

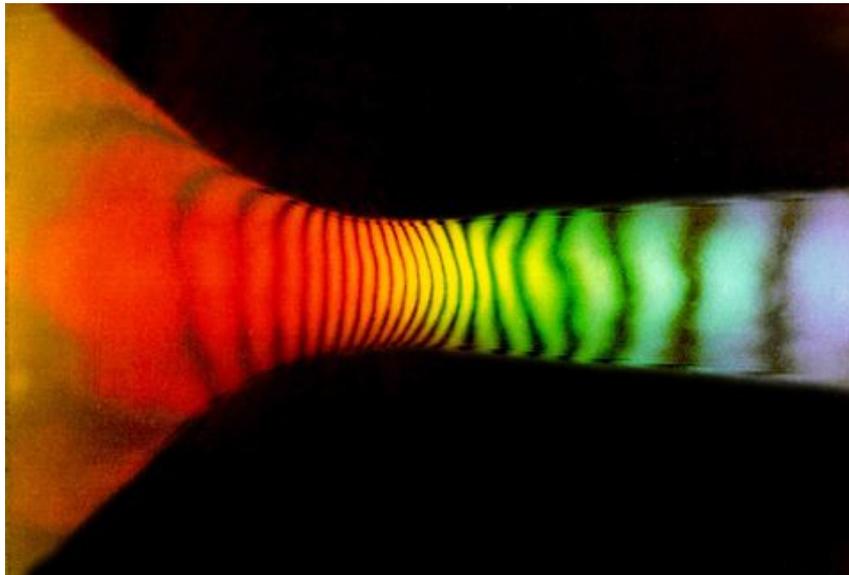
Praktikumsanleitung

---

# Lavaldüse

---

Verantwortlicher: Dr.-Ing. Veit Hildebrand



Erstellt von: Dipl.-Ing. Thomas Eipper, Christian Scheibner  
Stand: Sommersemester 2011

# Inhaltsverzeichnis

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Abbildungsverzeichnis</b>  | <b>2</b>  |
| <b>Tabellenverzeichnis</b>  | <b>3</b>  |
| <b>Symbolverzeichnis</b>  | <b>4</b>  |
| <b>1 Einleitung und Lehrziele</b>   | <b>6</b>  |
| <b>2 Grundlagen der Lavaldüse</b>   | <b>7</b>  |
| <b>3 Versuchsaufbau und Messtechnik</b>   | <b>14</b> |
| <b>4 Versuchsdurchführung</b>   | <b>16</b> |
| <b>5 Auswertung und Aufgaben</b>  | <b>17</b> |
| <b>Literaturverzeichnis</b>   | <b>20</b> |
| <b>A Anhang</b>   | <b>21</b> |
| A.1 Skizze der Düse mit Markierungen der Druckmessbohrungen. Verläufe des gemessenen Drucks entlang der Düsenachse . . . . .          | 22        |
| A.2 Tabelle für berechnete Zustandsgrößen . . . . .   | 23        |
| A.3 Skizze der Düse. Verläufe von Druck, Temperatur, Dichte und Machzahl entlang der Düsenachse für die berechnete Strömung . . . . . | 24        |

# Abbildungsverzeichnis

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 2.1 | Prinzipieller Profilverlauf einer Lavaldüse . . . . .  | 9  |
| 2.2 | Modell zur Analyse der Strömung . . . . .  | 9  |
| 2.3 | Mittels Schlierentechnik aufgenommenes Strömungsbild einer unterexpandierend arbeitenden Lavaldüse . . . . . | 11 |
| 3.1 | Prinzipieller Aufbau des HKW in Merkers . . . . .  | 14 |
| A.1 | Verläufe des gemessenen Drucks . . . . .   | 22 |
| A.2 | Verläufe der berechneten Zustandsgrößen . . . . .  | 24 |

# Tabellenverzeichnis

|     |                                     |    |
|-----|-------------------------------------|----|
| 5.1 | Radien der Querschnitte . . . . .   | 18 |
| A.1 | Berechnete Zustandsgrößen . . . . . | 23 |

# Symbolverzeichnis

## Lateinische Symbole

|           |   |
|-----------|---|
| a         | Schallgeschwindigkeit, $\frac{m}{s}$                            |
| A         | Querschnittsfläche, $m$   |
| c         | Geschwindigkeit (allgemein), $\frac{m}{s}$                      |
| $\dot{m}$ | Massenstrom, $\frac{kg}{s}$                                     |
| M         | Machzahl, <i>dimensionslos</i>                                  |
| p         | Druck, <i>bar</i>   |
| r         | Radius der Querschnittsfläche der Lavaldüse, $m$                |
| R         | Spezifische Gaskonstante, $R_{Luft} = 287 \frac{J}{kg \cdot K}$ |
| t         | Zeit, $s$   |
| T         | Temperatur, $K$   |
| V         | Volumen, $m^3$  |
| $\dot{V}$ | Volumenstrom, $\frac{m^3}{s}$                                   |
| x, y, z   | Kartesische Raumkoordinaten, $m$                                |

## Griechische Symbole

|             |   |
|-------------|---|
| $\kappa$    | Isentropenexponent, $\kappa_{Luft} = 1,4$ |
| $\vartheta$ | Temperatur, $^{\circ}C$                   |

---

$\rho$       Fluiddichte,  $\frac{kg}{m^3}$

## Indizes und hochgestellte Symbole

1      Düsen Eintritt

\*      Engster Querschnitt

2      Düsenaustritt

R      Ruhezustand

U      Umgebung

x, y, z      Komponente des Vektors in entsprechende Raumrichtung

# 1 Einleitung und Lehrziele

Der bewussten, definierten Beschleunigung oder Verzögerung von Strömungen kommt in vielen technischen Prozessen eine erhebliche Bedeutung zu. Sowohl in der Luft- und Raumfahrt als auch in vielen anderen Bereichen der Ingenieurwissenschaften stellen Düsen und Diffusoren essentielle Bauteile dar, die die Realisierung einer Vielzahl von Anwendungen ermöglichen.

Eine wesentliche Düsenart stellt dabei die Lavaldüse dar. Mit ihrer Hilfe kann aus einer Unterschall- eine Überschallströmung erzeugt werden. In der Praxis sind sie vor allem in Rakenschubdüsen, in Überschallwindkanälen oder zum Test von Messtechnik zu finden.

Ziel dieses Praktikums ist es, die Grundlagen der prinzipiellen Arbeitsweise von Lavaldüsen zu verstehen und anschließend durch den praktischen Umgang zu vertiefen. Dabei werden im 2. Kapitel zunächst die strömungsmechanischen Grundlagen sowie die mathematische Modellierung unter der Annahme verschiedener Vereinfachungen erläutert. Im Anschluss werden der Aufbau des Messversuchs und die durchzuführenden praktischen Arbeitsschritte beschrieben. Die Auswertung des Versuchs durch die Praktikumssteilnehmer erfolgt über die Anfertigung eines Protokolls, das den in Kapitel 5 dieser Anleitung aufgelisteten Inhalt haben soll. Die Lösung einer Komplexaufgabe, die einen Vergleich zwischen Theorie („berechnet“) und Praxis („im Versuch gemessen“) darstellen soll, wird ebenfalls Teil des Protokolls sein.

## 2 Grundlagen der Lavaldüse

Bauteile zur Beschleunigung einer Strömung werden **Düse**, solche zur Verzögerung einer Strömung **Diffusor** genannt.

Zur mathematischen Beschreibung der Strömung durch eine Lavaldüse und der Ermittlung der notwendigen Beschaffenheit dieser wird zunächst die **Kontinuitätsgleichung**, welche auf der Erhaltung der Masse basiert, für den kompressiblen, also dichteveränderlichen Fall betrachtet:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot c_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot c_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot c_z)}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

Dabei ist  $\rho$  die Dichte,  $t$  die Zeit und  $c_n$  die jeweilige Komponente der Geschwindigkeit des strömenden Fluids. Die Raumkoordinaten des Kontrollvolumens sind mit  $x$ ,  $y$  und  $z$  bezeichnet. Die Anwendung der kompressiblen Variante der Kontinuitätsgleichung ergibt sich aus den hohen Strömungsgeschwindigkeiten durch die Lavaldüse, in deren Folge die Dichteänderungen des strömenden Mediums nicht mehr vernachlässigbar sind. Für den stationären Fall mit dem Massendurchsatz  $m$  und konstanter Strömungsgeschwindigkeit  $c$  über den jeweiligen Querschnitt  $A$  vereinfacht sich Gleichung 2.1 zu:

$$\rho \cdot A \cdot c = \dot{m} = \text{konst.} \quad (2.2)$$

Logarithmiert und anschließend differenziert ergibt sich:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dc}{c} = 0 \quad (2.3)$$

Unter Einbeziehung der **EULER-Strömungsgleichung** (stationär, eindimensional) in der Form

$g \cdot dz + \frac{1}{\rho} \cdot dp + d\left(\frac{c^2}{2}\right) = 0$ , Vernachlässigung der Feldwirkung ( $g \cdot dz \approx 0$ ), Berücksichtigung der **Mach-Zahl**  $M$  als Verhältnis aus lokaler Geschwindigkeit  $c$  und Schallgeschwindigkeit  $a$  mit

$$M = \frac{c}{a} = \frac{c}{\sqrt{\kappa \cdot R \cdot T}} \quad (2.4)$$

und einigen Umformungen ergibt sich schließlich ein Zusammenhang zwischen der Machzahl und den Änderungen der Querschnittsflächen und Strömungsgeschwindigkeiten in der Form:

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \cdot \frac{dc}{c} \quad (2.5)$$

Bei der Analyse von Gleichung 2.5 gilt es 3 Fälle zu unterscheiden:

- $M < 1 \rightarrow$  Unterschall: Bei  $\frac{dc}{c} > 0$ , also einem positiven Geschwindigkeitsgradienten, muss  $\frac{dA}{A} < 0$  sein. Dies bedeutet, dass zur Beschleunigung der Strömung im Unterschallbereich eine Querschnittsverengung, d.h. ein konvergentes Profil notwendig ist. Die Anordnung wird somit als Düse bezeichnet. Analog ist zur Strömungsverzögerung ein divergenter Querschnittsverlauf zu gestalten; es liegt nun ein Diffusor vor.
- $M > 1 \rightarrow$  Überschall: Bei  $\frac{dc}{c} > 0$ , also einer Geschwindigkeitssteigerung, muss  $\frac{dA}{A} > 0$  sein. Es ist somit zur Beschleunigung einer Überschallströmung eine Querschnittserweiterung, d.h. ein divergents Profil erforderlich (Düse). Wieder analog ist zur Strömungsverzögerung im Überschallbereich ein konvergenter, sich öffnender Querschnitt notwendig (Diffusor).
- $M = 1 \rightarrow$  Schallgeschwindigkeit: Für diesen Grenzfall wird  $\frac{dA}{A} = 0$ , es muss also bei einer Strömungsgeschwindigkeit, die exakt der Schallgeschwindigkeit entspricht, ein Querschnittsflächenminimum vorliegen.

Mit diesen Erkenntnissen lässt sich das zur Erzeugung einer Überschall- aus einer Unterschallströmung notwendige Düsenprofil ableiten: es muss einen **konvergent-divergenten** Querschnittsverlauf aufweisen (siehe Abb. 2.1). Alle Düsen mit diesem Profilverlauf werden als Lavaldüsen bezeichnet. Das Arbeitsprinzip ist dabei entsprechend der Beziehung 2.5 stets gleich: Das Fluid tritt mit Unterschallgeschwindigkeit in die Düse ein und wird durch das konvergente

Düsenprofil beschleunigt. Im engsten Querschnitt erreicht die Strömung schließlich Schallgeschwindigkeit. Die Strömung wird durch den divergenten Verlauf weiter beschleunigt und tritt schließlich mit Überschallgeschwindigkeit am Düsenende aus.

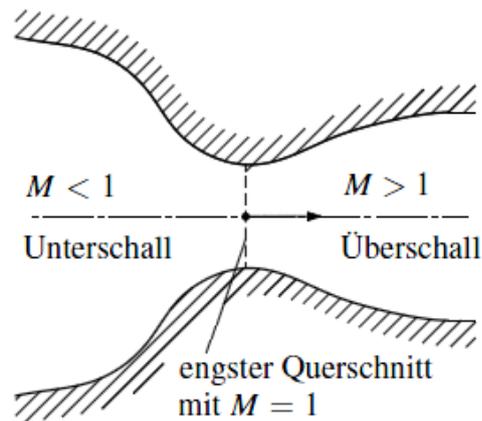


Abbildung 2.1: Prinzipieller Profilverlauf einer Lavaldüse

Zur Berechnung der Strömung durch die Düse und der Charakterisierung verschiedener Betriebszustände geht man von folgendem Modell aus: Ein in einem großen Reservoir befindliches Fluid mit der Geschwindigkeit  $c = 0$  hat die thermodynamischen Eigenschaften  $T_R$  (Ruhetemperatur),  $p_R$  (Ruhedruck) und  $\rho_R$  (Ruhedichte). Das Reservoir ist mit einer Lavaldüse verbunden, die sich in einem Raum mit dem Umgebungsdruck  $p_U$  befindet. Eine Strömung des Fluids durch die Düse wird nun durch eine Druckdifferenz  $p_R - p_U$  ausgelöst. Für eine Durchströmung muss der Druck im Reservoir also größer als der Umgebungsdruck sein.

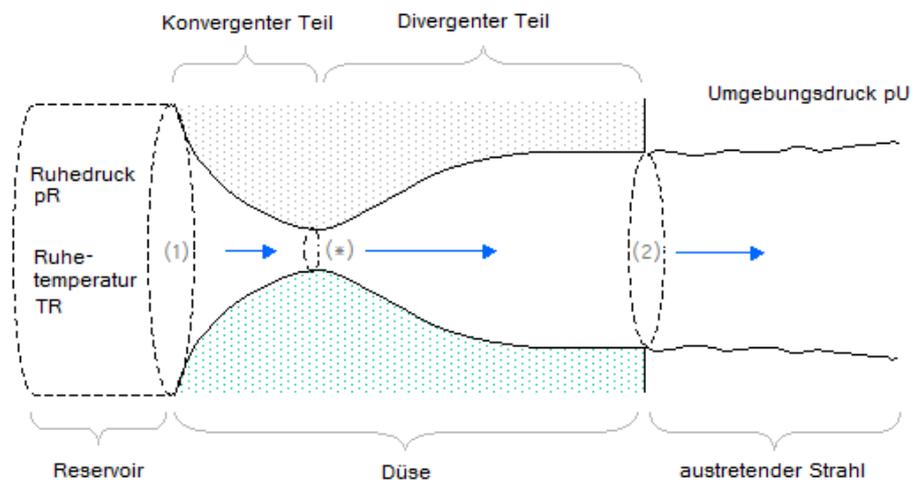


Abbildung 2.2: Modell zur Analyse der Strömung

In Abhängigkeit des vorliegenden Druckverhältnisses  $\frac{p_R}{p_U}$  bzw.  $\frac{p_2}{p_U}$  können 3 wesentliche Betriebszustände einer Lavaldüse vorliegen: **überexpandierend**, **angepasst** und **unterexpandierend**. Es lassen sich bei gegebener Düsenkontur folgende idealisierte, d.h. theoretische Situationen charakterisieren:

1.  $\frac{p_R}{p_U}$  **zu klein** → **Unterschall in gesamter Düse**

Entlang der Düsenachse liegt stets eine Unterschallströmung vor, wenn  $p_U$  zu groß ist und somit der Strömung zu stark entgegenwirkt, als dass sie Überschallgeschwindigkeit erreichen könnte. In diesem Fall wird die Strömung im konvergenten Bereich beschleunigt, erlangt im engsten Querschnitt  $A^*$  aber nicht  $M^* = 1$ . Folglich wirkt der divergente Teil gemäß Gleichung 2.5 als Diffusor und verzögert die Strömung wieder.

2. **Sperrender Zustand**

Bei Vergrößerung des Verhältnisses  $\frac{p_R}{p_U}$  wird irgendwann der Grenzfall erreicht, bei dem im engsten Querschnitt gerade  $M^* = 1$  herrscht (die Düse „sperrt“), die Strömung jedoch durch den divergenten Düsenteil weiterhin verzögert wird. Es stellt sich  $M_2 < 1$  ein.

3. **Auftreten von senkrechtem Verdichtungsstoß**

Bei weiterer Erhöhung von  $\frac{p_R}{p_U}$  kann die Strömung nach dem engsten Querschnitt Überschallgeschwindigkeit erreichen und die Expansion des Fluids setzt sich im divergenten Teil zunächst fort. Bald tritt jedoch durch den noch zu hohen Gegendruck ein senkrechter Verdichtungsstoß auf, hinter dem schließlich erneut Unterschall herrscht. Wird  $\frac{p_R}{p_U}$  nun weiter erhöht, wandert der Stoß in Richtung Düsenaustritt. In der Realität treten an Stelle eines senkrechten Verdichtungsstoßes auf Grund der Wandreibung oft mehrere schräge Verdichtungsstöße auf (siehe Abb. 2.3).

4. **Schräge Verdichtungsstöße außerhalb der Düse**

Bei weiterer Erhöhung von  $\frac{p_R}{p_U}$  reicht irgendwann der Gegendruck  $p_U$  nicht mehr aus, um einen senkrechten Verdichtungsstoß auszulösen. Dabei treten, meist ausgelöst durch den Düsenrand, schräge Verdichtungsstöße außerhalb der Düse auf. Diese Vorgänge im Freistrahle haben jedoch keine Auswirkungen auf den Verlauf der Strömung innerhalb der Kontur.

Tritt aus einer Düse eine Überschallströmung aus, wobei der Austrittsdruck  $p_2$  kleiner als der Umgebungsdruck  $p_U$  ist, so spricht man von einer **überexpandierend** arbeitenden Düse, da das Fluid durch die Düse zu weit, d. h. auf einen zu niedrigen Druck  $p_2$ , entspannt wird. Dieser Zustand ist dadurch gekennzeichnet, dass sich der austretende Freistrahл zunächst auf Grund des höheren Umgebungsdruckes einschnürt. Es folgt eine periodischen Folge von Strahlausweitungen und -einschnürungen.

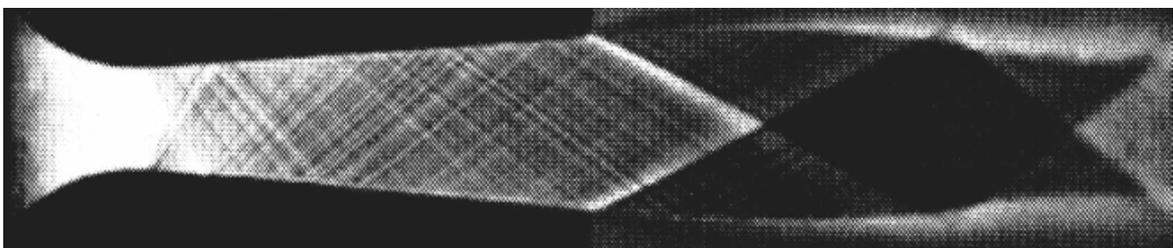
5.  $p_2 = p_U \rightarrow$  **Angepasste Düse**

Erreicht  $\frac{p_R}{p_U}$  schließlich einen Wert, sodass Austritts- und Umgebungsdruck gleich groß werden, arbeitet die Düse **angepasst**. Dieser Zustand entspricht dem klassischen Auslegungsfall einer Lavaldüse. Das Fluid tritt mit  $M_1 < 1$  in die Düse ein, im engsten Querschnitt erreicht es  $M^* = 1$  und es verlässt die Düse schließlich ohne auftretenden Verdichtungsstoß als überschallschnelle Parallelströmung mit  $M_2 > 1$ .

6. **Austrittsdruck  $p_2$  größer als Umgebungsdruck  $p_U$  ( $p_2 > p_U$ )**

Bei weiterer Erhöhung der Druckverhältnisse, sodass der Austrittsdruck  $p_2$  schließlich größer als der Umgebungsdruck  $p_U$  ist, kommt es sofort nach dem Düsenaustritt zu einer plötzlichen, un stetigen Nachexpansion des Fluids. Der austretende Strahl weitet sich also zunächst auf. Auch hier folgen daraufhin wieder periodischen Abschnitte von Strahleinschnürungen und -ausweitungen (siehe Abb 2.3).

Tritt aus einer Düse eine Überschallströmung aus, wobei der Austrittsdruck  $p_2$  größer als der Umgebungsdruck  $p_U$  ist, so spricht man von einer **unterexpandierend** arbeitenden Düse.



**Abbildung 2.3:** Mittels Schlierentechnik aufgenommenes Strömungsbild einer unterexpandierend arbeitenden Lavaldüse

Im Falle eines Raketentriebwerkes bedeuten sowohl über- als auch unterexpandierend arbeitende Düsen Verluste, da nur eine normal zur Düsenaustrittsfläche strömende Geschwindigkeitskomponente zur Schuberzeugung beiträgt.

Zur Berechnung der Strömung durch eine Lavaldüse gilt es die Größen Druck, Temperatur, Dichte, Machzahl und Fläche des Düsenquerschnittes  $A$  an den 3 charakteristischen Stellen Eintritt (1), engster Querschnitt (\*) und Austritt (2) zu betrachten. Die einfachste Herangehensweise mit der Möglichkeit einer analytischen Lösung stellt die so genannte **Stromfadentheorie**, welche von einem **stationären, eindimensionalen, kompressiblen** Strömungszustand ausgeht, dar.

Unter Annahme eines **isentropen** (und damit reibungsfreien) Vorganges und der Gültigkeit der idealen Gasgleichung

$$p = \rho \cdot R \cdot T \quad (2.6)$$

lässt sich nach einigen grundlegenden Betrachtungen und langer Rechnung aus der **Euler-Gleichung** folgender Zusammenhang finden:

$$\frac{p}{p_R} = \left( \frac{T}{T_R} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left( \frac{\rho}{\rho_R} \right)^{\kappa} \quad (2.7)$$

Entsprechend des eingeführten Modells (siehe S. 9) bezeichnen  $T$ ,  $p$  und  $\rho$  die jeweiligen thermodynamischen Zustände bzw.  $T_R$ ,  $p_R$  und  $\rho_R$  die zugehörigen Ruhegrößen, d.h. Zustände, die das Fluid bei Geschwindigkeit  $c = 0$  hätte. Das im Exponent auftauchende  $\kappa$  wird als **Isentropenexponent** bezeichnet. Aufgelöst nach  $\frac{T}{T_R}$  bzw.  $\frac{\rho}{\rho_R}$  ergeben sich:

$$\frac{T}{T_R} = \left( \frac{p}{p_R} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left( \frac{\rho}{\rho_R} \right)^{\kappa-1} \quad (2.8)$$

$$\frac{\rho}{\rho_R} = \left( \frac{T}{T_R} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} = \left( \frac{p}{p_R} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \quad (2.9)$$

Mit der Bernoulli-Gleichung in der Form

$$c^2 = \frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{p_R}{\rho_R} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_R} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] \quad (2.10)$$

kann schließlich eine Beziehung zwischen der örtlichen Machzahl  $M$  und den Verhältnissen  $\frac{T_R}{T}$ ,  $\frac{p_R}{p}$  und  $\frac{\rho_R}{\rho}$  gefunden werden:

$$M^2 = \frac{2}{\kappa - 1} \cdot \left( \frac{T_R}{T} - 1 \right) = \frac{2}{\kappa - 1} \cdot \left[ \left( \frac{p_R}{p} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] = \frac{2}{\kappa - 1} \cdot \left[ \left( \frac{\rho_R}{\rho} \right)^{\kappa-1} - 1 \right] \quad (2.11)$$

Um einen Zusammenhang zwischen der Querschnittsfläche  $A$  und der zugehörigen Machzahl  $M$  abzuleiten, wird erneut die Kontinuitätsgleichung nach (2.2) zu Hilfe genommen:

$$\frac{A^*}{A} = \frac{M}{\left[ 1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \cdot (M^2 - 1) \right]^{\frac{\kappa+1}{2 \cdot (\kappa-1)}}} \quad (2.12)$$

Nach Gleichung 2.12 ist also die Machzahl  $M$  in jedem beliebigen Querschnitt der Düse allein vom Verhältnis der Flächen des zugehörigen Querschnittes  $A$  und des engsten Querschnittes  $A^*$  abhängig.

## 3 Versuchsaufbau und Messtechnik

Der Versuch zum Praktikum „Lavaldüse“ wird im Hochgeschwindigkeitswindkanal (HWK), einer Außenstelle der TU Dresden, durchgeführt. Er befindet sich in einem Bergwerk der „Kali und Salz GmbH“ in Merkers/Rhön, Thüringen. Zur Erzeugung der Strömung in den Windkanälen und Messstrecken der Anlage werden ehemalige Abbaustrecken der Grube, die als Druckspeicher dienen, genutzt. Entsprechend Abbildung 3.1 gibt es einen Unter- sowie einen Überdruckspeicher. In den weiß hinterlegten Gebieten herrscht nahezu Atmosphärendruck von 1 bar.

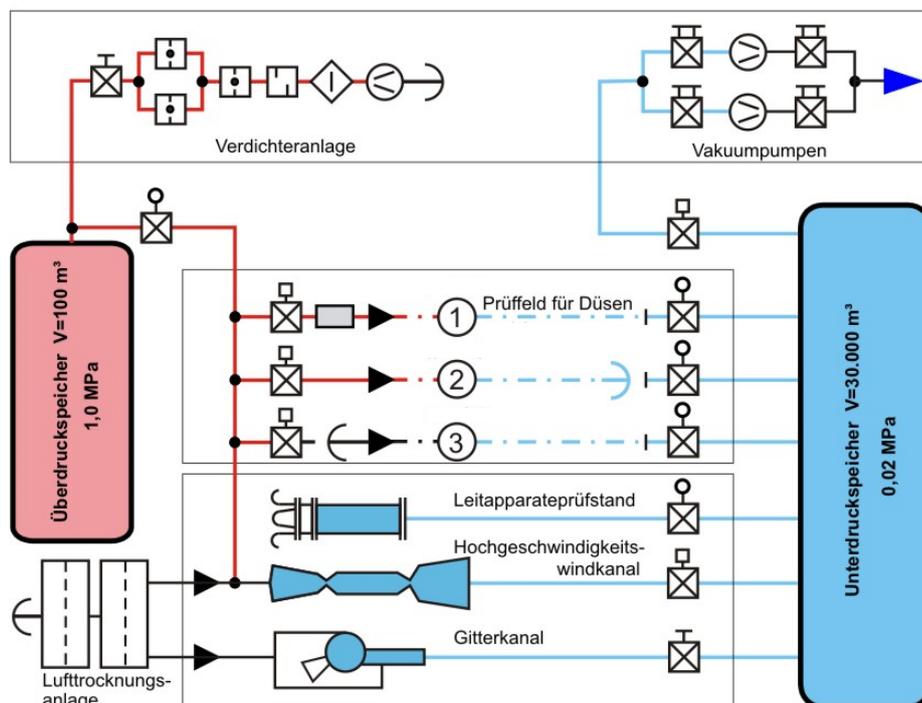


Abbildung 3.1: Prinzipieller Aufbau des HKW in Merkers

Es sind entsprechend der Konfiguration die Betriebsvarianten

- Saugbetrieb (Atmosphärendruck gegen Unterdruck),
- Blasbetrieb (Überdruck gegen Atmosphäre) und
- Überdruck gegen Unterdruck

möglich. Der Versuch zum Praktikum wird im „Prüffeld für Düsen“ mit der Betriebsvariante Überdruck gegen Atmosphäre stattfinden.

Die durch ein Rohr mit dem Überdruckspeicher verbundene Lavaldüse weist 9 Bohrungen entsprechend Abbildung A.1 auf. In die Bohrungen werden Druckschläuche integriert (jeweils einer pro Bohrung). Diese können schließlich mit den verschiedenen Druckmessgeräten

- Wasser-Mehrfach-Manometer,
- Quecksilber-Mehrfach-Manometer oder
- dem Druckmesser „Scanni Valve“ (dabei wird zusätzlich ein Mess-PC benötigt)

verbunden werden. Auf diese Weise soll der Druckverlauf entlang der Düsenachse bei verschiedenen Betriebszuständen (siehe Kapitel 2) gemessen werden. Diese Zustände können durch eine Regulierung des Druckes, mit dem die Luft in die Düse eintritt, über ein zwischen dem Druckspeicher und der Düse befindliches Ventil entsprechend eingestellt werden.

## 4 Versuchsdurchführung

Im Rahmen des Praktikumversuches sind folgende Arbeitsschritte durchzuführen:

- Aufbau des Versuchstandes (Integration der Lavaldüse, Verbinden der Druckschläuche mit den entsprechend gewählten Druckmessgeräten),
- Aufnahmen der Druckverteilungen entlang der Düsenachse für verschiedene Druckverhältnisse  $\frac{p_R}{p_U}$  und damit Strömungssituationen durch die Düse ( $p_U = 1 \text{ bar}$ ):
  1. Unterschall in gesamter Düse
  2. gerade sperrender Zustand
  3. Verdichtungsstoß in divergenter Kontur
  4. überexpandierende, angepasste bzw. unterexpandierend arbeitende Düse

In den Fällen 1, 3 und 4 ist die Ermittlung mehrerer Kurven sinnvoll.

**Vor dem Versuch sind von jeder Praktikumsgruppe Tabellen vorzubereiten, in welche die gemessenen Werte eingetragen werden können.**

Da der Ruhedruck  $p_R$  in so kurzer Zeit, wie es für den Versuch erforderlich ist, nicht variiert werden kann, erfolgt eine direkte Einflussnahme auf den Druck  $p_1$  am Düseneintritt durch das Öffnen bzw. Schließen des Ventils zwischen dem Druckspeicher und der Düse.

## 5 Auswertung und Aufgaben

Zu diesem Praktikum ist von jeder teilnehmenden Gruppe ein Protokoll mit dem nachfolgenden Inhalt anzufertigen. Zur Auswertung des im Praktikum durchgeführten Versuches soll das Protokoll neben den unter a) - g) gelisteten Aufgaben Standardangaben, wie eine kurze Beschreibung des Versuchsaufbaus, der Versuchsdurchführung und eine Fehlerdiskussion enthalten.

### Teil 1: Auswertung des Versuches

- a) Stellen Sie die gemessenen Druckverläufe quantitativ entlang der Düsenachse für alle gemessenen Strömungssituationen grafisch dar! Begründen Sie den jeweiligen Verlauf! Eine Skizze der Lavaldüse mit Markierungen der Druckmessbohrungen ist als Abbildung im Anhang unter A.1 zu finden. Die Darstellung der Druckkurven sollte wie in A.1 angedeutet oder in ähnlicher Weise erfolgen.
- b) Für niedrige Druckverhältnisse  $\frac{p_R}{p_U}$  liegt entsprechend Kapitel 2 über den gesamten Achsenverlauf Unterschall vor. Strömungen mit Geschwindigkeiten, die klein gegenüber der Schallgeschwindigkeit sind, lassen sich auch mit inkompressiblen, also nicht dichteveränderlichen strömungsmechanischen Gleichungen beschreiben.

Bestimmen Sie für die Situation einer gemessenen Unterschallströmung in der gesamten Düse (siehe Punkt 1 in Kapitel 4) mittels den nachfolgenden inkompressiblen, stationären Varianten von Bernoulli- sowie Kontinuitätsgleichung mit Hilfe des Druckabfalles zwischen (1) und (\*) die Eintrittsgeschwindigkeit  $c_1$  und den Luftvolumenstrom  $\dot{V}$ !

$$p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 \quad (5.1)$$

$$\dot{V} = A_1 \cdot c_1 = A_2 \cdot c_2 = \text{konst.} \quad (5.2)$$

Die Luftdichte kann mit  $\rho = 1,1253 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \text{konst.}$  angenommen werden. Verwenden Sie für die benötigten Daten der Düsengeometrie die Skizze im Anhang! Vergleichen Sie den ermittelten Volumenstrom mit dem, der gemäß DIN EN ISO 5167-1 Seiten 9 und 10 bzw. DIN EN ISO 5167-4 Seiten 6, 8, 12 und 13 (siehe externe pdf-Dateien) berechnet wird. Welche Gründe könnte es für unterschiedliche Werte geben?

## Teil 2: Berechnung der Strömung durch die verwendete Lavaldüse

**Hinweis:** Die nachfolgende Aufgabe ist mit Hilfe der in Kapitel 2 angegebenen Zusammenhänge zu lösen. Die Bearbeitung kann handschriftlich erfolgen.

In einer mit Luft (Isentropenexponent  $\kappa = 1,4$ , spezifische Gaskonstante  $R = 287 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ ) gefüllten Druckspeicherkammer wird ein Ruhedruck  $p_R = 3,6544 \text{ bar}$  erzeugt. Die Ruhetemperatur  $\vartheta_R$  dieser Luft beträgt  $38,18^\circ\text{C}$ . Die Kammer ist über eine Rohrleitung mit einer rotationssymmetrischen Lavaldüse verbunden, welche sie in einem Raum mit dem Umgebungsdruck  $p_U = 1 \text{ bar}$  befindet. Die Düse weist die in Tabelle 5.1 aufgelisteten Radien der Querschnittsflächen  $A_1$ ,  $A^*$  und  $A_2$  auf. Im engsten Querschnitt herrscht exakt Schallgeschwindigkeit. Es treten keine Verdichtungsstöße auf, die Luft verlässt die Düse mit Überschallgeschwindigkeit ( $M_2 = 1,485$ ).

| $r_1$ | $r^*$ | $r_2$ |
|-------|-------|-------|
| 50 mm | 25 mm | 27 mm |

**Tabelle 5.1:** Radien der Querschnitte

- c) Berechnen Sie die Ruhedichte  $\rho_R$  der Luft in der Druckspeicherkammer! Welche Masse hat die Luft bei einem Kammervolumen von  $V = \dots \text{m}^3$ ? -> Nachgucken wie bei Merkers ist
- d) Die Geschwindigkeit  $c_1$  beim Eintritt in die Düse beträgt  $51,72 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Welcher Machzahl  $M_1$  entspricht das bei einer Gastemperatur am Düseneinlass von  $\vartheta_1 = 37^\circ\text{C}$ ? Wie hoch sind Temperatur  $T^*$ , Geschwindigkeit  $c^*$ , Druck  $p^*$  und Dichte  $\rho^*$  im engsten Querschnitt?

- e) Berechnen Sie  $T_2$ ,  $c_2$ ,  $p_2$  und  $\rho_2$  am Austritt! Fassen Sie alle ermittelten Größen für den Ruhezustand in der Druckkammer sowie die 3 charakteristischen Querschnitte (1), (\*) und (2) entsprechend Tabelle A.1 zusammen!
- f) Welchem Betriebszustand entspricht diese Konfiguration? Begründen Sie Ihre Aussage! Skizzieren Sie mit Hilfe der jeweils 3 gefundenen Stützstellen die **qualitativen** Verläufe von Druck, Temperatur, Dichte und Machzahl entlang der Düsenachse in einem Diagramm! Die Darstellung der Verläufe sollte wie in A.2 angedeutet oder in ähnlicher Weise erfolgen. Bitte achten Sie auf den Umgebungsdruck  $p_U = 1 \text{ bar}$  als Referenz. Ein zwischen Druckkammer und Düseneintritt befindliches Ventil wird teilweise geschlossen. In Folge des Druckabfalls in der Düse kommt es kurz nach dem engsten Querschnitt bei  $x = 150 \text{ mm}$  zu einem senkrechten Verdichtungsstoß. Stellen Sie diesen Zustand (ebenfalls in Abb. A.1) **qualitativ** dar. Kennzeichnen Sie die neuen Verläufe mit  $\hat{p}$ ,  $\hat{T}$ ,  $\hat{\rho}$  und  $\hat{M}$ !
- g) Vergleichen Sie die in dieser Aufgabe berechneten Werte (Strömungssituation beachten!) für die Drücke an den Stellen (1), (\*) und (2) mit den im Versuch gemessenen und unter a) dargestellten! Wie könnten eventuelle Unterschiede zu erklären sein?

# Literaturverzeichnis

- [1] ALBRING, WERNER: *Angewandte Strömungslehre*. Akademie-Verlag Berlin, 1978.
- [2] GERSTEN, KLAUS: *Einführung in die Strömungsmechanik*. Vieweg und Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 1992.
- [3] HELLER, WINFRIED: *Gasdynamik: Grundlagen kompressibler Strömungen*. Technische Universität Dresden, 2008.
- [4] RÜDIGER, FRANK: *Gasdynamik*. Technische Universität Dresden, 2010.
- [5] SETTLES, GARRY: *High-Speed Flow Through a Laval-Nozzle*. Penn State Gas Dynamics Lab, 2000.
- [6] SIEKMANN, HELMUT: *Strömungslehre für den Maschinenbau: Technik und Beispiele*. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 2009.
- [7] SIGLOCH, HERBERT: *Technische Fluidmechanik*. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 2008.
- [8] STRAUSS, KLAUS: *Strömungsmechanik - Eine Einführung für Verfahreningenieure*. VCH Verlagsgesellschaft mbH, Weinheim, 1991.

# A Anhang

## A.1 Skizze der Düse mit Markierungen der Druckmessbohrungen. Verläufe des gemessenen Drucks entlang der Düsenachse

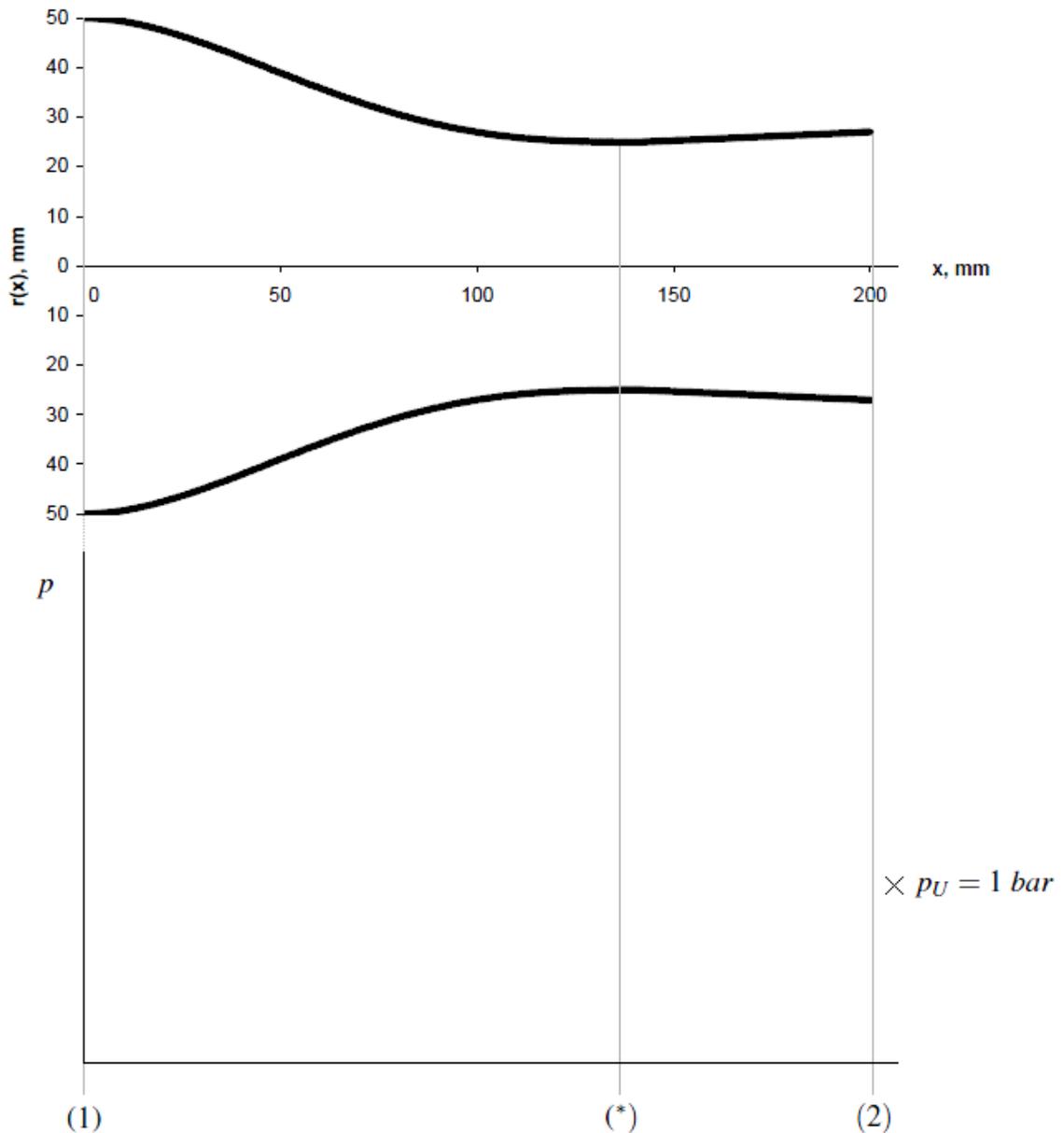


Abbildung A.1: Verläufe des gemessenen Drucks

## A.2 Tabelle für berechnete Zustandsgrößen

|  | <i>Druckspeicher</i> | $A_1$ | $A^*$ | $A_2$ |
|--|----------------------|-------|-------|-------|
| <i>Druck <math>p</math>, bar</i>                                   | 3,6544               |       |       |       |
| <i>Temperatur <math>T</math>, K</i>                                |                      |       |       |       |
| <i>Dichte <math>\rho</math>, <math>\frac{kg}{m^3}</math></i>       |                      |       |       |       |
| <i>Gasgeschwindigkeit <math>c</math>, <math>\frac{m}{s}</math></i> | —                    | 51,72 |       |       |
| <i>Machzahl <math>M</math></i>                                     | —                    |       |       | 1,485 |

**Tabelle A.1:** Berechnete Zustandsgrößen

### A.3 Skizze der Düse. Verläufe von Druck, Temperatur, Dichte und Machzahl entlang der Düsenachse für die berechnete Strömung

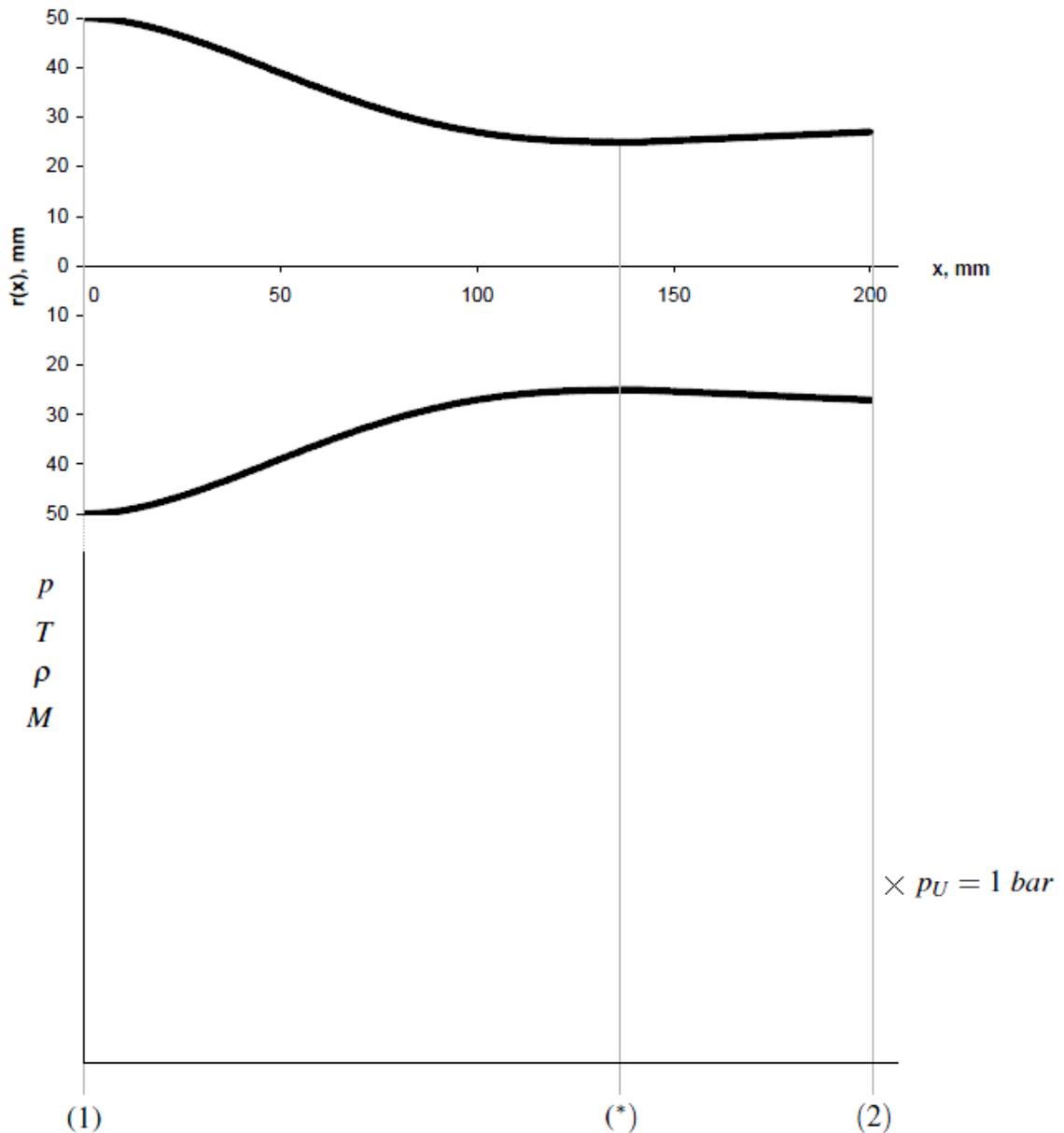


Abbildung A.2: Verläufe der berechneten Zustandsgrößen