Aufgabe 2-2 (hydraulischer Durchmesser)

Mit welchen Kenngrößen lassen sich poröse Stoffsysteme charakterisieren?

In einem Bauunternehmen sollen täglich 400 Sack Trockenmischung à 50 kg aus Kies (ρ_K = 3000 kg/m³) und Zement (ρ_Z = 2550 kg/m³) im Verhältnis 4:1 gemischt und abgepackt werden. Die Trockenmischung besitzt eine Volumenporosität ε = 0,45 sowie eine massenspezifische Oberfläche von 20 m²/kg.

a) Berechnen Sie, wie viele Bunker der Nenngröße 5 m³ bestellt werden müssen, um eine Tagesproduktion Trockenmischung zu speichern! (Bestimmen Sie zuvor die effektive Dichte der dispersen Phase)

b) Berechnen Sie den hydraulischen Durchmesser des Produktes!

c) Welche Papiermenge wird benötigt, um eine Tagesproduktion abzupacken? Die Papiersäcke entsprechen Quadern mit den fest eingestellten Abmaßen Länge 0,6 m und Breite 0,4 m.

Aufgabe 2-2 (hydraulischer Durchmesser)

Definition: $\mu m := 10^{-6}\, m$

Vorgegebene Werte:

Verpackung: $N_{Sack} := 400$ $m_{Sack} := 50\, kg$ $L := 0.6\, m$ $B := 0.4\, m$

Bunker: $V_{Bunker} := 5\, m^3$

Stoffsysteme: $\rho_K := 3000\, \frac{kg}{m^3}$ $\rho_Z := 2550\, \frac{kg}{m^3}$

Mischung: $\nu := 4$ $\varepsilon := 0.45$ $S_m := 20\, \frac{m^2}{kg}$

Lösung:

0. Effektive Dichte des Partikelsystems

die folgende Herleitung gilt für jedes binäre, d.h. aus zwei Komponenten bestehende, System

effektive Dichte: $$\rho_{eff} = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2}$$

Variante I:
(Massenanteile gegeben)
$$\rho_{eff} = \frac{m_{ges}}{\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2}} = \frac{m_{ges}}{\frac{w_1 \cdot m_{ges}}{\rho_1} + \frac{w_2 \cdot m_{ges}}{\rho_2}} = \frac{1}{\frac{w_1}{\rho_1} + \frac{w_2}{\rho_2}}$$

Variante II:
(Volumenanteile gegeben)
$$\rho_{eff} = \frac{V_1 \cdot \rho_1 + V_2 \cdot \rho_2}{V_{ges}} = \frac{\phi_1 \cdot V_{ges} \cdot \rho_1 + \phi_2 \cdot V_{ges} \cdot \rho_2}{V_{ges}} = \phi_1 \cdot \rho_1 + \phi_2 \cdot \rho_2$$

1. Anzahl der Bunker

Massenanteil Kies: $w_K := \frac{\nu}{\nu + 1}$ $w_K = 0.8$

effektive Partikeldichte: $\rho_P := \left(\frac{w_K}{\rho_K} + \frac{1 - w_K}{\rho_Z}\right)^{-1}$ $\rho_P = 2897.7 \cdot kg \cdot m^{-3}$

Schüttdichte ($\rho_L << \rho_P$): $\rho_{Sch} := (1 - \varepsilon) \cdot \rho_P$ $\rho_{Sch} = 1593.8 \cdot kg \cdot m^{-3}$

Sackvolumen: $V_{Sack} := \frac{m_{Sack}}{\rho_{Sch}}$ $V_{Sack} = 31.37 \cdot l$

Tagesvolumenproduktion: $V_{Tag} := N_{Sack} \cdot V_{Sack}$ $V_{Tag} = 12.55 \cdot m^3$

Anzahl der Bunker: $N_{Bunker} := ceil\left(\frac{V_{Tag}}{V_{Bunker}}\right)$ $N_{Bunker} = 3$

alternativer Lösungsweg (ohne Rückgriff auf effektive Partikeldichte und Schüttdichte):

Tagesproduktion: $m_{Tag} := N_{Sack} \cdot m_{Sack}$ $\quad m_{Tag} = 20000 \cdot kg$

Tagesbedarf Zement: $m_Z := \frac{1}{1+\nu} \cdot m_{Tag}$ $\quad m_Z = 4000 \cdot kg$

Tagesbedarf Kies: $m_K := \frac{\nu}{1+\nu} \cdot m_{Tag}$ $\quad m_K = 16000 \cdot kg$

benötigtes Partikelvolumen: $V_Z := \frac{m_Z}{\rho_Z}$ $\quad V_K := \frac{m_K}{\rho_K}$ $\quad V_P := V_Z + V_K$

$V_Z = 1.57 \cdot m^3$ $\quad V_K = 5.33 \cdot m^3$ $\quad V_P = 6.90 \cdot m^3$

benötigtes Schüttvolumen: $V_P = (1-\varepsilon) \cdot V_{Sch}$

$V_{Sch} := \frac{V_P}{1-\varepsilon}$ $\quad V_{Sch} = 12.55 \cdot m^3$

Anzahl der Bunker: $N_{Bunker} := \mathrm{ceil}\left(\frac{V_{Tag}}{V_{Bunker}}\right)$ $\quad N_{Bunker} = 3$

2. Hydraulischer Durchmesser

Hintergrund: In einer Reihe wichtiger verfahrenstechnischer Prozesse lässt man ein Fluid durch ein poröses System (Schüttung) strömen (z.B. Trinkwasseraufbereitung mit einem Sandfilter, katalytische Gasreaktionen in Festbettreaktoren, Feststoffextraktion aus gemahlenen Kaffeebohnen). Für diese Durchströmung muss allerdings Energie aufgewandt werden, da die porösen Systeme dem Fluid einen Strömungswiderstand entgegensetzen. Für die Auslegung der entsprechenden Apparate und Anlagen ist es somit erforderlich, diesen Strömungswiderstand zumindest näherungsweise berechnen zu können. Zu diesem Zweck bedient man sich des **Modells** eines Röhrensystems, das die **reale** Strömung durch die unregelmäßig geformten Hohlräumen zwischen den Partikeln auf die **ideale** Strömung durch ein Bündel paraleller Röhren kreisförmigen Querschnitts mit einheit- lichem Durchmesser abbildet. Eine adäquate Abbildung wird erreicht, wenn in dem Modell das Verhältnis von durchströmten Volumen (ist proportional der aufzubringenden Druckkraft) zu umströmter Oberfläche (ist proportional dem wirkenden Strömungswider- stand) identisch ist mit dem des realen Stoffsystem.

Definition: hydraulischer Durchmesser d_h = Durchmesser eines Kreisrohres mit dem selben Verhältnis von durchströmten Volumen zu benetzter Oberfläche

Kreisrohr: $\frac{V_{Rohr}}{A_{Wand}} = \frac{A_Q \cdot L}{U_R \cdot L} = \frac{d}{4}$ $\quad \Rightarrow \quad d_h = \frac{4 \cdot A_{eff}}{U_{eff}} = \frac{4 \cdot V_{eff}}{S_{eff}}$

id. Schüttung: $V_{eff} = \varepsilon \cdot V_{ges} = \varepsilon \cdot \frac{V_{disp}}{(1-\varepsilon)}$ $\quad S_{eff} = S_{disp} = S_V \cdot V_{disp}$

$$d_h = 4 \cdot \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \frac{1}{S_V} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot d_{ST}$$

volumenspezifische Oberfläche: $S_V := S_m \cdot \rho_P$ $S_V = 579.5 \frac{cm^2}{cm^3}$

hydraulischer Durchmesser: $d_h := 4 \cdot \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \frac{1}{S_V}$ $d_h = 56.47\ \mu m$

3. Papierbedarf

Höhe der Papiersäcke: $H := \frac{V_{Sack}}{L \cdot B}$ $H = 13.1\ cm$

Oberfläche der Säcke: $A_{Sack} := 2 \cdot (L \cdot B + L \cdot H + B \cdot H)$ $A_{Sack} = 0.741\ m^2$

Tagespapierbedarf: $A_{Papier} := N_{Sack} \cdot A_{Sack}$ $A_{Papier} = 296.6\ m^2$