (7.8)$$

aus (4.57) abgeleitet werden kann. Zu den unterschiedlichen Darstellungen der Gleichungen (7.4) - (7.7) ist noch zu bemerken, daß die globalen Größen auf der linken Seite der Gleichungen jeweils dem aktuellen Zustand zur Zeit  $t$  zugeordnet sind. Die Umrechnung auf die Ausgangskonfiguration ist analog zur Definition des 2.PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensor formaler Natur und für die LAGRANGE'sche Darstellung notwendig, weil die unabhängigen Koordinaten  $\vec{X}$  und damit das Integrationsgebiet den Ausgangszustand darstellen.

### 7.2.2 Lokale Formulierung

Zunächst soll die lokale Form des Energieerhaltungssatzes durch die Bilanz bezüglich der aktuellen Konfiguration abgeleitet werden. Einsetzen der entsprechenden Integrale aus (7.4) - (7.7) in (7.1) ergibt unter Beachtung von (7.3)

$$\int_v \varrho (\dot{U}^* + v_m a_m) dv = \int_v \varrho (f_m v_m + r) dv + \int_a (t_m v_m - q_m n_m) da . \quad (7.9)$$

Wird der Spannungsvektor nach (5) durch den Spannungstensor ausgedrückt, kann das Oberflächenintegral in (7.9) analog zu (6.25) mit dem GAUSS'schen Integralsatz in ein Volumenintegral umgeformt werden. Unter Beachtung von (6.28) erhält man damit

$$\int_v \varrho \dot{U}^* dv = \int_v [\varrho r + \sigma_{lm} v_{m,l} - q_{m,m}] dv . \quad (7.10)$$

Aufgrund der Symmetrie des Wahren Spannungstensors gilt

$$\sigma_{lm} v_{m,l} = \sigma_{lm} d_{lm} , \quad (7.11)$$

so daß aus (7.10) die lokale Formulierung des Energieerhaltungssatzes in der EULER'schen Betrachtungsweise

$$\varrho \dot{U}^* = \sigma_{lm} d_{lm} + \varrho r - q_{m,m} \quad (7.12)$$

abgeleitet werden kann.

Die für die LAGRANGE'sche Betrachtungsweise alternative Form des Energieerhaltungssatzes wird unter Einbeziehung des symmetrischen 2.PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensors abgeleitet. Die mechanische Leistung der äußeren Kräfte (7.6) ergibt sich unter

Beachtung von (5.10) zu

$$\dot{W} = \int_V \varrho_0 f_M v_M dV + \int_A T_{ML} x_{m,L} v_m dA_M . \quad (7.13)$$

Einsetzen der auf den Ausgangszustand bezogenen Leistungsanteile in (7.1) ergibt wieder den Energiesatz in der zu (7.9) analogen integralen Form zu

$$\int_V \varrho_0 (\dot{U}^* + v_M a_M) dV = \int_V \varrho_0 (r + f_M v_M) dV + \int_A (T_{ML} x_{m,L} v_m - Q_M) N_M dA . \quad (7.14)$$

Auch hier erfolgt die Umwandlung des Oberflächenintegrals wieder mit dem GAUSS'schen Integralsatz durch

$$\begin{aligned} \int_A (T_{ML} x_{m,L} v_m - Q_M) N_M dA &= \int_V (T_{ML} x_{m,L} v_m - Q_M)_{,M} dV \\ &= \int_V [T_{ML} (\delta_{KL} + u_{K,L}) v_K - Q_M]_{,M} dV \\ &= \int_V \left\{ [T_{ML} (\delta_{KL} + u_{K,L})]_{,M} v_K + T_{ML} (\delta_{KL} + u_{K,L}) v_{K,M} - Q_{M,M} \right\} dV . \end{aligned} \quad (7.15)$$

Weiterhin gilt folgende Umformung

$$\begin{aligned} T_{ML} (\delta_{KL} + u_{K,L}) v_{K,M} &= T_{ML} (v_{L,M} + u_{K,L} v_{K,M}) \\ &= T_{ML} \frac{1}{2} [v_{L,M} + v_{M,L} + u_{K,L} v_{K,M} + u_{K,M} v_{K,L}] \\ &= T_{ML} D_{ML} , \end{aligned} \quad (7.16)$$

womit (7.14) in

$$\int_V \varrho_0 \dot{U}^* dV = \int_V [\varrho_0 r + T_{ML} D_{ML} - Q_{M,M}] dV \quad (7.17)$$

übergeht. Damit erhält man als lokale Formulierung des Energieerhaltungssatzes für die LAGRANGE'sche Betrachtungsweise die Beziehung

$$\varrho_0 \dot{U}^* = T_{ML} D_{ML} + \varrho_0 r - Q_{M,M} , \quad (7.18)$$

die einen analogen Aufbau wie (7.12) aufweist.

## 7.3 Entropieprinzip (2. Hauptsatz der Thermodynamik)

### 7.3.1 Entropie und Entropiebilanz

In der Thermodynamik wird die Entropie als eine Zustandsgröße eingeführt, die den Wärmeaustausch zwischen einem System und seiner Umwelt kontrolliert. Diese Eigenschaft besitzt die Temperatur nicht, da ein Körper Wärme aufnehmen kann, ohne daß sich die Temperatur ändert.

Die Entropie besitzt zwei wesentliche Eigenschaften: a) sie ist im Rahmen der Kontinuumsmechanik eine materialabhängige Größe, und b) sie ist eine additive (extensive) Größe, d.h. die Entropie von mehreren Teilen des Körpers ergibt sich aus der Summe der Entropien der einzelnen Teile des Körpers. Ohne bereits an dieser Stelle auf die konstitutiven Beziehungen zur Berechnung der Entropie einzugehen, ist es damit möglich, eine Entropiedichte einzuführen sowie eine Entropiebilanz aufzustellen.

Die Gesamtentropie eines materiellen Körpers ergibt sich aus

$$S = \int_v \varrho S^* dv = \int_V \varrho_0 S^* dV \quad (7.19)$$

wobei  $S^*$  die massenbezogene Entropiedichte darstellt.

Für die Aufstellung der Entropiebilanz muß die Änderung der Gesamtentropie des materiellen Körpers betrachtet werden. Hierfür gibt es drei Anteile.

- einen Entropiestrom  $\vec{h}$  durch die aktuelle Oberfläche des materiellen Körpers bzw. des zu bilanzierenden Bereiches. Dieser kann analog dem Wärmestrom formal auf die Ausgangsoberfläche umgerechnet werden.
- eine auf die Masse bezogene kontrollierbare Entropieproduktion  $s$  im Inneren des materiellen Körpers. Diese kann beispielsweise durch Strahlung hervorgerufen sein.
- durch eine nichtkontrollierbare spontane Entropiezunahme  $\tilde{\varphi}$  im Inneren des materiellen Körpers. Dieser Anteil ist eine Besonderheit der Entropiebilanz und tritt in den bisherigen Bilanzgleichungen nicht auf.

Bezogen auf die Momentankonfiguration (EULER'sche Betrachtungsweise) lautet damit die Entropiebilanz

$$\frac{D}{Dt} \int_v \varrho S^* dv = - \int_a \vec{h} \cdot d\vec{a} + \int_v \varrho s dv + \int_v \varrho \tilde{\varphi} dv . \quad (7.20)$$

Die Vorzeichenfestlegung bezüglich des Entropiestroms ist analog zum Wärmestrom.

Für die alternative, auf den Ausgangszustand bezogene Formulierung der Entropiebilanz

wird der Entropiestrom analog zu (7.8) durch

$$\vec{H} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \vec{h} \quad , \quad H_L = J X_{L,m} h_m \quad (7.21)$$

umgerechnet. Damit erhält man die Entropiebilanz für die LAGRANGE'sche Betrachtungsweise in der Form

$$\frac{D}{Dt} \int_V \varrho_0 S^* dV = - \int_A \vec{H} \cdot d\vec{A} + \int_V \varrho_0 s dV + \int_V \varrho_0 \tilde{\varphi} dV . \quad (7.22)$$

### 7.3.2 Globale Formulierung des 2. Hauptsatzes

Ausgehend von der Entropiebilanz (7.20) bzw. (7.22) läßt sich der 2. Hauptsatz der Thermodynamik folgendermaßen formulieren.

Für alle Lösungen der Feldgleichungen, d.h. für alle thermodynamischen Prozesse, muß

$$\tilde{\varphi} \geq 0 \quad (7.23)$$

gelten, wobei  $S^*$ ,  $\vec{h}$  bzw.  $\vec{H}$  konstitutive Größen sind.

Hierzu sind einige Bemerkungen anzubringen:

- 1) Die Entropiequelle  $s$  ist analog der Massenkraft eine äußere Belastung und damit keine konstitutive Größe.
- 2) Das Gleichheitszeichen in (7.23) gilt für den Idealfall reversibler Prozesse.
- 3)  $S^*$  und  $\vec{h}$  bzw.  $\vec{H}$  müssen zwar zunächst durch konstitutive Gleichungen festgelegt werden, werden aber bei der Auswertung des 2. Hauptsatzes wieder eliminiert. In den Stoffgleichungen, die als zusätzliche Feldgleichungen für die Lösung des Randwertproblems erforderlich sind und für die der 2. Hauptsatz Einschränkungen liefert, kommen  $S^*$  und  $\vec{h}$  bzw.  $\vec{H}$  nicht mehr vor.

Für die weiteren Ausführungen sollen die Entropieströme und -quellen allein durch Wärmezufuhr verursacht sein, was in vielen Fällen gegeben ist. Damit gelten die Beziehungen:

$$s = \frac{r}{\vartheta} \quad , \quad \vec{H} = \frac{1}{\vartheta} \vec{Q} \quad , \quad \vec{h} = \frac{1}{\vartheta} \vec{q} . \quad (7.24)$$

Unter Anwendung von (7.23) ergibt sich der 2. Hauptsatz der Thermodynamik in der globalen Form für die EULER'sche Betrachtungsweise zu

$$\int_v \varrho \dot{S}^* dv \geq - \int_a \frac{\vec{q}}{\vartheta} \cdot d\vec{a} + \int_v \varrho \frac{r}{\vartheta} dv \quad (7.25)$$

und für die LAGRANGE'sche Betrachtungsweise zu

$$\int_V \varrho_0 \dot{S}^* dV \geq - \int_A \frac{\vec{Q}}{\vartheta} \cdot d\vec{A} + \int_V \varrho_0 \frac{r}{\vartheta} dV. \quad (7.26)$$

### 7.3.3 Lokale Formulierung des 2. Hauptsatzes

Die Oberflächenintegrale in (7.25) und (7.26) werden wieder mit dem GAUSS'schen Integralsatz entsprechend

$$\begin{aligned} \int_a \frac{q_m}{\vartheta} da_m &= \int_a \frac{q_m n_m}{\vartheta} da = \int_v \left( \frac{q_m}{\vartheta} \right)_{,m} dv \\ &= \int_v \left( \frac{1}{\vartheta} q_{m,m} - \frac{q_m}{\vartheta^2} \vartheta_{,m} \right) dv \end{aligned} \quad (7.27)$$

analog:

$$\int_A \frac{Q_M}{\vartheta} dA_M = \int_V \left( \frac{1}{\vartheta} Q_{M,M} - \frac{Q_M}{\vartheta^2} \vartheta_{,M} \right) dV$$

umgeformt. Damit erhält man die erste Möglichkeit einer lokalen Formulierung des 2. Hauptsatzes für die EULER'sche Betrachtungsweise durch

$$\varrho (\vartheta \dot{S}^* - r) + q_{m,m} - \frac{q_m \vartheta_{,m}}{\vartheta} \geq 0 \quad (7.28)$$

und für die LAGRANGE'sche Betrachtungsweise durch

$$\varrho_0 (\vartheta \dot{S}^* - r) + Q_{M,M} - \frac{Q_M \vartheta_{,M}}{\vartheta} \geq 0. \quad (7.29)$$

Durch Einführung der freien HELMHOLTZ'schen Energie

$$F^* = U^* - \vartheta S^* \quad (7.30)$$

können (7.28) und (7.29) in eine für manche Anwendungen günstigere Form überführt werden. Unter Einbeziehung von (7.12) und (7.18) erhält man damit als zweite Möglichkeit einer lokalen Formulierung des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik für die EULER'sche Betrachtungsweise die Beziehung

$$-\varrho (\dot{F}^* + \dot{\vartheta} S^*) + \sigma_{ml} d_{ml} - \frac{q_m \vartheta_{,m}}{\vartheta} \geq 0 \quad (7.31)$$

und für die LAGRANGE'sche Betrachtungsweise die analoge Beziehung

$$-\varrho_0 (\dot{F}^* + \dot{\vartheta} S^*) + T_{ML} D_{ML} - \frac{Q_M \vartheta_{,M}}{\vartheta} \geq 0. \quad (7.32)$$

## 8 Materialtheorie

### 8.1 Einführung

Die in dem vorherigen Abschnitt behandelten Bilanzgleichungen der Kontinuumsmechanik sind von den konkreten stofflichen Eigenschaften unabhängig. Die Erfahrung zeigt jedoch, daß diese stofflichen Eigenschaften einen entscheidenden Einfluß auf das Verhalten des Kontinuums haben. Gase, Flüssigkeiten oder Festkörper aus Holz bzw. Metall bringen einer auf sie wirkenden Kraft unterschiedliche Widerstände entgegen. In der mathematischen Beschreibung des Kontinuums spiegelt sich diese Beobachtung dadurch wieder, daß die Anzahl der Bilanzgleichungen kleiner als die der darin enthaltenen Unbekannten ist. Es sind somit weitere Gleichungen notwendig, um die unbekanntes Feldgrößen zu ermitteln. Diese Beziehungen werden als Stoffgesetze, Materialgleichungen oder konstitutive Gleichungen bezeichnet. Der Teil des Stoffgesetzes, der den Zusammenhang zwischen der Bewegung der materiellen Teilchen und dem Spannungstensor vermittelt, heißt Deformationsgesetz. Im allgemeinen sind mechanische Vorgänge aufgrund der vorhandenen Dissipation stets mit einer Temperaturänderung verbunden.

Die genaue Anzahl der zusätzlichen Gleichungen läßt sich aus einer entsprechenden Gegenüberstellung der vorhandenen Bilanzen und der enthaltenen Unbekannten bestimmen. In den folgenden Tabellen sind für das thermo-mechanische Gesamtfeldproblem die entsprechenden abhängigen Variablen bzw. Gleichungen enthalten.

Variable	Symbol	Anzahl
Verschiebung	$u_k(x_m, t)$	3
Spannung	$\sigma_{kl}(x_m, t)$	6
Dichte	$\varrho(x_m, t)$	1
Temperatur	$\vartheta(x_m, t)$	1
Wärmestrom	$q_k(x_m, t)$	3
spezifische innere Energie	$U^*(x_m, t)$	1
spezifische Entropie	$S^*(x_m, t)$	1

**Tabelle 1:** Liste der abhängigen Variablen für das thermo-mechanische Feldproblem

Bei diesem Problem stehen den 5 Bilanzgleichungen 16 abhängige Variable gegenüber, so

Bilanz	Gleichung	Anzahl
Masse	$\dot{\varrho} + \varrho v_{k,k} = 0$	1
Impuls	$\sigma_{kl,k} + \varrho(f_l - a_l) = 0$	3
Energie	$\varrho \dot{U}^* = \sigma_{kl} d_{kl} - q_{k,k} + \varrho r$	1

**Tabelle 2:** Liste der erarbeiteten Bilanzgleichungen

daß 11 Zusammenhänge durch das Stoffgesetz bereitzustellen sind, um das Feldproblem lösen zu können. Dies sind im einzelnen das Deformationsgesetz  $\sigma_{kl}(u_m, \vartheta)$  (6), eine Gleichung für die spezifische innere Energie  $U^*(u_m, \vartheta)$  (1), eine für die spezifische Entropie  $S^*(u_m, \vartheta)$  (1) und die Beziehungen für den Wärmestrom  $q_k(u_m, \vartheta)$  (3).

## 8.2 Prinzipien der Materialtheorie

Die Prinzipien zur Aufstellung von Stoffgesetzen sind in den letzten Jahrzehnten systematisch herausgearbeitet worden (NOLL, TRUESDELL, ERINGEN). Es handelt sich dabei nicht um Gesetzmäßigkeiten, sondern um festgeschriebene verallgemeinerte Erfahrungen mit überwiegend axiomatischen Charakter. Diese Prinzipien dienen als Unterstützung bei der Formulierung von Stoffgesetzen und können somit Fehler bei deren mathematischen Beschreibung verhindern. Für konkrete Berechnungen sind weitere Einschränkungen, sogenannte konstitutive Annahmen, notwendig.

Im folgenden werden die wichtigsten Prinzipien in einer Kurzfassung wiedergegeben.

### Prinzip des Determinismus

Alle abhängigen konstitutiven Variablen ( $\sigma_{kl}, q_k, U^*, S^*$ ) in einem materiellen Teilchen sind durch die Geschichte der unabhängigen Variablen ( $u_m, \vartheta$ ) im Körper bestimmt.

#### Interpretation:

Die Zukunft hat auf das Verhalten des Kontinuums zum aktuellen Zeitpunkt keinen Einfluß (Ausschließungsprinzip). Die Ursachen für Veränderungen im Kontinuum liegen immer in diesem selbst.

Von den 15 konstitutiven Variablen ( $\sigma_{kl}, q_k, U^*, S^*, u_m, \vartheta$ ), die Dichte  $\varrho$  ist mit der Massenbilanz festgelegt, werden 11 durch das Stoffgesetz bestimmt und es ergibt sich die oben angegebene Einteilung in abhängige und unabhängige konstitutive Variable.

### Prinzip der lokalen Wirkung

Die abhängigen konstitutiven Variablen in einem materiellen Teilchen werden nur durch die Werte der unabhängigen konstitutiven Variablen in der näheren Umgebung des Teilchens bestimmt. Ist dies ausschließlich die differentiell nahe Umgebung, so heißt das Material „einfach“.

#### Schlußfolgerung:

Bei einfachem Material wird der Einfluß der Umgebung durch die unabhängigen konstitutiven Variablen Deformationsgradient  $F_{kK} = \partial x_k / \partial X_K$  bzw. Verschiebungsgradient  $u_{k,K} = \partial x_k / \partial X_K - 1$  und Temperaturgradient  $\mu_k = \vartheta_{,k} = \partial \vartheta / \partial x_k$  beschrieben.

### Prinzip der materiellen Objektivität

Die Stoffgesetze ändern sich nicht, wenn sich das Bezugssystem des lokalen Beobachters durch eine beliebige Starrkörperbewegung von einem zweiten unterscheidet bzw. wenn der Bewegung des materiellen Teilchens eine beliebige Starrkörperbewegung überlagert wird.

#### Bemerkung:

Bei der Herleitung von Stoffgesetzen ist es zweckmäßig, objektive Tensoren zu verwenden, die sich bei den genannten Starrkörperbewegungen nach bestimmten Regeln transformieren.

### Prinzip der Äquipräsenz

In allen Stoffgesetzen wird zunächst der gleiche Satz unabhängiger konstitutiver Variabler zugelassen.

### Prinzip der thermodynamischen Zulässigkeit

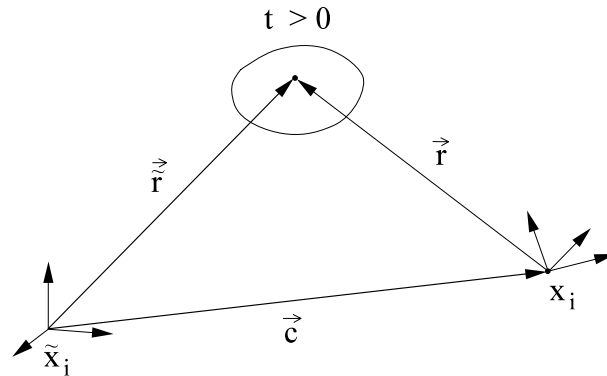
Die Stoffgesetze müssen dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik genügen.

## 8.3 Objektive Variablen in der Theorie einfacher Materialien

Die Bewegung eines Körpers wird relativ zu einem Bezugssystem gemessen. Die in der Kontinuumsmechanik auftretenden physikalischen Größen sind in einer definierten Weise von dem starren Anteil dieser Bewegung unabhängig.

### Transformationen





**Abbildung 9:** Zur Beschreibung einer äquivalenten Bewegung

Gegeben seien zwei Ortsvektoren  $\vec{r}$  und  $\vec{\tilde{r}}$  zwischen denen der Zusammenhang

$$\vec{\tilde{r}} = \mathbf{Q} \cdot \vec{r} + \vec{c} \quad (8.33)$$

gilt. In dieser Beziehung beschreibt der Vektor  $\vec{c}(t)$  eine reine Translation und  $\mathbf{Q}(t)$  ist ein eigentlich orthogonaler Tensor mit den Eigenschaften

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{I} \quad \text{und} \quad \det(\mathbf{Q}) = 1 \quad . \quad (8.34)$$

Die Transformation (8.33) kann entweder eine *Starrkörperbewegung* definieren, um die sich zwei Bezugssysteme unterscheiden. D.h.  $\vec{r}$  und  $\vec{\tilde{r}}$  beschreiben die gleiche Bewegung bezüglich zwei unterschiedlicher Systeme.

Oder die Gleichung (8.33) charakterisiert eine *Starrkörperbewegung*, um die sich zwei Körperbewegungen  $\vec{r}$  und  $\vec{\tilde{r}}$  unterscheiden. Die Messung dieser beiden Bewegungen erfolgt in ein und demselben Bezugssystem.

Unabhängig von der jeweiligen Interpretation werden Bewegungen, die die Gleichung (8.33) erfüllen, als äquivalent bezeichnet. Ein objektiver Tensor zeichnet sich durch ein bestimmtes Transformationsverhalten beim Übergang zu einer äquivalenten Bewegung aus.

### Definition der Objektivität

Ein LAGRANGEScher Skalar  $\phi$ , Vektor  $\vec{V}$  und Tensor zweiter Stufe  $\mathbf{T}$  bzw. ein EULERScher Skalar  $\varphi$ , Vektor  $\vec{v}$  und Tensor zweiter Stufe  $\mathbf{t}$  heißen objektiv, wenn für sie unter Anwen-

dung der Gleichung (8.33) gilt:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\phi}(\vec{R}, t) &= \phi(\vec{R}, t) & \text{bzw.} & & \tilde{\varphi}(\vec{r}, t) &= \varphi(\vec{r}, t) \\
 \vec{V}(\vec{R}, t) &= \vec{V}(\vec{R}, t) & \text{bzw.} & & \vec{v}(\vec{r}, t) &= \mathbf{Q}(t) \cdot \vec{v}(\vec{r}, t) \\
 \tilde{\mathbf{T}}(\vec{R}, t) &= \mathbf{T}(\vec{R}, t) & \text{bzw.} & & \tilde{\mathbf{t}}(\vec{r}, t) &= \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{t}(\vec{r}, t) \cdot \mathbf{Q}^T(t) \quad .
 \end{aligned} \tag{8.35}$$

## Untersuchung der Objektivität

### • EULERSche Tensoren

#### 1. Geschwindigkeit $\vec{v}$

$$\begin{aligned}
 \vec{v} &= \dot{\vec{r}} \\
 \vec{v} &= \dot{\vec{r}} = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \vec{r} + \mathbf{Q} \cdot \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{c}} \\
 &= \mathbf{Q} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \vec{r} + \dot{\vec{c}}
 \end{aligned}$$

Der Vergleich dieser Gleichung mit der Beziehung (8.35) zeigt, daß die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  *nicht* objektiv ist.

#### 2. Geschwindigkeitsgradient $\mathbf{L}$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L} &= \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \\
 \tilde{\mathbf{L}} &= \dot{\tilde{\mathbf{F}}} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-1}
 \end{aligned}$$

Mit dem Zusammenhang

$$d\vec{r} = \mathbf{Q} \cdot d\vec{r} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} \cdot d\vec{R} = \tilde{\mathbf{F}} \cdot d\vec{R}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{L}} &= (\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{F}}) \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^T \\
 &= \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T \\
 &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T \quad .
 \end{aligned}$$

Der Vergleich dieser Gleichung mit der Beziehung (8.35) zeigt, daß der Geschwindigkeitsgradient  $\mathbf{L}$  *nicht* objektiv ist.

3. Deformationsgeschwindigkeit  $\mathbf{d}$ 

$$\begin{aligned}\mathbf{d} &= \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \\ \tilde{\mathbf{d}} &= \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{L}} + \tilde{\mathbf{L}}^T) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T)\end{aligned}$$

Mit den Zusammenhängen

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{I} \quad \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T = \mathbf{0} \quad \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T = -\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T$$

ergibt sich

$$\tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{Q} \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{Q}^T \quad .$$

Der Vergleich dieser Gleichung mit der Beziehung (8.35) zeigt, daß die Deformationsgeschwindigkeit  $\mathbf{d}$  objektiv ist.

4. Winkelgeschwindigkeit  $\mathbf{w}$ 

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \\ \tilde{\mathbf{w}} &= \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{L}} - \tilde{\mathbf{L}}^T) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{Q}^T - \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T) \\ &= \mathbf{Q} \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \cdot \mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T \\ &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T\end{aligned}$$

Der Vergleich dieser Gleichung mit der Beziehung (8.35) zeigt, daß die Winkelgeschwindigkeit  $\mathbf{w}$  *nicht* objektiv ist.

5. Spannungstensor – wahre Spannung  $\boldsymbol{\sigma}$ 

$$\begin{aligned}d\vec{S} &= \boldsymbol{\sigma}^T \cdot d\vec{A} \\ d\vec{S} &= \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T \cdot d\vec{A}\end{aligned}$$

Mit den Zusammenhängen

$$d\vec{S} = \mathbf{Q} \cdot d\vec{S} \quad d\vec{A} = \mathbf{Q} \cdot d\vec{A}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \cdot d\vec{S} &= \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot d\vec{A} \\ d\vec{S} &= \mathbf{Q}^T \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot d\vec{A} \quad . \end{aligned}$$

Es gilt somit

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T$$

und der Vergleich mit der Beziehung (8.35) zeigt, daß die wahre Spannung  $\boldsymbol{\sigma}$  objektiv ist.

6. Spannungsgeschwindigkeit mittels materieller Zeitableitung der wahren Spannung  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$

$$\begin{aligned} \frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Dt} &= \dot{\boldsymbol{\sigma}} \\ \frac{D\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{Dt} &= \dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} = (\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T) \cdot \\ &= \mathbf{Q} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{Q}^T \cdot \dot{\mathbf{Q}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{Q}^T \end{aligned}$$

Der Vergleich dieser Gleichung mit der Beziehung (8.35) zeigt, daß die materielle Zeitableitung der wahren Spannung  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  *nicht* objektiv ist.

Es gilt allgemein: Die materielle Zeitableitung eines objektiven EULERSchen Tensors ist *nicht* objektiv.

• LAGRANGESche Tensoren

1. Spannungstensor – 2. PIOLA-KIRCHHOFFSche Spannung  $\mathbf{T}$

Die Überprüfung erfolgt auf der Grundlage des  $\boldsymbol{\sigma}$ -  $\mathbf{T}$  Zusammenhanges.

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{\varrho_0}{\varrho} \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \\ \tilde{\mathbf{T}} &= \frac{\varrho_0}{\varrho} \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-T} \\ &= \frac{\varrho_0}{\varrho} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F})^{-1} \cdot (\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F})^{-T} \\ &= \frac{\varrho_0}{\varrho} \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}^{-T} \\ &= \frac{\varrho_0}{\varrho} \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad \quad \quad = \mathbf{T} \end{aligned}$$

Der Vergleich dieser Gleichung mit der Beziehung (8.35) zeigt, daß der 2. PIOLA-KIRCHHOFFSche Spannungstensor  $\mathbf{T}$  objektiv ist.

Es gilt allgemein: Ein LAGRANGEScher Tensor ist stets objektiv.

• Möglichkeiten zur Definition von objektiven Spannungsgeschwindigkeiten

Aus dem Umstand, daß die materielle Zeitableitung der wahren Spannung nicht objektiv ist, läßt sich die Notwendigkeit zu der Suche nach objektiven Spannungsgeschwindigkeiten ableiten.

1. JAUMANNsche Spannungsgeschwindigkeit

In der Winkelgeschwindigkeit  $\tilde{w}$  und der materiellen Zeitableitung des wahren Spannungstensors sind die gleichen Zusatzterme enthalten, die die Objektivität stören. Auf dieser Grundlage kann mit

$$\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T = \tilde{w} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{Q}^T$$

eine neue Spannungsgeschwindigkeit

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\sigma}} &= \mathbf{Q} \cdot \dot{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot [(\mathbf{Q}^T \cdot \tilde{w} \cdot \mathbf{Q} - \mathbf{w}) \cdot \sigma + \sigma \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{Q}^T \cdot \tilde{w} \cdot \mathbf{Q})] \cdot \mathbf{Q}^T \\ \dot{\tilde{\sigma}} - \tilde{w} \cdot \tilde{\sigma} + \tilde{\sigma} \cdot \tilde{w} &= \mathbf{Q} \cdot (\dot{\sigma} - \mathbf{w} \cdot \sigma + \sigma \cdot \mathbf{w}) \cdot \mathbf{Q}^T \\ \tilde{\sigma}^* &= \mathbf{Q} \cdot \dot{\sigma}^* \cdot \mathbf{Q}^T \end{aligned}$$

eingeführt werden.

Mit dem Symbol  $(^*)$  wird die oben definierte Ableitungsvorschrift eingeführt, deren Anwendung auf den wahren Spannungstensor die zeitliche Änderung des Spannungstensors in dem bewegten System  $\vec{x}$  angibt.

2. TRUESDELLe Spannungsgeschwindigkeit

Mit der Aussage, daß LAGRANGESche Tensoren stets objektiv sind, lassen sich weitere objektive Spannungsgeschwindigkeiten definieren:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{T}} &= \frac{\varrho_0}{\varrho} \mathbf{F}^{-1} \cdot \dot{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \\ &= \left( \frac{\varrho_0}{\varrho} \right) \dot{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \sigma \cdot \mathbf{F}^{-T} + \frac{\varrho_0}{\varrho} \dot{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \sigma \cdot \mathbf{F}^{-T} + \frac{\varrho_0}{\varrho} \mathbf{F}^{-1} \cdot \dot{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} + \frac{\varrho_0}{\varrho} \mathbf{F}^{-1} \cdot \sigma \cdot \dot{\mathbf{F}}^{-T} \\ &= \frac{\varrho_0}{\varrho} \mathbf{F}^{-1} \left( \dot{\sigma} + \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \sigma + \sigma \cdot \dot{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \mathbf{F}^T + \frac{\dot{\varrho}}{\varrho} \sigma \right) \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad . \end{aligned}$$

Mit der Massenbilanz  $\dot{\rho} + \rho \operatorname{tr}(\mathbf{L}) = 0$  ergibt sich für die TRUESDELLEsche Spannungsgeschwindigkeit die mit  $\overset{\nabla}{\sigma}$  gekennzeichnete Ableitungsvorschrift

$$\overset{\nabla}{\sigma} = \dot{\sigma} - \mathbf{L} \cdot \sigma - \sigma \cdot \mathbf{L}^T + \sigma \operatorname{tr}(\mathbf{L}) \quad .$$

### 3. OLDROYDSche Spannungsgeschwindigkeit

Basierend auf der JAUMANNschen Spannungsgeschwindigkeit können durch Addition äquivalenter symmetrischer Terme

$$\mathbf{d} \cdot \sigma + \sigma \cdot \mathbf{d} \quad \text{und} \quad \sigma \operatorname{tr}(\mathbf{d}) = \sigma \operatorname{tr}(\mathbf{L})$$

weitere objektive Geschwindigkeiten erzeugt werden. Mit diesen Summanden läßt sich auch der Unterschied zwischen der JAUMANNschen und der TRUESDELLEschen Spannungsgeschwindigkeit beschreiben. Die (*lower convected*) OLDROYDSche Spannungsgeschwindigkeit ist mit

$$\begin{aligned} \overset{\Delta}{\sigma} &= \overset{*}{\sigma} + \mathbf{d} \cdot \sigma + \sigma \cdot \mathbf{d} \\ &= \dot{\sigma} - \mathbf{w} \cdot \sigma + \sigma \cdot \mathbf{w} + \mathbf{d} \cdot \sigma + \sigma \cdot \mathbf{d} \\ &= \dot{\sigma} + \sigma \cdot (\mathbf{d} + \mathbf{w}) + (\mathbf{d} - \mathbf{w}) \cdot \sigma \\ &= \dot{\sigma} + \sigma \cdot \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \cdot \sigma \end{aligned}$$

definiert. Durch die Subtraktion der gleichen Terme ergibt sich die (*upper convected*) OLDROYDSche Spannungsgeschwindigkeit

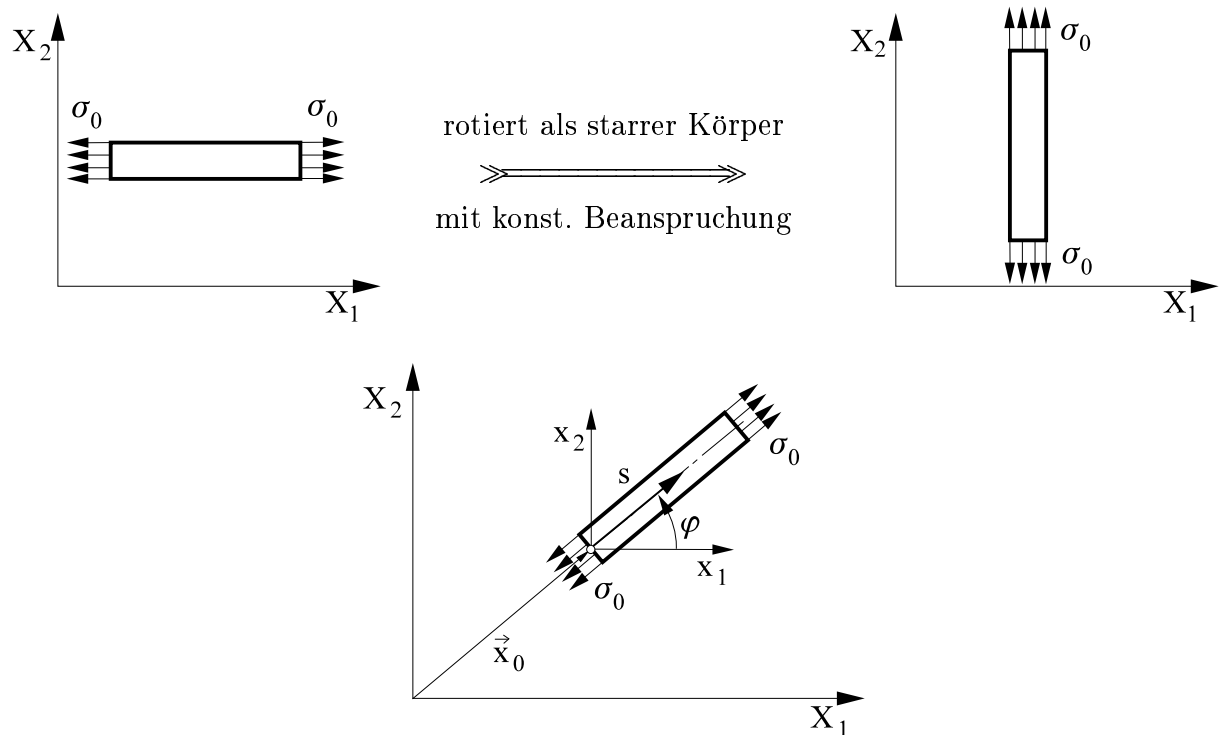
$$\overset{\nabla}{\sigma} = \dot{\sigma} - \sigma \cdot \mathbf{L}^T - \mathbf{L} \cdot \sigma \quad .$$

Diese unterscheidet sich von der TRUESDELLEschen Geschwindigkeit durch die Multiplikation mit dem Volumenverhältnis  $\varrho_0/\varrho$ .

#### • Analytisches Beispiel zu Objektivität

Ein Stab mit einer konstanten Beanspruchung  $\sigma_0$  wird als starrer Körper gedreht. Der Spannungstensor  $\sigma = \sigma_{KL} \vec{e}_K \otimes \vec{e}_L$  sollte vor und nach der ebenen Drehung um den Winkel  $\varphi = 90^\circ$  die Koordinaten

$$\sigma_{KL} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} \overset{\sigma_{KL} \text{ ist vorhanden}}{\text{}} \\ \text{Material erfährt keine} \\ \text{Änderung der Beanspruchung} \end{array} \quad \sigma_{KL} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



**Abbildung 10:** Analytische Beschreibung der starren Drehung eines Stabes

besitzen. In Abhängigkeit von dem Winkel  $\varphi$  ergeben sich mit dem Ortsvektor

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + s \cos \varphi \vec{e}_1 + s \sin \varphi \vec{e}_2$$

die Koordinaten des Spannungstensors

$$\sigma_{KL} = \sigma_0 \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \cos \varphi \sin \varphi & 0 \\ \cos \varphi \sin \varphi & \sin^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Die materielle Zeitableitung dieses Spannungstensors liefert

$$\dot{\sigma}_{KL} = \sigma_0 \dot{\varphi} \begin{bmatrix} -2 \cos \varphi \sin \varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi & 0 \\ \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi & 2 \cos \varphi \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Für die Geschwindigkeit ergibt sich mit der materiellen Zeitableitung des Ortsvektors und den Zusammenhängen  $x_1 = s \cos \varphi$  und  $x_2 = s \sin \varphi$

$$\vec{v} = \dot{\varphi} s (-\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2) = \dot{\varphi} (-x_2 \vec{e}_1 + x_1 \vec{e}_2)$$

Somit besitzt der Geschwindigkeitsgradient die Form

$$L_{KL} = \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & v_{1,3} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & v_{2,3} \\ v_{3,1} & v_{3,2} & v_{3,3} \end{bmatrix} = \dot{\varphi} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mit diesen Koordinaten bestimmen sich die Deformations- und Winkelgeschwindigkeit zu

$$d_{KL} = \frac{1}{2}(L_{KL} + L_{LK}) = 0 \quad w_{KL} = \frac{1}{2}(L_{KL} - L_{LK}) = \dot{\varphi} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Da  $d_{KL} = 0$  gilt, sind für die angenommene starre Bewegung alle eingeführten objektiven Spannungsgeschwindigkeiten (JAUMANN, TRUESDELL, OLDROYD) identisch. Die Koordinaten der JAUMANNschen Geschwindigkeit berechnen sich zu

$$\begin{aligned} \overset{*}{\sigma}_{KL} &= \dot{\sigma}_{KL} - w_{KM} \sigma_{ML} + \sigma_{KM} w_{ML} \\ &= \sigma_0 \dot{\varphi} \left( \begin{bmatrix} -2 \cos \varphi \sin \varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi & 0 \\ \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi & 2 \cos \varphi \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \right. \\ &\quad - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \cos \varphi \sin \varphi & 0 \\ \cos \varphi \sin \varphi & \sin^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \cos \varphi \sin \varphi & 0 \\ \cos \varphi \sin \varphi & \sin^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 0 . \end{aligned}$$

Im Gegensatz zur materiellen Zeitableitung des Spannungstensors ist diese Geschwindigkeit für die untersuchte Bewegung gleich null.

## 8.4 Elastisches Material

Ein elastischer Festkörper ist dadurch gekennzeichnet, daß die abhängigen konstitutiven Variablen eindeutig, d.h. mit Funktionen, den unabhängigen konstitutiven Variablen des aktuellen Zeitpunktes zugeordnet sind.

Die nachfolgenden Betrachtungen werden auf der Grundlage der LAGRANGESchen Beschreibungsweise erarbeitet, da somit die Objektivität der entsprechenden Funktionen gewährleistet wird. Unabhängige Koordinaten sind die Koordinaten der materiellen Teilchen in der unverformten Referenzkonfiguration  $X_L$  und die Zeit  $t$ . Es werden LAGRANGESche Tensoren als konstitutive Variable verwendet. Das Material soll homogen und ohne



Alterung sein, so daß der Ort  $x_k$  bzw. die Verschiebung  $u_K$  und die Zeit  $t$  nicht als unabhängige Variable auftreten. Der Satz der unabhängigen konstitutiven Variablen besteht somit aus dem Deformationsgradient  $F_{kK}$  bzw. Verschiebungsgradient  $u_{K,L}$ , der Temperatur  $\vartheta$  und dem Temperaturgradient  $\mu_K = \vartheta_{,K}$ , wobei ersterer durch den objektiven LAGRANGESchen Verzerrungstensor  $E_{IJ}$  ersetzt wird.

Das Stoffgesetz setzt sich aus den Funktionen für den 2. PIOLA- KIRCHHOFFSchen Spannungstensor  $T_{IJ}$ , die spezifische freie Energie  $F^*$ , die spezifische Entropie  $S^*$  und den Wärmestrom  $Q_I$  in der Form

$$\begin{aligned} T_{IJ} &= \varphi_{IJ}(E_{KL}, \vartheta, \mu_K) \\ F^* &= \phi(E_{KL}, \vartheta, \mu_K) \\ S^* &= s(E_{KL}, \vartheta, \mu_K) \\ Q_I &= \pi_I(E_{KL}, \vartheta, \mu_K) \end{aligned} \quad (8.36)$$

zusammen. Für diesen Gleichungssatz ist das **Prinzip des Determinismus** mit der Wahl des LAGRANGESchen Referenzsystems erfüllt. Das **Prinzip der lokalen Wirkung** wird in seiner stärksten Spezialisierung, dem einfachen Material, berücksichtigt. Die Wirkung der unmittelbaren Nachbarschaft ist nur über den Verschiebungsgradienten in  $E_{KL}$  und den Temperaturgradienten  $\mu_K$  enthalten. Mit der Verwendung der LAGRANGESchen Beschreibungsweise und den eingeführten Tensoren ist die Einhaltung des **Prinzips der Objektivität** gesichert. In den Gleichungen (8.36) ist die Erfüllung des **Prinzips der Äquipräsenz** offensichtlich. Letztlich muß noch das **Prinzip der thermodynamischen Zulässigkeit** überprüft und eventuelle Schlußfolgerungen daraus gezogen werden. Das Einsetzen des Stoffgesetzes in den 2. Hauptsatz der Thermodynamik in seiner lokalen Form

$$-\varrho_0(\dot{F}^* + \dot{\vartheta}S^*) + T_{KL}D_{KL} - \frac{1}{\vartheta} Q_K \mu_K \geq 0 \quad (8.37)$$

liefert

$$\left(\varphi_{KL} - \varrho_0 \frac{\partial \phi}{\partial E_{KL}}\right) \dot{E}_{KL} - \varrho_0 \left(s + \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta}\right) \dot{\vartheta} - \varrho_0 \frac{\partial \phi}{\partial \mu_K} \dot{\mu}_K - \frac{1}{\vartheta} \pi_K \mu_K \geq 0 \quad (8.38)$$

Da die Geschwindigkeiten  $\dot{E}_{KL}$ ,  $\dot{\vartheta}$  und  $\dot{\mu}_K$  unabhängig vom Wert der Variablen  $E_{KL}$ ,  $\vartheta$  und  $\mu_K$  sind und unabhängig voneinander gewählt werden können, ist die Ungleichung (8.38) für alle aktuellen Werte des Deformations- und Temperaturzustandes nur dann zu

erfüllen, wenn die Faktoren

$$\begin{aligned}\varphi_{KL} - \varrho_0 \frac{\partial \phi}{\partial E_{KL}} &= 0 \\ s + \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} &= 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial \mu_K} &= 0\end{aligned}\tag{8.39}$$

verschwinden. In der Beziehung (8.39.1) ist zu sehen, daß der gewählte Ansatz für das Stoffgesetz (8.36) das Verschwinden der Dissipation gewährleistet. Gemäß der Gleichung (8.39.3) darf der Temperaturgradient  $\mu_K$  nicht zu der Argumentliste von  $\phi$  gehören. Damit gelten für die spezifische Entropie und den Spannungstensor die Beziehungen

$$\begin{aligned}-s &= \frac{\partial \phi(E_{MN}, \vartheta)}{\partial \vartheta} \\ \varphi_{KL} &= \varrho_0 \frac{\partial \phi(E_{MN}, \vartheta)}{\partial E_{KL}}.\end{aligned}\tag{8.40}$$

Mit diesen Gleichungen ist die allgemeinste Form eines thermo-elastischen Stoffgesetzes festgeschrieben, wobei die Beziehung (8.40.2) das darin enthaltene Deformationsgesetz darstellt. Von der Beziehung (8.38) bleibt nun noch die Restungleichung

$$-\frac{1}{\vartheta} \pi_K(E_{MN}, \vartheta, \mu_M) \mu_K \geq 0\tag{8.41}$$

übrig, die der Ansatz (8.36.4) für  $\pi_K$  erfüllen muß. Der einfachste lineare Ansatz

$$\pi_K = -\Lambda_{KL}(E_{MN}, \vartheta) \mu_L\tag{8.42}$$

mit dem positiv semidefiniten Wärmeleitfähigkeitstensor  $\Lambda_{KL}$  erfüllt stets die Ungleichung (8.41) und es gelten für das elastische Stoffgesetz die zwei Grundansätze für die spezifische freie Energie und den Wärmeleitfähigkeitstensor

$$\begin{aligned}F^* &= \phi(E_{MN}, \vartheta) \\ \Lambda_{KL} &= \Lambda_{KL}(E_{MN}, \vartheta).\end{aligned}\tag{8.43}$$

Aufbauend auf den bisherigen Herleitungen zum elastischen Materialverhalten werden im weiteren Möglichkeiten zur Formulierung des Deformationsgesetzes untersucht.

## Bemerkungen zum Deformationsgesetz

### Hyperelastizität

Als hyperelastisch wird ein Material bezeichnet, für das ein Potential in der Form existiert, so daß dessen partielle Ableitung nach dem Verzerrungstensor gleich dem Spannungstensor entspricht. In der LAGRANGESchen Beschreibungsweise definiert die Gleichung

$$T_{KL} = \varrho_0 \frac{\partial \phi(E_{MN}, \vartheta)}{\partial E_{KL}} = \varphi_{KL} \quad (8.44)$$

einen solchen Zusammenhang in der *Zustandsformulierung*. Die *Geschwindigkeitsformulierung* besitzt in der nichtlinearen Festkörpermechanik eine besondere Bedeutung, da das Deformationsgesetz in der Regel nur in dieser Art formuliert werden kann. In der LAGRANGESchen Beschreibungsweise ergibt sich mit der materiellen Zeitableitung der Gleichung (8.44) der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \dot{T}_{KL} &= \varrho_0 \frac{\partial^2 \phi(E_{MN}, \vartheta)}{\partial E_{KL} \partial E_{IJ}} \dot{E}_{IJ} + \varrho_0 \frac{\partial^2 \phi(E_{MN}, \vartheta)}{\partial E_{KL} \partial \vartheta} \dot{\vartheta} \\ &= C_{KLIJ} \dot{E}_{IJ} + S_{KL} \dot{\vartheta} . \end{aligned} \quad (8.45)$$

Die Hyperelastizität kann auch dadurch charakterisiert werden, daß die materielle Zeitableitung des als Deformationsenergie interpretierbaren Potentials gleich der Leistung der Spannung je Volumeneinheit ist

$$\frac{\partial \phi(E_{MN}, \vartheta)}{\partial t} = \frac{\partial \phi(E_{MN}, \vartheta)}{\partial E_{KL}} \dot{E}_{KL} = \frac{1}{\varrho_0} T_{KL} \dot{E}_{KL} . \quad (8.46)$$

Die entsprechende Darstellung der *Zustandsformulierung* in der EULERSchen Beschreibungsweise liefert die Anwendung der Transformationen

$$\begin{aligned} E_{KL} &= F_{kK} F_{lL} e_{kl} \\ \dot{E}_{KL} &= F_{kK} F_{lL} d_{kl} \\ T_{KL} &= \frac{\varrho_0}{\varrho} F_{kK}^{-1} F_{lL}^{-1} \sigma_{kl} \\ \dot{T}_{KL} &= \frac{\varrho_0}{\varrho} F_{kK}^{-1} F_{lL}^{-1} \dot{\sigma}_{kl} \end{aligned} \quad (8.47)$$

zu

$$\sigma_{kl} = \bar{\varphi}_{kl}(F_{nN} F_{mM} e_{nm}, \vartheta) = \bar{\varphi}_{kl}(F_{nN}, e_{nm}, \vartheta) = \varrho F_{kK} F_{lL} \varphi_{KL}(F_{nN}, e_{nm}, \vartheta) . \quad (8.48)$$

In der EULERSchen Darstellung wird zu der Argumentliste der LAGRANGESchen Beschreibung, bestehend aus dem Verzerrungstensor und der Temperatur, noch der Deformationsgradient  $F_{kK}$  hinzugefügt. Somit ist in dieser Formulierung stets der Bezug zu einer Referenz enthalten. Für den Fall eines isotropen, d.h. richtungsunabhängigen, Materialverhaltens besitzt der Deformationsgradient keinen Einfluß. Die *Geschwindigkeitsformulierung*

der EULERSchen Beschreibung lautet

$$\mathbf{\check{\sigma}}_{kl} = \bar{C}_{klmn}d_{mn} + \bar{s}_{kl}\dot{\vartheta} \quad (8.49)$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{C}_{klmn} &= \frac{\rho}{\rho_0} F_{kK} F_{lL} F_{mM} F_{nN} C_{KLMN}(F_{iI} F_{jJ} e_{ij}, \vartheta) = \bar{C}_{klmn}(F_{iI}, e_{ij}, \vartheta) \\ \bar{s}_{kl} &= \frac{\rho}{\rho_0} F_{kK} F_{lL} S_{KL}(F_{iI} F_{jJ} e_{ij}, \vartheta) = \bar{s}_{kl}(F_{iI}, e_{ij}, \vartheta) \quad . \end{aligned} \quad (8.50)$$

Bei den weiteren Ausführungen zu dem Deformationsgesetz wird der isotherme Festkörper betrachtet. In diesem Fall besteht das Stoffgesetz nur noch aus dem Deformationsgesetz.

### CAUCHY- Elastizität

Bei dieser Elastizität wird der Zusammenhang zwischen dem Spannungstensor und dem Verzerrungstensor mit 6 voneinander unabhängigen Funktionen beschrieben

$$T_{IJ} = \varphi_{IJ}(E_{KL}) \quad . \quad (8.51)$$

Das oben aufgeführte Potential  $\phi$  als Grundlage für diesen Zusammenhang existiert nicht mehr und somit ist im allgemeinen auch die Erfüllung des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik nicht mehr gegeben. Be- und Entlastungsvorgänge müssen bei einem CAUCHY-elastischen Material nicht den gleichen Weg beschreiben.

### Hypoelastizität

Für die Beschreibung eines hypoelastischen Körpers wird zunächst die *Geschwindigkeitsformulierung* der EULERSchen Beschreibungsweise

$$\mathbf{\check{\sigma}}_{kl} = \bar{C}_{klmn}d_{mn} \quad (8.52)$$

genutzt. Der Steifigkeitstensor  $\bar{C}_{klmn}$  soll nun aber nur noch von dem EULERSchen Verzerrungstensor abhängen

$$\bar{C}_{klmn} = \bar{C}_{klmn}(e_{ij}) \quad . \quad (8.53)$$

Damit wird das Materialverhalten durch den erreichten Verformungszustand charakterisiert. Aufgrund des Prinzips der Objektivität ist  $\bar{C}_{klmn}$  eine isotrope Tensorfunktion und das zu beschreibende Material isotrop.

### Kleine Verzerrungen

Abschließend soll der Übergang zu kleinen Verzerrungen mit Berücksichtigung des Temperatureinflusses betrachtet werden. Für diesen Fall verschmelzen die Beziehungen der

Variable	LAGRANGE $\Rightarrow$ kleine Verzerrungen $\Leftarrow$ EULER		
Verzerrung	$E_{MN}$	$\Rightarrow$	$\varepsilon_{mn} \Leftarrow e_{mn}$
Deformationsgeschwindigkeit	$D_{MN}$	$\Rightarrow$	$\dot{\varepsilon}_{mn} \Leftarrow d_{mn}$
Spannung	$T_{KL}$	$\Rightarrow$	$\sigma_{kl} \Leftarrow \sigma_{kl}$
Spannungsgeschwindigkeit	$\dot{T}_{KL}$	$\Rightarrow$	$\dot{\sigma}_{kl} \Leftarrow \dot{\sigma}_{kl}$

**Tabelle 3:** Bezeichnung der konstitutiven Variablen bei kleinen Verzerrungen

LAGRANGESchen und der EULERSchen Beschreibungsweise zu einem Gleichungssatz. Das hyperelastische Materialverhalten soll durch die Gleichung

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \phi(\varepsilon_{mn}, \vartheta)}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (8.54)$$

beschrieben werden. Für das Produkt  $\rho \phi(\varepsilon_{mn}, \vartheta)$  wird eine Potenzreihe in der Form

$$\begin{aligned} \rho \phi(\varepsilon_{mn}, \vartheta) = & a_0 + a_1 \vartheta + a_2 \vartheta^2 + \dots + \\ & + E_0 + E_{kl} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} E_{klmn} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} + \dots + \\ & + c_{kl} \varepsilon_{kl} \vartheta + \dots + \end{aligned} \quad (8.55)$$

angesetzt. Das Einsetzen dieses Ansatzes in die Gleichung (8.54) liefert

$$\sigma_{ij} = E_{ij} + E_{ijmn} \varepsilon_{mn} + \dots + c_{ij} \vartheta + \dots \quad (8.56)$$

Mit der Beschränkung auf ein lineares Materialverhalten

$$\sigma_{ij} = E_{ij} + E_{ijmn} \varepsilon_{mn} + c_{ij} \vartheta \quad (8.57)$$

und der Einführung einer Bezugstemperatur  $\vartheta_0$  für  $\varepsilon_{mn} = 0$  und  $\sigma_{ij} = 0$  gilt

$$E_{ij} = -c_{ij} \vartheta_0 \quad (8.58)$$

und das gesuchte Deformationsgesetz lautet

$$\sigma_{ij} = E_{ijmn} \varepsilon_{mn} + c_{ij} (\vartheta - \vartheta_0) \quad (8.59)$$

Für linear-elastisches Materialverhalten beschreibt diese Gleichung die allgemeine Form des Deformationsgesetzes bei kleinen Verzerrungen.

Soll das Deformationsgesetz ein isotropes Material beschreiben, so darf die spezifische freie Energie außer von der Temperatur nur von den Invarianten der Verzerrung

$$\begin{aligned}
I_1^\varepsilon &= \varepsilon_{kk} & &= \varepsilon_{kl}\delta_{kl} \\
I_2^\varepsilon &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{kk}\varepsilon_{ll} - \varepsilon_{kl}\varepsilon_{kl}) & &= \frac{1}{2}(I_1^{\varepsilon^2} - \varepsilon_{kl}\varepsilon_{kl}) \\
I_3^\varepsilon &= \det(\varepsilon_{kl}) & &= \frac{1}{3}(\varepsilon_{kl}\varepsilon_{lm}\varepsilon_{mk} + 3I_1^\varepsilon I_2^\varepsilon - I_1^{\varepsilon^3})
\end{aligned} \tag{8.60}$$

abhängen. Es gilt

$$\phi(\varepsilon_{mn}, \vartheta) = \phi(I_1^\varepsilon, I_2^\varepsilon, I_3^\varepsilon, \vartheta) \quad . \tag{8.61}$$

Mit dem Zusammenhang (8.54) ergibt sich die Spannung zu

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= \varrho \left( \frac{\partial \phi}{\partial I_1^\varepsilon} \frac{\partial I_1^\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial \phi}{\partial I_2^\varepsilon} \frac{\partial I_2^\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial \phi}{\partial I_3^\varepsilon} \frac{\partial I_3^\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \\
&= \varrho [\varphi_1 \delta_{ij} + \varphi_2 (\varepsilon_{kk} \delta_{ij} - \varepsilon_{ij}) + \varphi_3 (\varepsilon_{ik} \varepsilon_{jk} - I_1^\varepsilon \varepsilon_{ij} + I_2^\varepsilon \delta_{ij})]
\end{aligned} \tag{8.62}$$

worin

$$\varphi_i(I_1^\varepsilon, I_2^\varepsilon, I_3^\varepsilon, \vartheta) = \frac{\partial \phi}{\partial I_i^\varepsilon} \tag{8.63}$$

gilt. In der Gleichung (8.62) wurden die Identitäten

$$\frac{\partial I_1^\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} = \delta_{ij} \quad \frac{\partial I_2^\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} = \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - \varepsilon_{ij} = I_1^\varepsilon \delta_{ij} - \varepsilon_{ij} \tag{8.64}$$

$$\frac{\partial I_3^\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{1}{3} \left[ 3\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jk} + 3 \left( \frac{\partial I_1^\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} I_2^\varepsilon + I_1^\varepsilon \frac{\partial I_2^\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) - 3I_2^{\varepsilon^2} \frac{\partial I_1^\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} \right] = \varepsilon_{ik}\varepsilon_{jk} - I_1^\varepsilon \varepsilon_{ij} + I_2^\varepsilon \delta_{ij}$$

benutzt. Für ein linear-isotropes Materialverhalten lautet ein entsprechender, in  $\varepsilon$  quadratischer Ansatz der spezifischen freien Energie

$$\varrho \phi = a_0 (I_1^\varepsilon)^2 + a_1 I_2^\varepsilon + a_2 I_1^\varepsilon (\vartheta - \vartheta_0) \quad . \tag{8.65}$$

Mit der Gleichung (8.54) ergibt sich somit für die Spannung

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= 2a_0 \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + a_1 (\varepsilon_{kk} \delta_{ij} - \varepsilon_{ij}) + a_2 \delta_{ij} (\vartheta - \vartheta_0) \\
&= (2a_0 + a_1) \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - a_1 \varepsilon_{ij} + a_2 \delta_{ij} \Delta \vartheta \quad .
\end{aligned} \tag{8.66}$$

Um das so erhaltene Deformationsgesetz in die bekannte technische Schreibweise zu überführen, werden die Koeffizienten  $a_0$ ,  $a_1$  und  $a_2$  durch die Terme

$$2a_0 + a_1 = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-\nu)} \quad - a_1 = \frac{E}{1+\nu} \quad a_2 = \frac{E}{1-2\nu}\alpha \quad (8.67)$$

ersetzt, worin die Materialkennwerte Elastizitätsmodul  $E$ , Querkontraktionszahl  $\nu$  und Wärmeausdehnungskoeffizient  $\alpha$  enthalten sind. Somit kann die Gleichung (8.66) in der Form des verallgemeinerten HOOKEschen Gesetzes

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \Delta \vartheta \delta_{ij} \right) \quad (8.68)$$

angeben werden. Das HOOKEsche Gesetz ist dadurch gekennzeichnet, daß es stabil bzw. eindeutig ist. Es ist möglich, mit der Gleichung (8.68) über die erste Invariante des Spannungstensors

$$\begin{aligned} \sigma_{kk} &= \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon_{kk} + \frac{\nu}{1-2\nu} 3\varepsilon_{kk} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \Delta \vartheta 3 \right) \\ &= \frac{E}{1-2\nu} (\varepsilon_{kk} - 3\alpha \Delta \vartheta) \end{aligned} \quad (8.69)$$

die erste Invariante des Verzerrungstensors

$$\varepsilon_{kk} = \sigma_{kk} \frac{1-2\nu}{E} + 3\alpha \Delta \vartheta \quad (8.70)$$

zu bestimmen. Das Einsetzen dieser Invariante in die Gleichung (8.68) und anschließendes Umstellen des so gewonnenen Zusammenhanges liefert die entsprechende Umkehrfunktion in der Form

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \left( \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) + \alpha \Delta \vartheta \delta_{ij} \quad (8.71)$$

Inkompressibles Materialverhalten ist durch ein über den Deformationsprozeß konstantes Volumen gekennzeichnet. Mathematisch läßt sich diese Aussage für den allgemeinen Fall in der Bedingung

$$\frac{dV}{dV_0} = \det F_{kK} = 1 \quad (8.72)$$

formulieren. Der Übergang zu kleinen Deformationen, wo die Referenz- gleich der Momentankonfiguration ist  $\vec{e}_K = \vec{e}_k$ , ergibt die Näherung

$$\frac{dV}{dV_0} \approx \det(\delta_{kl} + u_{k,l}) = 1 + u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3} \quad (8.73)$$

Der Verzerrungs- Verschiebungszusammenhang  $\varepsilon_{kl} = (u_{k,l} + u_{l,k})/2$  liefert für kleine Verzerrungen die Identität  $\varepsilon_{kk} = u_{k,k}$ . Und somit folgt aus den Gleichungen (8.72) und (8.73) für ein inkompressibles Material bei kleinen Verzerrungen die Aussage

$$\varepsilon_{kk} = 0 \quad . \quad (8.74)$$

Das Einsetzen dieser Bedingung in die Gleichung (8.70) führt zu den Aussagen, daß die Querkontraktionszahl gleich  $1/2$ , der Wärmeausdehnungskoeffizient gleich 0 und die erste Invariante des Spannungstensors  $\sigma_{kk}$  beliebig ist. Oft wird für letztere  $\sigma_{kk} = -p$  gewählt, worin  $p$  der hydrostatische Druck ist. Damit besitzt das Deformationsgesetz für ein inkompressibles linear-elastisches Material und kleine Verzerrungen die Form

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} (\sigma_{ij} + p\delta_{ij}) \quad . \quad (8.75)$$



## Literatur

- [1] TRUESDELL, C.; TOUPIN, R.A.: *The Classical Field Theories*, in: Handbuch der Physik, Bd.III/1, Springer Verlag Berlin, 1960.
- [2] TRUESDELL, C.; NOLL, W.: *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, in: Handbuch der Physik, Bd.III/3, Springer Verlag Berlin, 1965.
- [3] ERINGEN A.C.: *Mechanics of Continua*, Robert E. Krieger Publishing Company, Inc., 1989.
- [4] OGDEN, R.W.: *Non-Linear Elastic Deformations*, Ellis Horwood Limited Chichester, John Wiley & Sons New York Chichester Brisbane Toronto, 1985.
- [5] BETTEN, J.: *Kontinuumsmechanik*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1993.
- [6] ALTENBACH, J; ALTENBACH, H.: *Einführung in die Kontinuumsmechanik*, B. G. Teubner Stuttgart, 1994.
- [7] BECKER, E.; BÜRGER, W.: *Kontinuumsmechanik*, B. G. Teubner Stuttgart, 1975.
- [8] MÜLLER, I.: *Thermodynamik - Grundlagen der Materialtheorie*, Bertelsmann Universitätsverlag, 1973.
- [9] WILMANSKI, K.: *Thermomechanics of Continua*, Springer-Verlag Berlin New York, 1996.