Formelübersicht zur Charakterisierung von Partikelsystemen (Granulometrie)

Größe und Form von Einzelpartikeln

Geometrische und physikalische Äquivalentdurchmesser:

oberflächenäquivalenter Durchmesser: (Durchmesser der oberflächengleichen Kugel) $x_S = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$ mit S, der Oberfläche des Partikels

projektionfflächenäquivalenter Ducrhmesser: (Durchmesser der projektionsflächengleichen Kugel) $x_P = \sqrt{\frac{4 \cdot A_P}{\pi}}$ mit A_P, der Projektionsfläche des Partikels

volumenäquivalenter Durchmesser: (Durchmesser der volumengleichen Kugel) $x_V = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot V}{\pi}}$ mit V, dem Volumen des Partikels

Stokes-Durchmesser: (gleiche Sinkgeschwindigkeit, gleiche Dichte) $x_{Stokes} = \sqrt{\frac{18 \cdot \eta}{g \cdot \Delta\rho} \cdot v_S^2}$ mit v_S, der Sinkgeschwindigkeit des Partikels

Abmaße am Projektionsbild:

minimaler & maximaler Feret-Durchmesser: (Abstand paralleler Tangenten) $x_{Feret,min}, x_{Feret,max}$

Halbachsen der Legendre-Ellipse: (gleiche Fläche, gleiches Trägheitsmoment) $a_{Legendre}, b_{Legendre}$

Beschreibung der Partikelform:

berechnet aus dem Verhältnis von Äquivalentdurchmessern oder von Abmaßen des Projektionsbildes

Seitenverhältnis (engl.: *aspect ratio*): $r_{Feret} = \frac{x_{Feret,min}}{x_{Feret,maxn}}$ oder $r_{Legendre} = \frac{a_{Legendre}}{b_{Legendre}}$

Zirkularität: $C = \frac{x_P}{x_U}$ C=1 -> Kreis, C<1 -> nicht kreisförmig

Sphärizität nach WADELL: $\Psi = \frac{x_V^2}{x_S^2}$ Ψ=1 -> Kugel, Ψ<1 -> nicht kugelförmig

in älteren Lehrbüchern wird auch der Reziprokwert von Ψ, der sogenannte Formfaktor ϕ, verwendet

Spezifische Oberfläche eines Einzelpartikels:

volumenspezifische Oberfläche: $S_V = \frac{\text{Partikeloberfläche}}{\text{Partikelvolumen}} = \frac{S}{V} = \frac{6 \cdot x_S^2}{x_V^3} = \frac{6}{\Psi \cdot x_V}$

massenspezifische Oberfläche: $S_m = \frac{\text{Partikeloberfläche}}{\text{Partikelmasse}} = \frac{S}{\rho \cdot V} = \frac{S_V}{\rho}$

Spezifische Oberfläche eines Partikelsystems:

volumenspezifische Oberfläche: $S_V = \frac{\sum \text{Partikeloberflächen}}{\sum \text{Partikelvolumina}} = \frac{\sum S}{\sum V} = \frac{6}{\Psi \cdot x_{ST}}$

Darstellung von Partikelgrößenverteilungen

Zusammenhang zwischen der Summenfunktion $Q_r(x)$ und der Dichtefunktion $q_r(x)$:

Dichtefunktion: $q_r(x) = \frac{d}{dx} Q_r(x)$ bzw. $q_{r_i} = \frac{\Delta Q_{r_i}}{\Delta x_i}$

Summenfunktion: $Q_r(x) = \int_0^x q_r(x')\,dx'$ bzw. $Q_{r_i} = \sum_{j=1}^{i} \Delta Q_{r_j} = \sum_{j=1}^{i} q_{r_j} \cdot \Delta x_j$

Wichtige Verteilungsparameter:

Medianwert: $Q\left(x_{50,r}\right) = 50 \cdot \%$

Mittelwert: $\overline{x_r} = \overline{x_{1,r}} = \int_{x_{min}}^{x_{max}} x \cdot q_r(x)\,dx$ (auch: Erwartungswert, 1tes Moment)

Streuung: $s_r^2 = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \left(x - \overline{x_r}\right)^2 \cdot q_r(x)\,dx$ (auch: Varianz, 2tes Zentralmoment)

s_r Standardabweichung

!Die jeweiligen Verteilungsparameter können nur bei Angabe der Mengenart r sinnvoll interpretiert werden!

Effektive Partikelmerkmale / Momente:

Momente sind Mittelwerte von x^k in der Mengenart r

allgemein gilt: $M_{k,r} = \int_{x_{min}}^{x_{max}} x^k \cdot q_r(x)\,dx$ bzw. $M_{k,r} = \sum_{j=1}^{n} \left(\overline{x_j}\right)^k \cdot \Delta Q_{r_j}$

Momentenumrechnung: $M_{k,r} = \frac{M_{k+r,0}}{M_{r,0}} = \frac{M_{k+r-q,q}}{M_{r-q,q}}$ wobei stets gilt: $M_{0,r} = 1$

mittlere Partikelgröße: $\overline{x_{k,r}} = \sqrt[k]{M_{k,r}}$ aber: $\overline{x_{0,r}} = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \ln(x) \cdot q_r(x)\,dx = \overline{x_{geo}}$

aufgrund der Mengenartumrechnung sind Mehrdeutigkeiten möglich; z. B. gilt $\overline{x_{1,2}} = \overline{x_{-1,3}}$.

Umrechnung von Mengenart p in Mengenart r: $q_r(x) = \frac{x^{r-p} \cdot q_p(x)}{M_{r-p,p}}$

Sauterdurchmesser:

Definitionsgleichung: $x_{ST} = \frac{6}{\Psi \cdot S_V}$ mit $\Psi = \left(\frac{x_V}{x_S}\right)^2$ als die Sphärizität des Partikels

für Verteilungen der volumenäquivalenten Durchmesser: $x_{ST} = \frac{M_{3,0}}{M_{2,0}} = M_{1,2} = \frac{1}{M_{-1,3}}$

Spezielle Verteilungen

Logarithmische Normalverteilung (LNVT)

wichtige statistische Verteilungsfunktion, abgeleitet aus der Normalverteilung $\Phi(x)$ ("GAUSSsche Glockenkurve")

Dichtefunktion:
$$q_r(x) = \frac{1}{\sigma_{ln} \cdot x \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot \sigma_{ln}^2} \cdot \ln\left(\frac{x}{x_{50,r}}\right)^2}$$

Summenfunktion:
$$Q_r(x) = \Phi\left(\frac{1}{\sigma_{ln}} \cdot \ln\left(\frac{x}{x_{50,r}}\right)\right) = \int_0^x \frac{1}{\sigma_{ln} \cdot x' \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot \sigma_{ln}^2} \cdot \ln\left(\frac{x'}{x_{50,r}}\right)^2} \, dx'$$

wichtige Quantile:
$$Q_r(x_{50,r}) = 50 \cdot \%$$

$$Q_r\left(x_{16,r} = x_{50,r} \cdot e^{-\sigma_{ln}}\right) = 15.9 \cdot \% \qquad Q_r\left(x_{84,r} = x_{50,r} \cdot e^{\sigma_{ln}}\right) = 84.1 \cdot \%$$

$$Q_r\left(x_{2,r} = x_{50,r} \cdot e^{-2 \cdot \sigma_{ln}}\right) = 2.3 \cdot \% \qquad Q_r\left(x_{98,r} = x_{50,r} \cdot e^{2 \cdot \sigma_{ln}}\right) = 97.7 \cdot \%$$

$$Q_r\left(x_{0.1,r} = x_{50,r} \cdot e^{-3 \cdot \sigma_{ln}}\right) = 0.1 \cdot \% \qquad Q_r\left(x_{99.9,r} = x_{50,r} \cdot e^{3 \cdot \sigma_{ln}}\right) = 99.9 \cdot \%$$

log. Standardabweichung:
$$\sigma_{ln} = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{x_{84,r}}{x_{16,r}}\right) = \ln\left(\frac{x_{84,r}}{x_{50,r}}\right) = \ln\left(\frac{x_{50,r}}{x_{16,r}}\right)$$

Da eine LNVT theoretisch Partikelgrößen zwischen 0 µm und ∞ µm zulässt, wird für praktische Belange die Verteilung für die einzelnen Mengenarten wie folgt eingegrenzt:

minimale Partikelgröße:
$$x_{min,r} = x_{0.1,r} = x_{50,r} \cdot e^{-3 \cdot \sigma_{ln}}$$

maximale Partikelgröße:
$$x_{max,r} = x_{99.9,r} = x_{50,r} \cdot e^{3 \cdot \sigma_{ln}}$$

außerdem gelten für die LNVT folgende Beziehungen:

Mengenarttransformation:
$$x_{50,q} = x_{50,r} \cdot e^{(q-r) \cdot \sigma_{ln}^2} \quad \text{bzw.} \quad Q_q(x) = Q_r\left[x \cdot e^{-(q-r) \cdot \sigma_{ln}^2}\right]$$

Momente:
$$M_{k,r} = \left(x_{50,r}\right)^k \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot k^2 \cdot \sigma_{ln}^2}$$

Mittelwerte:
$$\overline{x_{k,r}} = x_{50,r} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot k \cdot \sigma_{ln}^2} \quad \text{es gilt} \quad \overline{x_{k,r}} = \overline{x_{k+2 \cdot r - 2 \cdot q,q}}$$

Sauterdurchmesser:
$$\overline{x_{-1,3}} = x_{50,3} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \sigma_{ln}^2} = x_{50,0} \cdot e^{\frac{5}{2} \cdot \sigma_{ln}^2} = x_{50,r} \cdot e^{\left(\frac{5}{2} - r\right) \cdot \sigma_{ln}^2}$$

Im logarithmischen Wahrscheinlichkeitsnetz bildet die Summenfunktion der LNVT eine Gerade.

Spezielle Verteilungen II

RRSB-Verteilung (nach ROSIN, RAMMLER, SPERLING, BENNET), auch WEIBULL-Verteilung

Ursprünglich abgeleitet von den Korngrößenverteilungen fein vermahlener Kohle.

Verteilungssumme: $$Q_3(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{x_{63,3}}\right)^n}$$

In einem Diagramm mit einfach loarithmischer Abszisse und doppelt logarithmischer Ordinate bildet die Summenfunktion der RRSB eine Gerade. Im speziellen RRSB-Papier lassen sich aus den Messdaten sowohl die Parameter $x_{63,3}$ und n sowie die volumenspezifische Oberfläche ablesen.

Potenzverteilung bzw. GGS-Verteilung (nach GATES, GAUDIN, SCHUHMANN)

Angewendet zur Beschreibung von Brechern (hoher Grobgutanteil).

Verteilungssumme: $$\begin{cases} Q_3(x) = \left[\left(\frac{x}{x_{max,3}}\right)^m \text{ if } x \le x_{max,3}\right] \\ 1 \text{ if } x > x_{max,3} \end{cases}$$

In einem Diagramm mit einfach loarithmischer Abszisse und einfach logarithmischer Ordinate bildet die Summenfunktion der GGS eine Gerade.

Sauterdurchmesser der GGS: $$x_{ST} = \frac{m-1}{m} \cdot x_{max,3}$$